

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ: VIII. СТРУКТУРА УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Исследуется структура энергетических уровней периодической системы, состояния которой (химические элементы) представлены в виде узлов весовой диаграммы групповой алгебры группы вращений восьмимерного псевдоэвклидова пространства нейтральной сигнатуры.

Ключевые слова: таблица Менделеева, правило Маделунга, весовая диаграмма, вектор Лапласа–Рунге–Ленца, антивещество.

Введение

Как известно, схема Aufbau Бора [1] является исторически первой попыткой дать теоретическое объяснение строения периодической системы химических элементов. В основе этой схемы лежит модель атома Бора–Зоммерфельда, согласно которой атом имеет внутреннюю структуру, подобную солнечной системе в миниатюре (планетарная модель Резерфорда). Своеобразный симбиоз классической задачи Кеплера и квантовых постулатов¹ позволил Бору вывести формулу Ридберга и рассчитать энергетический спектр атома водорода (основные спектральные серии Лаймана, Бальмера и Пашена). Однако кроме спектра водорода² модель оказалась неспособной описать энергетические уровни многоэлектронных атомов (уже начиная с атома гелия).

Модель Бора считает, что электроны имеют известные орбиты и местоположения – две вещи, которые невозможно измерить одновременно согласно принципу неопределенности Гейзенберга. Электрону, как квантовому объекту, не присуще понятие классической траектории. Гейзенберг пишет: «... представление об электронной орбите, связанное с идеей дискретного стационарного состояния, было по ходу дела практически отброшено. Понятие дискретных стационарных состояний, однако, осталось жить. Понятие это было необходимо. Оно имело свою основу в

¹Что приводит к логической противоречивости, поскольку модель не является ни классической, ни квантовой: в системе двух уравнений, лежащих в её основе, одно – уравнение движения электрона – классическое, другое – уравнение квантования орбит – квантовое.

²Объяснение существования тонкой и сверхтонкой структуры спектральных линий водорода выходит за рамки описания модели Бора, как и описание эффекта Зеемана и аномальных ультрафиолетовых серий Пикеринга–Фаулера.

данных наблюдений. Наоборот, электронную орбиту не удалось согласовать с наблюдениями, поэтому от неё отказались, и от неё остались только матрицы для координат» [2, с. 97]. Дискретные стационарные состояния, соответствующие собственным значениям оператора энергии, – вот, что осталось от электронных орбит планетарной модели. Однако понятие электронной орбиты оказалось крайне живучим, трансформируясь в понятие атомной орбитали, т. е. в представление о том, что электрон в атоме имеет вид некоего электронного облака, различные формы которого определяются в зависимости от квантовых чисел n , l и m . Здесь следует отметить важный момент: все атомные орбитали описываются тремя квантовыми числами n , l и m , четвёртое квантовое число s (спин) в определении атомных орбиталей не участвует. Что касается реального существования атомных орбиталей, то говорить об их реальном существовании нет смысла. Это математическая абстракция, вопрос принципиально закрыт со времён Гейзенберга³.

Структура периодической системы, базирующейся на модели Бора (схеме Aufbau), исходит из того, что расположение элементов в системе при возрастании их атомных номеров однозначно определяется индивидуальными особенностями электронного строения атомов, описанного в рамках одноэлектронного приближения (метод Хартри), и непосредственно отражает энергетическую последовательность атомных орбиталей s -, p -, d -, f -оболочек, заселяющихся электронами при увеличении их суммарного числа по мере возрастания заряда ядра атома в соответствии с принципом минимума энергии. Однако это возможно лишь в самом простом варианте приближения Хартри, но уже в варианте приближения Хартри-Фока полная энергия атома не равна сумме орбитальных энергий, и электронная конфигурация атома определяется минимумом его полной энергии. Модель Бора не объясняет периодичность, а только лишь аппроксимирует её в рамках одноэлектронного приближения Хартри. Более того, Бор выводил электронные конфигурации не из квантовой теории, а исходя из известных химических и спектроскопических свойств элементов.

Нетрудно видеть, что в схеме Aufbau реализуется классический редукционистский принцип, согласно которому *целое* определяется *частями*, т. е. целое, понимаемое как *агрегат*, является производной от своих частей. *Холистической антитезой* к схеме Aufbau является модель Румера–Фета–Барута [7, 8], характерной чертой этой модели является представление периодической системы элементов как *единой квантовой системы*, состояния которой (химические элементы) соединяются друг с другом под действием группы симметрии. При этом под группой симметрии, как правило, понимаются тензорные расширения конформной группы: $G_F = SO(4, 2) \otimes SU(2) \otimes SU(2)'$ (группа Фета), $G_O = O(4, 2) \otimes SU(2)_S \otimes SU(2)_T$ (группа Островского). Групповой подход, в целом, представляет наиболее подходящую математическую структуру для описания явления периодичности, т. е. повторяемости (цикличности), что, как известно, есть главная характерная черта системы химических элементов.

Настоящая статья является продолжением серии работ [9–12], в которых реша-

³Однако в 1999 г. появляется статья [3] в престижном журнале «Nature», в которой говорилось о якобы экспериментально наблюдаемых атомных орбиталях. Возникла полемика [4, 5], в результате которой выяснилось, что авторы «открытия» на самом деле видели электронную плотность, а не атомные орбитали (более подробно см. [6]).

ется задача построения периодической системы химических элементов в рамках весовой диаграммы алгебры Ли четвёртого ранга группы вращений $SO(4, 4)$ восьми-мерного псевдоэвклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$ нейтральной сигнатуры. Исторически сложилось так, что графическая визуализация периодического закона имеет очень важное значение. Помимо первоначального 2-мерного табличного представления (таблицы Менделеева и Мейера) существует множество других различных форм: спиральные, винтовые и пирамидальные модели периодической системы, а также множество экзотических форм (более подробно см. [13–15]). Главной особенностью этих моделей является построение системы химических элементов в зависимости от возрастания атомного веса. Однако квантовая механика привела к пониманию, что главной структурной характеристикой периодического закона является не линейное возрастание атомного веса, а структура, определяемая порядком квантовых чисел. Polygonfläche Г. Генцеля [16] есть исторически первая модель такого рода, где структура периодической системы определяется порядком квантовых чисел, образующих системы концентрических многоугольников на плоскости. В. Финке в статье [17] представляет Polygonfläche Генцеля в трёхмерном пространстве, связав её с нумерацией Маделунга. С другой стороны, в подходе Румера–Фета–Барута структура «левосторонней» таблицы Жанэ связывается с квантовыми числами конформной группы $SO(4, 2)$ и её тензорного расширения G_F [7, 18], см. также [19–21]. Как известно, таблица Жанэ есть двумерное графическое представление правила Маделунга. Таким образом, посредством нумерации Маделунга имеется соответствие между моделью Генцеля–Финке и теоретико-групповым подходом Румера–Фета–Барута. Однако общим недостатком Polygonfläche Генцеля и трёхмерной системы Финке является искусственное представление четвёртого квантового числа s (спин) в виде двух точек на трансверсальных. В свою очередь, в теоретико-групповом подходе первые три квантовых числа n, l, m соответствуют собственным значениям генераторов Картана, образующих максимальную абелеву подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$ конформной группы. Алгебра $\mathfrak{so}(4, 2)$ имеет третий ранг. Чтобы включить четвёртое квантовое число s на равных основаниях с n, l, m , т. е. как собственное значение генератора Картана, требуется переход к алгебре Ли четвёртого ранга. В [11] показано, что такой алгеброй является $\mathfrak{so}(4, 4)$ – алгебра Ли группы $SO(4, 4)$. Соответствующий генератор спина L_{78} коммутирует со всеми генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, что приводит расщеплению («двуделению») базиса Картана–Вейля алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$. Как следствие, четырёхмерная весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ может быть представлена двумя трёхмерными проекциями, каждая из которых изоморфна весовой диаграмме подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ [11, 12]. Следует отметить, что группа $SO(4, 4)$ обладает более высокой симметрией, чем тензорные расширения G_F и G_O : алгебра Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ содержит 28 независимых генераторов, в то время как алгебра Ли $\mathfrak{so}(4, 2) \otimes \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2)'$ групп G_F и G_O имеет 21 независимый генератор. Главным недостатком схемы Островского–Фета теоретико-группового описания удвоения периодов является искусственный характер введения пятого квантового числа, которое не имеет реального аналога, поскольку все состояния (элементы) периодической системы описываются четвёркой квантовых чисел (n, l, m, s) . Более того, введение пятого квантового числа s' приводит к изменению правила Маделунга (правило Фета [18]). В [12] показано, что четвёртый генератор Картана L_{78} (генера-

тор спина) в силу более высокой симметрии группы $SO(4, 4)$ объединяет («абсорбирует») функции генераторов Картана τ_3 и τ'_3 схемы Островского-Фета, что позволяет избежать введения дополнительного (нефизического) квантового числа s' . В п. 2 настоящей статьи две трёхмерные проекции весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ объединяются в двойную $SO(4, 2)$ -башню, каждый узел которой (конечномерное представление группы $SO(4, 2)$) согласно нумерации Маделунга ассоциируется с соответствующим элементом периодической системы. Развёртка двойной $SO(4, 2)$ -башни на таблицу Жанэ и соответствие с моделью Румера-Фета-Барута устанавливается через базис Маделунга. Показывается, что основные энергетические уровни (этажи $SO(4, 2)$ -башни), определяемые собственными значениями радиального генератора $\mathbf{L}_{56}$, имеют структуру (j, j) -представлений Фока подгруппы $SO(4)$, где j – целое число. В п. 3 показано, что антивещество (антитаблица Менделеева, состоящая из антиэлементов: антиводород, антигелий, антилитий, ...) естественным образом включается в общую теоретико-групповую схему описания периодической системы.

1. Структура уровней

Геометрия периодической системы определяется порядковой структурой квантовых чисел. Согласно теоретико-групповому описанию периодической системы [11] первые три квантовых числа n , l и m соответствуют собственным числам ν , λ и μ_λ генераторов $\mathbf{L}_{56}$, $\mathbf{L}_{12}$ и $\mathbf{L}_{34}$, образующих подалгебру Картана $\mathfrak{K}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$ конформной группы $SO(4, 2)$. $\mathfrak{so}(4, 2)$ есть алгебра Ли третьего ранга, поэтому все корневые и весовые диаграммы этой алгебры являются трёхмерными системами. Для адекватного описания спина в рамках теоретико-групповой схемы требуется переход к алгебре Ли четвёртого ранга. Одной из таких алгебр является $\mathfrak{so}(4, 4)$ – алгебра Ли группы вращений $SO(4, 4)$ восьмимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$ [11]. В этом случае подалгебра Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$ содержит четыре генератора $\mathbf{L}_{56}$, $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{34}$ и $\mathbf{L}_{78}$. Четвёртый генератор $\mathbf{L}_{78}$, понимаемый как генератор спина, коммутирует со всеми 15-ю генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. Как следствие, базис Картана–Вейля для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$

$$\{\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_-, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_-\}$$

расщепляется на два структурно идентичных базиса

$$\{{}^1\mathbf{K}_3, {}^1\mathbf{J}_3, {}^1\mathbf{T}_0, {}^1\mathbf{S}_0, {}^1\mathbf{P}_0, {}^1\mathbf{Q}_0, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_-\}, \quad (1)$$

$$\{{}^2\mathbf{K}_3, {}^2\mathbf{J}_3, {}^2\mathbf{T}_0, {}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{P}_0, {}^2\mathbf{Q}_0, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_-\}, \quad (2)$$

каждый из которых приводит к весовой диаграмме подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. На рис. 1

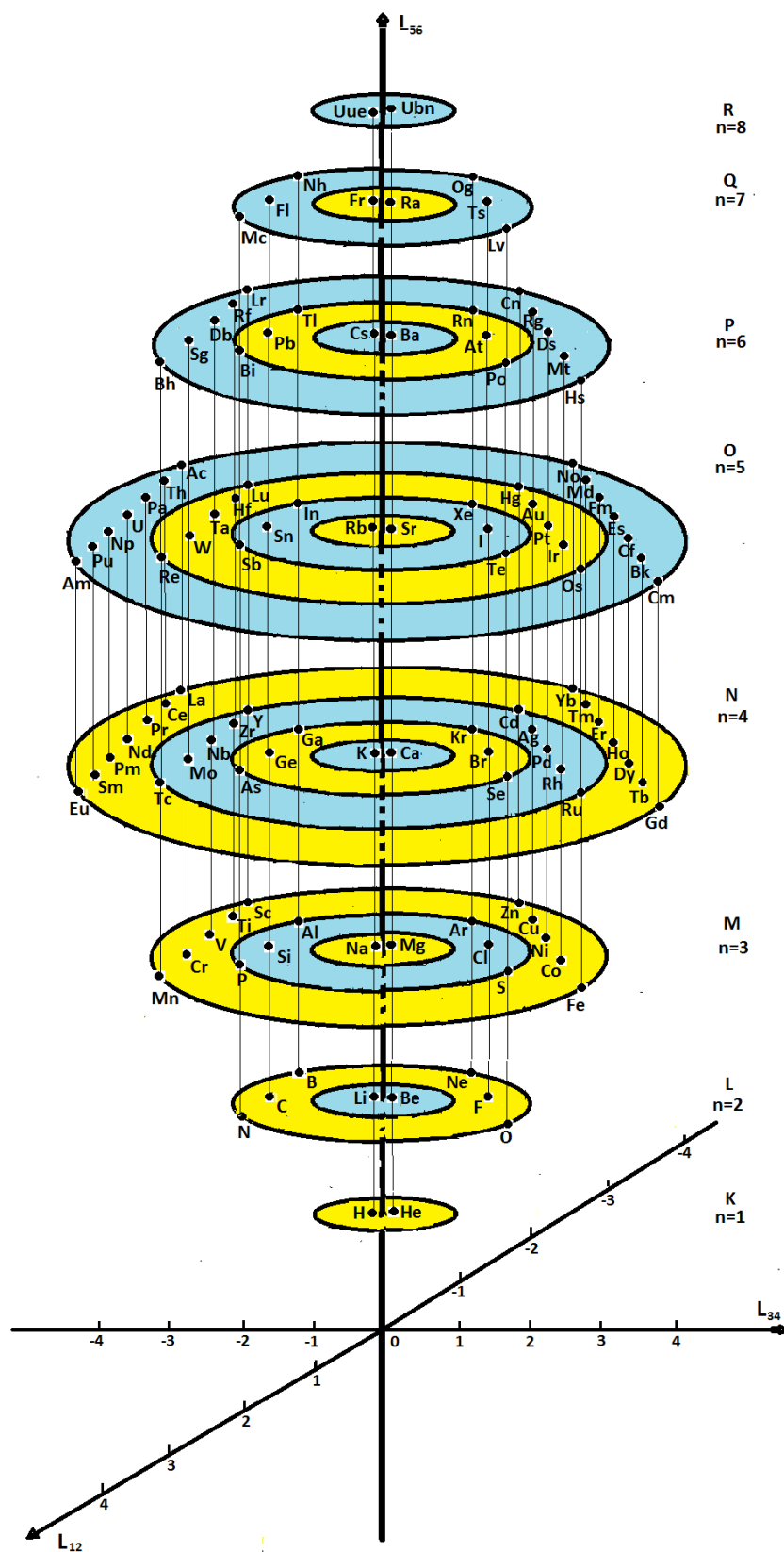


Рис. 1. Периодическая система химических элементов в форме совмещённой весовой диаграммы расщеплённых базисов (1) и (2) алгебры Ли $so(4, 4)$

представлены две совмещённые трёхмерные проекции ($SO(4, 2)$ -башни) весовой диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ группы вращений $SO(4, 4)$, соответствующие базисам (1) и (2). Вертикальная ось $SO(4, 2)$ -башни образована собственными значениями генератора Картана $\Delta_3 = L_{56}$, что добавляет к многообразию радиальный лестничный оператор. Каждый заданный этаж $SO(4, 2)$ -башни характеризуется главным квантовым числом n . Горизонтальные полосы (на этажах) соответствуют различным l -подоболочкам, а точки являются индивидуальными m -компонентами (конечномерными представлениями группы $SO(4, 2)$), задающими элементы периодической системы согласно правилу Маделунга. Удвоение периодов представлено следующим образом: жёлтым цветом обозначены кольца, содержащие элементы с нечётной суммой $n + l$, соответственно голубым цветом обозначены кольца с чётной суммой $n + l$. Гомологичные элементы соединяются вертикальными линиями. На радиальной оси слева ($s = -1/2$) расположены щелочные металлы I группы (**Li**, **Na**, ...), соответственно справа ($s = +1/2$) радиальную ось населяют щелочноземельные металлы II группы (**Be**, **Mg**, ...). По мере удаления от радиальной оси к перифериям кругов Генцеля происходит уменьшение *металличности* элементов и нарастание *неметалличности*, этому соответствует движение слева направо по периоду в стандартной таблице Менделеева (металлы $\rightarrow$ амфотерные элементы $\rightarrow$ инертные газы).

Легко видеть, что на каждом этаже двойной $SO(4, 2)$ -башни, показанной на рис. 1, реализуется структура (j, j) -представлений Фока подгруппы $SO(4)$ (целочисленная часть весовой диаграммы подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, см. рис. 3 в [10]). Первый этаж ($n = 1$) содержит первый период, состоящий из водорода **H** и гелия **He**. **H** и **He** образуют двойной синглет. На этаже $n = 2$ m -компоненты (элементы периодической системы) образуют $(1, 1)$ -диаграмму подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ (см. рис. 2), содержащей второй период: двойной синглет (**Be**, **Li**) и два триплета (**B**, **C**, **N**), (**Ne**, **F**, **O**). Далее, на листе $n = 3$ (см. рис. 3) имеем $(2, 2)$ -диаграмму подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, содержащей 3-й период полностью, а также переходные металлы побочных подгрупп 4-го периода от скандия **Sc** до марганца **Mn** и от железа **Fe** до цинка **Zn**, образующие два квинтета. Поднимаясь выше на следующий $n = 4$ этаж $SO(4, 2)$ -башни, приходим к $(3, 3)$ -диаграмме подалгебры $SO(4)$, на котором завершается заполнение 4-го периода инертным газом **Kr** (криптон), см. рис. 4. $(3, 3)$ -диаграмма на рис. 4 также содержит переходные металлы 5-го периода от иттрия **Y** до технеция **Tc** и от рутения **Ru** до кадмия **Cd**. Здесь же, в рамках $(3, 3)$ -диаграммы рис. 4, расположено всё семейство лантаноидов **La**, **Ce**, ..., **Yb**. Поднимаясь ещё выше на 5-й этаж, приходим к ещё одной $(3, 3)$ -диаграмме подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, см. рис. 5, на которой, в свою очередь, завершается заполнение 5-го периода инертным газом **Xe** (ксенон). $(3, 3)$ -диаграмма на рис. 5 содержит переходные металлы 6-го периода от лютеция **Lu** до рения **Re** и от осмия **Os** до ртути **Hg**. Здесь же, в рамках $(3, 3)$ -диаграммы рис. 5, находится всё семейство актиноидов **Ac**, **Th**, ..., **No**. Далее, на листе $n = 6$ (см. рис. 6) имеем $(2, 2)$ -диаграмму подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, на которой завершается заполнение 6-го периода инертным газом **Rn** (радон). В рамках этой диаграммы содержатся переходные металлы 7-го периода от лоуренсия **Lr** до бория **Bh** и от хассия **Hs** до коперниция **Cn**. Наконец, на этаже $n = 7$ (см. рис. 7) имеем $(1, 1)$ -диаграмму подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, на которой завершается заполнение 7-го периода инертным газом **Og** (оганесон).

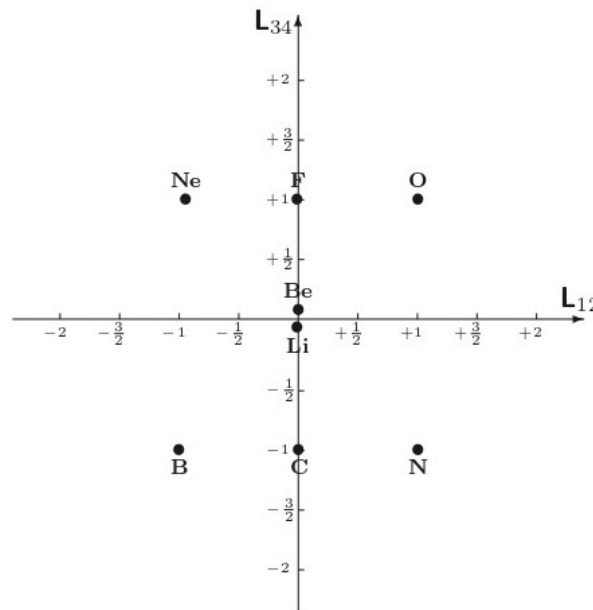


Рис. 2. Уровень $n = 2$ весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ содержит $(1, 1)$ -диаграмму подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, полностью включающей в себя второй период

Седьмой период завершает заполнение таблицы Менделеева. Этаж $n = 8$ содержит двойной синглет гипотетических элементов **Uue** и **Ubn**, с которых начинается построение таблицы Сиборга и далее 10-периодического расширения.

Таким образом, все элементы таблицы Менделеева группируются в последовательность весовых $SO(4)$ -диаграмм подалгебры $\mathfrak{so}(4)$, расположенной на восьми этажах весовой диаграммы (двойной $SO(4, 2)$ -башни, рис. 1) алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$.

С целью вычислить энергетические (массовые) уровни единой квантовой системы, определяемой $SO(4)$ -мультиплетами, образуем сумму и разность двух операторов Казимира $\mathbf{K}^2$ и $\mathbf{J}^2$ группы $SO(4)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^2 + \mathbf{J}^2 &= \frac{1}{4}(\mathbf{L} + \mathbf{A})^2 + \frac{1}{4}(\mathbf{L} - \mathbf{A})^2 \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}) + \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}) \quad (3) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^2 - \mathbf{J}^2 &= \frac{1}{4}(\mathbf{L} + \mathbf{A})^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{L} - \mathbf{A})^2 \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 + \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}) - \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 - \mathbf{L} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}) \quad (4) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L}).\end{aligned}$$

В силу ортогональности вектора орбитального момента $\mathbf{L}$ и вектора Лапласа-Рунге-

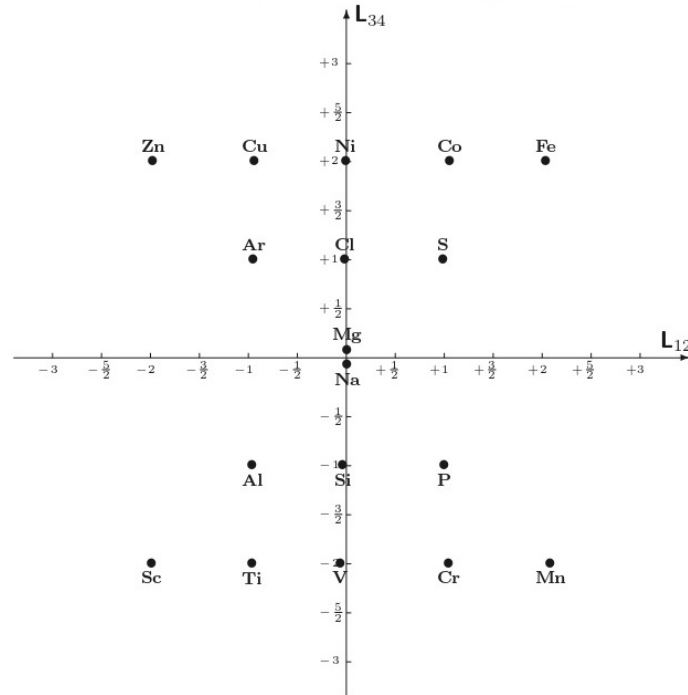


Рис. 3. Уровень $n = 3$: $(2, 2)$ -диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ содержит полностью 3-й период и переходные металлы 4-го периода **Sc**, ..., **Mn**, **Fe**, ..., **Zn**

Ленца $\mathbf{M}$, $\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0$, и квантовомеханического определения оператора

$$A = \frac{\hat{\mathbf{M}}}{\sqrt{-2mE}} \quad (5)$$

скалярные произведения $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}$ и $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L}$ исчезают, что приводит (4) к виду

$$\mathbf{K}^2 - \mathbf{J}^2 = 0, \quad \mapsto \quad \mathbf{K}^2 = \mathbf{J}^2. \quad (6)$$

Классический вектор Лапласа–Рунге–Ленца (ЛРЛ) описывает *прецессию эллиптической орбиты* в задаче Кеплера. В рамках планетарной модели Резерфорда–Бора ЛРЛ-вектор для атома водорода определяется следующим образом:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mk \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (7)$$

где r – расстояние между протоном и электроном, $m = m_p m_e / (m_p + m_e)$ – приведённая масса системы протон+электрон, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{L}$ – импульс и орбитальный момент системы, $k = Ze^2 / (4\pi\epsilon_0)$. Поскольку ЛРЛ-вектор $\mathbf{M}$ лежит в плоскости орбиты (и касателен к ней), то он ортогонален орбитальному моменту $\mathbf{L}$, следовательно

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{M}^2 = 2m\mathcal{H}\mathbf{L}^2 + m^2 k^2, \quad (9)$$

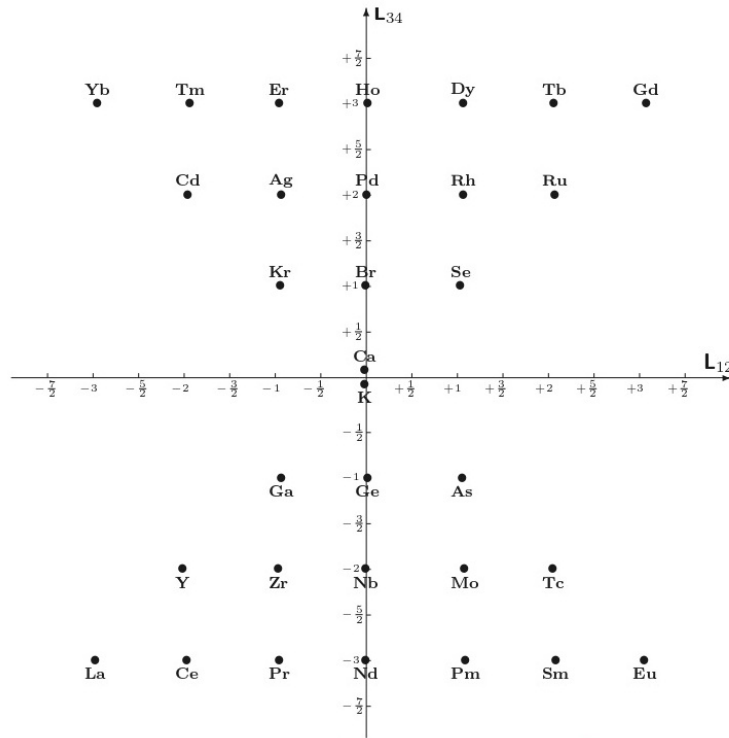


Рис. 4. Уровень $n = 4$: $(3, 3)$ -диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ содержит завершение 4-го периода, переходные металлы 5-го периода **Y**, ..., **Tc**, **Ru**, ..., **Cd**, а также семейство лантаноидов **La**, **Ce**, ..., **Yb**

где

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{k^2}{r}$$

– гамильтониан системы.

Отсюда следует, что уровни энергии квантовой системы характеризуются равенством квантовых чисел (собственных значений генераторов Картана $\mathbf{K}_3$ и $\mathbf{J}_3$) группы $SO(4)$:

$$j_1 = j_2. \quad (10)$$

Условие (10) определяет представление Фока, рассмотренное в приложении А статьи [23], где это равенство получено другим способом. Таким образом, m -компоненты (элементы таблицы Менделеева) группируются на этажах двойной $SO(4, 2)$ -башни в последовательность весовых (j, j) -диаграмм подалгебры $SO(4)$, где j – целое число.

Учитывая (6), перепишем (3) следующим образом:

$$2\mathbf{K}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2) \quad \longmapsto \quad 4\mathbf{K}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2. \quad (11)$$

Тогда левая часть равенства (11) с учётом собственных значений оператора Казимира $\mathbf{K}^2$ запишется

$$4\mathbf{K}^2 = 4j(j+1)\hbar^2, \quad \text{где} \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (12)$$

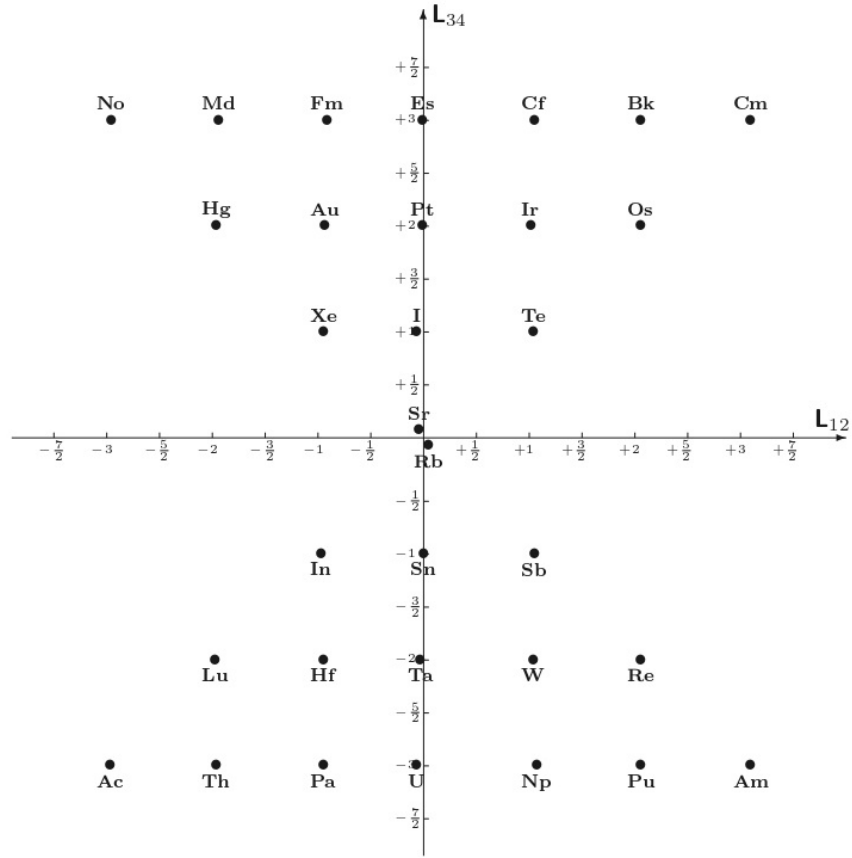


Рис. 5. Уровень $n = 5$: $(3, 3)$ -диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ содержит завершение 5-го периода, переходные металлы 6-го периода **Lu**, ..., **Re**, **Os**, ..., **Hg**, а также семейство актиноидов **Ac**, **Th**, ..., **No**

Записывая квантовомеханический аналог формулы (9) в виде

$$\frac{\mathbf{M}^2}{2mE} = \mathbf{L}^2 + \hbar^2 + \frac{mk^2}{2E},$$

получим с учётом (5)

$$\mathbf{L}^2 + \mathbf{A}^2 = \mathbf{L}^2 - \frac{\mathbf{M}^2}{2mE} = -\frac{mk^2}{2E} - \hbar^2.$$

Комбинируя (11) с (12), находим

$$4j(j+1)\hbar^2 = -\frac{mk^2}{2E} - \hbar^2.$$

Откуда следует

$$E_j = -\frac{mk^2}{2\hbar^2(2j+1)^2}, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (13)$$

Учитывая, что $k = Ze^2/4\pi\epsilon_0$, $\hbar = h/2\pi$ и $n = 2j + 1$, получим

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

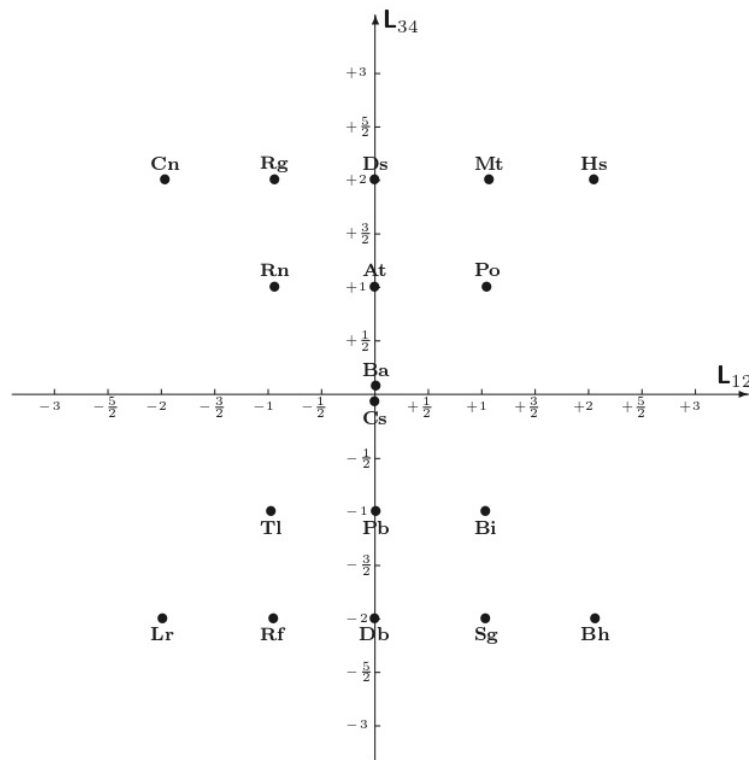


Рис. 6. Уровень $n = 6$: $(2, 2)$ -диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ содержит завершение 6-го периода и переходные металлы 7-го периода **Lr**, ..., **Bh**, **Hs**, ..., **Cn**

Принимая во внимание связь массы с энергией, $E = mc^2$, из последнего соотношения получим массы состояний единой квантовой системы:

$$m_n = \frac{m_e Z^2 e^4}{8h^2 \varepsilon_0^2 c^2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Формула (15) учитывает только главное квантовое число (при $l = 0$), соответствующее собственным значениям радиального генератора $\mathbf{L}_{56} = \Delta_3$. Следовательно, формула (15) задаёт массы состояний, лежащих на радиальной оси двойной $SO(4, 2)$ -башни (весовая диаграмма на рис. 1), т. е. массы щелочных и щелочноземельных металлов.

На каждом этаже левой ($s = -1/2$) и правой ($s = +1/2$) башен (см. рис. 3 в [12]) находится n^2 состояний, что соответствует размерности представлений подгруппы $SO(4)$, а на этажах совмещённой башни (см. рис. 1) имеем реализации весовых диаграмм алгебры $\mathfrak{so}(4)$. Таким образом, число состояний (элементов) на каждом этаже совмещённой $SO(4, 2)$ -башни определяется последовательностью Ридберга $2n^2$:

$$2 = 2 \cdot 1^2, \quad 8 = 2 \cdot 2^2, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 32 = 2 \cdot 4^2, \quad \dots, \quad (16)$$

которую Зоммерфельд называл «кабалистической» в своей книге [24, С. 122]. Далее имеет место удвоение периодов (за исключением первого):

$$2, \quad 8, \quad 8, \quad 18, \quad 18, \quad 32, \quad 32, \quad \dots \quad (17)$$

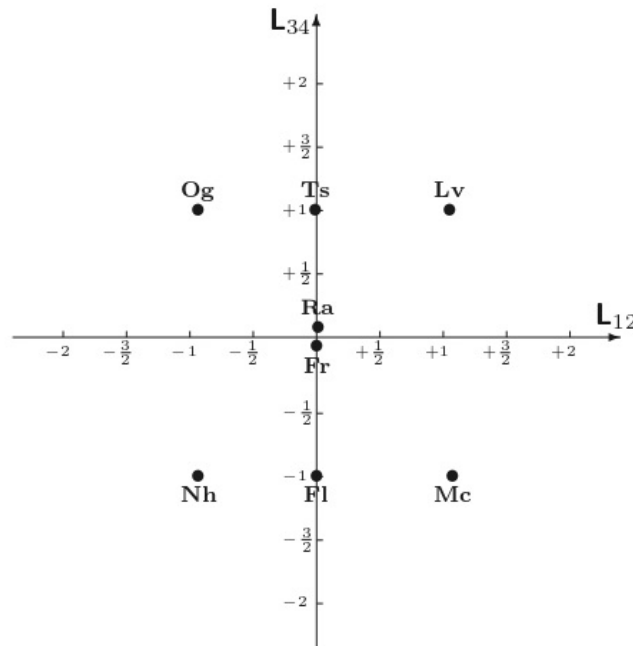


Рис. 7. Уровень $n = 7$: $(1, 1)$ -диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ завершает таблицу Менделеева заполнением 7-го периода до инертного газа **Og** (оганессон)

Первое удвоение (16) иногда называют «горизонтальным» (или *спиновым*), второе (17) – «вертикальным». В схеме Островского-Фета первое удвоение реализуется с помощью генератора Картана τ_3 с соответствующим квантовым числом s (собственным значением), удвоение (17) вводится посредством второго генератора Картана τ'_3 с соответствующим пятым (нефизическим) квантовым числом s' , приводящим к изменению правила Маделунга.

В рамках предложенной схемы описания периодической системы четвёртый генератор L_{78} подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ объединяет функции обоих генераторов τ_3 и τ'_3 схемы Островского-Фета в силу более высокой симметрии группы $SO(4, 4)$: алгебра Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ содержит 28 независимых генераторов, в то время как групповая алгебра $\mathfrak{so}(4, 2) \otimes \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2)'$ тензорного расширения G_F имеет 21 независимый генератор. Коммутация генератора L_{78} со всеми 15-ю генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ приводит к расщеплению базиса Картана–Вейля алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ (см. [11]) и, соответственно, к первому удвоению (16). Весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ четырёхмерна, ось генератора L_{78} перпендикулярна к оси радиального генератора L_{56} , а также к осям генераторов L_{12} и L_{34} , т. е. ось генератора L_{78} перпендикулярна к трёхмерному весовому пространству, базисом которого служат оси генераторов L_{12} , L_{34} , L_{56} , что приводит, в свою очередь, к «вертикальному» (фактическому) удвоению периодов (17). При этом исчезает необходимость введения пятого квантового числа.

Таким образом, *фактическое удвоение периодов (17) есть результат действия четвёртого генератора L_{78} (генератор спина) подалгебры Картана $\mathfrak{K}$ алгебры Ли*

$\mathfrak{so}(4, 4)$. При этом спин есть четвёртая степень свободы, не имеющая аналога в рамках классической трёхмерной системы. *Спин – это эффект четвёртого измерения*⁴.

2. Включение антивещества

Первые свидетельства существования *антиводорода* были получены на ускорителях в 1990-х годах. Впервые захват атомов антиводорода в ловушку продемонстрировала группа Antihydrogen Laser Physics Apparatus (ALPHA) в ЦЕРН в 2010 году. Логично предположить, что существование атомов антиводорода влечёт за собой существование атомов *антигелия*, *антилития* и т. д., т. е. существование двойственной *анти таблицы* Менделеева. Теоретико-групповое описание естественным образом включает в рассмотрение *антиэлементы* периодической системы уже на уровне подгруппы $SO(4, 2)$. Весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ состоит из двух пирамид, симметричных относительно плоскости, образованной генераторами Картана L_3 и A_3 (см. рис. 6 в [10]). При этом собственное число радиального генератора Δ_3 для нижней пирамиды принимает отрицательные значения. Таким образом, включение антивещества в общую теоретико-групповую схему описания периодической системы требует введения отрицательных значений главного квантового числа n , т. е. собственных значений радиального генератора L_{56} . Ограничение только положительными значениями числа n в модели Бора обусловлено геометрическими характеристиками кеплеровских орбит планетарной модели Резерфорда⁵ (более подробно см. [24]).

В свою очередь, для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ весовое пространство определяется четырьмя генераторами Картана $L_{56} = \Delta_3$, $L_{12} = L_3$, $L_{34} = A_3$ и L_{78} , которые служат

⁴Тот вещественный трёхмерный образ атома, формируемый средствами регистрирующей аппаратуры (масс-спектрометры, электронные и туннельные микроскопы) есть не более чем верхушка айсберга, основная часть которого погружена в мир четырёх (а может быть и более) измерений. Гейзенберг говорил: «Атомы – это не вещи».

⁵Следует отметить, что в модели Бора квантовые числа n, l, m соответствуют радиальным и орбитальным движениям классической системы (задачи Кеплера), описывающим движения «составных частей» атома. При этом четвёртое квантовое число s не имеет классического аналога, что лишний раз указывает на паллиативный характер этой модели. А. Барут в статье [8] о групповой структуре периодической системы в рамках конформной группы $SO(4, 2)$ вводит квантовые числа $\nu, \lambda, \mu_\lambda$ группы $SO(4, 2)$ с целью рассмотрения химических элементов как различных *состояний* единой *квантовой системы*. Чтобы не быть предвзятым по отношению к квантовым числам n, l, m механической (планетарной) модели Бора, описывающей водородоподобные системы, Барут намеренно вводит символы $\nu, \lambda, \mu_\lambda$, имеющие, прежде всего, теоретико-групповой (не механический) смысл, хотя диапазон их изменения Барут оставляет таким же, как у «водородных» квантовых чисел модели Бора. Очевидно, что это ограничение диапазона изменения чисел $\nu, \lambda, \mu_\lambda$, являющихся собственными числами генераторов Картана алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, является искусственным допущением, следующим из требования согласия с моделью Бора. Островский аналогичным образом проводит различие между обычными («водородными») квантовыми числами и абстрактными $SO(4, 2)$ -символами, обозначая последние знаком тильды: $\tilde{n}, \tilde{l}, \tilde{m}_l$ [22]. Фет в книге [18] придерживается символизма Барута. Следуя Баруту, Островский и Фет ограничивают диапазон изменения собственного числа ν радиального генератора положительными значениями.

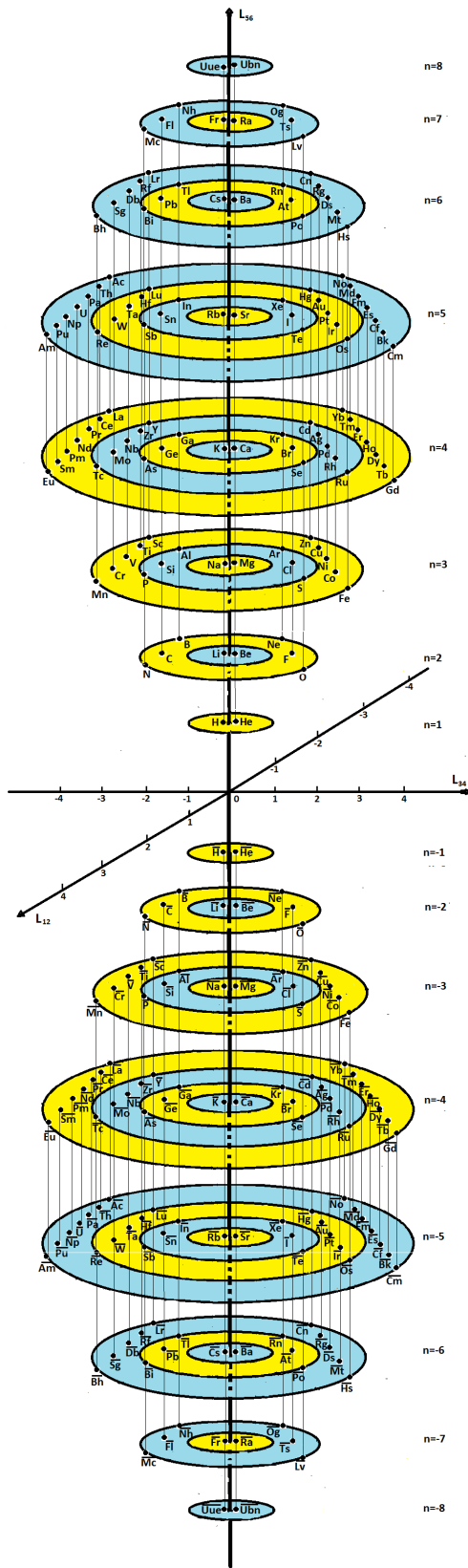


Рис. 8. Элементы ($n = 1, 2, \dots$) и антиэлементы ($n = -1, -2, \dots$) периодической системы в представлении удвоенной трёхмерной проекции весовой диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$

базисом четырёхмерной ортогональной системы координат. Определим кет-вектор

$$\left| \nu, \dot{\nu}; \lambda, \dot{\lambda}; \mu, \dot{\mu}; \sigma, \dot{\sigma} \right\rangle, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \nu, \dot{\nu} &\in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}, \\ \lambda &\in \{-\nu, -\nu + 1, \dots, \nu - 1, \nu\}, \quad \dot{\lambda} \in \{-\dot{\nu}, -\dot{\nu} + 1, \dots, \dot{\nu} - 1, \dot{\nu}\}, \\ \mu &\in \{-\lambda, -\lambda + 1, \dots, \lambda - 1, \lambda\}, \quad \dot{\mu} \in \{-\dot{\lambda}, -\dot{\lambda} + 1, \dots, \dot{\lambda} - 1, \dot{\lambda}\}, \\ \sigma, \dot{\sigma} &\in \{-1/2, +1/2\}. \end{aligned}$$

Связь чисел, входящих в кет-вектор (18), с квантовыми числами n, l, m и s кет-вектора

$$|n, l, m, s\rangle \quad (19)$$

базиса Маделунга (см. табл. 1 в [12]) задаётся следующими соотношениями

$$n = |\nu - \dot{\nu}|, \quad l = |\lambda - \dot{\lambda}|, \quad m = |\mu - \dot{\mu}|, \quad s = |\sigma - \dot{\sigma}|.$$

При этом главное квантовое число n изменяется в пределах

$$-|\nu - \dot{\nu}|, -|\nu - \dot{\nu}| + 1, -|\nu - \dot{\nu}| + 2, \dots, |\nu - \dot{\nu}|. \quad (20)$$

На рис. 8 показана совмещённая диаграмма двух трёхмерных проекций весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$. Верхняя башня, начинающаяся с водорода $\mathbf{H}$, представляет *пирамиду вещества*, где собственные числа радиального генератора $\mathbf{L}_{56} = \Delta_3$ принимают положительные значения. Нижняя башня, отражённая от плоскости, образованной осями генераторов $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_3$ и $\mathbf{L}_{34} = \mathbf{A}_3$, начиная с антиводорода $\overline{\mathbf{H}}$, представляет *пирамиду антивещества*, где собственные числа генератора Δ_3 принимают отрицательные значения.

Литература

1. Бор Н. Избранные научные труды. Т. 1. М.: Наука, 1970. С. 318–375.
2. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М.: Прогресс, 1987.
3. Zuo J.M., Kim M., O’Keeffe M., Spence J.C.H. // Nature. 1999. V. 401. P. 49–52.
4. Scerri E.R. // J. Chem. Educ. 2000. V. 77. P. 1492.
5. Spence J.C.H., O’Keeffe M., Zuo J.M. // J. Chem. Educ. 2001. V. 78. P. 877.
6. Варламов В.В. Существуют ли атомные орбитали? URL: <https://zen.ru/a/Z1fteLQ63GGu9y5G> (дата обращения 21.12.2025).
7. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа $\text{Spin}(4)$ и таблица Менделеева // Теоретическая и математическая физика. 1971. Т. 9. С. 203–209.
8. Barut A.O. Group Structure of the Periodic System // The Structure of Matter: Rutherford Centennial Symposium / ed. by B.G. Wybourne. Christchurch, New Zeland: University of Canterbury Press, 1972. P. 126–136.

9. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. IV: Групповая алгебра // Математические структуры и моделирование. 2024. № 1 (69). С. 18–31.
10. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. V: Весовая диаграмма // Математические структуры и моделирование. 2024. № 3 (71). С. 4–18.
11. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. VI: Восьмимерное обобщение // Математические структуры и моделирование. 2025. № 2 (74). С. 18–32.
12. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. VII: Спин и удвоение периодов // Математические структуры и моделирование. 2025. № 3 (75). С. 26–41.
13. van Spronsen J.W. The Periodic System of Chemical Elements. Amsterdam / New York: Elsevier, 1969.
14. Mazurs E.G. Graphic Representations of the Periodic System During One Hundred Years. Tuscaloosa: University of Alabama Press, 1974.
15. Scerri E. Periodic Table: its story and its significance. New York: Oxford University Press, 2019.
16. Haenzel G. Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente // Zeitschrift für Physik. 1943. V. 120. P. 283–300.
17. Finke W. Bemerkungen zu G. Haenzel „Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente.“ // Zeitschrift für Physik. 1943. V. 121. P. 586–587.
18. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск: Наука, 2010.
19. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 5–23.
20. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. II: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1 (49). С. 5–21.
21. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. III: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3 (51). С. 5–20.
22. Ostrovsky V.N. Group theory and periodic system of elements // AIP Conference Proceedings. 1996. V. 365. P. 191–216.
23. Варламов В.В. О системе аксиом нелокальной квантовой теории // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4 (44). С. 5–25.
24. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. М.: ГИТТЛ, 1956.

**GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS:
VIII. THE STRUCTURE OF ENERGY LEVELS**

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The structure of the energy levels of a periodic system is studied, the states of which (chemical elements) are represented as nodes of the weight diagram of the group algebra of the rotation group of an eight-dimensional pseudo-Euclidean space of the neutral signature.

Keywords: periodic table, Madelung rule, weight diagram, Laplace–Runge–Lenz vector, antimatter.

Дата поступления в редакцию: 24.12.2025