

МИРОВЫЕ ЛИНИИ СВЕТОВЫХ ЧАСТИЦ НА «КОНУСАХ ПРОШЛОГО» ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПОРЯДКОВ В R^3

Н.Л. Шаламова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: parsifal8@inbox.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В данной статье изучаются мировые линии световых частиц «конусов прошлого» для некоторых порядков, инвариантных относительно некоммутативных разрешаемых групп Ли в их аффинном представлении. Для этих порядков строятся «конусы прошлого» и в некоторых случаях интегрируются уравнения геодезических.

Ключевые слова: частичный порядок, «конусы прошлого», геодезические линии, несвязные порядки.

Данная работа относится к направлению в геометрии, начало которой положил академик А.Д. Александров. Это направление принято называть хроногеометрией [1–5]. Задачами хроногеометрии занимались такие математики, как А.К. Гуц, А.В. Шайденко, А.В. Левичев и другие.

А.К. Гуц написал монографию по данной тематике, в которой изложена абсолютно полная информация по указанному геометрическому направлению [6, 7].

Введём следующие обозначения и определения. Будем говорить что в n -мерном арифметическом пространстве R^n ($n \geq 2$) задан частичный порядок $\mathcal{P}$, если задано семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in R^n\}$ пространства R^n такое, что выполнены следующие условия: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) если $x \neq y$, то $P_x \neq P_y$ [6, 8]. Назовём порядок $\mathcal{P}$ связным, если $x \in \overline{P_x \setminus \{x\}}$, иначе порядок $\mathcal{P}$ будет несвязным.

Внешним конусом C_x множества P_x назовём замыкание объединения лучей l_{xy} , выходящих из точки x и проходящих через все $y \in P_x$, т. е. [6]

$$C_x = \overline{\bigcup_{y \in P_x} l_{xy}}.$$

Замечание 1. Предполагается, что на R^n задана естественная типология. Через $\overline{A}$ обозначаем замыкание множества A ; через ∂A – границу множества A .

Будем говорить, что внешний конус C_x – это конус с «острой вершиной», если C_x не содержит прямой.

«Конусом прошлого» для любого $P_x \in \mathcal{P}$ назовём следующие множество [6, 9]:

$$P_x^- = \{y \in R^n : x \in P_y\}.$$

Назовём гомеоморфизм $f : R^n \rightarrow R^n$ порядковым $\mathcal{P}$ -автоморфизмом, если $f(P_x) = P_{f(x)}$. Очевидно что если $\mathcal{P}$ -порядок $\mathcal{P}$ -инвариантен относительно группы G , то $G \subseteq \text{Aut}(\mathcal{P})$, где через $\text{Aut}(\mathcal{P})$ обозначим группу $\mathcal{P}$ -автоморфизмов.

Указанная выше разрешимая группа Ли G имеет вид:

$$\bar{x}_i = x_i e^{-\alpha_i t} + s_i,$$

где $(i = 1, \dots, n-1)$; $\bar{x}_n = x_n + t$; $\alpha_i \geq 0$; $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \geq 0$ [6].

Далее в статье исследуются такие порядки $\mathcal{P}$, что множества P_x , $x \in R^n$ задаются аналитически, а не описательно, т. е. сначала задаём $P_e = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq F(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ для связного порядка; $P_e = \{(0, \dots, 0)\} \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq F(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ для несвязного порядка. Здесь и далее $e = (0, \dots, 0)$. Затем остальные множества P_x , $x \in R^n$, $x \neq e$ получаем преобразованиями из группы G . Здесь $F(x_1, \dots, x_{n-1})$ – некоторая дифференцируемая (за исключением, быть может, конечного числа точек) функция.

Приведём пояснительные примеры.

Пример 1.

$$P_e = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq \sqrt[n]{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}\};$$

$$P_z = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n - t \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} ((x_i - s_i)e^{\alpha_i t})^2}\},$$

$$z = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}; t).$$

Пример 2. Рассмотрим несвязный порядок, где

$$P_e = \{(0, \dots, 0)\} \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq 2 - e^{-\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\};$$

$$P_z = \{(s_1, \dots, s_{n-1}; t)\} \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n - t \geq 2 - e^{-\sum_{i=1}^{n-1} ((x_i - s_i)e^{\alpha_i t})^2}\}.$$

Поскольку по определению $P_x^- = \{y \in R^n : x \in P_y\}$ и наш порядок инвариантен относительно группы G , то достаточно найти P_e^- , а остальные «конусы прошлого» P_x^- получить преобразованиями из группы G . Имеем

$$P_e = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq F(x_1, \dots, x_{n-1})\}$$

для связного порядка; тогда

$$P_e^- = \{(s_1, \dots, s_{n-1}; t) \in R^n :$$

$$-t \geq F((-s_1 e^{\alpha_1 t}); (-s_2 e^{\alpha_2 t}); \dots; (-s_{n-1} e^{\alpha_{n-1} t})), t \leq 0\},$$

т. е. в функции $F(x_1, \dots, x_{n-1})$ координате x_i ($i = 1, \dots, n-1$) присвоено значение $(-s_i e^{\alpha_i t})$. Если перейти к привычным обозначениям, то

$$P_e^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \leq 0; -x_n \geq F((-x_1 e^{\alpha_1 x_n}), \dots, (-x_{n-1} e^{\alpha_{n-1} x_n}))\}.$$

для связного порядка. Для несвязного порядка

$$P_e^- = \left\{ (0, \dots, 0) \right\} \cup \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n : \right. \\ \left. x_n \leq 0; -x_n \leq F((-x_1 e^{\alpha_1 x_n}), \dots, (-x_{n-1} e^{\alpha_{n-1} x_n})) \right\}.$$

Для примера 1.

$$P_e = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2} \right\}.$$

Тогда

$$P_e^- = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n : -x_n \geq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n-1} x_i e^{\alpha_i x_n}} \right\}.$$

P_x^- , где $z = (z_1, \dots, z_n)$, имеет вид:

$$P_x^- = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n : -x_n - z_n \geq \sqrt[4]{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 e^{2\alpha_i(x_n - z_n)}}, z_n \neq x_n \right\}.$$

Отметим, что для получения всех выше изложенных результатов автор статьи использовала геометрические и теоретико-множественные конструкции. Полученные результаты можно оформить как теорему:

Теорема. Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in R^n; n \geq 2\}$ – частичный порядок в R^n , для которого выполняются следующие условия:

1. $\mathcal{P}$ инвариантен относительно преобразований из группы G .
2. Множество P_e ($e = (0, \dots, 0)$) заданно таким образом:
 - (а) для связного порядка $P_e = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq F(x_1, \dots, x_{n-1})\}$;
 - (б) для несвязного порядка $P_e = \{(0, \dots, 0)\} \cup \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \geq F(x_1, \dots, x_{n-1})\}$, где $F(x_1, \dots, x_{n-1})$ – дифференцируемая, за исключением, быть может, конечного числа точек, функция.

Тогда для случая (а) «конус прошлого»

$$P_e^- = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_n \leq 0; x_n + F(z_1, \dots, z_{n-1}) \leq 0; \right. \\ \left. z_i = -x_i e^{\alpha_i x_n}, i = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Для несвязного порядка (б)

$$P_e^- = \left\{ (0, \dots, 0) \right\} \cup \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n : \right. \\ \left. x_n \leq 0; x_n + F(z_1, \dots, z_{n-1}) \leq 0; z_i = -x_i e^{\alpha_i x_n}; i = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

«Конусы прошлого» для $x \neq e$ получается из P_x^- преобразованные из группы G .

Естественно предположить, что свет от одной точки до другой точки идёт по кратчайшей траектории. Поэтому геодезические линии, как кратчайшие на каком-то (возможно небольшом) промежутке, явно являются претендентами на мировые линии световых частиц [10, 11].

Рассмотрим случай где $n = 3$. Пусть $\partial P_x^- \setminus \{e\}$ является поверхностью вращения во круг оси x_3 , данную ось далее будем обозначать z ($x_1 = x$; $x_2 = y$). Если подходящей параметризацией метрический тензор поверхности $z = -F(-xe^{\alpha z}, -ye^{\alpha z})$ можно привести к виду $ds^2 = g_{11}(u)du^2 + g_{22}(v)dv^2$, где u, v – внутренние координаты, то система дифференциальных уравнений для нахождения геодезических имеет вид:

$$\begin{cases} 2g_{11}\frac{d^2u}{dt^2} + (g_{11})_u\left(\frac{du}{dt}\right)^2 - (g_{22})_u\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0, \\ g_{22}\frac{d^2v}{dt^2} + (g_{22})_u\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} = 0. \end{cases}$$

Частное решение этой системы $v = v_0 = \text{const}$ имеет вид $C_1t + C_2 = \int \sqrt{g_{11}}du$ – это, очевидно, меридианы поверхности вращения. Если $\frac{dv}{dt} \neq 0$, то получается решение

$$v + C = \pm \int \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}(C_1g_{22} - 1)}} du.$$

В первом из приведённых примеров $P_e = \{(x, y, z) \in R^3 : z \geq \sqrt[4]{x^2 + y^2}\}$. «Конус прошлого» $\partial P_e^- \setminus \{e\}$ для группы $G_{III}V$ по классификации Бианки $\bar{x} = xe^{-t} + s$, $\bar{y} = ye^{-t} + l$; $\bar{z} = z + t$ имеет вид:

$$\partial P_e^- \setminus \{e\} = \{(x, y, z) : z < 0, z = e^{\frac{z}{2}} \sqrt[4]{x^2 + y^2}\}.$$

Введём параметризацию: $x = u^2e^{-u} \cos v$; $y = u^2e^{-u} \sin v$, $z = u$. Метрический тензор в этом случае имеет вид

$$ds^2 = e^{-2u}((e^{2u} + u^2(u - 2)^2)du^2 + u^4dv^2).$$

Тогда первое семейство геодезических – это всегда меридианы поверхности вращения $v = v_0$, т. е. $x = u^2e^{-u} \cos v_0$, $y = u^2e^{-u} \sin v_0$, $z = u$. Если $v \neq \text{const}$, то внутренние уравнения геодезических имеют вид

$$V + C = \pm \int \frac{e^u \sqrt{e^{2u} + u^2(2 - u)^2}}{u^2 \sqrt{c_1 u^2 - e^{2u}}} du.$$

Как будут выглядеть данные кривые на световом «конусе прошлого», сказать затруднительно.

Замечание 2. «Конусы прошлого» P_x^- , $x \in R^n$ также задают порядок на R^n . Однако внешние конусы C_x^- для P_x^- не будут конусами «с острой вершиной». Они будут содержать прямые даже в том случае, когда C_x , $x \in R^n$ были конусами с острой вершиной, т. е. прямых не содержали.

Литература

1. Alexandrov A.D. Contribution to chronogeometry // Canadian Journal of Mathematics. 1967. V. 19, No. 6. P. 1119–1128.
2. Александров А.Д. К основаниям геометрии пространства-времени // Доклады АН СССР. 1974. Т. 219, № 2. С. 265–267.
3. Александров А.Д. Отображения упорядоченных пространств // Труды Математического института АН СССР. М., 1972. Т. 128. С. 3–21.
4. Гуц А.К. Хроногеометрия профессора Ю.Ф. Борисова // Математические структуры и моделирование. 2025. № 2 (74). С. 5–11.
5. Borchers H.J., Hegerfeldt G.C. The structure of space–time transformations // Communications in Mathematical Physics. 1972. V. 28, No. 3. P. 259–266.
6. Гуц А.К. Хроногеометрия. Аксиоматическая теория относительности. Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2008. 340 с.
7. Гуц А.К. Теории пространства-времени // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 4. С. 23–47.
8. Шаламова Н.Л. Асимптотически линейчатый порядок // Математические структуры и моделирование. 2001. № 7. С. 56–60.
9. Гуц А.К. Реальность прошлого: эмпирические и онтологические доказательства // Математические структуры и моделирование. 2022. № 4 (64). С. 29–43.
10. Пименов Р.И. К основаниям теории дифференцируемого пространства-времени // Доклады АН СССР. 1975. Т. 222, № 1. С. 36–38.
11. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения // Эдиториал УРСС. М., 1998. 336 с.

WORLDLINES OF LIGHT PARTICLES ON THE "PAST CONES" FOR CERTAIN NON-RELATIVISTIC ORDERS IN R^3

N.L. Shalamova

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: parsifal8@inbox.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. In this paper, we study the worldlines of light particles on the "past cones" for certain orders invariant under noncommutative solvable Lie groups in their affine representation. For these orders, we construct the "past cones" and, in several cases, integrate the geodesic equations.

Keywords: Partial order, "Past cones", Geodesic lines, Disconnected orders.

Дата поступления в редакцию: 10.11.2025