

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ЛЕММЫ О ЛОКАЛЬНОМ ВРАЩЕНИИ

В.И. Субботин

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: geometry@mail.ru

Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова,
Новочеркасск, Россия

Аннотация. В работе приведено обновлённое доказательство так называемой леммы о локальном вращении. Так автор называет доказанное им ранее утверждение о выпуклых многогранниках в E^3 с условием локальной симметричности граней. При этом грань F многогранника называется локально симметричной, если ось вращения грани F , перпендикулярная ей, является осью вращения гранной звезды $\text{Star}(F)$. Звезда $\text{Star}(F)$ – это совокупность граней многогранника, каждая из которых имеет общее ребро с гранью F . Лемма о локальном вращении утверждает, что каждая локально симметричная грань является глобально симметричной, то есть ось вращения грани F будет осью вращения многогранника в целом.

Ключевые слова: звезда грани, локальное вращение, условие симметричности

Введение

Изучение классов многогранников в E^3 с различными условиями симметрии является важной задачей классической и современной геометрии, (см. [1] – [3], [6] гл. 6). Первыми известными классами многогранников с условиями симметричности являются пять правильных многогранники (платоновых) и тринадцать полуправильных (архимедовых). Выпуклые правильные многогранники Джонсона (см. [4], [5]) можно тоже считать многогранниками с условиями симметричности. Заметим, что для удобства, полезно различать слабые и сильные условия симметричности. Например, упомянутые классы правильных и полуправильных многогранников следует считать классами с *сильными* условиями симметричности, то есть в этих классах только конечное число представителей. Класс многогранников Джонсона является классом со *слабыми* условиями симметричности, так как условие правильности здесь приводит, в частности, к бесконечным сериям призм и антипризм.

Ранее автором был полностью описан класс со слабым условием симметричности так называемых выпуклых FS – многогранников, ([7]). FS – многогранником был назван такой, у которого каждая грань имеет центр вращения, через который проходит нетривиальная ось вращения L всего многогранника. Если не требовать, чтобы каждая ось L была осью вращения всего многогранника, а только лишь осью вращения гранной звезды соответствующей грани, то мы получим тот же самый

класс FS . Для доказательства эквивалентности локального и глобального условия симметричности для класса FS нужна была *лемма о локальном вращении*, (см., например, [8]).

В настоящей работе доказательство леммы о локальном вращении будет уточнено и сделано более наглядным.

1. Определения

Определение 1. Звездой $Star(F)$ грани F многогранника называется множество всех граней, имеющих общее ребро с гранью F .

Определение 2. Грань F многогранника назовём локально симметричной, если у неё есть нетривиальная ось вращения, перпендикулярная F и являющаяся осью вращения звезды $Star(F)$.

Определение 3. Грань F многогранника назовём глобально симметричной, если у неё есть нетривиальная ось вращения, перпендикулярная F и являющаяся осью вращения всего многогранника.

Определение 4. Ось вращения, порядок которой больше 1, называется нетривиальной.

Замечание 1. Порядок оси вращения грани многогранника может быть меньше порядка её оси вращения как фигуры, отделённой от многогранника.

Определение 5. Поясом P граней называется связное множество граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани множества P не имеют общих ребер.

Определение 6. Множество поясов P_i на поверхности многогранника называется *связным*, если от одного пояса к другому можно перейти по граням поясов.

Определение 7. Связное множество поясов далее называется *цепью* граней.

2. Лемма о локальном вращении

Лемма 1. Если все грани замкнутого выпуклого многогранника в E^3 являются локально симметричными, то они являются также и глобально симметричными.

Доказательство. Рассмотрим многогранник M , каждая грань F_i которого обладает свойством *локальной симметрии*, то есть при некотором вращении, при котором грань F_i самосовмещается, будет самосовмещаться звезда $Star(F_i)$. Для доказательства достаточно показать, что при локальном самосовмещении грани F_i многогранник M самосовместится.

Построим цепь, состоящую из двух граней. На рисунке показан пример цепи из правильных треугольников и квадратов. Пусть F_1 — некоторая грань многогранника M , Рис. 1. Пусть $Star(F_1)$ состоит из трёх граней G_1 . Пользуясь свойством

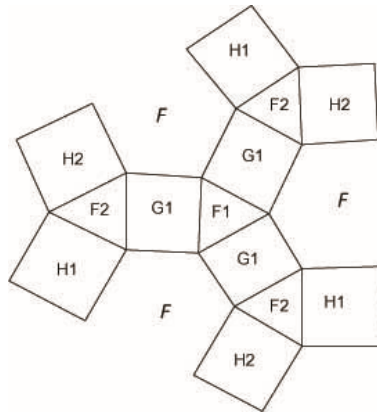


Рис. 1. К доказательству леммы

локальной симметрии граней G_1 , получим, что при вращении грани F_1 , при котором она самосовмещается, будут совмещаться грани F_2 . Аналогично, пользуясь свойством локальной симметрии граней F_2 , получим, что при локальной симметрии грани F_1 , будут совмещаться звёзды граней F_2 .

Продолжая этот процесс далее, получим замкнутую цепь C , в которой две различные грани. Заметим, что в частности, в C все грани могут быть равными между собой. При самосовмещении любой грани T цепи C вместе с соседними гранями с T в C вся цепь переходит в себя. В результате построения цепи C возможны два случая:

- 1) C составит всю поверхность многогранника M ;
- 2) останутся части поверхности многогранника M , не входящие в C , обозначенные на рисунке 1 как F .

В первом случае утверждение леммы очевидно. Рассмотрим второй случай. Так как при самосовмещении любой грани цепи C вся цепь C переходит в себя, то области F , очевидно, переходят в области F . Причём, граница каждой F состоит из некоторых рёбер и вершин граней, входящих в C . Здесь так же возможны всего два случая.

- 1) Граница области F состоит из рёбер только одной грани цепи C ;
- 2) граница области F состоит из рёбер двух возможных граней цепи C .

В первом случае рассмотрим некоторую грань $\Phi \notin C$, которая имеет общее ребро с некоторой гранью $G_1 \in C$. Очевидно, $\Phi \in F$ и $G_1 \in \text{Star}(\Phi)$.

Построим цепь D из двух граней G_1 и Φ . При вращении и самосовмещении Φ вся цепь D будет переходить в себя. Следовательно, границей грани Φ будет вся граница области F , которая будет состоять из рёбер граней, эквивалентных G_1 . Значит, область F совпадает с гранью Φ . При вращении и самосовмещении Φ не только цепь D , но и цепь C будет тоже переходить в себя. Действительно, все грани, эквивалентные G_1 входят также и в цепь C . При указанном вращении грани Φ , все оставшиеся грани, эквивалентные F_1 , будут также переходить в себя, то есть при самосовмещении Φ самосовместится не только цепь D , но и цепь C ; таким образом, самосовместится весь многогранник M .

Второй случай, когда граница области F состоит из рёбер двух возможных гра-

ней цепи C , рассматривается аналогично. В этом случае в $Star(\Phi)$ входят грани, эквивалентные $G1$ и $F1$. Построив две цепи, D и E , где E — цепь, построенная из двух граней, Φ и $F1$. При самосовмещении Φ каждая из цепей D и E будет переходить в себя. Так как при самосовмещении Φ вся область F переходит в себя, а граница Φ состоит из рёбер граней, эквивалентных $G1$ и $F1$, то как и в первом случае, F совпадает с Φ .

Таким образом, при любом локальном вращении любой грани многогранника M , все грани многогранника самосовмещаются, то есть самосовмещается сам многогранник M . ■

Из доказанной леммы получаем

Следствие 1. *В многограннике, в котором каждая грань является локально симметричной, количество различных граней может быть 1, 2 или 3.*

Литература

1. Cromwell P.R. Polyhedra. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 451 p.
2. Coxeter H.S.M. Regular Polytopes. Dover Publications, 1973. 321 p.
3. Grunbaum B. Regular polyhedra—old and new // Aequationes mathematicae. 1977. V. 16, No. 1–2. P. 1–20.
4. Jonson N.W. Convex polyhedra with regular faces // Canadian Journal of Mathematics. 1966. V. 18, No. 1. P. 169–200.
5. Залгаллер В.А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 1–220.
6. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках / М. Деза [и др.]. М.: МЦНМО, 2008. 192 с.
7. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, № 4. С. 132–140.
8. Субботин В.И. О многогранниках, сильно симметричных относительно вращения // Чебышевский сборник. 2006. Т. VII, № 2 (18). С. 168–171.

TO THE PROOF OF THE LOCAL ROTATION LEMMA

V.I. Subbotin

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: geometry@mail.ru

Platov South Russian State polytechnic university, Novocherkassk, Russia

Abstract. This paper presents an updated proof of the so-called local rotation lemma. This is the author's name for a previously proven assertion about convex polyhedra in E^3 with local face symmetry. A face F of a polyhedron is said to be locally symmetric if the rotation axis of F , perpendicular to it, is the rotation axis of the face star $Star(F)$. A star $Star(F)$ is the set of faces of the polyhedron, each of which shares an edge with F . The local rotation lemma asserts that every locally symmetric face is globally symmetric, meaning that the rotation axis of F is the rotation axis of the polyhedron as a whole.

Keywords: star of the face, local rotation, symmetry condition.

Дата поступления в редакцию: 23.11.2025