

ЛОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАДОКСА ДЕДУШКИ В РАМКАХ МОДАЛЬНОЙ ПРЕДИКАТНОЙ ЛОГИКИ ГЁДЕЛЯ S5 ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. В данной статье рассматривается способ разрешения известного парадокса дедушки в рамках модальной предикатной логики S5 второго порядка, построенной Куртом Гёделем.

Ключевые слова: машина времени, модальная предикатная логика второго порядка, парадокс дедушки.

В статьях [1, 2] было приведено онтологическое доказательство (заключение, идущие от понятия к бытию) реальности, т. е. существования, или бытия Прошлого. Для этого мы использовали схему онтологического доказательства существования Бога, предложенного Гёделем в системе модальной логики S5 второго порядка [3].

Парадокс дедушки состоит в том, что если внук окажется в Прошлом до того, как дедушка встретил бабушку и убьёт его, то вопрос в том, что его, внука, не должно существовать, а значит, как разрешение возникающего противоречия состоит в том, что внук, попав в прошлое не может убить дедушку. Рассматривая парадокс дедушки, мы видим, что противоречие возникает только тогда, когда внук убивает дедушку. Часто вводятся постулаты, сводящиеся к заявлениям, что Мир устроен так, что подобное убийство невозможно. Однако такие постулаты требуют обоснования. Поэтому такое логическое доказательство мы ищем в рамках модальной логики. Считаем, что Прошлое обладает свойством завершённости во всем, т. е. всё, что прошло, то завершено, свершилось. Прошлое есть сущее, все атрибуты которого обладают завершённостью. С точки зрения абсолютной теории пространства-времени – это очевидный факт, изменений нет, они иллюзорны. Существование как реальность Прошлого в рамках модальной логики с учётом семантики Крипке есть высказывание

$$\Box \exists x P(x),$$

где $\Box$ – знак модальности «необходимо / обязательно», $P(x)$ – предикат, говорящий, что «объект x есть прошлое»; нам понадобится ещё другая модальность – $\Diamond$ «возможное». Введём предикат $Z(A)$ – атрибут (свойство) A «завершённое, свершившееся».

В [1, 2] доказана

Теорема 1. $\Box \exists x P(x)$, т. е. существование, бытие (реальность) Прошлого, необходимо / обязательно.

Это интерпретируем следующим образом: Прошлое, в котором живёт молодой дедушка до знакомства с бабушкой – атрибут A – это суть реальность, завершённая, свершившаяся, и, следовательно, неизменяемая. Поэтому, внук может появиться в прошлом молодого дедушки, но не сможет его убить.

Рассматривая парадокс дедушки, мы видим, что противоречие возникает только тогда, когда внук убивает дедушку. Часто вводятся постулаты, сводящиеся к заявлениям, что мир устроен так, что подобное убийство невозможно. Мы же концентрируем внимание на том, чтобы в рамках модальной логики доказать, что дедушка остаётся живым в любых обстоятельствах, на детали которых не следует обращать внимание. Иначе говоря, мы пишем формулу, которая утверждает, что внук ни в каком случае не остаётся без дедушки. Ведь если дедушка убит, то у убийцы-внука не может быть дедушки, поскольку он бы не родился. Иначе говоря, условие $\Box$ «не только верно сейчас, но условие $\Box$ будет верно при всех возможных развитиях ситуации» [4].

Пусть $V(x, y)$ — предикат, интерпретируем как « x – внук для y ». Тогда формулу [5]

$$\varphi = \forall x \exists y (V(x, y) \rightarrow \neg \Diamond \neg V(x, y)), \quad (1)$$

мы читаем как «у любого x есть дедушка y , и, следовательно, невозможно, чтобы y не был дедушкой x ».

Описание физической ситуации, физического процесса в использовании модальной логики – это написание последовательности формул на языке используемой логики, не допускающие их прочтения как истинных высказываний, которым следует следовать. Для этого нужно семантическое, т.е. осмысленное (означенное) их прочтение, наполняющее их конкретным и понятным содержанием. Иначе говоря, нужно указывать, как продемонстрировал Крипке, «возможные миры», в которых осмысление и происходит и когда можно говорить об истинности ранее написанных высказываний. Особое место здесь занимает означивание связок $\Box A$ (т.е. « A необходимо») и $\Diamond A$ (т.е. « A возможно»), когда говорят о достижимости нужного и желанного «мира». И важнейшим моментом является здесь указание на то, что понимается под «возможным миром».

О «возможных мирах» много говорят в аналитической философии. Так авторитетный аналитический философ Дэвид Льюис буквально понимал под ними альтернативные физические вселенные. Сам Крипке не склонялся к такой интерпретации. Логик ... из МГУ предпочитает говорить о различных состояниях одной (нашей) физической реальности, в которых мы оказываемся и в которых приходится осмысливать логическое высказывание.

Нам кажется, что в нашем случае, т.е. при рассмотрении пространства-времени в общей теории относительности с временными петлями (машины времени, как назвал открывший их Курт Гёдель), «возможный мир» – это событие в пространстве-времени, или точка в лоренцевом многообразии, с помощью которого геометрически представлено пространство-время. Такой подход разрабатывает французский логик Халими [6], в какой-то мере, идущий по пути топологической интерпретации Тарского.

Ещё один важный вопрос – это в какой мере логические, т.е. сугубо абстрактные

мысленные построения соответствуют тому, что мы (физики, астрономы) наблюдаем в окружающем нас *реальном физическом Мире*? В нашем случае: можно ли принимать как истину то, что устанавливается логической формулой в конкретном логическом исчислении? Думается можно, поскольку мы используем дифференциальное исчисление – дифференциальные уравнения, и принимаем то, что они предсказывают, хотя они покоятся на весьма абстрактном понятии вещественного или комплексного числа, например как класс фундаментальных последовательностей или через дедекиндовы сечения. Число π мы принимаем, но выписать его не можем и не сможем никогда.

Литература

1. Гуц А.К. Реальность прошлого: эмпирические и онтологические доказательства // Математические структуры и моделирование. 2022. № 4 (64). С. 29–43.
2. Гуц А.К. Реальность прошлого и межвременных переходов в общей теории относительности // Основания фундаментальной физики и математики: материалы VI Российской конференции (ОФФМ–2022) / под ред. Ю.С. Владимирова, В.А. Панчелюги. Москва: РУДН, 2022. С. 168–173.
3. Пушкарский А.Г. Курт Гедель и его онтологическое доказательство // РАЦИО.ru. 2014. № 13. С. 153–172.
4. Артемов С.Н. Интуиционистская логика с точки зрения классической // Глобус. Общематематический семинар. М.: МЦНМО, 2004. С. 127–141.
5. Гуц А.К. Скачки во времени, предикатная модальная логика и разрешение парадокса дедушки // Математические структуры и моделирование. 2025. № 4 (76). С. 52–56.
6. Halimi B. Geometric Modal Logic // Notre Dame Journal of Formal Logic. 2023. V. 64/3. P. 377–406.

LOGICAL PROOF OF THE SOLVABILITY OF THE GRANDFATHER PARADOX IN THE FRAMEWORK OF GODEL'S MODAL PREDICATE LOGIC S5 OF THE SECOND ORDER

A.K. Guts

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: aguts@mail.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. In this article the possibility of solving the well-known grandfather paradox within the framework of modal predicate logic is considered. Formulas are given that indicate the impossibility of generating a situation in which a contradiction is realized.

Keywords: time jumps, time machine, modal predicate logic, grandfather paradox.

Дата поступления в редакцию: 05.01.2026