Математические структуры и моделирование
2025. № 3 (75). С. 66–74

УДК 51-74
DOI 10.24147/2222-8772.2025.3.66-74

О ТРУДОЁМКОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ С ИНЕРЦИЕЙ ПРИ РАСЧЁТЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С РЕШЁТЧАТОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

А.А. Магазев
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: magazev@omgtu.ru
Я.А. Серёгина
аспирант, e-mail: yana-1998-11@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. Статья посвящена проблеме определения потоков жидкости на участках гидравлической сети. Для решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений применяется много различных подходов, одним из которых является метод итерации с инерцией. К преимуществам этого метода следует отнести устойчивость сходимости при различных начальных данных, а также наблюдавшуюся в реальных практических задачах слабую зависимость трудоёмкости метода от размерности задачи. Для более детального изучения последнего феномена мы рассматриваем класс модельных гидравлических сетей с решётчатой топологией и исследуем зависимость числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, от размерности задачи. Полученные нами результаты подтверждают указанное наблюдение: число итераций метода практически не зависит от размерности задачи.

Ключевые слова: гидравлическая сеть, решётчатая топология, метод итераций с инерцией.

Введение

Одной из важнейших проблем в теории гидравлических систем является задача определения потоков на участках сети. Сложность решения данной задачи обусловлена, во-первых, большой размерностью гидравлических сетей, а во-вторых, нелинейным характером соответствующих систем алгебраических уравнений. При этом, не смотря на свою довольно длительную историю, теория таких систем всё ещё развивается, а используемые в ней методы и подходы совершенствуются.

Обзор актуальных и современных методов решения задач потокораспределения гидравлических сетей можно найти, например, в относительно свежей работе [1]. Наиболее часто применяемыми методами расчёта режимов работы гидравлических сетей являются итерационные методы [2–4], в основе которых положен метод Ньютона, а также методы, основанные на линеаризации уравнений гидравлической сети [5, 6]. Помимо разработки новых подходов, усилия специалистов также направлены на повышение эффективности существующих методов; например, в работе [7] автор предлагает решать задачу потокораспределения аналитическим методом, сводящим исходную сложную задачу к более простой и тем самым сокращающим количество вычислительных операций.

В работах [8, 9] был предложен итерационный метод решения задач потокораспределения, модифицирующий стандартный метод простой итерации – *метод итерации с инерцией*. Впоследствии на основе этого метода был разработан программный комплекс, позволяющий производить расчёт тепловых сетей крупных городов, содержащих до 10000 участков труб [10]. Однако, не смотря на достигнутые практические результаты, указанный метод всё ещё довольно слабо исследован с теоретической точки зрения; имеется лишь ряд частных результатов, касающихся его сложности и скорости сходимости. В частности, в работе [8] в результате проведения численных экспериментов было отмечено следующее наблюдение: трудоёмкость метода итераций с инерцией очень слабо зависит от размерности задачи, которой является число участков гидравлической сети. Целью настоящей работы является более детальное исследование этого эффекта на примере гидравлических сетей, ассоциированных с решётчатыми графами.

1. Математическая модель гидравлической сети

Рассмотрим гидравлическую сеть с установившимся течением жидкости, состоящей из n участков и m узлов. Число независимых контуров в сети равно $k = (n - m) + 1$. Одной из основных задач расчёта гидравлических систем является задача определения потоков (скоростей течения жидкости) на участках сети. Напомним, как формулируется соответствующая математическая модель.

На каждом участке сети задаётся предполагаемое направление течения. Участки обозначаются буквами из середины латинского алфавита $(i, j, k, \dots)$, в то время как узлы будем обозначать буквами из начала латинского алфавита $(a, b, c, \dots)$. Кроме того, для каждого независимого контура выберем ориентацию по часовой стрелке; сами контуры будем обозначать греческими буквами $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Рассмотрим i-й участок сети, для которого узел a является началом, а узел b – концом. Введём следующие обозначения:

x_i – неизвестный установившийся расход жидкости на i-м участке (считаем, что $x_i > 0$, если направление течения совпадает с ориентацией участка, и $x_i < 0$ – в обратном случае);

p_a и p_b – давления в начальном и конечном узлах участка;

$h_i = p_a - p_b$ – *напор* или падение давления на участке;

H_i – *действующий напор* на участке;

s_i – *гидравлическое сопротивление* участка.

В дальнейшем нам будет удобно использовать также векторно-матричную нотацию. В частности, мы будем рассматривать следующие n-мерные векторы:

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор расходов на всех участках сети;

$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ – вектор напоров;

$\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)^T$ – вектор действующих напоров.

Кроме того, нам понадобятся следующие диагональные матрицы n-го порядка:

$$S = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_n), \quad X(\mathbf{x}) = \operatorname{diag}(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Всюду далее мы будем рассматривать ситуацию, когда в гидравлической сети отсутствуют источники и расходы жидкости. Также будем считать, что на каждом участке сети имеет место *квадратичный закон* гидравлического сопротивления [2]:

$$s_i|x_i|x_i = h_i + H_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Данное равенство можно записать в более компактной матрично-векторной форме:

$$SX(|\mathbf{x}|)\mathbf{x} = \mathbf{h} + \mathbf{H}. \tag{2}$$

Любая гидравлическая сеть должна удовлетворять двум сетевым *законам Кирхгофа*. Во-первых, для каждого узла a соблюдается условие материального баланса: алгебраическая сумма расходов по всем участкам i, связанным общим узлом a, равна нулю. Во-вторых, суммарное изменение напоров для любого независимого контура α гидравлической сети должно также быть нулевым. В матричной форме законы Кирхгофа записываются как

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad B\mathbf{h} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

где A – *матрица соединений*, имеющая размер $(m-1) \times n$; B – *матрица контуров* размера $k \times n$. Обе эти матрицы однозначно задаются структурой графа гидравлической сети. С учётом (2) равенства (3) задают систему нелинейных алгебраических уравнений на неизвестный вектор расходов $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad BSX(\mathbf{x})\mathbf{x} = B\mathbf{H}. \tag{4}$$

Данная система и составляет основной объект исследования в математической модели гидравлической сети. Можно показать, что решение этой системы единственно [8].

На практике при построении системы уравнений (4) используют следующий приём [2]. В графе гидравлической сети выделяют некоторое дерево, включающее в себя все m узлов, после чего все участки сети разбиваются на два подмножества: $m-1$ участков дерева и k участков, не вошедших в это дерево и называемых *хордами*. Каждая хорда представляет собой замыкающий участок контура, соответствующий некоторой строке матрицы B. Подобное разбиение графа сети на дерево и хорды приводит к «расщеплению» всех матриц и векторов на «хордовые» и «древесные» части. Например, $A = (A_c|A_t)$, где A_c и A_t – подматрицы матрицы A, имеющие размеры $(m-1) \times k$ и $(m-1) \times (m-1)$ соответственно. В свою очередь, для матрицы B имеем следующее представление: $B = (I|B_t)$, где I – единичная матрица порядка k, а B_t – матрица размера $k \times (m-1)$. Удобно также считать, что нумерация участков сети выбрана таким образом, что первые k из них соответствуют хордам, $\mathbf{x}_c = (x_1, \dots, x_k)^T$, а последующие – участкам дерева, $\mathbf{x}_t = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$.

В работе [11] указаны полезные соотношения между матрицами A и B, а также между их «хордовыми» и «древесными» частями:

$$AB^T = 0, \quad B_t^T = -A_t^{-1}A_c. \tag{5}$$

Там же отмечается, что любая строка матрицы B является решением системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Метод итерации с инерцией

Сложность решения системы уравнений (4) состоит в том, что указанная система является нелинейной из-за нелинейного характера закона гидравлического сопротивления (1). В этой связи разработка соответствующих методов решения – нетривиальная задача, требующая учёта специфических особенностей рассматриваемой системы уравнений.

Одним из наиболее популярных способов решения задачи определения неизвестных потоков в гидравлической сети является *метод контурных расходов*, в основе которого лежит хорошо известный метод Ньютона [2]. Однако основным недостатком этого подхода является существенная зависимость скорости сходимости от начального приближения, особенно, в случае больших сетей. Кроме того, в задачах большой размерности требуемая точность задания начального приближения должна быть настолько высокой, что применение метода контурных расходов фактически теряет смысл. Рассмотрим альтернативный метод решения системы уравнений (4), который носит название *метод итераций с инерцией* [8, 9].

Посмотрим сначала, как можно попробовать поискать решение системы уравнений (4) методом простых итераций. Рассмотрим последовательность приближений вида

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = \mathbf{x}^{(N)} + \Delta\mathbf{x}^{(N+1)},$$

где N – номер очередного приближения, $N = 0, 1, 2, \ldots$ Для того, чтобы каждое приближение $\mathbf{x}^{(N)}$ удовлетворяло системе $A\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{0}$, необходимо выполнение условия

$$\mathbf{x}^{(N)} = B^T\mathbf{x}_c^{(N)}, \quad N = 0, 1, \ldots,$$

где B – матрица контуров гидравлической сети; $\mathbf{x}_c^{(N)}$ – часть вектора $\mathbf{x}^{(N)}$, отвечающая хордам сети. Зная N-е приближение $\mathbf{x}^{(N)}$, следующее приближение ищем как решение $\mathbf{x}^{(N+1)}$ линейной системы уравнений:

$$BSX(\mathbf{x}^{(N)})\mathbf{x}^{(N+1)} = B\mathbf{H}.$$

Используя формулы (5), решение данной системы можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = B^T\left[BSX(\mathbf{x}^{(N)})B^T\right]^{-1}B\mathbf{H}. \tag{6}$$

В результате мы получили итерационную последовательность приближений, в которой $(N+1)$-е приближение выражается через N-е.

Как показывают простейшие примеры, последовательность (6), к сожалению, в общем случае расходится. Для обеспечения её сходимости в работе [8] было предложено вместо вектора $\mathbf{x}^{(N)}$, входящего в правую часть равенства (6), брать взвешенное среднее векторов $\mathbf{x}^{(N)}$ и $\mathbf{x}^{(N-1)}$:

$$\bar{\mathbf{x}}^{(N+1)} = \alpha\mathbf{x}^{(N)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(N-1)}.$$

Здесь α – весовой коэффициент, удовлетворяющий условию $0 < \alpha < 1$. С учётом этого простая итерационная процедура (6) модифицируется следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = B^T\left[BSX\left(\alpha\mathbf{x}^{(N)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(N-1)}\right)B^T\right]^{-1}B\mathbf{H}. \tag{7}$$

Таким образом, данный подход можно рассматривать как модификацию метода простой итерации, где на каждом последующем шаге происходит усреднение полученных ранее приближений. Для однозначного задания данной итерационной последовательности необходимо выбрать два начальных вектора $\mathbf{x}_c^{(0)}$ и $\mathbf{x}_c^{(1)}$, соответствующих только хордовой части решения. Процесс приближения продолжается до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}^{(N+1)} - \mathbf{x}^{(N)}\| \geqslant \varepsilon,$$

где ε – заданная точность (погрешность) решения; $\|\cdot\|$ – некоторая фиксированная норма в $\mathbb{R}^n$. В нашей работе мы выбираем норму в виде $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

Отметим, что на каждой итерации нам приходится обращать $k \times k$ матрицу, что эквивалентно решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. На практике предпочтительно это делать с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента, что служит некоторой гарантией от ошибок округления.

3. Гидравлические сети с решётчатой топологией

В настоящем разделе мы исследуем трудоёмкость метода итераций с инерцией на примере гидравлической сети с решётчатой топологией. Мы рассматриваем сеть в виде решётки размера $1 \times k$, где k – произвольное натуральное число, задающее размерность задачи (рис. 1). Число k, очевидно, равно числу независимых контуров сети, в то время как числа узлов m и рёбер n сети определяются через k формулами

$$m = 2(k+1), \quad n = 3k+1.$$

На рис. 1 также изображены предполагаемые направления расходов x_i, причём на первых k участках расположены действующие напоры H_i, изображаемые стрелками в кружочках. Наличие ненулевых напоров H_i в каждом контуре гарантирует, что циркуляция жидкости не будет затухать с ростом номера ячейки. Положительным направлением всех контуров считается направление «по часовой стрелке».

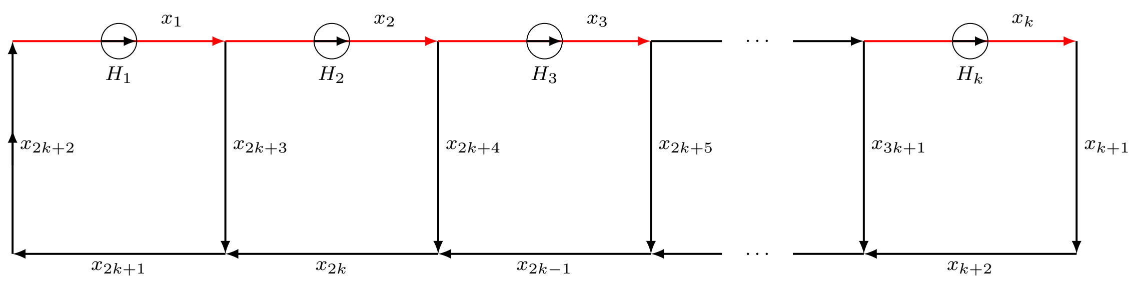

Рис. 1. Гидравлическая сеть в виде $1 \times k$-решётки

Нашей основной задачей будет являться исследование зависимости числа итераций, необходимого для достижения заданной точности, от размерности системы, задаваемой числом k.

Для решения поставленной задачи мы разработали программу, написанную на языке Wolfram Language в рамках системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Входными параметрами программы являются число ячеек k гидравлической сети и точность решения ε. Сама сеть представляется в виде графа, конструируемого при помощи встроенной функции `Graph`. Матрица A, являющаяся матрицей инцидентности данного графа, формируется с помощью встроенной функции `IncidenceMatrix`, тогда как матрица контуров, имеющая структуру $B = (I| - A_t^{-1}A_c)$, однозначно определяется матрицей A.

Все гидравлические сопротивления мы полагаем равными единице, так что $S = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ – единичная $n \times n$-матрица. В свою очередь, вектор напоров $\mathbf{H}$ выбирается случайно, т. е. каждая его компонента H_i есть равномерно распределённое (действительное) случайное число из диапазона $[-1, 1]$. Случайным образом также выбирается начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ к решению задачи: хордовая часть $\mathbf{x}_c^{(0)}$ есть случайный вектор, компоненты которого равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Кроме того, мы полагаем $\mathbf{x}^{(1)} = 0{,}5\mathbf{x}^{(0)}$. После этого в цикле реализуется последовательное применение формулы (7) и продолжается до тех пор, пока не достигается заданная точность ε. Параметр α, обеспечивающий «инерцию» данной итерационной процедуры, выбран равным $\alpha = 0{,}3$. Как только решение получено, снова случайным образом выбираются вектор напоров $\mathbf{H}$ и начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$, после чего все описанные выше шаги алгоритма повторяются заново. При заданных k и ε алгоритм запускается `rep` = 100 раз. При каждом запуске мы подсчитываем требуемое число применений формулы (7) (число итераций алгоритма) и затем при завершении всей серии испытаний вычисляем среднее число итераций $\langle N \rangle$ и соответствующее среднее квадратическое отклонение σ_N.

В рамках настоящего исследования нами было проведено 90 описанных серий экспериментов: для каждого из трёх значений точности $\varepsilon = 0{,}01$, $0{,}001$ и $0{,}0001$ мы провели по 30 серий экспериментов для значений k от $k_1 = 10$ до $k_{30} = 300$ с шагом $\Delta k = 10$. Полученные нами результаты приведены в табл. 1–3. В целях экономии места мы не указываем в этих таблицах соответствующие средние квадратические отклонения σ_N; отметим лишь, что σ_N имеет тенденцию к уменьшению при росте N и/или уменьшении ε. Максимальное значение, которое принимала величина σ_N в наших экспериментах, была равна $1{,}92$.

Таблица 1. Среднее число итераций $\langle N \rangle$ при различных k для $\varepsilon = 0{,}01$

k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$
10	12,03	70	14,15	130	14,92	190	15,26	250	15,19
20	12,63	80	14,51	140	14,89	200	15,18	260	15,23
30	13,17	90	14,50	150	15,09	210	15,31	270	15,30
40	13,40	100	14,66	160	15,12	220	15,42	280	15,52
50	13,79	110	14,72	170	15,23	230	15,22	290	15,46
60	14,18	120	14,83	180	15,28	240	15,39	300	15,37

Таблица 2. Среднее число итераций $\langle N\rangle$ при различных k для $\varepsilon = 0{,}001$

k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$
10	16,10	70	18,28	130	19,12	190	19,27	250	19,45
20	17,07	80	18,49	140	18,87	200	19,38	260	19,52
30	17,51	90	18,89	150	18,85	210	19,28	270	19,72
40	17,84	100	18,67	160	19,11	220	19,41	280	19,69
50	17,84	110	18,95	170	19,05	230	19,50	290	19,51
60	18,17	120	19,09	180	19,21	240	19,22	300	19,50

Таблица 3. Среднее число итераций $\langle N\rangle$ при различных k для $\varepsilon = 0{,}0001$

k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$	k	$\langle N\rangle$
10	19,62	70	21,73	130	22,27	190	22,61	250	22,75
20	20,35	80	21,90	140	22,22	200	22,59	260	22,82
30	20,76	90	22,05	150	22,41	210	22,66	270	22,92
40	21,23	100	22,10	160	22,44	220	22,59	280	22,77
50	21,30	110	22,23	170	22,45	230	22,77	290	22,71
60	21,73	120	22,05	180	22,62	240	22,90	300	22,86

На основании приведённых нами таблиц построены соответствующие графики зависимости среднего числа итераций $\langle N\rangle$, требуемого для достижения заданной точности ε, от числа k ячеек гидравлической сети. Эти графики изображены на рис. 2. Из данных графиков видно, что с уменьшением ε увеличивается требуемое число итераций, и, что более интересно, среднее число итераций $\langle N\rangle$ сначала растёт с ростом k, но затем этот рост замедляется, и при больших k это число *практически не зависит* от k. Иными словами, трудоёмкость метода итераций с инерцией очень слабо зависит от количества неизвестных задачи в силу того, что последнее представляет собой число участков сети, равное $n = 3k + 1$. В то же время следует отметить, что с увеличением n растёт, например, число операций, требуемых для обращения матриц в формуле (7), что, безусловно, приводит к увеличению времени, необходимому для поиска решения задачи.

Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели математическую модель гидравлической сети, предназначенную для расчёта режимов потокораспределения подобных систем. Для решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений применяется довольно много различных подходов, одним из которых является метод итерации с инерцией. К преимуществам данного метода следует отнести устойчивость сходимости при различных начальных данных, а также наблюдавшуюся в реальных практических задачах слабую зависимость трудоёмкости метода от

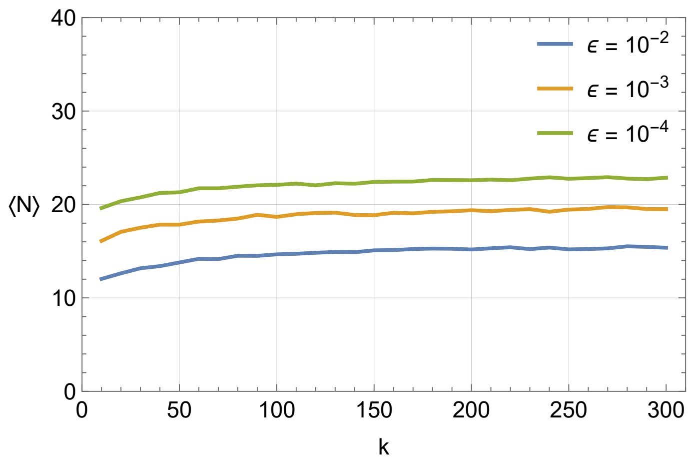

Рис. 2. Графики зависимости среднего числа итераций $\langle N \rangle$ от числа ячеек k гидравлической сети при трёх различных значениях точности ε

размерности задачи. Для более детального изучения последнего феномена мы рассмотрели класс модельных гидравлических сетей с решётчатой топологией, для которого исследовали зависимость числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, от размерности задачи, в качестве которой рассматривалось число ячеек решётки. Полученные результаты подтверждают указанное наблюдение: число итераций метода практически не зависит от размерности задачи.

Дальнейший интерес представляет исследование трудоёмкости метода итераций с инерцией для более сложных модельных классов гидравлических сетей: двумерных решёток и их деформаций, а также сетей, ассоциированных со случайными графами более общего вида.

Литература

1. Корельштейн Л.Б. О сходимости метода «прогнозируемого расхода» расчёта гидравлических цепей // Автоматизация и информатизация ТЭК. 2023. Т. 605, № 12. С. 44–52.
2. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985.
3. Alvarruiz F., Martinez-Alzamora F., Vidal A.M. Improving the Efficiency of the Loop Method for the Simulation of Water Distribution Systems // Journal of Water Resources Planning and Management. 2015. Vol. 141, No. 10.
4. Мороз М.В. Методика избыточных проектных схем и метод поконтурной минимизации систем группового водоснабжения и водоотведения // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2021. Т. 11, № 1. С. 60–73.
5. Баранчикова Н.И., Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Неканоническая задача потокораспределения с заданными напорами и отборами в узлах // Вода и экология: проблемы и решения. 2014. Т. 58, № 2. С. 31–38.
6. Новицкий Н.Н. Расчёт потокораспределения в гидравлических цепях на базе их линеаризации узловыми моделями секущих и хорд // Изв. РАН. Энергетика. 2013. № 6. С. 5669.
7. Якшин С.В. Аналитический метод решения задачи потокораспределения тепловой сети // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2021. Т. 25, № 1. С. 80–96.

8. Файзуллин Р.Т. О решении нелинейных алгебраических систем гидравлики // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т. 2, № 2. С. 176–184.
9. Жихалкина Н.Ф., Файзуллин Р.Т. Задача минимизации суммарных затрат по транспортировке нефтепродуктов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 63–73.
10. Логинов К.В., Мызников А.М., Файзулин Р.Т. Расчёт, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 9. С. 92–106.
11. Меренков А.П. Дифференциация методов расчёта гидравлических цепей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 5. С. 1237–1248.

COMPLEXITY ANALYSIS OF THE ITERATION METHOD WITH INERTIA FOR CALCULATING HYDRAULIC NETWORKS WITH THE LATTICE TOPOLOGY

A.A. Magazev
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: magazev@omgtu.ru
Ya.A. Seriogina
Graduate Student, e-mail: yana-1998-11@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. The article is devoted to the problem of determining flows in sections of a hydraulic network. Many different approaches are used to solve the corresponding system of nonlinear algebraic equations, one of which is the iteration method with inertia. The advantages of this method include the stability of convergence under initial data, as well as the weak dependence of the method's complexity on the problem dimension observed in real practical problems. For a more detailed study of the latter phenomenon, we consider a class of model hydraulic networks with the lattice topology and investigate the dependence of the number of iterations required to achieve a given accuracy on the problem dimension. The results obtained confirm this observation: the number of method iterations is practically independent of the problem dimension.

Keywords: hydraulic network, lattice topology, iteration method with inertia.

Дата поступления в редакцию: 03.04.2025