

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 3 (75)
2025**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 3 (75)

**Омск
2025**

Редакционная коллегия

А. К. Гуц	главный редактор , председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, заслуженный профессор Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, профессор кафедры информационных технологий и математики Сочинского государственного университета, г. Сочи
Н. Ф. Богаченко	зам. гл. редактора , технический редактор, канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой компьютерных технологий и сетей Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, г. Омск
Д. Н. Лавров	зам. гл. редактора , выпускающий редактор, канд. техн. наук, доцент, проректор по образовательной деятельности и информатизации Нижневартковского государственного университета, г. Нижневартовск
В. В. Варламов	доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики Сибирского государственного индустриального университета, г. Новокузнецк
В. П. Голубятников	доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева, г. Новосибирск
С. И. Горлов	доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета, г. Нижневартовск
А. Г. Гринь	доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры информационной безопасности Омского государственного университета им. Ф. М. Достоевского, г. Омск
В. А. Еровенко	доктор физ.-мат. наук, профессор, г. Минск, Республика Беларусь
V. Zilber	Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, United Kingdom
А. Н. Кабанов	канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики Нижневартковского государственного университета, г. Нижневартовск
А. В. Копыльцов	доктор техн. наук, профессор, профессор кафедры информационных систем Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), г. Санкт-Петербург
А. Г. Коробейников	доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкина РАН, г. Санкт-Петербург
П. А. Корчагин	доктор техн. наук, профессор, ректор Омского государственного технического университета, г. Омск
V. Kreinovich	Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA
В. А. Плетюхов	доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь
Л. Б. Соколинский	доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой системного программирования Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского университета), г. Челябинск
A. A. Fedorenko	Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France
A. Jadczyk	Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France, and Ronin Institute, Montclair, New Jersey, USA

Учредитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Реестровая запись ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск,
пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 14.10.2025.

Тираж 25 экз.

Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале», «Mathematical Reviews» (США), «Zentralblatt für Mathematik» (Германия) и в РИНЦ (elibrary.ru). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, входящих в Международные реферативные базы данных (МРБД) и системы цитирования (Список от 31.12.2023, № 769), в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25.07.2014 № 793). Имеет категорию K1.

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

aguts@mail.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

dmtrl@ya.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

- Р.Н. Баротов. *О построении решений задачи сопряжения для одного класса обобщённых систем Коши – Римана с ограниченными коэффициентами* 5
- А.А. Бугаенко, И.Ю. Крутова. *Численное моделирование линеаризованной на точном решении полной системы уравнений Навье – Стокса* 11
- В.В. Варламов. *Теоретико-групповое описание неперiodической системы элементов. VII: спин и удвоение периодов* 26
- А.К. Гуц. *Возникновение геометрии стационарной вселенной де Ситтера из физической структуры Кулакова ранга (7, 7)* 42
- С.Ю. Зайков, Е.В. Ворожцов. *Проблемы качества и надёжности данных в справочниках по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений* 49

Прикладная математика и моделирование

- А.А. Магазев, Я.А. Серёгина. *О трудоёмкости метода итераций с инерцией при расчёте гидравлических цепей с решётчатой топологией* 66
- А.А. Тоцкий, Р.Ю. Симанчёв, И.В. Уразова. *О схеме локального поиска для задачи максимизации разреза, порожденного минимальным доминирующим множеством* 75
- И.М. Федотова, М.И. Медведева, А.С. Кацунова. *Алгоритм построения минимальных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ второй степени точности* 80
- I.V. Chukhraev, V.E. Drach, J.V. Torkunova. *Mathematical Modeling of MTI and MTD Efficiency in Shipborne Radar Systems* 90

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



Компьютерные науки

- А.Д. Байдалин, В.В. Варламов. *Модель прогнозирования временных рядов на основе сингулярно-спектрального анализа и нейронной сети LSTM* . . 101
- Т.Л. Салова, И.С. Суворов. *Синтетические данные: проблемы и пути их решения* 116
- Р.А. Светлов, А.Н. Кабанов. *SVM в определении авторства текста: актуальность и перспективы дальнейших исследований* 122
- В.В. Фирстов. *Обзор и сравнение существующих методов оптимизации производительности при отрисовке объектов на дальних расстояниях в UNITY 3D* 127

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ КОШИ – РИМАНА С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Н. Баротов

преподаватель, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова,
Худжанд, Таджикистан

Аннотация. В статье рассматривается задача линейного сопряжения для обобщённой системы Коши – Римана вида

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $z = re^{i\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$ – множество целых чисел и $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z| & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$

Изложена схема построения решений системы (1) из класса M – функций из $C^1(G^+ \cup G^-)$, непрерывно продолжаемые на окружность $\{t : |t| = 1\}$ как изнутри, так и извне, $G^+ = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, $G^- = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$ и удовлетворяющие условиям:

$$w^+(t) = t^k w^-(t), \quad |t| = 1, \quad (2)$$

$$|w(z)| \leq P(1 + |z|^N), \quad (3)$$

здесь $k \in \mathbb{Z}$; N – неотрицательное целое число; $w^+(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| < 1$; $w^-(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| > 1$; P – постоянная, в общем зависящая от $w(z)$. Определена размерность пространства решений задачи (1) – (3). Эта размерность непосредственно выражается через числа m и k .

Ключевые слова: обобщённая система Коши – Римана, задача линейного сопряжения, ограниченные коэффициенты.

Введение

Задача сопряжения для обобщённых аналитических функций, т. е. решений уравнения

$$w_{\bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0,$$

рассматривалась Л.Г. Михайловым [1, 2], Г.Н. Александрия [3] и другими (см., например, [4]). Используя так называемое представление первого рода обобщённых

аналитических функций, Л.Г. Михайлов задачу сопряжения свёл к такой же задаче для аналитических функций. В работах В.Н. Монахова и С.Н. Антонцева (см., например, [5]) рассматривалась задача сопряжения для квазилинейных равномерно эллиптических систем вида

$$w_{\bar{z}} + q_1(z, w) w_z + q_2(z, w) \overline{w_z} = f(z, w),$$

где $|q_1(z, w)| + |q_2(z, w)| \leq q_0 < 1$; получены условия разрешимости задачи. Г. Джангибеков и его ученики (см., например, [6]) рассматривали задачу сопряжения для случая $A(z) = \bar{z}^{-1}a(z)$, $B(z) = \bar{z}^{-1}b(z)$, где $a(z)$ и $b(z)$ – измеримые и ограниченные в единичном круге функции, имеющие предельные значения при $z \rightarrow 0$. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи и получена формула для индекса.

В настоящей статье для обобщённых систем Коши – Римана вида

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \overline{w} = 0, \quad (4)$$

где $z = re^{i\varphi}$; $m \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z| & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |z| > 1, \end{cases}$ рассматривается задача линейного сопряжения.

Системы вида (1), а также более общие системы в гёльдеровых пространствах C_α^1 функций, определённых на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, изучены в ряде работ Э. Мухамадиева и С. Байзаева (см., например, [7, 8]), найдены критерии нётеровости соответствующих операторов $L : C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$, и подсчитан индекс. В частности, для оператора $L_m : C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ имеет место следующая

Теорема 1. 1) оператор $L_m : C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ нётеров;

2) индекс оператора L_m равен m ;

3) $\dim \text{Ker} L_m = \begin{cases} m & \text{при } m \geq 0, \\ 0 & \text{при } m < 0. \end{cases}$

Постановка задачи $S_{m,k}$

Найти решения уравнения (1) из класса M , удовлетворяющие условиям:

$$w^+(t) = t^k w^-(t), \quad |t| = 1, \quad (5)$$

$$|w(z)| \leq P(1 + |z|^N), \quad (6)$$

здесь $k \in \mathbb{Z}$; N – неотрицательное целое число; $w^+(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| < 1$; $w^-(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| > 1$; P – постоянная, в общем зависящая от $w(z)$.

Для нахождения решений задачи $S_{m,k}$ будем использовать ниже приводимую теорему, установленную нами в [9].

Теорема 2. Решения из класса M уравнения (1) представляются в виде

$$w(z) = \begin{cases} W^+(r, \varphi) & \text{при } r < 1, \\ W^-(r, \varphi) & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

$$\text{где } W^+(r, \varphi) = h_m r^s \left(A_s e^{1-r^2} + i B_s e^{r^2-1} \right) e^{is\varphi} + w_+(r, \varphi);$$

$$W^-(r, \varphi) = h_m r^s \left(A_s e^{2-2r} + i B_s e^{2r-2} \right) e^{is\varphi} + w_-(r, \varphi);$$

здесь $h_m = \frac{1-(-1)^m}{2}$, $s = \frac{m-1}{2}$, A_s ; B_s – произвольные вещественные постоянные,

$$\begin{aligned} w_+(r, \varphi) = r^{s+1} \sum_{n \geq [s+1]} & \left[\left(A_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2) + B_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2) \right) e^{in\varphi} + \right. \\ & \left. + \left(-\bar{A}_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) + \bar{B}_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w_-(r, \varphi) = r^{\frac{m}{2}} \sum_{n \geq [s+1]} & \left[\left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) \right) e^{in\varphi} + \right. \\ & \left. + \left(-\bar{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) + \bar{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right]; \end{aligned} \quad (4')$$

$[\cdot]$ – целая часть числа; A_n – произвольные комплексные постоянные при $n \geq 0$ и $A_n = 0$ при $[s+1] \leq n \leq -1$; B_n – произвольные комплексные постоянные при $1 \leq s+1 \leq n \leq m-1$ и $B_n = 0$ в остальных случаях; C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные; I_ν, K_ν – функции Бесселя и Макдональда.

Построение решений задачи $S_{m,k}$

Условие (2) перепишем в виде:

$$W^+(1, \varphi) = e^{ik\varphi} W^-(1, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8)$$

Учитывая условие (3), экспоненциальный рост функции $I_\nu(r)$ при $r \rightarrow +\infty$, сингулярность функции $K_\nu(r)$ при $r = 0$ и непрерывность функции $w(z)$ в точке $z = 0$, имеем:

$$B_s = 0, \quad B_n = 0 \quad \forall n \geq m, \quad C_n = 0 \quad \forall n \geq [s+1]. \quad (9)$$

Для удобства разложения граничных значений $W^+(1, \varphi)$ и $W^-(1, \varphi)$ представим в виде

$$W^+(1, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{in\varphi}, \quad W^-(1, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{in\varphi},$$

где

$$\alpha_n = \begin{cases} h_m A_s & \text{при } n = [s], \\ A_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(1) & \text{при } n \geq [s+1], \\ -\bar{A}_{m-1-n} I_{-\frac{n}{2} + \frac{m+1}{4}}(1) + \bar{B}_{m-1-n} K_{-\frac{n}{2} + \frac{m+1}{4}}(1) & \text{при } n < [s]; \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} h_m A_s \text{ при } n = [s], \\ D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2) \text{ при } n \geq [s+1], \\ \overline{D}_{m-1-n} K_{-n+\frac{m}{2}}(2) \text{ при } n < [s]. \end{cases}$$

Тогда условие (8) будет эквивалентно равенству:

$$\alpha_n = \beta_{n-k}. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда m — чётное положительное число и $k > 0$. Тогда из (10) следуют соотношения:

$$\begin{cases} a_n = c_{n-k} \text{ при } n \geq \frac{m}{2} + k, \\ b_n = d_{m+k-n-1} \text{ при } \frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1, \\ b_n = d_{n+k} \text{ при } n \geq \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Эти соотношения, в свою очередь, в зависимости от изменения n распадаются на следующие две системы равенств:

$$\begin{cases} a_n = d_{m+k-n-1} \\ b_n = d_{n+k}, \end{cases} \text{ при } \frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1, \quad (12)$$

$$\begin{cases} a_n = c_{n-k}, \\ b_n = d_{n+k}, \end{cases} \text{ при } n \geq \frac{m}{2} + k. \quad (13)$$

Подставляя выражения для a_n , b_n , c_n , d_n в (12) и (13), получим следующие соотношения

$$\begin{cases} A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = \overline{D}_{m-n+k-1} K_{n-k-\frac{m}{2}}(2), \\ -A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = D_{n+k} K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2), \end{cases} \quad \frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1, \quad (14)$$

$$\begin{cases} A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = D_{n-k} K_{n-k-\frac{m}{2}}(2), \\ -A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = D_{n+k} K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2), \end{cases} \quad n \geq \frac{m}{2} + k. \quad (15)$$

Отсюда можно выразить A_n , B_n через D_{n-k} , D_{n+k} и $D_{m-n+k-1}$.

При $\frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1$:

$$A_n = \gamma_n \overline{D}_{m-n+k-1} - \delta_n D_{n+k}, \quad B_n = \zeta_n \overline{D}_{m-n+k-1} + \eta_n D_{n+k}, \quad (16)$$

где $\gamma_n = K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) K_{n-k-\frac{m}{2}}(2)$, $\delta_n = K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2)$;

$$\zeta_n = I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) K_{n-k-\frac{m}{2}}(2), \quad \eta_n = I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2).$$

При $n \geq \frac{m}{2} + k$:

$$A_n = \gamma_n D_{n-k} - \delta_n D_{n+k}, \quad B_n = \zeta_n D_{n-k} + \eta_n D_{n+k}, \quad (17)$$

здесь мы учитывали чётность функции $K_\nu(r)$ относительно индекса ν .

Возможны два случая: а) $k \leq \frac{m}{2}$; б) $k \geq \frac{m}{2} + 1$.

Случай $k \leq \frac{m}{2}$. Так как m — чётное, то в (16) индексы постоянных $\overline{D}_{m-n+k-1}$ и D_{n+k} не совпадают, поэтому эти постоянные, другими словами постоянные D_j для $\frac{m}{2} \leq j \leq \frac{m}{2} + 2k - 1$, можно взять произвольными, при этом количество таких постоянных будет равно $2k$.

Теперь перейдём к рассмотрению системы (15). Если $k \geq \frac{m}{6}$, то в (15) $\frac{m}{2} + k \leq n \leq m - 1$ или $\frac{m}{2} \leq n - k \leq m - k - 1 \leq \frac{m}{2} + 2k - 1$. В этом случае D_{n-k} заданы и, взяв произвольными D_{n+k} (их количество равно $\frac{m}{2} - k$), по формулам (17) находим A_n и B_n . При $n \geq m$, учитывая соотношения (9) и (17), получим

$$D_{n+k} = -\frac{\zeta_n}{\eta_n} D_{n-k}. \quad (18)$$

Для $m \leq n \leq m + 2k - 1$ правая часть формулы (18) известна, поэтому для таких n будут известны D_{n+k} . Далее, опять используя (18), можно определить D_{n+k} для остальных $n \geq m$.

Таким образом, при $\frac{m}{6} \leq k \leq \frac{m}{2}$, задавая D_j произвольными для $\frac{m}{2} \leq j \leq m + k - 1$, определяем все остальные коэффициенты. Общее количество произвольных постоянных будет равно $\frac{m}{2} + k$. Размерность пространства решений задачи $S_{m,k}$ будет равна $2 \left(\frac{m}{2} + k \right) = m + 2k$.

Пусть $0 < k < \frac{m}{6}$. Тогда для $\frac{m}{2} + k \leq n \leq m - 1$, т. е. $\frac{m}{2} + 2k \leq n + k \leq m + k - 1$, задаём произвольно D_{n+k} (их количество равно $\frac{m}{2} - k$). Индекс постоянной D_{n-k} меняется в промежутках $\left[\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 2k - 1 \right]$ и $\left[\frac{m}{2} + 2k, m - k - 1 \right]$. Для первого промежутка D_{n-k} известны (см. решение системы (11)), а для второго — совпадают с $D_{n'+k}$, где $\frac{m}{2} + k \leq n' \leq m - 2k - 1 < m - 1$. В этом случае общее количество произвольных постоянных будет равно $2k + \frac{m}{2} - k = \frac{m}{2} + k$, т. е. и в этом случае размерность пространства решений задачи $S_{m,k}$ также будет равна $m + 2k$.

Итак, в случае m — чётное и $0 < k \leq \frac{m}{2}$, мы определили множество решений задачи $S_{m,k}$, которое зависит от $\frac{m}{2} + k$ произвольных комплексных постоянных.

Теорема 3. Пусть m — чётное и $0 < k \leq \frac{m}{2}$. Тогда решения задачи $S_{m,k}$ даются формулами вида (7), (4'), в которых $B_n = 0$ при $n \geq m$, $C_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, D_j — произвольны для $\frac{m}{2} \leq j \leq m + k - 1$, A_n , B_n и D_t при $t \geq n + k$ определяются через D_j . Множество решений задачи зависит от $\frac{m}{2} + k$ произвольных комплексных постоянных.

Остальные случаи исследуются аналогично. Размерность пространства решений задачи $S_{m,k}$ находится следующим образом:

$$\dim S_{m,k} = \begin{cases} m + 2|k| - 2, & \text{если } k \neq 0, m \in \mathbb{H}, \\ 2 \left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + |k| \right), & \text{если } \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + |k| \geq 0, m \notin \mathbb{H}, \\ m, & \text{если } m \geq 0, k = 0, \\ 0, & \text{если } \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + |k| < 0, \end{cases}$$

где $\mathbb{H}$ — множество нечётных положительных чисел.

Литература

1. Михайлов Л.Г. Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных урав-

- нений эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения // Учёные записки. Труды физико-математического факультета Таджикского государственного университета. 1957. Т. 10. С. 32–79.
2. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963. 183 с.
 3. Александрия Г.Н. Об одной граничной задаче для обобщённых аналитических функций // Труды Тбилисского университета. 1955. Т. 56. С. 135–139.
 4. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 510 с.
 5. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: СО Наука, 1977. 424 с.
 6. Джангибеков Г., Бобоев Э.Д. Задача линейного сопряжения решений обобщённой системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2021. № 4. С. 12–20.
 7. Байзаев С., Мухамадиев Э.М. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.
 8. Байзаев С. О задаче линейного сопряжения для обобщённых аналитических функций на полуплоскости // Доклады АН Респ. Таджикистан, 1999. Т. 42, № 3. С. 74–79.
 9. Байзаев С., Баротов Р.Н. О построении регулярных решений одного класса обобщённых систем Коши – Римана с ограниченными на всей плоскости коэффициентами // Учёные записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 297–305.

ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO THE COUPLING PROBLEM FOR A CLASS OF GENERALIZED CAUCHY – RIEMANN SYSTEMS WITH BOUNDED COEFFICIENTS

R.N. Barotov

Instructor, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Khujand State University named after Academician B. Gafurov, Khujand, Tajikistan

Abstract. The article discusses the problem of linear conjugation for generalized Cauchy – Riemann systems of the form

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \bar{w} = 0, \quad (1)$$

where $z = re^{i\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$ – the set of integers, and $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z| & \text{if } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{if } |z| > 1. \end{cases}$ A scheme for constructing solutions to the system (1) from the class of M -functions in $C^1(G^+ \cup G^-)$, continuously extended on the circle $\{t : |t| = 1\}$ both from the inside and outside, is presented. Here, $G^+ = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ and $G^- = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$, and the conditions are satisfied:

$$w^+(t) = t^k w^-(t), \quad |t| = 1, \quad (2)$$

$$|w(z)| \leq P(1 + |z|^N), \quad (3)$$

where $k \in \mathbb{Z}$, N is a non-negative integer, $w^+(t)$ is the limit of $w(z)$ as $z \rightarrow t$ with $|z| < 1$, and $w^-(t)$ is the limit of $w(z)$ as $z \rightarrow t$ with $|z| > 1$. P is a constant that generally depends on $w(z)$. The dimension of the solution space for the problem (1) – (3) is defined. This dimension is directly expressed in terms of the numbers m and k .

Keywords: generalized Cauchy – Riemann system, linear conjugation problem, bounded coefficients .

Дата поступления в редакцию: 30.04.2025

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ НА ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

А.А. Бугаенко^{1,2}

вед. инж.-мат., e-mail: BugaenkoAA@vniitf.ru

И.Ю. Крутова¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

¹Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

²Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е.И. Забабахина, Снежинск, Россия

Аннотация. Для линеаризованной на точном решении полной системы уравнений Навье – Стокса при учёте действия сил тяжести и Кориолиса численно моделируется возникновение и развитие восходящих закрученных потоков разной интенсивности с использованием продува вверх по трубе. Численное решение линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса с поставленными начально-краевыми условиями описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Численный расчёт скоростных характеристик трёхмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа происходит в положительном направлении, обусловлена наличием в линеаризованной полной системе уравнений Навье – Стокса членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, ещё раз численно получила подтверждение схема возникновения восходящего закрученного потока.

Ключевые слова: система уравнений Навье – Стокса, сила Кориолиса, линеаризация, численное моделирование, продув.

Введение

Согласно предложенной в монографии [1] схеме возникновения и устойчивого существования восходящего закрученного потока (ВЗП) основными причинами устойчивого функционирования ВЗП являются: существование достаточно длительного по времени восходящего потока воздуха; вращение Земли, которое через действие силы Кориолиса придаёт существенную окружную скорость частицам воздуха в придонной части ВЗП. В статье описываются численные исследования по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части ВЗП с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу вверх. Исходя из результатов экспериментов, весьма

интересно численно смоделировать возникновение и развитие ВЗП именно с использованием продува вверх по трубе. Поэтому далее в этой статье описываются результаты численных расчётов газодинамических параметров: плотности, температуры, включая скоростные характеристики трёхмерных нестационарных восходящих закрученных течений газа определённого масштаба, вызванных вертикальным продувом. Численный расчёт подобных течений газа позволяет дать конкретные предложения и рекомендации по возможному проведению крупномасштабного эксперимента по закрутке больших масс воздуха.

1. Линеаризованная полная система уравнений Навье – Стокса

Полная система уравнений Навье – Стокса в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, линеаризованная на точном решении (однородном покое)? имеет следующий вид [1–6]:

$$\begin{cases} \rho_t + (u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + \frac{\rho_x}{\gamma} + \frac{T_x}{\gamma} = av - bw + \mu_0 \left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right), \\ v_t + \frac{\rho_y}{\gamma} + \frac{T_y}{\gamma} = -au + \mu_0 \left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right), \\ w_t + \frac{\rho_z}{\gamma} + \frac{T_z}{\gamma} = bu - g + \mu_0 \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right), \\ T_t + (\gamma - 1)(u_x + v_y + w_z) = \kappa_0 (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность газа; T – температура газа; (u, v, w) – вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox, Oy, Oz ;

$$\Omega = (0; \Omega_2; \Omega_3), \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

– вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси; ψ – широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z) , вращающейся вместе с Землёй; $a = 2\Omega_3$; $b = 2\Omega_2$; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$; μ_0, κ_0 – постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности; $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения.

Благодаря наличию в правых частях уравнений движений – второго, третьего и четвёртого уравнений системы (1) – слагаемых, отвечающих за присутствие ускорения Кориолиса, в поток газа вносится дополнительный внешний импульс. Именно он и приводит к закрутке вязкого теплопроводного газа в придонной части вертикального теплового восходящего потока.

В системе (1) при введении безразмерных переменных масштабные значения связаны следующими соотношениями [1–5]:

$$u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}} = c_{00}, \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}, \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}, \quad e_{00} = c_{v0}T_{00},$$

где $\gamma = 1 + R/c_{v0}$, R – универсальная газовая постоянная, c_{v0} – удельная теплоёмкость. Следовательно, за масштабные значения скорости, давления и внутренней

энергии выбраны соответственно скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами ρ_{00}, T_{00} . В качестве масштабного значения скорости берётся значение $u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3}10^3$ м/с, близкое к значению скорости распространения звука в воздухе при стандартных условиях, т. е. при $\rho_{00} = 1,29$ кг/м³, $T_{00} = 288$ К:

Постоянные безразмерные значения коэффициентов вязкости μ_0 и теплопроводности κ_0 определяются следующими соотношениями

$$\mu_0 = \frac{4\mu_*}{3\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}r_{00}},$$

где μ_*, κ_* – размерные значения постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Для воздуха $\gamma = 1,4$, тогда $\kappa_0 \approx 1,46\mu_0$.

2. Конечно-разностная аппроксимация линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса и начально-краевых условий

Для расчёта нестационарных трёхмерных течений в качестве расчётной области принимается прямоугольный параллелепипед, в котором строится равномерная прямоугольная сетка. Для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса при учёте действия силы Кориолиса и силы тяжести строится следующая разностная аппроксимация. Для аппроксимации производной по временной переменной используются значения функции с двух последовательных временных слоёв. А для аппроксимации производных по пространственным переменным используются центральные разности значений функций с предыдущего временного слоя:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^n}{\Delta t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}, \quad (3)$$

где под f подразумеваются проекции вектора скорости на декартовы оси, а также плотность и температура газа

$$f = (\rho, T, u, v, w).$$

Вторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &\approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}. \end{aligned}$$

Смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \approx \frac{f_{i+1,j,k+1}^n - f_{i-1,j,k+1}^n - f_{i+1,j,k-1}^n + f_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \approx \frac{f_{i,j+1,k+1}^n - f_{i,j-1,k+1}^n - f_{i,j+1,k-1}^n + f_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}.$$

Использование формул (4)–(5) подразумевает, что расчёт трёхмерного нестационарного течения ведётся по явной схеме переходом с очередного n -го временного слоя на следующий $(n + 1)$ -й временной слой с постоянным заданным шагом. При этом по пространственным переменным используется равномерная прямоугольная сетка с постоянными заданными шагами Δx , Δy и Δz соответственно.

Разностное уравнение для вычисления плотности газа во внутреннем узле (i, j, k) расчётной области:

$$\frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = 0. \quad (4)$$

Аналогично для второго уравнения системы (1):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} = & av_{i,j,k}^n - bu_{i,j,k}^n + \\ & + \mu_0 \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления второй компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} = & -av_{i,j,k}^n + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления третьей компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = bu_{i,j,k}^n + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + m\mu_0 \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x\Delta z} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i,j+1,k+1}^n - v_{i,j-1,k+1}^n - v_{i,j+1,k-1}^n + v_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y\Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления температуры газа:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) = \\ & = \kappa_0 \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \kappa_0 \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + \kappa_0 \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}. \end{aligned}$$

Исходя из данных проведённых экспериментов, математическое моделирование вертикального продува осуществляется заданием вертикальной составляющей скорости газа в центре верхней грани расчётной области (рис. 1) в виде функции $w(t) = M * (1 - e^{-10*t})$, описывающей постепенное увеличение со временем вертикальной скорости продува от 0 до M .

За начальные условия принимается набор функций

$$\rho = \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \nu = \frac{\gamma g}{k}, \quad u = 0, v = 0, w = 0,$$

$$T = 1 - kz, k = \frac{lx_{00}}{T_{00}}, l = 0,0065 \frac{K}{m},$$

поскольку они являются точными решениями полной системы уравнений Навье – Стокса и описывают стационарные газодинамические параметры газа, покоящегося в поле силы тяжести, когда плотность и температура зависят только от высоты.

Граничные условия для искомых пяти функций выбираются в предположении, что газ из расчётной области может выходить только через ту часть верхней грани, где осуществляется продув, а входить только через боковые грани. Все компоненты вектора скорости на четырёх боковых гранях рассчитываются из условия непрерывности. Это означает, что воздух может пересекать все боковые граничные поверхности расчётной области. В этом случае краевые условия для искомых функций задаются с помощью линейной интерполяции значений функции из внутренней части расчётной области на её границу.

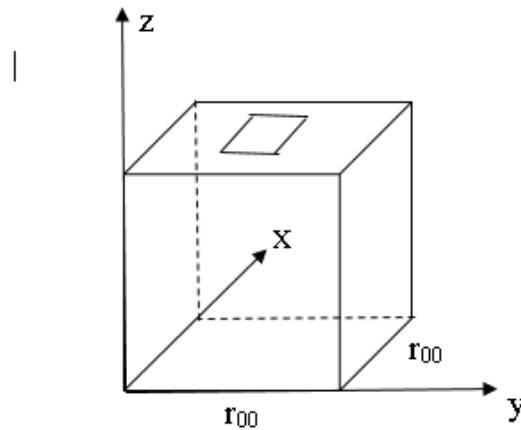
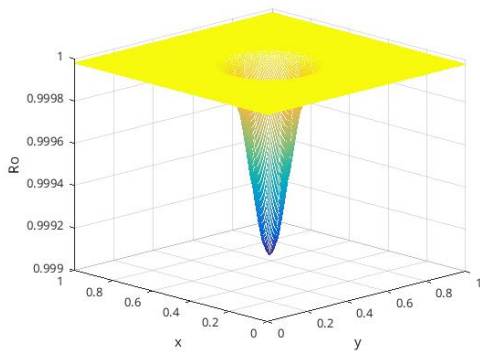
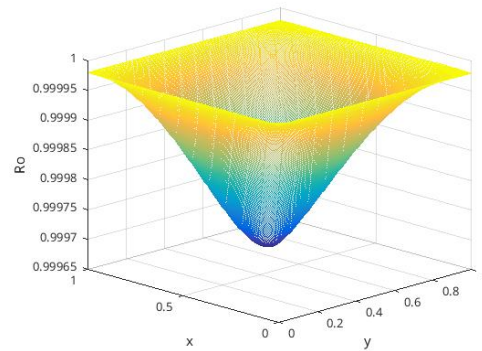


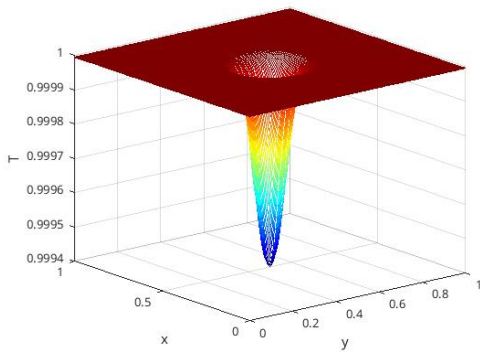
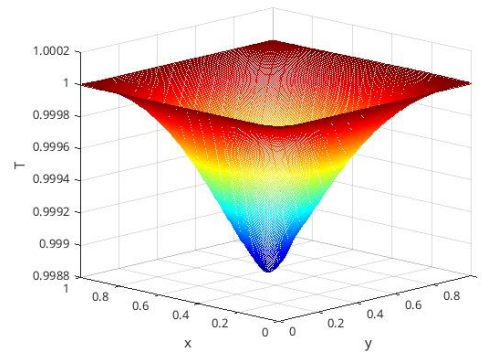
Рис. 1. Расчётная область

Рис. 2. Плотность газа при $t = 0,1$ сРис. 3. Плотность газа при $t = 30$ с

3. Численное моделирование течений газа в ВЗП малых масштабов

Расчёты течений газа в малых ВЗП проводились при масштабном значении расстояния $r_{00} = 10$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0,03$ с, разностным шагом по трём пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,005$ и шаге по времени $\Delta t = 0,001$. Через квадратное отверстие размером $0,1 \times 0,1$ в центре верхней грани расчётной области задаётся вертикальная скорость течения газа при $M = 0,003$. На рис. 2, 3 представлены результаты расчётов плотности газа на высоте $0,025$ (размерное значение $0,25$ м) для двух различных моментов расчётного времени.

Плотность газа по периметру расчётной области сохраняется постоянной и равной значению плотности стационарного распределения. В начальные моменты времени происходят колебания плотности в четвёртом десятичном знаке, а с течением

Рис. 4. Температура газа при $t = 0,1$ сРис. 5. Температура газа при $t = 30$ с

времени амплитуда колебаний плотности постепенно уменьшается, и наблюдается плавное понижение плотности в центре расчётной области. При увеличении времени расчёта процесс изменения плотности плавно выходит на стационарный режим. Поверхность плотности газа приобретает вид воронки с пониженной плотностью в центре расчётной области.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчётов температуры газа на той же высоте для тех же моментов расчётного времени.

Несмотря на продув газа через верхнее отверстие, в результате численного решения линеаризованной полной системы уравнений Навье — Стокса (ПСУНС) отмечается понижение температуры в центре расчётной области под отверстием продува. Периферийное же значение температуры соответствует постоянному значению начального стационарного распределения. Следует отметить, что так же, как и для плотности, видны незначительные изменения температуры в начальные моменты времени счета, которые постепенно исчезают при выходе процесса на стационарный режим.

Общим в поведении термодинамических характеристик является то, что по мере приближения к центру расчётной области прослеживается их осевая симметрия. Ось симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчётной области и совпадает с центром отверстия продува газа через верхнюю плоскость расчётного параллелепипеда.

На рис. 6 представлены в виде поверхностей результаты расчётов первой компоненты скорости газа на высоте 0,25 м для четырёх расчётных моментов времени.

В начальные моменты времени счёта (рис. 6 а) на общем фоне нулевых по значению скоростей в центре расчётной области возникают зоны, в которых x -е компоненты скорости отличны от нуля и противоположны по знаку. Такое распределение скоростей означает встречное движение частиц газа в центральной области расчётного параллелепипеда. Стрелками на рисунках помечены направления движения частиц газа. Ясно, что в начальный момент времени пока нет никакой закрутки газа. В последующий момент расчётного времени (рис. 6 б) происходит заметное смещение областей с положительными и отрицательными значениями x -й компоненты скорости. Такое пространственное перераспределение рассматриваемой компонен-

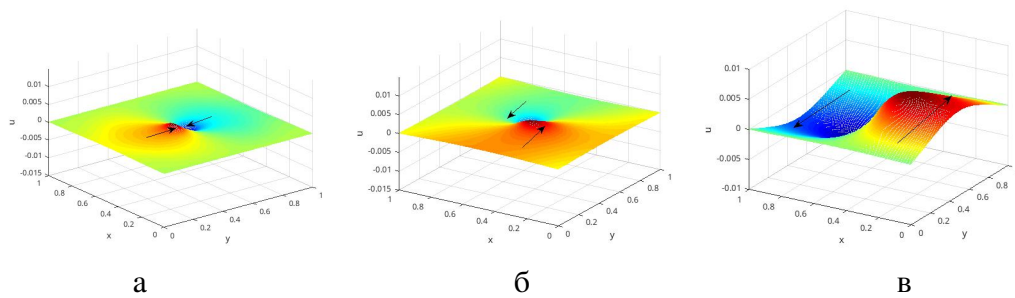


Рис. 6. Первая компонента вектора скорости: а – $t = 0,5$ с; б – $t = 2$ с; в – $t = 30$ с

ты скорости частиц газа означает, что вблизи геометрического центра расчётной области возникают встречные и разведённые в пространстве потоки газа, что равносильно возникновению вокруг вертикальной оси закрученного в положительном направлении движения частиц газа.

На рис. 6 в такое пространственное перераспределение областей с противоположными по знаку компонентами частиц газа усиливается. Причём процесс сопровождается увеличением модулей скоростей и увеличением размеров этих областей, т. е. закрутка газа в положительном направлении усиливается. На момент расчётного времени 30 с (рис. 6 в) видно, что распределение областей с противоположными по знаку значениями скоростей полностью завершилось и продолжается рост абсолютных значений скоростей вплоть до выхода на стационарный режим течения. Другими словами, закрутка газа полностью сформировалась, и происходит только её усиление с точки зрения увеличения скоростей течения.

Вторая компонента скорости имеет такие же особенности изменения от времени, поэтому её описание здесь не приводится.

Особенностью в поведении вертикальной компоненты скорости частиц газа (рис. 7) в расчётной области является близость её значений к нулю во всех периферийных областях. В области продува вертикальная скорость постепенно растёт в соответствии с законом продува и в сечении повторяет квадратный контур отверстия продува.

На рис. 8 представлены результаты трёхмерных расчётов мгновенных линий тока частиц газа в области, близкой к вертикальной части ВЗП.

Видно, как постепенно происходят закрутка газа вблизи нижней плоскости расчётного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП. Следует отметить, что мгновенные линии тока были построены исходя из рассчитанных составляющих скорости во всех узлах расчётной области и их количество специально ограничено для большей наглядности. Высота, с которой начинался процесс построения линий тока, составляла порядка 0,0001 в безразмерных единицах. Поэтому можно считать, что построенные мгновенные линии тока начинаются практически с подстилающей поверхности. Сформировавшаяся же вертикальная часть, которую видно на рисунках, представляет собой аналог (численную модель) хобота реального природного вихря.

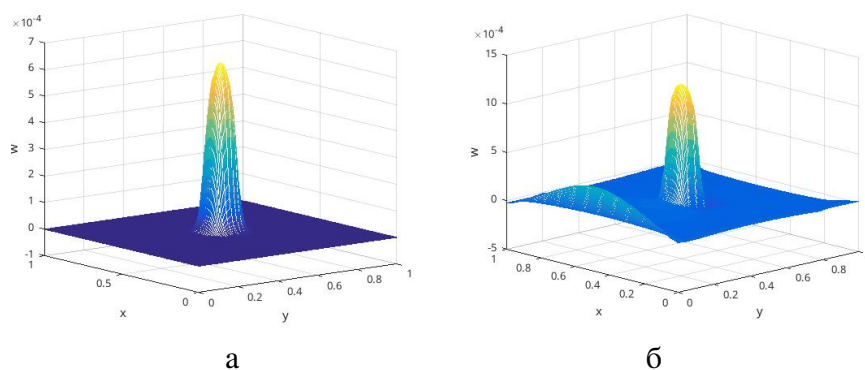


Рис. 7. Третья компонента скорости: а – $t = 0,1$; б – $t = 30$ с

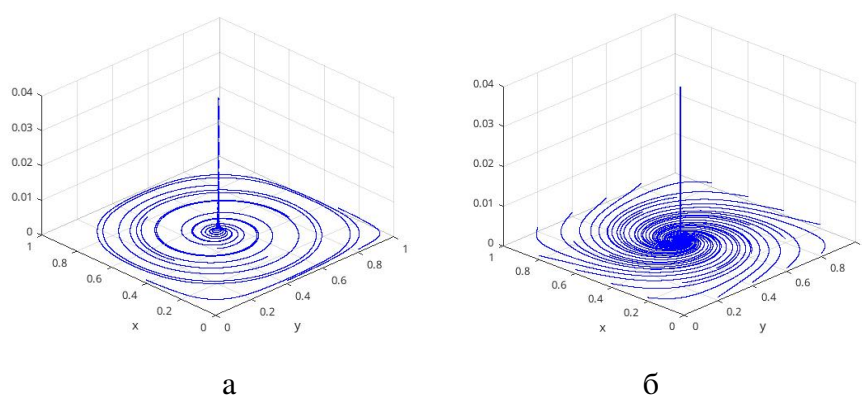


Рис. 8. Линии тока: а – $t = 0,5$ с; б – $t = 1$ с

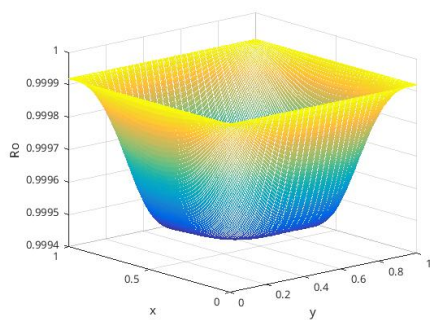


Рис. 9. Плотность газа при $t = 0,5$ с

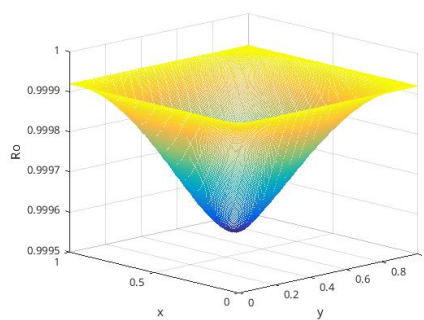


Рис. 10. Плотность газа при $t = 30$ с

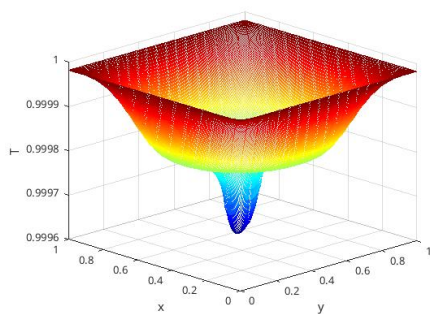


Рис. 11. Температура газа при $t = 0,1$ с

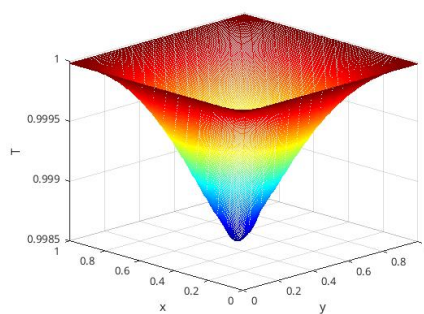


Рис. 12. Температура газа при $t = 30$ с

4. Численное моделирование течений газа в ВЗП средних масштабов

В данном пункте приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающих в результате вертикального продува через трубу 5 м. Тем самым проводится расчёт газодинамических характеристик в нестационарных трёхмерных течениях воздуха в будущих возможных экспериментах. Расчёты течений газа в данных ВЗП проводились при масштабном значении расстояния $r_{00} = 50$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0,15$ с, разностным шагом по трём пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0,005$, $\Delta z = 0,004$ и шаге по времени $\Delta t = 0,001$. Начальные и граничные условия, а также скорость вертикального продува выбирались такими же, как в предыдущем пункте.

На рис. 9, 10 представлены результаты расчётов плотности газа на высоте 0,02 (размерное значение 1 м) для двух различных моментов расчётного времени, а на рис. 11, 12 – температуры газа.

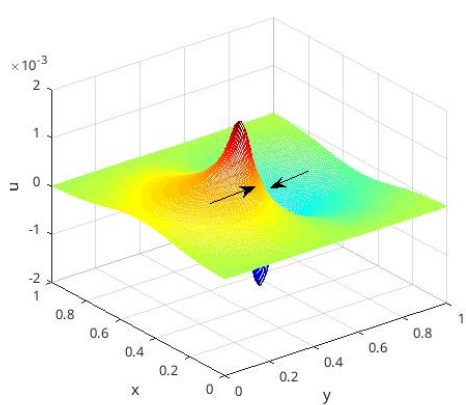
По плотности и температуре газа видно, что процесс нестационарный. Величины в зоне продува уменьшаются, и с течением времени происходит выход на стационарный режим. В данном расчёте явно наблюдается цилиндрическая симметрия, не смотря на то, что расчёт проводился в прямоугольной системе координат.

На рис. 13 представлены в виде поверхностей результаты расчётов первой компоненты скорости газа. Из рис. 13 видно, что первоначально встречные в направлении оси ОХ потоки газа с течением времени перераспределяются в пространстве. Такое перераспределение движущихся встречных потоков иллюстрирует возникновение закрутки газа в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки. С течением времени происходит рост абсолютных значений скоростей встречных потоков с постепенным выходом на стационарный режим течения.

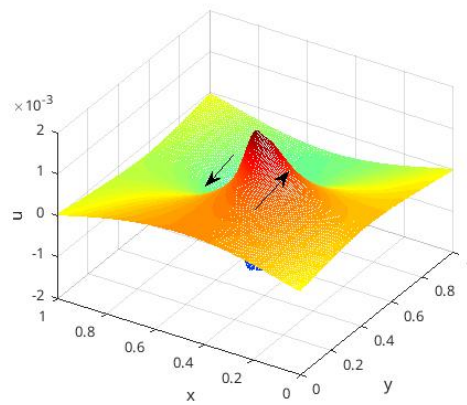
На рис. 14, 15 представлены результаты трёхмерных расчётов мгновенных линий тока частиц газа и вид на них сверху в области, близкой к вертикальной части ВЗП. Видно, как происходят закрутка газа вблизи нижней плоскости расчётного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП.

5. Численное моделирование течений газа в ВЗП больших масштабов

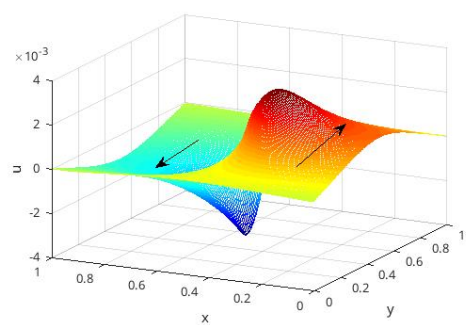
Приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающих в результате вертикального продува его через трубу большого диаметра. Тем самым проводится расчёт газодинамических характеристик в нестационарных трёхмерных течениях воздуха в тропическом циклоне средних размеров. Расчёты течений газа в данных ВЗП проводились с начальными и граничными условиями, описанными в двух предыдущих пунктах при масштабном значении расстояния $r_{00} = 50000$ м, масштабном значении времени $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 150,15$ с, разностным шагом по трём пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0,005$, $\Delta z = 0,02$ и шаге по времени $\Delta t = 0,001$. Через квадратное отверстие размером $0,1 \times 0,1$ в центре верхней грани расчётной области задаётся вертикальная скорость течения газа при $M = 0,0125$.



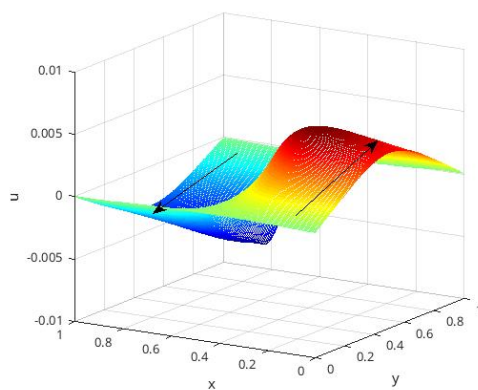
а



б



в



г

Рис. 13. Первая компонента вектора скорости; а – $t = 0,5$ с; б – $t = 2$ с; в – $t = 10$ с; г – $t = 30$ с

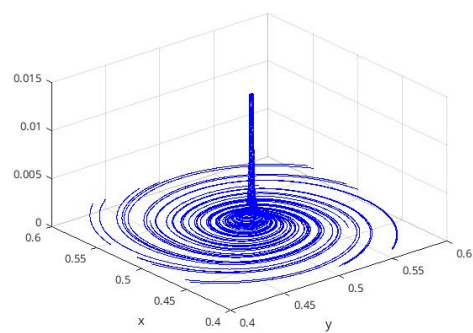


Рис. 14. Линии тока

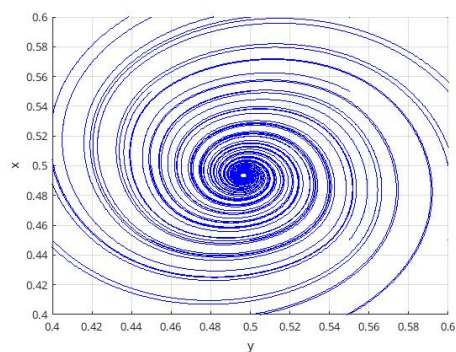
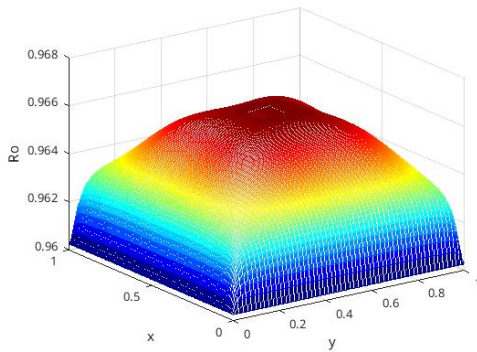
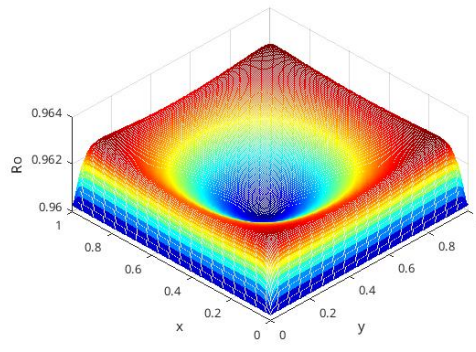
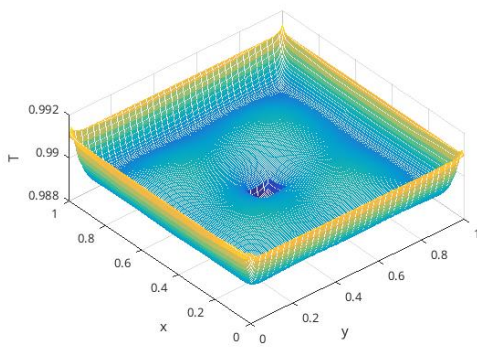
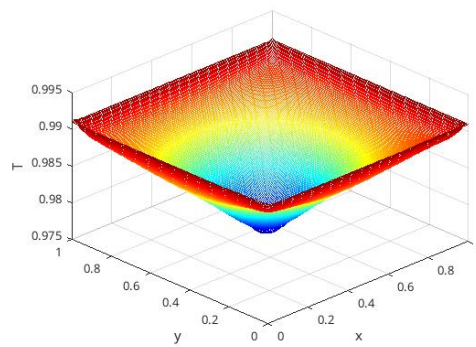


Рис. 15. Проекция линий тока

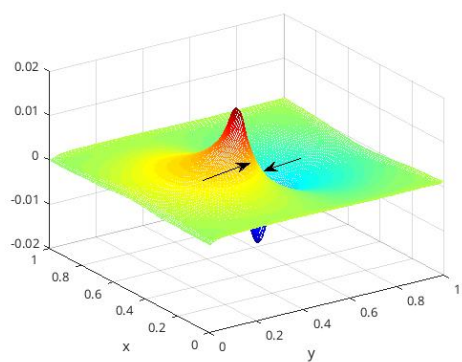
Рис. 16. Плотность газа при $t = 1$ сРис. 17. Плотность газа при $t = 30$ сРис. 18. Температура газа при $t = 1$ сРис. 19. Температура газа при $t = 30$ с

В начальные моменты времени происходят колебания плотности газа (рис. 16, 17) в третьем десятичном знаке, а с течением времени наблюдается понижение плотности в центре расчётной области. При приближении к центру прослеживается осевая симметрия в поведении плотности газа. Ось симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчётной области и совпадает с центром отверстия продува воздуха через верхнюю плоскость прямоугольного параллелепипеда.

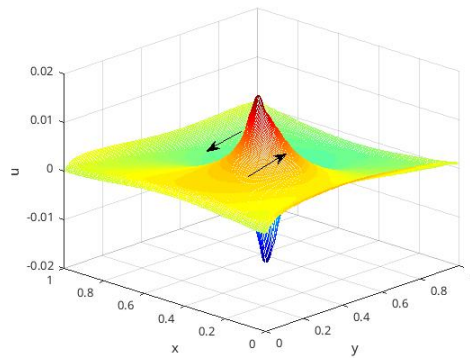
Существенным моментом в расчёте температуры в исследуемых восходящих закрученных течениях является то, что причиной возникновения таких течений является не нагрев подстилающей поверхности, а вертикальный продув газа. При увеличении времени расчёта поверхность температуры газа приобретает вид воронки с пониженными значениями в центре расчётной области (рис. 18, 19).

На рис. 20, представляющем графическое изображение x -й компоненты скорости для четырёх различных моментов времени, продемонстрировано возникновение закрутки течения воздуха в положительном направлении от нулевого значения.

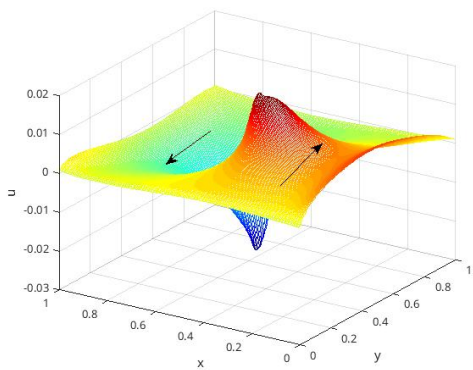
На рис. 21, 22 представлены результаты трёхмерных расчётов мгновенных линий тока частиц газа в области, близкой к вертикальной части ВЗП. Видно, как происходят закрутка газа вблизи нижней плоскости расчётного параллелепипеда и процесс



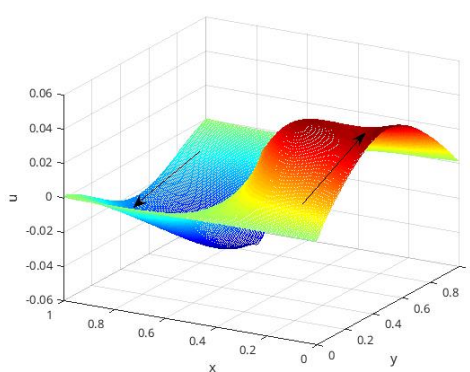
а



б



в



г

Рис. 20. Первая компонента вектора скорости: а – $t = 0,5$ с; б – $t = 2$ с; в – $t = 5$ с; г – $t = 30$ с

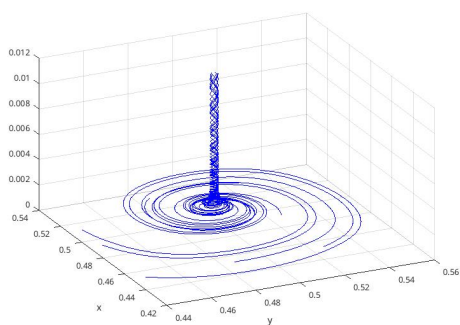


Рис. 21. Линии тока

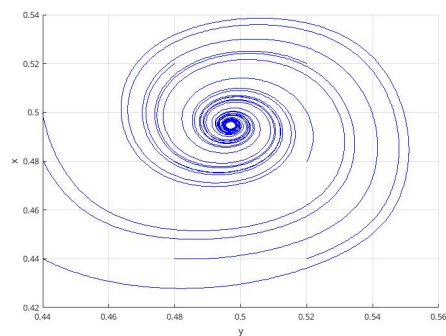


Рис. 22. Проекция линий тока

передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП.

Заключение

В работе для линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса проведены численные исследования по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части ВЗП с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу вверх. По результатам исследований можно сделать вывод, что численное решение линеаризованной ПСУНС с поставленными начально-краевыми условиями описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Установлено, что плотность и температура при таком сложном течении претерпевают заметные изменения на начальной стадии. При увеличении времени расчёта термодинамические параметры и всё течение в целом стабилизируются с постепенным выходом на стационарный режим.

Численный расчёт скоростных характеристик трёхмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в ВЗП, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа в положительном направлении обусловлена наличием в уравнениях линеаризованной ПСУНС дополнительных членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, ещё раз численно получила подтверждение схема возникновения ВЗП [1].

Литература

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / С.П. Баутин и др. Новосибирск : Наука ; Екатеринбург : УрГУПС. 2013. 216 с.
3. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / С.П. Баутин и др. Екатеринбург : УрГУПС, 2017. 216 с.
4. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург : УрГУПС, 2019. 181 с.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск : Наука, 2012. 152 с.
6. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса: препринт. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2019. 52 с.

NUMERICAL SIMULATION OF THE COMPLETE SYSTEM OF NAVIER – STOKES EQUATIONS LINEARIZED ON THE EXACT SOLUTION

A.A. Bugaenko^{1,2}

Leading engineer of mathematics, e-mail: bugaenkoaa@vniitf.ru

I.Yu. Krutova¹

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

¹Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University "MEPhI",
Snezhinsk, Russia

²Federal State Unitary Enterprise "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research
Institute of Technical Physics named after Academician E.I. Zababakhin", Snezhinsk, Russia

Abstract. For the complete Navier-Stokes equations linearized on the exact solution, taking into account the effects of gravity and Coriolis, the origin and development of ascending swirling flows of different intensity is numerically simulated using blowing up the pipe. The numerical solution of the linearized complete Navier–Stokes equations with the set initial-boundary conditions describes complex flows of viscous compressible heat-conducting gas. Numerical calculation of the velocity characteristics of a three-dimensional unsteady flow of viscous heat-conducting gas in an ascending swirling flow initiated by vertical blowing showed that the gas swirl occurs in the positive direction due to the presence of terms describing the Coriolis acceleration in the linearized complete Navier-Stokes equations. Thus, the scheme of origin of an ascending swirling flow was once again numerically confirmed.

Keywords: Navier–Stokes equations system, Coriolis force, linearization, numerical simulation, blowing.

Дата поступления в редакцию: 31.01.2025

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ. VII: СПИН И УДВОЕНИЕ ПЕРИОДОВ

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Периодическая система химических элементов определяется в рамках весовой диаграммы алгебры Ли четвёртого ранга группы вращений восьмимерного псевдоевклидова пространства нейтральной сигнатуры. Удвоение периодов объясняется действием четвёртого генератора Картана.

Ключевые слова: периодическая системы, алгебра Ли, весовая диаграмма, спин, четвёртое измерение.

Введение

Понятие спина ввёл В. Паули в 1925 г., объясняя дублетную структуру спектра щелочных металлов (аномальный эффект Зеемана): «Дублетная структура спектров щелочных металлов, а также нарушение теоремы Лармора согласно этой точке зрения объясняется своеобразной, классически не описываемой двузначностью квантотеоретических свойств излучающего электрона» [1, с. 644]. Б. Ван дер Варден отмечает: «Эту неподдающуюся классическому описанию двузначность электрона ныне мы называем спином» [2, с. 236]. Понятие спина возникло из анализа спектроскопической проблемы, непосредственно связанной со структурой периодической системы химических элементов. Спин является четвёртым квантовым числом, без которого невозможно квантовомеханическое описание структуры периодической системы (схема Aufbau Бора [3]).

Однако до сих пор, спустя 100 лет, спин остаётся загадкой. Все попытки связать спин с трёхмерными механическими представлениями оказались безуспешными. Спин является четвёртой степенью свободы, не поддающейся описанию классической кинематической моделью в трёх измерениях. Понятие спина для своего адекватного описания требует введения четвёртого измерения. В статье [4], являющейся продолжением серии работ [5–9], дано новое представление периодической системы химических элементов в рамках весовой диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ четвёртого ранга. При этом квантовые числа n, l, m, s соответствуют собственным числам $\nu, \lambda, \mu, \sigma$ генераторов Картана максимальной абелевой подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$ (подалгебры Картана). Весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ реализуется в четырёхмерном пространстве. Генератор спина $\mathbf{L}_{78}$ индуцирует расщепление («двуделение») базиса алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$, что приводит к двум трёхмерным проекциям весовой диаграммы [4].

В настоящей статье после введения в правило Маделунга (п. 2) рассматривается подробное описание новой формы представления периодической системы в рамках двух трёхмерных проекций четырёхмерной весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$. В п. 3 показывается, что расщепление базиса алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ приводит к двум корневым системам (кубоктаэдрам), каждая из которых изоморфна корневой системе алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ (алгебра Ли конформной группы $SO(4, 2)$). В п. 4 анализируется теоретико-групповая схема Островского – Фета удвоения периодов, главным недостатком которой является введение пятого квантового числа, не имеющего реально-го аналога. Показывается, что генератор спина $\mathbf{L}_{78}$ в силу более высокой симметрии группы $SO(4, 4)$ включает оба «удвоения» схемы Островского – Фета (спиновое и периодов).

1. Правило Маделунга

Как известно, по мере увеличения заряда атомного ядра Z в периодической таблице Менделеева заполнение орбиталей в нейтральном атоме задаётся в определённой последовательности, которая традиционно называется схемой Aufbau [3]. Очевидно, что схема Aufbau определяется последовательностью одноэлектронных уровней ε_{nl} на энергетической шкале. Эта последовательность зависит от свойств эффективного одноэлектронного центрального поля (кулонова поля с потенциалом $-Z/r$). Длины периодов в водородоподобной схеме Aufbau соответствуют водородным n -оболочкам: $2n^2 = 2, 8, 18, 32, 50, \dots$. Сравнение с подробными численными квантовыми расчётами для многоэлектронных систем и эмпирическими данными показывает, что для *высокоионизированных* атомов упорядочивание (n, l) действительно работает [10].

Однако структура *нейтральных атомов* имеет первостепенное значение, когда речь идёт о периодической системе Менделеева. Здесь правило (n, l) не выполняется. Это означает, что эффективный потенциал сильно отличается от кулоновского, что приводит к существенной перестройке спектра. Возникает перекрытие между группами энергетических уровней с разными главными квантовыми числами n . Исчезает n -группировка уровней, и появляются новые типы регулярностей [10–12].

Эмпирически было замечено, что периодическая система хорошо описывается правилом Маделунга $(n + l, n)$: орбитали заполняются в порядке возрастания суммы $N \equiv n + l$, а для фиксированного N – в порядке возрастания n . Преимущество схемы $(n + l, n)$, по сравнению с правилом (n, l) , особенно ясно видно из графического построения, приведённого Ю.Н. Демковым и В.Н. Островским [11].

Более подробное сравнение последовательностей одноэлектронных уровней в обеих схемах в ещё большей степени показывает преимущество правила Маделунга:

Схема Aufbau (n, l) :

$$\underbrace{1s}_{\dim=2}^{n=1} \ll \underbrace{2s < 2p}_{\dim=8}^{n=2} \ll \underbrace{3s < 3p < 3d}_{\dim=18}^{n=3} \ll \underbrace{4s < 4p < 4d < 4f}_{\dim=32}^{n=4} \ll$$

она им была неизвестна, а к этой форме периодической таблицы Менделеева они пришли независимо в результате исследования групповых свойств периодической системы. В той же форме (левосторонней таблицы Жанэ) может быть представлено 8-периодическое расширение (таблица Сиборга) периодической системы (см. рис. 1, 2 в [6]), а также 10-периодическое расширение (см. рис. 1 в [7]).

Удвоение периодов означает, что всё многообразие химических элементов естественным образом распадается на два множества с суммой $n + l$, чётной или нечётной, где n и l – главное и орбитальное квантовые числа соответственно. В результате элементы из одного и того же (чётного или нечётного) множества химически более схожи, чем элементы из разных множеств [8].

В рамках теоретико-группового описания [10, 16, 17] химические элементы представляются различными состояниями

$$|Z\rangle = |n, l, m, s\rangle \quad (1)$$

единой квантовой системы, где кет-вектор вида (1) зависит от четырёх квантовых чисел² водородоподобной системы и образует базис бесконечномерного гильбертова пространства. В табл. 1 кет-векторы (1) расположены в возрастающем порядке атомного номера Z согласно нумерации Маделунга. В четвёртом столбце стоит сумма $n + l$; чётная – «+» и нечётная – «-».

Таблица 1. Базис Маделунга

Z	Элемент	Вектор $ n, l, m, s\rangle$	$n + l$	Конфигурация
1	H	$ 1, 0, 0, -1/2\rangle$	–	$1s^1$
2	He	$ 1, 0, 0, +1/2\rangle$	–	$1s^2$
3	Li	$ 2, 0, 0, -1/2\rangle$	+	[He] $2s^1$
4	Be	$ 2, 0, 0, +1/2\rangle$	+	[He] $2s^2$
5	B	$ 2, 1, -1, -1/2\rangle$	–	[He] $2s^2 2p^1$
6	C	$ 2, 1, 0, -1/2\rangle$	–	[He] $2s^2 2p^2$
7	N	$ 2, 1, 1, -1/2\rangle$	–	[He] $2s^2 2p^3$
8	O	$ 2, 1, -1, +1/2\rangle$	–	[He] $2s^2 2p^4$
9	F	$ 2, 1, 0, +1/2\rangle$	–	[He] $2s^2 2p^5$
10	Ne	$ 2, 1, 1, +1/2\rangle$	–	[He] $2s^2 2p^6$
11	Na	$ 3, 0, 0, -1/2\rangle$	–	[Ne] $3s^1$
12	Mg	$ 3, 0, 0, +1/2\rangle$	–	[Ne] $3s^2$
13	Al	$ 3, 1, -1, -1/2\rangle$	+	[Ne] $3s^2 3p^1$
14	Si	$ 3, 1, 0, -1/2\rangle$	+	[Ne] $3s^2 3p^2$

²Теоретико-групповой смысл квантовых чисел будет рассмотрен ниже в п. 3.

Z	Элемент	Вектор $ n, l, m, s\rangle$	$n + l$	Конфигурация
15	P	$ 3, 1, 1, -1/2\rangle$	+	[Ne] $3s^2 3p^3$
16	S	$ 3, 1, -1, +1/2\rangle$	+	[Ne] $3s^2 3p^4$
17	Cl	$ 3, 1, -1, +1/2\rangle$	+	[Ne] $3s^2 3p^5$
18	Ar	$ 3, 1, 1, +1/2\rangle$	+	[Ne] $3s^2 3p^6$
19	K	$ 4, 0, 0, -1/2\rangle$	+	[Ar] $4s^1$
20	Ca	$ 4, 0, 0, +1/2\rangle$	+	[Ar] $4s^2$
21	Sc	$ 3, 2, -2, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^1 4s^2$
22	Ti	$ 3, 2, -1, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^2 4s^2$
23	V	$ 3, 2, 0, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^3 4s^2$
24	Cr	$ 3, 2, 1, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^5 4s^1$
25	Mn	$ 3, 2, 2, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^5 4s^2$
26	Fe	$ 3, 2, -2, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^6 4s^2$
27	Co	$ 3, 2, -1, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^7 4s^2$
28	Ni	$ 3, 2, 0, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^8 4s^2$
29	Cu	$ 3, 2, 1, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^1$
30	Zn	$ 3, 2, 2, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2$
31	Ga	$ 4, 1, -1, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^1$
32	Ge	$ 4, 1, 0, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^2$
33	As	$ 4, 1, 1, -1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^3$
34	Se	$ 4, 1, -1, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^4$
35	Br	$ 4, 1, 0, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^5$
36	Kr	$ 4, 1, 1, +1/2\rangle$	–	[Ar] $3d^{10} 4s^2 4p^6$
37	Rb	$ 5, 0, 0, -1/2\rangle$	–	[Kr] $5s^1$
38	Sr	$ 5, 0, 0, +1/2\rangle$	–	[Kr] $5s^2$
39	Y	$ 4, 2, -2, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^1 5s^2$
40	Zr	$ 4, 2, -1, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^2 5s^2$
41	Nb	$ 4, 2, 0, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^4 5s^1$
42	Mo	$ 4, 2, 1, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^5 5s^1$
43	Tc	$ 4, 2, 2, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^5 5s^2$
44	Ru	$ 4, 2, -2, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^7 5s^1$
45	Rh	$ 4, 2, -1, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^8 5s^1$
46	Pd	$ 4, 2, 0, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10}$
47	Pd	$ 4, 2, 1, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^1$
48	Cd	$ 4, 2, 2, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2$
49	In	$ 5, 1, -1, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2 5p^1$
50	Sn	$ 5, 1, 0, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2 5p^2$
51	Sb	$ 5, 1, 1, -1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2 5p^3$
52	Te	$ 5, 1, -1, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2 5p^4$
53	I	$ 5, 1, 0, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2 5p^5$
54	Xe	$ 5, 1, 1, +1/2\rangle$	+	[Kr] $4d^{10} 5s^2 5p^6$
55	Cs	$ 6, 0, 0, -1/2\rangle$	+	[Xe] $6s^1$
56	Ba	$ 6, 0, 0, +1/2\rangle$	+	[Xe] $6s^2$
57	La	$ 4, 3, -3, -1/2\rangle$	–	[Xe] $5d^1 6s^2$

Z	Элемент	Вектор $ n, l, m, s\rangle$	$n + l$	Конфигурация
58	Ce	$ 4, 3, -2, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^1 5d^1 6s^2$
59	Pr	$ 4, 3, -1, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^3 6s^2$
60	Nd	$ 4, 3, 0, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^4 6s^2$
61	Pm	$ 4, 3, 1, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^5 6s^2$
62	Sm	$ 4, 3, 2, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^6 6s^2$
63	Eu	$ 4, 3, 3, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^7 6s^2$
64	Gd	$ 4, 3, -3, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^7 5d^1 6s^2$
65	Tb	$ 4, 3, -2, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^9 6s^2$
66	Dy	$ 4, 3, -1, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{10} 6s^2$
67	Ho	$ 4, 3, 0, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{11} 6s^2$
68	Er	$ 4, 3, 1, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{12} 6s^2$
69	Tm	$ 4, 3, 2, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{13} 6s^2$
70	Yb	$ 4, 3, 3, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 6s^2$
71	Lu	$ 5, 2, -2, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^1 6s^2$
72	Hf	$ 5, 2, -1, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^2 6s^2$
73	Ta	$ 5, 2, 0, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^3 6s^2$
74	W	$ 5, 2, 1, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^4 6s^2$
75	Re	$ 5, 2, 2, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^5 6s^2$
76	Os	$ 5, 2, -2, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^6 6s^2$
77	Ir	$ 5, 2, -1, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^7 6s^2$
78	Pt	$ 5, 2, 0, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^9 6s^1$
79	Au	$ 5, 2, 1, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^1$
80	Hg	$ 5, 2, 2, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2$
81	Tl	$ 6, 1, -1, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^1$
82	Pb	$ 6, 1, 0, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^2$
83	Bi	$ 6, 1, 1, -1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^3$
84	Po	$ 6, 1, -1, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^4$
85	At	$ 6, 1, 0, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^5$
86	Rn	$ 6, 1, 1, +1/2\rangle$	—	[Xe] $4f^{14} 5d^{10} 6s^2 6p^6$
87	Fr	$ 7, 0, 0, -1/2\rangle$	—	[Rn] $7s^1$
88	Ra	$ 7, 0, 0, +1/2\rangle$	—	[Rn] $7s^2$
89	Ac	$ 5, 3, -3, -1/2\rangle$	+	[Rn] $6d^1 7s^2$
90	Th	$ 5, 3, -2, -1/2\rangle$	+	[Rn] $6d^2 7s^2$
91	Pa	$ 5, 3, -1, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^2 6d^2 7s^2$
92	U	$ 5, 3, 0, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^3 6d^2 7s^2$
93	Np	$ 5, 3, 1, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^4 6d^2 7s^2$
94	Np	$ 5, 3, 2, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^6 7s^2$
95	Am	$ 5, 3, 3, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^7 7s^2$
96	Cm	$ 5, 3, -3, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^7 6d^1 7s^2$
97	Bk	$ 5, 3, -2, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^9 7s^2$
98	Cf	$ 5, 3, -1, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{10} 7s^2$
99	Es	$ 5, 3, 0, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{11} 7s^2$

Z	Элемент	Вектор $ n, l, m, s\rangle$	$n + l$	Конфигурация
100	Fm	$ 5, 3, 1, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{12}7s^2$
101	Md	$ 5, 3, 2, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{13}7s^2$
102	No	$ 5, 3, 3, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}7s^2$
103	Lr	$ 6, 2, -2, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^17s^2$
104	Rf	$ 6, 2, -1, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^27s^2$
105	Db	$ 6, 2, 0, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^37s^2$
106	Sg	$ 6, 2, 1, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^47s^2$
107	Bh	$ 6, 2, 2, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^57s^2$
108	Hs	$ 6, 2, -2, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^67s^2$
109	Mt	$ 6, 2, -1, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^77s^2$
110	Ds	$ 6, 2, 0, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^87s^2$
111	Rg	$ 6, 2, 1, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^97s^2$
112	Cn	$ 6, 2, 2, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^2$
113	Nh	$ 7, 1, -1, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^27p^1$
114	Fl	$ 7, 1, 0, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^27p^2$
115	Mc	$ 7, 1, 1, -1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^27p^3$
116	Lv	$ 7, 1, -1, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^27p^4$
117	Lv	$ 7, 1, 0, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^27p^5$
118	Og	$ 7, 1, 1, +1/2\rangle$	+	[Rn] $5f^{14}6d^{10}7s^27p^6$
119	Uue	$ 8, 0, 0, -1/2\rangle$	+	[Og] $8s^1$
120	Ubn	$ 8, 0, 0, +1/2\rangle$	+	[Og] $8s^2$

2. Периодическая система и группа $SO(4, 4)$

Четыре квантовых числа n, l, m, s , входящих в кет-вектор (1), задают четыре степени свободы. Первые три квантовых числа n, l, m имеют ясное геометрическое истолкование в Polygonfläche Генцеля [18] и трёхмерной системе Финке [19] (см. также [4]). Однако четвёртое квантовое число s (спин) выходит за рамки трёхмерного представления и требует для своего адекватного описания введения четвёртого измерения³.

Связать спин с четвёртым измерением позволяет теория групп. Так, согласно теоретико-групповому описанию периодической системы [5, 16, 17], первые три квантовых числа n, l и m соответствуют собственным числам ν, λ и μ_λ генераторов $\mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{12}$ и $\mathbf{L}_{34}$, образующих подалгебру Картана $\mathfrak{K}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$ конформной группы $SO(4, 2)$. $\mathfrak{so}(4, 2)$ есть алгебра Ли третьего ранга, поэтому все корневые и весовые диаграммы этой алгебры являются трёхмерными системами. Для адекватного описания спина в рамках теоретико-групповой схемы требуется переход к алгебре Ли четвёртого ранга. Такой алгеброй является $\mathfrak{so}(4, 4)$ – алгебра Ли группы вращений $SO(4, 4)$ восьмимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$ [4]. В этом случае подалгебра Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$ содержит четыре генератора $\mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}$ и

³В системах Генцеля и Финке спин учитывается искусственным образом в виде точек на трансверсальных. Это ясно показывает, что понятие спина не вмещается в трёхмерное пространство, и все трёхмерные механические интерпретации (на подобие волчка Гаудсмита – Уленбека) не в состоянии описать спин по определению.

$\mathbf{L}_{78}$. Четвёртый генератор $\mathbf{L}_{78}$, понимаемый как генератор спина⁴, коммутирует со всеми 15 генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$. Как следствие, базис Картана – Вейля для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$

$$\{\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_-, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_-\}$$

расщепляется на два структурно идентичных базиса

$$\left\{ {}^1\mathbf{K}_3, {}^1\mathbf{J}_3, {}^1\mathbf{T}_0, {}^1\mathbf{S}_0, {}^1\mathbf{P}_0, {}^1\mathbf{Q}_0, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_- \right\}, \quad (2)$$

$$\left\{ {}^2\mathbf{K}_3, {}^2\mathbf{J}_3, {}^2\mathbf{T}_0, {}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{P}_0, {}^2\mathbf{Q}_0, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_- \right\}, \quad (3)$$

каждый из которых изоморфен базису Яо [20] для групповой алгебры двулистного накрытия $\text{Spin}_+(4, 2) \simeq \text{SU}(2, 2)$. Базисы (2) и (3) определяют две корневые системы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha({}^1\mathbf{K}_+) &= (+1, +1, 0), & \alpha({}^1\mathbf{T}_+) &= (+1, 0, +1), & \alpha({}^1\mathbf{P}_+) &= (0, +1, +1), \\ \alpha({}^1\mathbf{K}_-) &= (-1, -1, 0), & \alpha({}^1\mathbf{T}_-) &= (-1, 0, -1), & \alpha({}^1\mathbf{P}_-) &= (0, -1, -1), \\ \alpha({}^1\mathbf{J}_+) &= (-1, +1, 0), & \alpha({}^1\mathbf{S}_+) &= (-1, 0, +1), & \alpha({}^1\mathbf{Q}_+) &= (0, -1, +1), \\ \alpha({}^1\mathbf{J}_-) &= (+1, -1, 0), & \alpha({}^1\mathbf{S}_-) &= (+1, 0, -1), & \alpha({}^1\mathbf{Q}_-) &= (0, +1, -1), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

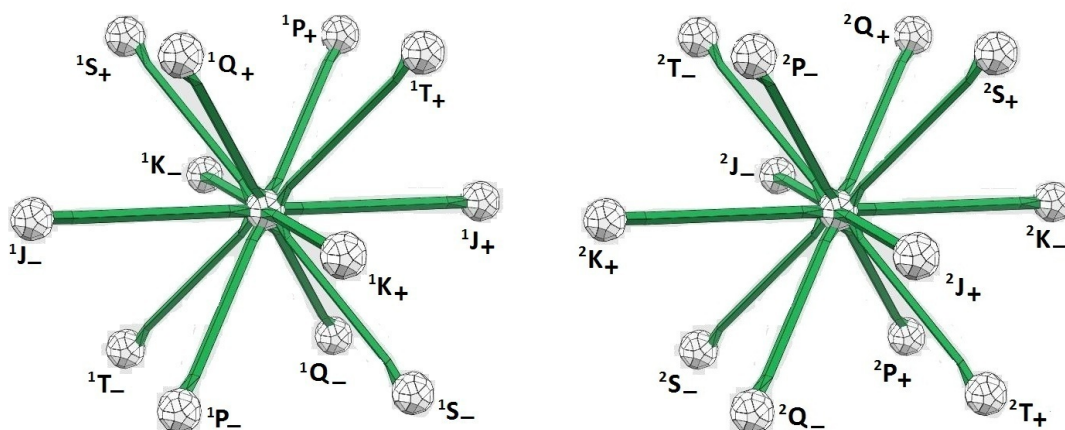
$$\left. \begin{aligned} \alpha({}^2\mathbf{K}_+) &= (+1, -1, 0), & \alpha({}^2\mathbf{T}_+) &= (+1, 0, -1), & \alpha({}^2\mathbf{P}_+) &= (0, +1, -1), \\ \alpha({}^2\mathbf{K}_-) &= (-1, +1, 0), & \alpha({}^2\mathbf{T}_-) &= (-1, 0, +1), & \alpha({}^2\mathbf{P}_-) &= (0, -1, +1), \\ \alpha({}^2\mathbf{J}_+) &= (+1, +1, 0), & \alpha({}^2\mathbf{S}_+) &= (+1, 0, +1), & \alpha({}^2\mathbf{Q}_+) &= (0, +1, +1), \\ \alpha({}^2\mathbf{J}_-) &= (-1, -1, 0), & \alpha({}^2\mathbf{S}_-) &= (-1, 0, -1), & \alpha({}^2\mathbf{Q}_-) &= (0, -1, -1), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\alpha(\mathbf{L}_3) = (0, 0, 0), \quad \alpha(\mathbf{A}_3) = (0, 0, 0), \quad \alpha(\Delta_3) = (0, 0, 0).$$

Графически корневые системы (4) и (5) могут быть представлены двумя кубоктаэдрами, показанными на рис. 2. Оси левого кубоктаэдра повернуты против часовой стрелки, соответственно оси правого кубоктаэдра повернуты по часовой.

На рис. 3 представлены две трёхмерные проекции ($\text{SO}(4, 2)$ -башни) весовой диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ группы вращений $\text{SO}(4, 4)$ восьмимерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$, соответствующие корневым системам (4) и (5). Вертикальные оси каждой $\text{SO}(4, 2)$ -башни образованы собственными значениями генератора Картана $\Delta_3 = \mathbf{L}_{56}$, что добавляет к многообразию радиальный лестничный оператор. Каждый заданный этаж $\text{SO}(4, 2)$ -башни (круг Генцеля) характеризуется главным квантовым числом n . Горизонтальные полосы (на этажах) соответствуют различным l -подоболочкам (кольца Генцеля), а точки являются индивидуальными

⁴Собственное число σ генератора $\mathbf{L}_{78}$ соответствует четвёртому квантовому числу s .

Рис. 2. Корневые диаграммы (кубоктаэдры) расщеплённых базисов (2) и (3) алгебры Ли $so(4, 4)$

m -компонентами (конечномерными представлениями группы $SO(4, 2)$), задающими элементы периодической системы согласно правилу Маделунга. Жёлтым цветом обозначены кольца, содержащие элементы с нечётной суммой $n + l$, голубым цветом обозначены кольца с чётной суммой $n + l$. Гомологичные элементы соединяются вертикальными линиями (линии Бэйли – Томсена – Бора). Переходы между различными квантовыми уровнями обозначены направленными линиями (линии Генцеля). На радиальных осях $SO(4, 2)$ -башен расположены металлы с квантовыми числами $(n, l = 0, s = \pm 1/2)$, $n = 1, 2, \dots$. На радиальной оси $SO(4, 2)$ -башни с квантовым числом $s = -1/2$ (левая башня) расположены щелочные металлы I группы (**Li, Na, K, Rb, Cs, Fr, ...**), на правой башне ($s = +1/2$) радиальную ось населяют щелочноземельные металлы II группы (**Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra, ...**). По мере удаления от радиальных осей к перифериям кругов Генцеля происходит уменьшение *металличности* элементов и нарастание *неметалличности*, этому соответствует движение слева направо по периоду в стандартной таблице Менделеева (металлы $\rightarrow$ амфотерные элементы $\rightarrow$ инертные газы).

Первый период таблицы Менделеева, включающий в себя водород **H** и гелий **He**, соответствует двум начальным точкам на диаграмме (первый этаж $n = 1$ $SO(4, 2)$ -башен), с которых начинаются последовательности элементов, с $s = -1/2$ и $s = +1/2$ соответственно. Первый период – это единственный период, не содержащий двойника. Второй элемент первого периода – гелий **He** – инертен и завершает собой период. В связи с этим возникает вопрос: где же в первом периоде та закономерная смена свойств от металличности к неметалличности (от полюса к полюсу)? Всё дело в том, что первый элемент первого периода – водород **H** – до некоторой степени амфотерный. По одним свойствам (он, например, одновалентен и образует однозарядный положительный ион H^+) водород близок к щелочным металлам I группы. Поэтому в некоторых изданиях таблицы Менделеева **H** помещается именно в этой группе. По другим же свойствам (например, начиная от способности образовывать отрицательный однозарядный ион H^- и кончая физическими свойствами газа водорода H_2) он ближе к элементам-галогенам VII группы. Можно сказать, что

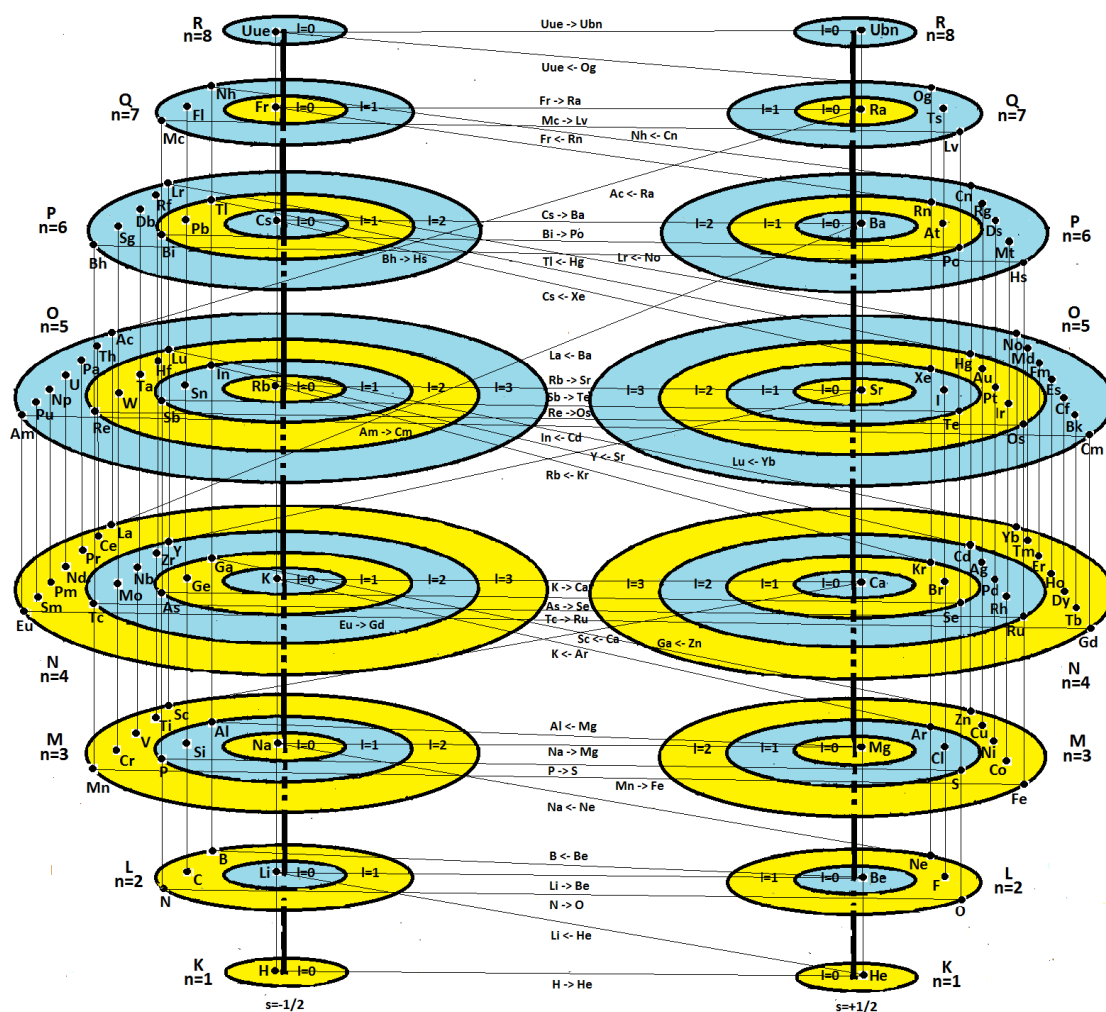


Рис. 3. Периодическая система химических элементов в расщеплённом базисе групповой алгебры двулистного накрытия $\text{Spin}_+(4, 2) \simeq \text{SU}(2, 2)$

водород **H** как бы совмещает разную «полюсность» свойств⁵. Линия Генцеля **He** → **Li** показывает переход на следующий ($n = 2$) квантовый уровень.

Второй период (этаж $n = 2$) содержит литий **Li** и бериллий **Be**, соединённые линией **Li** → **Be**. Далее по линии **Be** → **B** идёт переход к амфотерным элементам **B**, **C**, **N**, кольцо Генцеля ($n = 2, l = 1, s = -1/2$), после заполнения которого следует переход **N** → **O** и заполнение кольца ($n = 2, l = 1, s = +1/2$) до инертного газа неона **Ne**, тем самым завершая второй период и полное заселение 2-го этажа $\text{SO}(4, 2)$ -башен.

Третий период начинается с перехода **Ne** → **Na** (переход на 3-й этаж $n = 3$) от неона **Ne** к щелочному металлу натрию **Na**. Далее следует переход **Na** → **Mg** и повторяется заполнение колец ($n = 3, l = 1, s = -1/2$) и ($n = 3, l = 1, s = +1/2$)

⁵По этой причине в таблице Менделеева символ водорода **H** фигурирует дважды: и в I, и в VII группах. Обычно в одной из этих групп его символ заключают в круглые скобки, желая этим показать меньшее его право находиться в данной группе. Дискуссия о подлинном месте водорода в периодической системе имеет долгую историю. С позиции настоящего теоретико-группового подхода водород **H** принадлежит к щелочным металлам I группы.

амфотерными элементами **Al**, **Si**, ... до аргона **Ar** (третий период является удвоением (двойником) второго периода). Третий период завершён, но 3-й этаж $SO(4, 2)$ -башен пока остаётся не полностью заселённым.

Четвёртый период начинается с перехода **Ar** → **K** (переход на 4-й этаж $n = 4$ левой башни $s = -1/2$) от инертного газа аргона **Ar** к щелочному металлу калию **K**, и далее идёт переход **K** → **Ca**, после которого происходит возврат на 3-й этаж (**Ca** → **Sc**) и заполнение кольца ($n = 3, l = 2, s = -1/2$) переходными металлами побочных подгрупп от скандия **Sc** до марганца **Mn**. Затем, после перехода **Mn** → **Fe**, заполняется кольцо ($n = 3, l = 2, s = +1/2$) правой башни переходными металлами побочных подгрупп, начиная с железа **Fe** и заканчивая цинком **Zn**. Далее следует переход **Zn** → **Ga**, и продолжается заселение 4-го этажа амфотерными элементами (полуметаллами) **Ga**, **Ge**, **As** кольца ($n = 4, l = 1, s = -1/2$). После перехода **As** → **Se** завершается четвёртый период заполнением кольца ($n = 4, l = 1, s = +1/2$) амфотерными элементами **Se**, **Br**, **Kr**. Четвёртый период завершён, но 4-й этаж $SO(4, 2)$ -башен остаётся не полностью заселённым.

Пятый период является двойником четвёртого и так же, как 4-й, содержит 18 элементов. Соответственно структура его заполнения аналогична четвёртому периоду. **Kr** → **Rb** задаёт переход на 5-й этаж левой $SO(4, 2)$ -башни от инертного газа криптона **Kr** к щелочному металлу рубидию **Rb**. Далее следует возврат **Rb** → **Sr** на правую башню, после которого следует переход **Sr** → **Y** на 4-й этаж левой башни и заполнение кольца ($n = 4, l = 2, s = -1/2$) переходными металлами **Y**, **Zr**, ..., **Tc**. Затем следует переход **Tc** → **Ru** и заполнение кольца ($n = 4, l = 2, s = +1/2$), начиная от переходного металла рутения **Ru** до кадмия **Cd**. Переход **Cd** → **In** задаёт возврат на 5-й этаж левой башни, после чего заполняется кольцо ($n = 5, l = 1, s = -1/2$) постпереходными металлами (полуметаллами) **In**, **Sn**, **Sb**. После перехода **Sb** → **Te** завершается пятый период заполнением кольца ($n = 5, l = 1, s = +1/2$) от металлоида теллура **Te** до инертного газа ксенона **Xe**. Пятый период завершён, однако 4-й и 5-й этажи $SO(4, 2)$ -башен остаются пока не полностью заселёнными.

Шестой период начинается с перехода **Xe** → **Cs** (переход на 6-й этаж левой башни) от ксенона **Xe** к щелочному металлу цезию **Cs**. Далее после перехода на 6-й этаж правой башни **Cs** → **Ba** идёт спуск **Ba** → **La** на 4-й этаж левой башни и заполнение кольца ($n = 4, l = 3, s = -1/2$) лантаноидами (редкоземельными металлами) **La**, **Ce**, ..., **Eu**. После перехода **Eu** → **Gd** на 4-й этаж правой башни продолжается заполнение семейства лантаноидов **Gd**, **Tb**, ..., **Yb**. 4-й этаж $SO(4, 2)$ -башен полностью заселён. Семейство лантаноидов заполняет внешние кольца 4-го этажа. Подъём **Yb** → **Lu** на 5-й этаж левой башни продолжает заселение кольца ($n = 5, l = 2, s = -1/2$) переходными металлами, начиная с лютеция⁶ **Lu** до рения **Re**. Переход к осмию **Os**, **Re** → **Os**, начинает заселение кольца ($n = 5, l = 2, s = +1/2$) остав-

⁶Имеет место двойственность в классификации элемента **Lu**. С одной стороны, считается, что лютеций **Lu** является последним элементом в серии лантаноидов, т. е. относится к редкоземельным металлам. С другой стороны, он также может быть классифицирован как первый элемент переходных металлов шестого периода. Согласно предлагаемой интерпретации и как следует из построения на диаграмме рис. 3, лютеций **Lu** является переходным металлом шестого периода. Семейство лантаноидов содержит 14 элементов (**La**, **Ce**, ..., **Yb**) и располагается на внешних кольцах ($n = 4, l = 3, s = -1/2$) и ($n = 4, l = 3, s = +1/2$) 4-го этажа $SO(4, 2)$ -башен.

шимися переходными металлами шестого периода: **Os**, **Ir**, ..., **Hg**. Подъём **Hg** → **Tl** продолжает заполнение 6-го этажа левой башни тяжёлыми постпереходными металлами **Tl**, **Pb**, **Bi** в кольце ($n = 6, l = 1, s = -1/2$). После перехода **Bi** → **Po** завершается шестой период заполнением кольца ($n = 6, l = 1, s = +1/2$) от полуметалла полония **Po** до радона (инертного газа) **Rn**. Шестой период завершён, однако 5-й и 6-й этажи $SO(4, 2)$ -башен остаются не полностью заселёнными.

Седьмой период (последний период таблицы Менделеева) является двойником шестого и так же, как шестой, содержит 32 элемента. Начинается период с перехода **Rn** → **Fr**, от инертного газа радона **Rn** к щелочному металлу францию **Fr** на 7-м этаже левой башни. Затем следует переход **Fr** → **Ra** на правую башню и спуск **Ra** → **Ac** на 5-й этаж левой башни к семейству актиноидов **Ac**, **Th**, ..., **Am**, заселяющих кольцо ($n = 5, l = 3, s = -1/2$). Далее переход **Am** → **Cm** на 5-й этаж правой башни продолжает заполнение семейства актиноидов элементами **Cm**, **Bk**, ..., **No** в кольце ($n = 5, l = 3, s = +1/2$). 5-й этаж $SO(4, 2)$ -башен заселён⁷. Семейство актиноидов заполняет внешние кольца 5-го этажа и содержит 14 элементов. Элементы этого семейства являются гомологами элементов семейства лантаноидов, расположенного ниже, на 4-м этаже. Гомологичность элементов этих семейств отмечена вертикальными линиями (линии Бэйли – Томсена – Бора). Подъём **No** → **Lr** на 6-й этаж левой башни продолжает заселение кольца ($n = 6, l = 2, s = -1/2$) переходными металлами, начиная с лоуренсия⁸ **Lr** и заканчивая борием **Bh**. Переход к хассию **Hs**, **Bh** → **Hs**, начинает заселение кольца ($n = 6, l = 2, s = +1/2$) оставшимися переходными металлами седьмого периода: **Hs**, **Mt**, ..., **Cn**. Подъём **Cn** → **Nh** продолжает заполнение 7-го этажа левой башни тяжёлыми постпереходными металлами седьмого периода в кольце ($n = 7, l = 1, s = -1/2$): **Nh**, **Fl**, **Mc**. После перехода **Mc** → **Lv** завершается седьмой период заполнением кольца ($n = 7, l = 1, s = +1/2$) от постпереходного металла ливермория **Lv** до инертного газа оганессона **Og**. Седьмой период завершён. Однако 5-й, 6-й и 7-й этажи $SO(4, 2)$ -башен остаются не полностью заселёнными.

Переход **Og** → **Uue** от инертного газа оганессона **Og** к гипотетическому элементу⁹ **Uue** начинает восьмой период периодической системы элементов, который уже выходит за пределы обычной семипериодической таблицы Менделеева. С восьмого периода начинается таблица Сиборга [6], элементы которой заполняют пустующие кольца 5-го, 6-го и 7-го этажей $SO(4, 2)$ -башен. И далее башни уходят в бесконеч-

⁷Однако, в отличие от предыдущего (шестого) периода, в котором семейство лантаноидов полностью заселяло 4-й этаж, в случае седьмого периода 5-й этаж остаётся *не полностью* заселённым, а именно пустуют кольца ($n = 5, l = 4, s = -1/2$) и ($n = 5, l = 4, s = +1/2$). Эти кольца заполняются гипотетическими элементами восьмого периода таблицы Сиборга (более подробно см. [6]).

⁸Также, как и в случае с лютецием **Lu**, имеет место двойственность в классификации элемента **Lr**. С одной стороны, считается, что лоуренсий **Lr** является последним элементом в серии актиноидов, а с другой стороны, он также может быть классифицирован как первый элемент переходных металлов седьмого периода. Согласно построению на диаграмме рис. 3 лоуренсий **Lr** является первым переходным металлом седьмого периода, а также он является гомологом лютеция **Lu** (первый переходный металл шестого периода), что указано на диаграмме соответствующей вертикальной линией. Таким образом, семейство актиноидов **Ac**, **Th**, ..., **No** содержит 14 элементов и располагается на внешних кольцах ($n = 5, l = 3, s = -1/2$) и ($n = 5, l = 3, s = +1/2$) 5-го этажа $SO(4, 2)$ -башен, являясь в то же время гомологом семейства лантаноидов.

⁹Согласно логике построения на диаграмме рис. 3 **Uue** – щелочной металл.

ность, причём по обе стороны от плоскости (L_3, A_3), образуя тем самым пирамиды материи и антиматерии.

3. Удвоение периодов

П.-О. Лёудин в статье [21] отмечает, что отсутствие теоретического объяснения удвоения периодов (как утверждается в [22, 23], имеющее место до сих пор) равнозначно отсутствию теоретического понимания периодической системы химических элементов в целом.

Рассмотрим, каким образом удвоение периодов описывалось В.Н. Островским [24] и А.И. Фетом [16]¹⁰. Группа Островского [24]

$$G_O = O(4, 2) \otimes SU(2)_S \otimes SU(2)_T \quad (6)$$

и группа Фета [16]

$$G_F = SO(4, 2) \otimes SU(2) \otimes SU(2)' \quad (7)$$

имеют аналогичную структуру¹¹. Подгруппа $O(4) \otimes SU(2)_S \otimes SU(2)_T$ в (6) содержит симметрию $O(4)$, которая приводит к представлениям размерности n^2 . Посредством расширения группы $O(4)$ до $O(4) \otimes SU(2)_S$ размерности представлений удваиваются до $2n^2$. Нижний индекс S здесь указывает на физическое происхождение группы $SU(2)$ от электронного спина $m_s = \pm 1/2$. В.Н. Островский называл это «горизонтальное» удвоение длин периодов *спиновым удвоением*. А.И. Фет называет это *первым удвоением* $SO(4, 2) \otimes SU(2)$, представление этой группы имеет вид $F_s^+ = \varphi_2 \otimes F^+$, где φ_2 – унитарное представление группы $SU(2)$ в пространстве $C(2)$; F^+ – расширение представления Фока F для подгруппы $SO(4)$ на конформную группу $SO(4, 2)$. Это приводит к *двум копиям* представлений группы $SO(4, 2) \otimes 1$, которые реализуются в двух различных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. Далее А.И. Фет вводит три генератора τ_+ , τ_- и τ_3 алгебры $\mathfrak{su}(2)$, где τ_3 действует как генератор Картана, который перестановочен со всеми генераторами подгруппы $SO(4, 2) \otimes 1$ и различает состояния из обоих подпространств $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$, а лестничные операторы $\tau_{\pm}$ (генераторы Вейля) действуют как операторы сдвига между $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$. На рис. 4 представлена таблица Жанэ в пирамидальной форме, где клетки таблицы (химические элементы) сопровождаются квантовыми числами группы Фета (первый базис Фета). Из рисунка видно, что «горизонтальное» (спиновое) удвоение соответствует двойному расщеплению μ -компонент λ -мультиплетов. «Вертикальное» удвоение длин периодов, известное как фактическое *удвоение периодов* в периодической системе, было сформулировано В.Н. Островским в теоретико-групповой форме путём введения второй группы $SU(2)$, обозначаемой $SU(2)_T$ и формально аналогичной группе изоспина. А.И. Фет называет это *вторым удвоением* $SO(4, 2) \otimes SU(2) \otimes SU(2)'$

¹⁰Ранее этих работ А. Барут [17] пытался объяснить удвоение периодов при помощи редукции представлений конформной группы $SO(4, 2)$ относительно подгруппы $SO(3, 2)$ (группы анти-де Ситтера). Известна также попытка О. Новаро [25] объяснить удвоение периодов посредством различия двух типов представлений $(j, j, 0)$ и $(j, 0, j)$ группы Новаро – Беррондо $G_{NB} = SU(2) \otimes SU(2) \otimes SU(2)$.

¹¹В более ранних работах [26, 27] А.И. Фет интерпретирует удвоение периодов посредством включения циклической группы $\mathbb{Z}_2$: $O(4, 2) \otimes SU(2) \otimes \mathbb{Z}_2$.

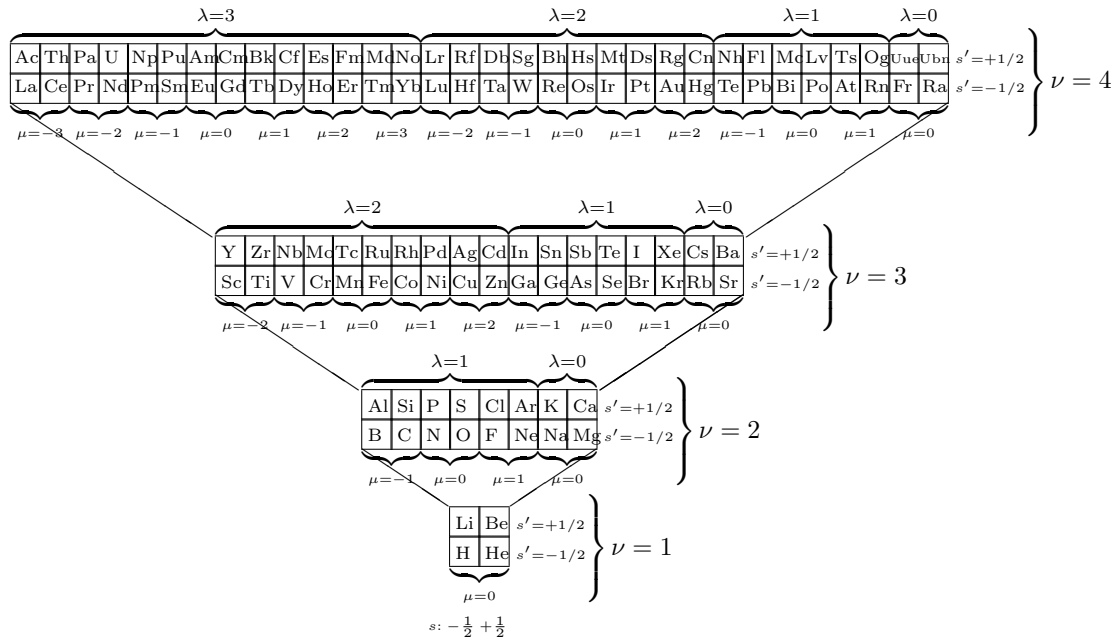


Рис. 4. Таблица Жанэ в пирамидальной форме

(группа Фета G_F), которое вводится аналогично первому удвоению, т. е. представление этой группы имеет вид $F_{ss'}^+ = \varphi_2' \otimes F_s^+$, где φ_2' – унитарное представление группы $SU(2)'$ в пространстве $C(2)$. В свою очередь, это приводит к двум копиям представлений группы $SO(4, 2) \otimes SU(2) \otimes 1$, которые реализуются в двух различных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}'_+$ и $\mathcal{H}'_-$. Далее вводятся генераторы τ'_+ , τ'_- и τ'_3 алгебры $\mathfrak{su}(2)'$, где τ'_3 действует как генератор Картана, который коммутирует со всеми генераторами подгруппы $SO(4, 2) \otimes SU(2) \otimes 1$ и различает состояния из обоих подпространств $\mathcal{H}'_+$ и $\mathcal{H}'_-$, а генераторы Вейля $\tau'_\pm$ действуют как операторы сдвига между $\mathcal{H}'_+$ и $\mathcal{H}'_-$. На рис. 4 вертикальное удвоение, задаваемое пятым квантовым числом s' , соответствует двойному «вертикальному» расщеплению ν -блоков (ярусов пирамиды Жанэ).

Главным недостатком схемы Островского – Фета теоретико-группового описания удвоения периодов является искусственный характер введения пятого квантового числа, которое не имеет реального аналога, поскольку все состояния (элементы) периодической системы описываются четвёркой квантовых чисел (n, l, m, s) . Согласно А.И. Фету [16], набор $(\nu, \lambda, \mu, s, s')$ из пяти квантовых чисел группы G_F задаёт все состояния периодической системы, при этом $\nu = 1/2(n + l + 1)$ для нечётного значения суммы $n + l$ и $\nu = 1/2(n + l)$ для чётного значения $n + l$, что приводит к изменению правила Маделунга.

Обращаясь к анализу удвоения периодов в рамках $SO(4, 4)$, прежде всего, следует отметить, что группа $SO(4, 4)$ обладает более высокой симметрией, чем тензорные произведения¹² (6) и (7), которые являются подгруппами групп вращений деся-

¹²Алгебра Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ содержит 28 независимых генераторов [4], в то время как $\mathfrak{so}(4, 2) \otimes \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2)'$ имеет 21 генератор.

тимерных пространств¹³. Как уже отмечалось выше в п. 3, четвёртый генератор $\mathbf{L}_{78}$ подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$, понимаемый как генератор спина, коммутирует со всеми 15 генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, что приводит к двойному расщеплению (2) и (3). Соответствующие базисам (2) и (3) весовые диаграммы показаны на рис. 3 (более подробно см. [4]). «Горизонтальное» (спиновое) удвоение схемы Островского – Фета в данном случае представляется двумя башнями представлений: $s = -1/2$ (водородная линия) и $s = 1/2$ (гелиевая линия). «Вертикальное» (фактическое) удвоение периодов задаётся этажами (кругами Генцеля) K, L, M, N, O, P, Q, R соответствующих $SO(4, 2)$ -башен (ярусы пирамиды представлений конформной группы, см. рис. 6 в [9]). При этом, в отличие от схемы Островского – Фета, не требуется введения дополнительного пятого квантового числа. Генератор Картана $\mathbf{L}_{78}$ в силу более высокой симметрии группы $SO(4, 4)$ объединяет с единой позиции функции генераторов τ_3 и τ'_3 схемы тензорных произведений (6) и (7).

Литература

1. Паули В. Труды по квантовой теории. Т. 1. М.: Наука, 1975. С. 634–644.
2. Ван дер Варден Б. Принцип запрета и спин / Теоретическая физика 20 века. М.: Изд. ин. лит., 1962, с. 231–284.
3. Бор Н. Избранные научные труды. М.: Наука, 1970. Т. 1. С. 318–375.
4. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. VI: Восьмимерное обобщение // Математические структуры и моделирование. 2025. № 2 (74). С. 18–32.
5. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 5–23.
6. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. II: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1 (49). С. 5–21.
7. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. III: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3 (51). С. 5–20.
8. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. IV: Групповая алгебра // Математические структуры и моделирование. 2024. № 1 (69). С. 18–31.
9. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. V: Весовая диаграмма // Математические структуры и моделирование. 2024. № 3 (71). С. 4–18.
10. Ostrovsky V.N. Group theory and periodic system of elements // AIP Conference Proceedings. 1996. V. 365. P. 191–216.
11. Демков Ю.Н., Островский В.Н. Правило заполнения $n + l$ в периодической системе Менделеева и фокусирующие потенциалы // ЖЭТФ. 1972. Т. 68. С. 125–132.
12. Кораблева Т.П., Корольков Д.В. Теория периодической системы. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2005.

¹³Соответственно их алгебры Ли имеют пятый ранг.

13. Janet C. The helicoidal classification of the elements // *Chemical News*. 1929. Vol. 138. P. 372–374, 388–393.
14. Варламов В.В. Спиральные модели периодической системы элементов. URL: https://dzen.ru/a/Zkhasn4m5Dd3aA_5 (дата обращения: 12.06.2025).
15. Румер Ю.Б., Фет А.И. Группа Spin(4) и таблица Менделеева // *ТМФ*. 1971. Т. 9. С. 203–209.
16. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск: Наука, 2010.
17. Barut A.O. Group Structure of the Periodic System / *The Structure of Matter: Rutherford Centennial Symposium*. Ed. by B.G. Wybourne. Christchurch, New Zealand: University of Canterbury Press, 1972. P. 126–136.
18. Haenzel G. Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente // *Zeitschrift für Physik*. 1943. Vol. 120. P. 283–300.
19. Bemerkungen F.W., Haenzel G. Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente // *Zeitschrift für Physik*. 1943. Vol. 121. P. 586–587.
20. Yao T. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2). I // *Journal of Mathematical Physics*. 1967. Vol. 8. P. 1931–1954.
21. Löwdin P.-O. Some Comments on the Periodic System of the Elements // *International Journal of Quantum Chemistry*. 1969. Vol. 3. P. 331–334.
22. Scerri E. *Periodic Table: its story and its significance*. New York: Oxford University Press, 2019.
23. Thyssen P., Ceulemans A. *Shattered Symmetry: Group Theory from the Eightfold Way to the Periodic Table*. New York: Oxford University Press, 2017.
24. Ostrovsky V.N. Dynamic symmetry of atomic potential // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 1981. Vol. 14. P. 4425–4439.
25. Novaro O. Group Theoretical Aspects of the Periodic Table of the Elements // *Journal of Molecular Structure*. 1989. Vol. 199. P. 103–118.
26. Fet A.I. The System of Elements from the Group-Theoretic Viewpoint. Новосибирск, 1979. 45 с. (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние ИХ СО РАН СССР; № 1).
27. Fet A.I. The Madelung Numbers and the System of Chemical Elements // *Теоретико-групповые методы в физике: тр. междунар. семинара, Звенигород, 1979. М.: Наука, 1980. Т. 1. С. 327.*

GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS. VII: SPIN AND PERIOD DOUBLING

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The periodic system of chemical elements is defined within the framework of the weight diagram of the Lie algebra of the fourth rank of the rotation group of the eight-dimensional pseudo-Euclidean space of the neutral signature. The period doubling is explained by the action of the fourth Cartan generator.

Keywords: periodic system, Lie algebra, weight diagram, spin, fourth dimension.

Дата поступления в редакцию: 01.06.2025

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ СТАЦИОНАРНОЙ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА ИЗ ФИЗИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ КУЛАКОВА РАНГА (7, 7)

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. В данной статье демонстрируется возникновение геометрии стационарной вселенной де Ситтера из физической структуры Кулакова ранга (7, 7) в Мире событий Минковского, хотя для этого пришлось расширить понятие фундаментального закона в понимании Кулакова.

Ключевые слова: геометрия де Ситтера, появление пространства-времени, стационарная вселенная, физическая структура, теория Кулакова – Владимирова.

Введение

Идея вторичности пространства-времени, или его возникновение (emergence) из некоторой более исходной «подложки», которая является истинно фундаментальным понятием, весьма популярна в наши дни. Существуют различные подходы [1] к тому, чтобы строго установить этот факт, но все они, всё-таки, опираются на более или менее изощрённые математические конструкции, которые не воспринимаются как нечто *простейшее*.

Пространство-время, или пространственно-временная структура, – это Мир событий, введённый в физику в 1908 г. Г. Минковским, оснащённый 4-мерной псевдоримановой структурой. Иначе говоря, псевдориманова геометрия (метрика g_{ik}) накладывается на некоторое множество $\mathcal{M}$, элементы которого называются событиями, превращённое в 4-мерное многообразие за счёт введения систем координат. В случае специальной теории относительности, пространство-время обладает 4-мерной псевдоевклидовой геометрией. Это пространство-время Минковского.

Поясним. Структура многообразия с точки зрения физики – это всего лишь определение систем отсчёта, используемых для проведения экспериментов, фиксация эталонов измерения времени. А вот введение метрики (геометрии) – это написание уравнений для распространения света, деление Мира событий на прошлое, настоящее и будущее, написание уравнений для тяготения тел (для искривлённой геометрии) и т. д.

Таким образом, более простой структурой – «подложкой» – следует рассматривать структуру многообразия, на котором должно возникнуть пространство и время, а поскольку они неразделимы, должно возникнуть пространство-время.

В случае пространства-времени Минковского, или 4-мерной псевдоевклидовой геометрии, такую *простейшую* «подложку» нашли Ю.И. Кулаков [2] и Ю.С. Владимиров [3]. Эта «подложка» состоит из совокупности событий $i, k, \dots$ и вещественных бинарных отношений a_{ik} между ними, подчинённых некоторым фундаментальному закону и феноменологической симметрии.

На этом пути Ю.И. Кулакову удалось *породить* многие классические геометрии, а Ю.С. Владимирову – современную теорию частиц и взаимодействий между ними.

В данной статье демонстрируется возникновение геометрии стационарной вселенной де Ситтера из физической структуры Кулакова в Мире событий Минковского, хотя для этого пришлось расширить понятие фундаментального закона в понимании Кулакова ранга (7, 7).

1. Пространство-время де Ситтера как система отношений Кулакова

Рассматриваем в Мире событий $\mathcal{M}$ события i, a, k, b, c, d и предполагаем, что могут находиться в некоторых отношениях между каждой парой (m, n) из них, которое обозначим через s_{mn}^2 . Более того, полагаем, что какую бы шестёрку событий i, a, k, b, c, d мы не взяли, всегда выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{ba}^2 & s_{bc}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

называемое *фундаментальным законом*. Взаимозаменяемость шестёрок событий – это требование, именуемое *феноменологической симметрией*.

На языке теории Кулакова [2] вышесказанное означает, что Мир событий есть физическая структура ранга (7, 7).

Выполнение закона (1) позволяет найти математическую формулу для отношения s_{mn}^2 , которая записывается как [3, с. 41] (или [4, с. 46]):

$$s_{mn}^2 = (t_m - t_n)^2 - (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2, \quad (2)$$

где (t_m, x_m, y_m, z_m) – координаты события m (см. подробности в [4]).

Мы видим, что отношение s_{mn}^2 есть псевдоевклидово расстояние между двумя событиями $m = (t_m, x_m, y_m, z_m)$ и $n = (t_n, x_n, y_n, z_n)$.

Таким образом, фиксация физической структуры Кулакова ранга (7, 7) с фундаментальным законом (1) однозначно задаёт 4-мерную псевдоевклидову геометрию в

Мире событий [3, с. 41] с точностью до сигнатуры. Отметим, однако, что использование бинарных систем комплексных отношений ранга (3,3), введённых Ю.С. Владимировым, расширившим тем самым теорию Кулакова до комплекснозначных отношений, позволяет однозначно получить сигнатуру $(+ - - -)$ (см. [4, с. 162]).

Следовательно, пространство-время как геометрическая структура порождается первичной (изначальной) физической структурой Кулакова ранга (7,7) с законом (1), следовательно, пространство-время *вторично*.

В случае стационарной вселенной де Ситтера метрика пространства-времени имеет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{t^2} [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]. \quad (3)$$

Поэтому соответствующее отношение между событиями m и n задаётся формулой

$$S_{mn}^2 = \frac{1}{t_m^2} [(t_m - t_n)^2 - (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (z_m - z_n)^2]. \quad (4)$$

Примем следующий закон для *обобщённой* физической структуры ранга (7,7):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_i^{-2} & 0 & S_{ik}^2 & S_{ia}^2 & S_{ib}^2 & S_{ic}^2 & S_{id}^2 \\ t_k^{-2} & S_{ki}^2 & 0 & S_{ka}^2 & S_{kb}^2 & S_{kc}^2 & S_{kd}^2 \\ t_a^{-2} & S_{ai}^2 & S_{ak}^2 & 0 & S_{ab}^2 & S_{ac}^2 & S_{ad}^2 \\ t_b^{-2} & S_{bi}^2 & S_{ba}^2 & S_{bc}^2 & 0 & S_{bc}^2 & S_{bd}^2 \\ t_c^{-2} & S_{ci}^2 & S_{ck}^2 & S_{ca}^2 & S_{cb}^2 & 0 & S_{cd}^2 \\ t_d^{-2} & S_{di}^2 & S_{dk}^2 & S_{da}^2 & S_{db}^2 & S_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Нетрудно видеть, что при подстановке (4) в (5) за счёт вынесения множителя $1/t_m^2$ из каждой строки определителя (5) мы получим определитель (1), умноженный на эти множители:

$$\frac{1}{t_i^2 t_k^2 t_a^2 t_b^2 t_c^2 t_d^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & s_{ik}^2 & s_{ia}^2 & s_{ib}^2 & s_{ic}^2 & s_{id}^2 \\ 1 & s_{ki}^2 & 0 & s_{ka}^2 & s_{kb}^2 & s_{kc}^2 & s_{kd}^2 \\ 1 & s_{ai}^2 & s_{ak}^2 & 0 & s_{ab}^2 & s_{ac}^2 & s_{ad}^2 \\ 1 & s_{bi}^2 & s_{ba}^2 & s_{bc}^2 & 0 & s_{bc}^2 & s_{bd}^2 \\ 1 & s_{ci}^2 & s_{ck}^2 & s_{ca}^2 & s_{cb}^2 & 0 & s_{cd}^2 \\ 1 & s_{di}^2 & s_{dk}^2 & s_{da}^2 & s_{db}^2 & s_{dc}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

равный нулю в силу равенства (1).

Закон (5) очевидным образом справедлив для любых конформно-плоских пространств-времён

$$dS^2 = [\omega(t)]^2 [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2],$$

в которых можно наблюдать красное смещение для галактик [5, с. 274].

2. О стационарной вселенной де Ситтера

Стационарная вселенная де Ситтера была предложена Х. Бонди, Т. Голдом [6] и Ф. Хойлом [7] в 1948 г. как альтернатива теории Большого взрыва, т. е. как альтернатива нестационарным вселенным Фридмана. В отличие от изменяющихся расширяющихся вселенных Фридмана, вселенная де Ситтера – Бонди – Годда – Хойла неизменна. В ней нет начала и конца, она бесконечна, в ней есть красные смещения, галактики удаляются друг от друга, а образующееся разрежение поддерживается постоянным рождением материи, причем материя должна создаваться со скоростью, определяемой расширением, а эволюционировавшая более старая материя исчезает за горизонтом. Вселенная всегда остаётся неизменной. Как пишут Дж. Нарликар и Г. Бэрбидж: «Эта идея не более экстравагантна, чем подход, при котором все изначально создавалось в результате гигантского взрыва, исходящего из определенной точки» [8, p. 121].

Для обоснования процесса создания новой материи Ф. Хойлом была введена отрицательная энергия – C -поле, которое обеспечивало сохранение вещества и энергии. В 1949 г. это привело к отклонению статьи Ф. Хойла рядом журналов, в наши дни отрицательная энергия воспринимается как нечто вполне нормальное [8, p. 130–131].

Стационарную вселенную де Ситтера можно изобразить на гиперboloиде

$$-v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

в плоском 5-мерном пространстве $\mathbb{R}^5$ с метрикой

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

В самом деле, покажем это [9]. На этом гиперboloиде введём следующие координаты (t, ξ, θ, ϕ) :

$$a \cdot sh\left(\frac{t}{a}\right) = v, \quad a \cdot ch\left(\frac{t}{a}\right) \cos \chi = w, \quad a \cdot ch\left(\frac{t}{a}\right) \sin \chi \cos \theta = x,$$

$$a \cdot ch\left(\frac{t}{a}\right) \sin \chi \sin \theta \cos \phi = y, \quad a \cdot ch\left(\frac{t}{a}\right) \sin \chi \sin \theta \sin \phi = z.$$

Тогда метрика гиперboloида примет вид

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \cdot ch^2\left(\frac{t}{a}\right) [d\chi^2 + \sin^2 \theta (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

Наконец, взяв координаты

$$\hat{t} = a \cdot \log \frac{w+v}{a}, \quad \hat{x} = \frac{ax}{w+v}, \quad \hat{y} = \frac{ay}{w+v}, \quad \hat{z} = \frac{az}{w+v},$$

получим метрику на гиперboloиде в виде

$$ds^2 = -d\hat{t}^2 + \exp\left(\frac{\hat{t}}{2a}\right) [d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2]. \quad (7)$$

Метрики (3) и (7) совпадают с точностью до знака (и коэффициента).

Сама стационарная вселенная де Ситтера изображена на рис. 1 – это половина гиперболоида между двумя прямолинейными образующими; координаты $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ покрывают эту половину. Поверхности $\hat{t} = \text{const}$ являются 3-мерными пространствами.

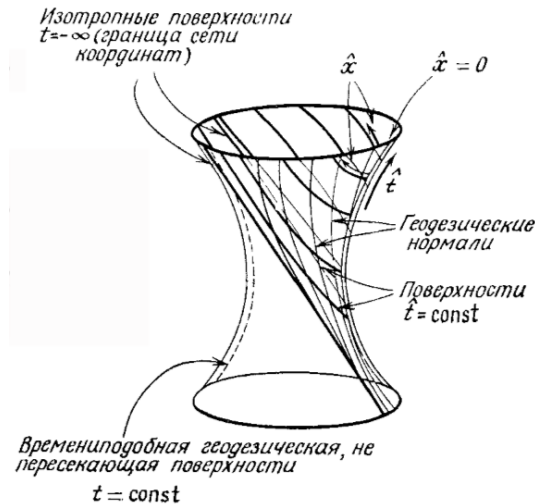


Рис. 1. Стационарная вселенная де Ситтера (рис. из [9])

3. Обобщённая физическая структура Кулакова в искривлённом пространстве-времени

Изначально Ю.С. Кулаков постулировал фундаментальный закон только для отношений a_{ik}

$$\Phi(a_{ik}, \dots, a_{mn}) = 0, \quad (8)$$

где число переменных определялось рангом рассматриваемой (унарной) физической структуры.

Однако геометрия искривлённого пространства-времени существенно локальна в том смысле, что на отношение двух событий влияет, главным образом, лишь близкое их местонахождение в пространстве и во времени. Поэтому в фундаментальный закон должны войти локализации (координаты) событий

$$\Phi(\{x_i, a_{ik}\}, \dots, \{x_m, a_{mn}\}) = 0. \quad (9)$$

Этот обобщённый закон в случае конформно плоских метрик мы угадали и представили выше.

Имеет смысл поискать вид этого закона для метрик Фридмана в силу того, что с ними связана теория Большого взрыва, а в последние годы в связи с данными, полученными от телескопа «Джеймс Уэбб», много говорят о возврате к модели стационарной вселенной, метрика которой, как показано выше, **возникает** как следствие

фиксации унарной структуры Кулакова ранга $(7, 7)$. Было бы сильным аргументом против теории Большого взрыва, если бы выяснилось, что метрики Фридмана не возникают из теории Кулакова.

4. Заключение

В Новосибирске в те же годы, когда совершенствовалась Ю.С. Кулаковым его теория, академик А.Д. Александров предложил путь аксиоматизации однородных лоренцевых геометрий на основе понятия причинного порядка в Мире событий. С целью аксиоматизации однородных пространств полезно согласовать порядковую структуру с вводимой полной плоской аффинной структурой, которую допускают, например, все лоренцевы многообразия размерности, не превышающей 4, с транзитивной разрешимой группой движений. В этом случае множества $\{y|x \leq y\}$ состояли бы из аффинных полугеодезических, исходящих из события. Были построены соответствующие аксиоматики для (исключительно) абелевой и основной аффинной групп Ли, а также для целого ряда важнейших космологических моделей, включая стационарную вселенную де Ситтера [10, 11].

Можно сказать, что по исходной простоте оба подхода явно равнозначны: в обоих случаях использовано бинарное отношение. Поэтому в обоих подходах геометрия возникает из бинарных отношений при некоторых дополнительных условиях – у Ю.С. Кулакова это фундаментальный закон и феноменологическая симметрия, у А.Д. Александрова – набор аксиом для отношения порядка $\leq$ и симметрия исходного Мира событий.

Последнее скрыто как раз во фразе: «С целью аксиоматизации однородных пространств полезно согласовать порядковую структуру с полной плоской аффинной ... с транзитивной разрешимой группой движений...» [11].

Конечно, аксиоматический подход Ю.С. Кулакова при его исполнении по законам математической строгости, что было отчасти сделано Г.Г. Михайличенко, приведёт к тому, что при описании аксиоматик на его основе появится гораздо больше математических понятий и конструкций, чем кажется при первом знакомстве со структурами Кулакова, а иначе быть не может, поскольку Ю.С. Кулаков физик, а не математик, а физики менее строги к точным формулировкам, чем математики.

Другими словами, оба подхода в чём-то близки, и если подход А.Д. Александрова легко воспринимается математиками и не вызывает особого отторжения у образованных физиков, то подход Ю.И. Кулакова не воспринимался ни физиками, ни математиками, хотя последние помогли Ю.И. Кулакову и его ученикам довести свои работы до уровня, который уже не раздражал математиков. Но физики и после такого наведения лоска по-прежнему остаются равнодушными к достижениям теории физических структур Кулакова и к теории систем отношений Владимиров-ва. Профессор Ю.С. Владимиров, думается, в силу того, что был в сфере влияния Д.Д. Иваненко, одного из самых наших образованных физиков, не только внимательно отнёсся к работам Ю.И. Кулакова, но существенно их обобщил¹, продвинул

¹Ю.С. Владимиров стал рассматривать комплексные бинарные отношения a_{ik} , что открыло возможность описания спиноров, элементарных частиц и др. в рамках подхода Ю.С. Кулакова.

в те области физики, куда не заглядывали ученики Ю.С. Кулакова, и получил массу выдающихся результатов, благодаря которым Мир выглядит совсем не так, как написано во всех учебниках для студентов-физиков.

Литература

1. Гуц А.К. Теории пространства-времени // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 4. С. 23–47.
2. Кулаков Ю.И. Теория физических структур. Новосибирск: Илфа Виста, 2003. 851 с.
3. Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. М.: Изд-во МГУ, 1996. 262 с.
4. Владимиров Ю.С. Основания физики. 3-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
5. Синг Дж. Общая теория относительности. М.: ИЛ, 1963. 432 с.
6. Bondi H., Gold T. The steady-state theory of the expanding universe // Mon. Not. Roy. Ast. Soc. 1948. Vol. 108. P. 252–270.
7. Hoyle F. A new model for the expanding universe // Mon. Not. Roy. Ast. Soc. 1948. Vol. 108. P. 372–382.
8. Narlikar J.V., Burbidge G. Facts and Speculations in Cosmology. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
9. Хоукинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная теория пространства-времени. М.: Мир, 1977.
10. Гуц А.К. Аксиоматизация лоренцевой геометрии и структуры порядка // Вестник МГУ, сер. мат. 1986. № 5. С. 93.
11. Гуц А.К. Аксиоматическое описание стационарной вселенной де Ситтера // Тезисы Всесоюзного симпозиума по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Новосибирск: Ин-т мат. СО АН СССР, 1982. С. 37.

THE EMERGENCE OF THE DE SITTER GEOMETRY OF THE STATIONARY UNIVERSE FROM THE KULAKOV-VLADIMIROV RANK RELATIONSHIP SYSTEM (7,7)

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. In this article the emergence of the geometry of the de Sitter stationary universe from the physical structure of Kulakov of rank (7, 7) in the World of Minkowski events is demonstrated, although for this it was necessary to expand the concept of the fundamental law in Kulakov's understanding.

Keywords: de Sitter geometry, the emergence of space-time, stationary universe, physical structure, Kulakov – Vladimirova theory.

Дата поступления в редакцию: 28.04.2025

ПРОБЛЕМЫ КАЧЕСТВА И НАДЁЖНОСТИ ДАННЫХ В СПРАВОЧНИКАХ ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.Ю. Зайков¹

охранник, e-mail: zaykov_tomsk@mail.ru

Е.В. Ворожцов²

д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

¹Спортивная школа зимних видов спорта, Томск, Россия

²Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского
отделения РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассматриваются вопросы качества и надёжности данных, содержащихся в четырёх справочниках по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Продемонстрированы три примера ошибочных решений из справочников Камке и Зайцева – Полянина и указано, как исправить ошибки в решениях. Проанализирована структура метаданных в справочнике Камке и показаны её недостатки. На примерах ошибок, выявленных в некоторых решениях из справочников, показано, что ни один из них не является стопроцентно надёжным. Описан систематический подход, позволяющий кардинально улучшить качество справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход сводится к тотальной проверке всех решений с применением символьных вычислений на компьютере.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, справочники, ошибочные решения, качество данных.

Введение

Математическое моделирование широко применяется при исследовании разнообразных явлений и процессов в естественных науках. Обыкновенные дифференциальные уравнения часто используются в качестве сравнительно простых математических моделей. Если известно точное решение обыкновенного дифференциального уравнения, то это существенно облегчает исследование различных свойств явлений. Дело в том, что общие решения дифференциальных уравнений обычно содержат константы и свободные параметры. Варьируя их, можно обнаруживать такие свойства решения, как возрастание, убывание, осцилляции, периодичность, гистерезис и т. д.

При исследовании процессов, описываемых уравнениями или системами уравнений в частных производных, нередко удаётся использовать автомодельные переменные. Тогда система уравнений в частных производных переходит в систему

обыкновенных дифференциальных уравнений, что облегчает поиск точного решения системы. Таким образом, автомодельные решения расширяют область применимости справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений на уравнения в частных производных. Приведём ряд примеров задач в области теоретической и прикладной механики и вычислительной гидродинамики, где успешно применялись автомодельные переменные для получения точных решений систем уравнений в частных производных:

Пример 1. Рассмотрим два газа, разделённые перегородкой при $t < 0$. Каждый газ характеризуется своим давлением, плотностью, скоростью и температурой. В момент времени $t = 0$ перегородка убирается. Необходимо найти решение системы уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа при $t > 0$. Эта задача называется задачей о распаде разрыва. В [1] показано, что её решение зависит только от одной автомодельной переменной $\xi_1 = x/t$, где x – пространственная координата. В [1] приведено полное аналитическое исследование задачи.

Пример 2. Уравнение Кортевега – де Фриза имеет решения типа бегущей волны (в частности, солитоны), которые зависят только от переменной $\xi_2 = x - \lambda t$, где $\lambda = \text{const}$ [2, 3].

Пример 3. Пограничный слой на плоской пластине. Вязкая жидкость течёт вдоль оси x , параллельной пластине. При этом у поверхности пластины возникает пограничный слой, являющийся функцией от единственной автомодельной переменной $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x}}$, где y – координата вдоль нормали к пластине [2, 3].

Пример 4. При сквозном расчёте задач динамики невязкого сжимаемого газа, которые содержат контактные разрывы, ширина зоны размазывания контактного разрыва растёт со временем пропорционально $t^{\frac{1}{r+1}}$, где r – порядок точности разностной схемы ($r \geq 1$). В [4] показано, что численное решение задачи о движении контактного разрыва является автомодельным и зависящим только от одной автомодельной переменной $\xi_4 = (x - u_0 t) / [\beta (\mu t)^{1/(r+1)}]$, где $\beta = \text{const}$; μ – постоянная, зависящая от шагов расчётной сетки в плоскости (x, t) ; u_0 – скорость движения контактного разрыва.

Большое количество других автомодельных решений уравнений математической физики приведено в [2]. Отметим, что автомодельные решения часто используются для тестирования новых компьютерных программ, созданных для приближённого решения уравнений в частных производных (см., например, [1, 3, 4]).

В изданных на русском языке справочниках [5, 6] по обыкновенным дифференциальным уравнениям приведено много точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков. Одна глава в [5] посвящена конкретным дифференциальным уравнениям второго порядка. В справочнике [6] даётся гораздо больше точных решений уравнений второго порядка. Имеются два американских перевода книги [6] (см. [7, 8]).

Наряду со справочниками по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений издано много справочников для биологов, медиков, металлургов, фармацевтов, химиков, экономистов и т. д. Все справочники имеют ряд общих проблем, а именно: проблемы качества данных, надёжности данных, релевантности данных, содержащихся в справочнике. Все эти проблемы давно являются предме-

том серьёзного изучения как за рубежом, так и в России. Всю информацию, содержащуюся в справочниках, можно разделить на два класса: метаданные и данные. Метаданные – это данные о данных: об их составе, содержании, статусе, происхождении, местонахождении, качестве, форматах, объёме, условиях доступа, авторских правах, верификации данных и т. п. [9].

Специалисты в областях, перечисленных выше, зачастую не являются специалистами по теории дифференциальных уравнений. Поэтому, как правило, основным источником получения сведений о дифференциальных уравнениях для них являются справочники. Применительно к справочникам по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, основными метаданными являются математические формулы, показывающие решаемые дифференциальные уравнения, а данными являются точные решения указанных конкретных уравнений. Кроме того, согласно [9], рассматриваемые справочники должны также содержать метаданные о происхождении каждого решения, включённого в справочник. Справочник [5] содержит эту информацию в виде ссылок на статьи, в которых опубликованы решения конкретных дифференциальных уравнений. С этой точки зрения данный справочник удовлетворяет современным требованиям информационных технологий к метаданным. Но в то же время он не удовлетворяет следующему важному требованию: в нём нет никаких сведений о том, как осуществлялась *верификация* каждого конкретного решения.

Проблемы качества и надёжности данных о точных решениях, которые содержатся в справочниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям, тесно связаны со следующими простыми вопросами: (i) имеются ли ошибки в решениях дифференциальных уравнений; (ii) как можно безопасно пользоваться справочниками при наличии знания о том, что в них есть ошибки?

И.Б. Шубинский [10, с. 3] даёт следующее определение ошибки: «Здесь под термином *ошибка* понимается: в широком смысле – непреднамеренное отклонение от истины или правил; в узком смысле – отклонение значения измеряемой или теоретически определяемой величины от ее настоящего значения». Термин *ошибка* в узком смысле можно пояснить следующим образом. Для численного решения задач математической физики, описываемых уравнениями с частными производными, широко применяются такие приближённые методы, как метод конечных разностей, метод конечного объёма и метод конечных элементов. В силу того, что все эти методы приближённые, они дают численное решение с ошибками, размер которых определяется точностью используемого метода. При этом даже результаты применения методов очень высокой точности при очень малых размерах шагов расчётной сетки всегда будут содержать ошибки в узком смысле из-за ограниченности основных параметров современных суперкомпьютеров – памяти и быстродействия.

Под *качеством* данных в [11] понимаются такие показатели текущего состояния данных, как полнота, точность, надёжность, релевантность и своевременность. Проблемы с качеством данных сигнализируют о наличии изъянов, снижающих перечисленные выше показатели. Данные полезны только тогда, когда они имеют высокое качество. Использование низкокачественных данных может привести к следующим последствиям:

- – Используя ошибочное решение дифференциального уравнения, инженер из

промышленности или научный сотрудник НИИ может принять ошибочное решение о том, в каком направлении вести дальше разработку технического устройства либо научное исследование. В результате, например, ракета может взорваться на старте.

- Неточный или полностью неверный анализ, ведущий к плохой репутации завода-изготовителя и/или увольнению работника, допустившего фатальную ошибку (из-за того, что он излишне доверился какому-то справочнику).
- Снижение продуктивности.
- В широком смысле, тормозится научно-технический прогресс в выбранном направлении.

Надёжность данных заключается в том, что они являются точными, полными, непротиворечивыми и не содержат ошибок [11]. Некоторые характеристики ненадёжных данных:

- Ошибочные данные. Они могут ввести в заблуждение и привести к крайне нежелательным последствиям.
- Дублирующиеся данные. Могут исказить результаты анализа.
- Нерелевантные данные. Не представляют ценности в контексте текущего анализа.

В монографии [10] имеется обсуждение проблемы качества и надёжности программного обеспечения (ПО). Дается определение качества ПО. Описываются метрики качества и модели надёжности ПО. В свою очередь, можно говорить также о математическом обеспечении ПО для инженерных расчётов. Для математического обеспечения инженерных расчётов используются различные программные системы, например, MATLAB, MathCAD, метод конечных элементов. В математическое обеспечение могут входить и справочники по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, потому что точные решения нужны для проверки правильности (верификации) программной реализации численных методов для инженерных расчётов. Поэтому и с точки зрения качества и надёжности ПО крайне важно, чтобы справочники по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений не содержали ошибок.

Книга [12] целиком посвящена проблеме качества данных и её влиянию на финансовое благополучие как крупных корпораций, так и малых фирм. В этой книге дается следующее определение качества данных: «Data quality is defined as the health of data at any stage in its life cycle» («Качество данных определяется как здоровье данных на любом этапе их жизненного цикла»).

В случае справочника по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений низкое качество предлагаемого решения может, в частности, состоять в следующем: формально решение правильное, но оно содержит корень из отрицательного числа, т. е. комплексное число. Но в естественнонаучных приложениях требуются в подавляющем большинстве случаев вещественные решения дифференциальных уравнений. К сожалению, такие примеры комплексных решений имеются в [5, 6]. Если авторы справочника не указывают, в каких случаях комплексное решение приводимо к вещественному виду, то для пользователя, который не является математиком, решение оказывается неприменимым (см. ниже обсуждение примера 2.282a из [5]).

Каким образом можно повышать качество данных – в нашем случае точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений? Важнейший способ проверки правильности точного решения – его подстановка в обыкновенное дифференциальное уравнение. Предположим, что нам требуется решение следующего дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', y'') = f(x), \quad (1)$$

где $F(\cdot)$ и $f(x)$ – заданные функции. Предположим, что в справочнике [5] имеется решение $y(x)$ уравнения (1). Тогда перед его подстановкой в уравнение (1) сначала перепишем его в виде

$$F(x, y, y', y'') - f(x) = 0. \quad (2)$$

Затем решение $y(x)$, взятое из [5], подставляется в (2). Если в результате подстановки в правой части (2) появляется ненулевая невязка $r(x)$

$$F(x, y, y', y'') - f(x) = r(x), \quad (3)$$

то это указывает на ошибочность решения, данного в справочнике [5]. Тогда можно поступить следующим образом: найти другой справочник по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, например, справочник [6]. Если повезёт, то в [6] найдётся решение уравнения (1) в виде, отличном от решения, данного в [5]. Это решение тоже нужно подставить в (1), и если не появится ненулевая невязка $r(x)$ в (3), то, следовательно, решение из [6] правильное.

Подстановку точного решения в дифференциальное уравнение можно делать вручную, используя бумагу и ручку. Но этот процесс часто бывает весьма трудоёмким, что повышает вероятность человеческой ошибки [11]. Поэтому предпочтительнее использование символьных вычислений на компьютере. Как указано в [5], данный справочник является переводом с немецкого шестого издания 1959 г. В справочнике собраны решения, полученные различными авторами за период с XX в. по 1959 г.

Разработка системы компьютерной алгебры Macsyma [13] велась в США с 1968 г. Это была первая всеобъемлющая система символьной математики и одна из ранних систем, основанных на знаниях. Поэтому в 1950-е гг. у Э. Камке не было возможности проверять правильность решений, внесённых им в свой справочник, с помощью символьных вычислений на компьютере. К настоящему времени разработан ряд систем компьютерной алгебры (СКА) общего назначения. Из них отметим СКА Maple [14] и Mathematica [15]. Но чтобы успешно пользоваться ими, нужно сначала освоить языки, на которых написаны эти системы. Необходимо отметить, что если пользователь уже освоил по минимуму синтаксис языка СКА, он может непреднамеренно сделать ошибку при вводе и уравнения, и решения в программу на языке СКА. Поэтому пользователь должен тщательно проверять правильность тех уравнений и их решений, которые он ввёл в программу на языке СКА. Сам процесс символьных вычислений на современном настольном компьютере при подстановке решения в уравнение занимает менее одной секунды.

В настоящей работе проводится анализ некоторых точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка из [5, 6] и даются 10 новых частных точных решений дифференциальных уравнений второго порядка, которые

отсутствуют в [5, 6]. Забегая вперёд, отметим, что ни один из справочников [5, 6] не является стопроцентно надёжным. Составители англоязычных справочников [7, 8] включили в свои справочники много примеров дифференциальных уравнений из справочника [5], поэтому эти справочники также не являются стопроцентно надёжными. Кроме того, во всех четырёх справочниках [5–8] нет метаданных о том, как осуществлялась верификация точных решений.

В формулах, где присутствует функция $e^{f(x)}$ с достаточно громоздким выражением для $f(x)$, ниже применяется обозначение $\exp[f(x)]$.

1. Анализ двух решений из справочника Камке

1.1. Пример 2.1266

Рассмотрим пример № 2.1266 дифференциального уравнения второго порядка из [5, с. 393]:

$$xy''(x) + (x^{a+1} - a)y'(x) + bx^{2a+1}y(x) = 0, \quad a \neq -1. \quad (4)$$

Для этого уравнения в [5] предлагаются следующие решения:

Решение 1:

$$y(x) = C_1 e^{a_1 X} + C_2 e^{a_2 X} \quad \text{при } b \neq \frac{1}{4}, \quad (5)$$

где $X = (a+1)^{-1}x^{a+1}$ и a_1, a_2 – корни уравнения $a^2 + a + b = 0$, т. е.

$$a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \quad a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b},$$

тогда

$$\begin{aligned} y(x) = & C_1 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right) (a+1)^{-1}x^{a+1} \right] + \\ & + C_2 \exp \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b} \right) (a+1)^{-1}x^{a+1} \right], \quad b \neq \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение 2:

$$y(x) = \exp \left[(a+1)^{-1}x^{a+1} \right] (C_1 + C_2 x^{a+1}), \quad b = \frac{1}{4}. \quad (7)$$

Очевидно, что $\sqrt{1-4b} = 0$ в (6) при $b = \frac{1}{4}$, оба решения совпадают, и это общее решение

$$y_1(x) = \exp \left[-\frac{1}{2}(a+1)^{-1}x^{a+1} \right], \quad b = \frac{1}{4},$$

является одним из решений случая $b = \frac{1}{4}$, но это не соответствует указанному у Э. Камке решению (7). Полагая, что в (7) не указана в экспоненте дробь $-\frac{1}{2}$, подставляем её в решение (7):

$$y(x) = \exp \left[-\frac{1}{2}(a+1)^{-1}x^{a+1} \right] (C_1 + C_2 x^{a+1}), \quad b = \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Покажем теперь с помощью небольшой программы, написанной на языке СКА Maple [14], что решение (7), приведённое в [5], является ошибочным. В целях краткости мы опустили промежуточные результаты ввиду их громоздкости:

```

restart;
eq1266 := x*ddy+(x^(a+1)-a)*dy+b*x^(2*a+1)*y;
b := 1/4;
y := exp(x^(a+1)/(a+1))*(C1+C2*x^(a+1));
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq1266);

```

$$\frac{3 e^{\frac{x^{a+1}}{a+1}} (4ax^{2a+2}C_2 + 3x^{2a+2}C_1 + 3x^{3a+3}C_2 + 4C_2x^{2a+2})}{4x}. \quad (9)$$

Выражение, заданное формулой (9), – это ненулевая невязка, появившаяся в правой части уравнения (4) после подстановки в его левую часть решения (7) из справочника Камке. Следовательно, решение (7) является ошибочным.

Теперь посмотрим, какой результат получится, если в (4) подставить наше исправленное решение (8):

```

restart;
eq1266 := x*ddy+(x^(a+1)-a)*dy+b*x^(2*a+1)*y;
b := 1/4;
y := exp(-x^(a+1)/((a+1)*2))*(C1+C2*x^(a+1));
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq1266);

```

Видим, что в правой части уравнения (4) невязка остаётся нулевой после подстановки в левую часть нашего решения (8). Таким образом, оно оказывается правильным (и, по сути дела, уточнённым, обновлённым) решением. Ошибка исправлена. Попутно заметим, что уравнение (4) не включено в справочники [6] и [8].

На рис. 1 представлены кривые $y = y(x)$ ошибочного решения (7) из справочника Камке [5] и правильного решения (8). Обе кривые были получены при одинаковых значениях констант: $a = -0.5$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$. Видно, что кривые демонстрируют прямо противоположное поведение с ростом x : ошибочная кривая растёт, а правильная кривая убывает.

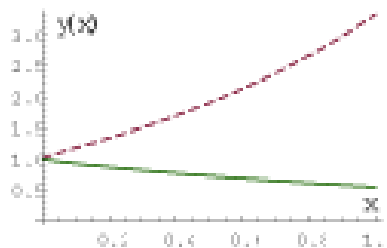


Рис. 1. Пример 2.1266. (— — —) – ошибочное решение (7) из справочника Камке;
(—) – правильное решение (8)

1.2. Пример 2.282а

Рассмотрим пример № 2.282а дифференциального уравнения второго порядка из [5, с. 432]:

$$4x^2y''(x) + 4x^3y'(x) + (x^4 + ax^2 + b)y(x) = 0, \quad (10)$$

которое при $a = 2$ имеет решение

$$y(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}} \left(C_1 x^{\frac{\sqrt{1-b}}{2}} + C_2 x^{-\frac{\sqrt{1-b}}{2}} \right), \quad (11)$$

и в [5] указано, что при $a = b = 1$ уравнение (10) имеет решение

$$y(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}} (C_1 + C_2 \ln(x)), \quad (12)$$

что не соответствует действительности. Подставив $b = 1$ в (11), получим совпадение решений

$$y_1(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad (13)$$

и (13) является частью решения (12). В [5] решение (12) ошибочно указано как отдельное, имеющее место при $a = b = 1$, т. е. не имеющее отношения к случаю $a = 2$. А решение (11), указанное в [5] для случая $a = 2$, является неполным, так как оно не учитывает случай $b = 1$. Поэтому предположим, что (12) является решением уравнения (10) не при $a = b = 1$, как указано в [5], а при $a = 2, b = 1$. Правильное изложение решения: при $a = 2$ уравнение (10) имеет решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}} \left(C_1 x^{\frac{\sqrt{1-b}}{2}} + C_2 x^{-\frac{\sqrt{1-b}}{2}} \right), \quad b \neq 1, \\ y(x) &= \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}} (C_1 + C_2 \ln(x)), \quad b = 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем теперь с помощью небольшой программы, написанной на языке СКА Maple [14], что решение (12), приведённое в [5], является ошибочным. В целях краткости мы опустили промежуточные результаты ввиду их громоздкости:

```
restart;
eq282a := 4*x^2*ddy + 4*x^3*dy + (x^4 + a*x^2 + b)*y;
a:= 1; b := 1;
y := (C1 + C2*ln(x))*exp(-x^2/4)*sqrt(x);
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq282a);
```

$$-(C1 + C2 \ln(x))x^{5/2}e^{-x^2/4}. \quad (15)$$

Выражение, заданное формулой (15), это ненулевая невязка, появившаяся в правой части уравнения (10) после подстановки в его левую часть решения (12) из справочника Камке. Следовательно, решение (12) является ошибочным.

Теперь посмотрим, какой результат получится, если в (10) подставить наше исправленное решение (14):

```
restart;
eq282a := 4*x^2*ddy + 4*x^3*dy + (x^4 + a*x^2 + b)*y;
a:= 2; b := 1;
y := (C1 + C2*ln(x))*exp(-x^2/4)*sqrt(x);
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq282a);
```

Видим, что в правой части уравнения (10) невязка остаётся нулевой после подстановки в левую часть нашего решения (14). Таким образом, оно оказывается правильным (и, по сути дела, уточнённым, обновлённым) решением. Ошибка исправлена. Попутно заметим, что уравнение (10) не включено в справочники [6] и [8].

Заметим, что решения (11) и (14) не остаются вещественными для любых вещественных значений величин x и b . Решение (11) остаётся вещественным только при $x > 0$ и $b \leq 1$. Решение (14) вещественно только при $x > 0$. Так что если пользователь хочет использовать решения (11) и (14) только как вещественные, ему необходимо учитывать ограничения на x и b . Эти ограничения не приводятся в явном виде в [5], поэтому пользователю самому нужно проявлять внимательность и осмотрительность при использовании рассматриваемых решений.

Итак, мы представили выше два примера ошибочных решений, которые мы нашли в справочнике Камке. Из этого рассмотрения вытекает следующий достаточно очевидный вывод: для того, чтобы кардинально улучшить качество справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо осуществить тотальную проверку **всех** решений с применением символьных вычислений с помощью СКА.

Как указывалось во Введении, автор справочника [5] не проверял правильность представленных им решений с помощью символьных вычислений на компьютере. Хотя в настоящее время имеются очень удобные СКА, до сих пор никем не предпринималась попытка тотальной проверки справочника [5]. В этих условиях исключается *доверие* к данным, содержащимся в справочнике [5]. Поэтому приходится подозревать наличие ошибки в *каждом* решении. Но если очень востребовано точное решение конкретного дифференциального уравнения, то что нужно делать, чтобы убедиться в правильности решения, предлагаемого в справочнике? Ответ на этот вопрос дан в предыдущем разделе.

2. Анализ решения из справочника Зайцева – Полянина

Рассмотрим пример № 185 дифференциального уравнения второго порядка из [6, с. 177]:

$$(ax^3 + bx^2 + cx)y''(x) + (nx^2 + mx + k)y'(x) + (k-1)[(n-ak)x + m - bk]y(x) = 0. \quad (16)$$

Для этого уравнения в [6] предлагается следующее частное решение:

$$y_0(x) = x^{1-k}. \quad (17)$$

Постоянная c указана лишь при второй производной. Это означает, что решение обязательно должно зависеть от c , но в частном решении её нет. Рассмотрим вместо (17) частное решение несколько более общего вида

$$y_0(x) = C_1 x^{1-k}, \quad (18)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подстановка решения (18) в (16) приводит к появлению ненулевой правой части:

$$(ax^3 + bx^2 + cx)y_0''(x) + (nx^2 + mx + k)y_0'(x) + (k-1)[(n-ak)x + m - bk]y_0(x) = C_1(c-1)(k-1)kx^{-k}. \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что при $c \neq 1$ его правая часть не равна нулю. Это означает, что решения (17) и (18) являются ошибочными при $c \neq 1$. Очевидно, что для исправления ошибки нужно изменить уравнение (16) следующим образом:

$$(ax^3 + bx^2 + x)y''(x) + (nx^2 + mx + k)y'(x) + (k-1)[(n-ak)x + m - bk]y(x) = 0. \quad (20)$$

Решение (18) удовлетворяет уравнению (20) и при произвольной постоянной C_1 , как это следует из (19). Но в [6] нет этого решения. Так что решение (18) можно рассматривать как подкорректированный вариант решения (17).

Если частное решение имеет настолько сложный вид, что равенство нулю невязки в правой части уравнения не очевидно, то можно применить другой способ доказательства ошибочности частного решения (17). Опишем его.

Мы увидели выше, что в уравнении или в решении допущена ошибка. Для исправления этой ошибки нужно правильно подобрать критерий, которым можно проверить правильность уравнения и решения одновременно. Таким критерием может быть наличие у уравнения (16) частного решения, не зависящего от коэффициентов a, b, c, n, m , что следует из (17). Тогда уравнение (16) распадается на следующие независимые уравнения:

$$a[x^3y''(x) + k(1-k)xy(x)] = 0, \quad (21)$$

$$b[x^2y''(x) + k(1-k)y(x)] = 0, \quad (22)$$

$$c[xy''(x)] = 0, \quad (23)$$

$$n[x^2y'(x) + (k-1)xy(x)] = 0, \quad (24)$$

$$m[xy'(x) + (k-1)y(x)] = 0, \quad (25)$$

$$ky'(x) = 0. \quad (26)$$

При этом $y_0(x) = Cx^{1-k}$ является общим решением уравнений (24) и (25) и частным решением уравнений (21) и (22). Это означает, что решение было указано верно, ошибка в уравнении.

Поскольку решения (23) и (26) не соответствуют (17), сложим их, получим

$$cxy''(x) + ky'(x) = 0 \quad (27)$$

и, подставив (17) в (27), получим $c = 1$, т. е. правильным написанием уравнения является уравнение (20).

3. Недостатки структуры метаданных в справочнике Камке

Справочники по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений имеют определённые недостатки, препятствующие использованию заложенного в них потенциала. Для авторов справочников этих недостатков практически невозможно было избежать. Например, при таком объёме материала невозможно было не допустить какие-нибудь ошибки. Но ошибки – это самый безобидный из недостатков. Ведь тот, кто собирается использовать конкретное дифференциальное уравнение для моделирования, например, физического процесса, может проверить,

соответствует ли указанное в справочнике решение уравнению. И, если не соответствует, попробовать найти ошибку и исправить её.

Гораздо более худшим недостатком является неудобная систематизация (структура) материала в справочнике, препятствующая полноценному его использованию. Авторы справочников, как правило, не имеют возможности проводить научные исследования собранного ими материала, поскольку они и без того проделали огромный объём работы. Поэтому появление недостатков систематизации закономерно. Но такие недостатки, как будет показано ниже, могут не только препятствовать нахождению нужной специалисту информации, но и даже установить, есть ли в справочнике эта информация. И породить многократное дублирование информации.

Полагаем, что недостатки систематизации наиболее ярко проявляются в разделах справочников о линейных дифференциальных уравнениях второй степени. Эти уравнения представлены в справочниках в виде либо однородных

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \quad (28)$$

либо неоднородных уравнений

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Если известно решение однородного уравнения, то способ решения неоднородного уравнения многократно описан в учебниках по дифференциальным уравнениям. И наличие их в справочниках излишне, лишь захламляет справочники. А неоднородных уравнений слишком много в [5], встречаются они и в [6].

В справочнике [5] решённые линейные дифференциальные уравнения второго порядка систематизированы таким образом, что справочник почти невозможно использовать. Это относится и к уравнениям с коэффициентами, являющимися рациональными, решения которых представимы в элементарных функциях.

Хорошо известно, что подстановкой

$$z(x) = \exp \left[\frac{1}{2} \int a_1(x) dx \right] y(x) \quad (29)$$

уравнение (28) можно привести к виду

$$z''(x) + b_0(x)z(x) = 0, \quad (30)$$

где

$$b_0(x) = a_0(x) - \frac{1}{4}[a_1(x)]^2 - \frac{1}{2}a_1'(x). \quad (31)$$

Предположим, что кому-то понадобилось решение уравнения вида (28). Подстановкой (29) он сводит его к уравнению вида (30), и если уравнения в справочниках представлены в виде (30), то ему достаточно сравнить коэффициенты (31), чтобы установить, есть ли в справочниках решение нужного ему уравнения.

Но в справочниках уравнения представлены в виде (28), и чтобы установить, приведено ли в них решение конкретного уравнения, сперва нужно эти уравнения

(а их много) привести к виду (30), т. е. провести полноценное научное исследование лишь для того, чтобы воспользоваться справочниками для одного уравнения!

Это приводит и к такому недостатку справочников, что уравнения, сводящиеся к одному уравнению вида (30), приводятся в справочниках неоднократно. Это означает дублирование данных, что отнесено в [11] к проблеме надёжности данных (см. также выше Введение). Дублирующиеся данные могут присутствовать в справочниках потому, что составители справочника часто берут данные из различных источников. Поэтому при объединении данных в одном справочнике и появляются дубли данных.

Например, даже уравнение с постоянными коэффициентами, для которого достаточно одного примера, в [5] представлено следующими примерами (список неполный): № 2.1, с. 363; № 2.2, с. 364; № 2.3, с. 364; № 2.4, с. 364; № 2.5, с. 364; № 2.6, с. 364; № 2.7, с. 365; № 2.8, с. 365; № 2.9, с. 365; № 2.35, с. 375–376; № 2.36, с. 376, 2.41a, с. 377; № 2.47, с. 378; № 2.50, с. 379; № 2.51, с. 379; № 2.53, с. 379; № 2.55, с. 379; № 2.91, с. 385; № 2.100, с. 386; № 2.101, с. 386; № 2.107, с. 387, при $a = 1$, $b = 2$; № 2.125a, с. 392; № 2.174, с. 405; № 2.176, с. 405; № 2.177, с. 405; № 2.178, с. 405; № 2.179, с. 405; № 2.184, с. 406; № 2.202, с. 408; № 2.229, с. 411; № 2.243, с. 418; № 2.276, с. 431; № 2.277, с. 431; № 2.281, с. 432; № 2.322, с. 438; № 2.325a, сл. (в), с. 439; № 2.340, с. 442; № 2.366, с. 445; № 2.404, с. 450; № 2.405, с. 450; № 2.409, при $a = 0$, с. 453. В [6] указанное уравнение также дублируется, но в намного меньшей степени.

В [6] имеется уравнение

$$y''(x) + (-a^2x^2 + a)y(x) = 0. \quad (32)$$

Его точное решение

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2} \left(C_1 + C_2 \int e^{ax^2} dx \right)$$

либо представлено, либо к нему сводится в следующих уравнениях: № 3, с. 157; № 5, с. 157; № 8, при $n = 1$, с. 157; № 14, с. 158; № 16, при $n = 1$, с. 158; № 17, при $n = 1$, с. 158; № 21, с. 159; № 23, с. 159; № 26, с. 159; № 29, при $n \in \{0, 1\}$, с. 159; № 45, при $n = 1$, $m = \{0, 1\}$, с. 160; № 47, при $n = 1$, с. 160; № 57, при $n = 1$, $m = \{0, 1\}$, с. 161; № 87, при $n = 2$, с. 164; № 139, при $n = 3$, $m = 0$, с. 170; № 230, при $n = 1$, $a = 2c$, с. 182; № 232, при $n = -1$, $m \in \{0, 1\}$, с. 182; № 232, при $n = 0$, $m = 1$, с. 182. В [5] уравнение (32) также дублируется, но меньше. И таких примеров можно привести много.

4. О неполноте данных в справочниках

Камке и Зайцева – Полянина

4.1. Предварительное обсуждение

Как отмечалось во Введении, одним из атрибутов качества данных является полнота данных. С учётом примеров, рассмотренных выше в п. 1 и 2, можно выделить три вида неполноты данных:

1°. Некоторые дифференциальные уравнения, имеющиеся в справочнике [5], отсутствуют в справочнике [6]. И наоборот, в справочнике [5] нет некоторых дифференциальных уравнений из справочников [6–8]. Таким образом, ни один из справочников [5–8] не удовлетворяет критерию полноты данных.

2°. Для некоторых уравнений в справочниках [5–8] приводится только по одному частному решению, хотя в дифференциальных уравнениях присутствуют несколько постоянных коэффициентов. Но как раз другие недостающие частные решения могут быть востребованы пользователями.

3°. Для некоторых дифференциальных уравнений имеет место следующая ситуация: уравнение приводится, но о его решении сообщается следующее: «Решение неизвестно». Эту ситуацию можно назвать *пробелом*. В случае справочника [5] решения некоторых уравнений были неизвестны в период с XIX в. века по 1959 г. Но с 1959 г. по 2024 г. происходило дальнейшее развитие методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно надеяться, что некоторые из нерешённых уравнений уже можно решить. Например, в гл. 2 ч. 3 справочника [5] есть, по меньшей мере, два нерешённых уравнения № 2.15 и № 2.19. Мы сейчас покажем, что можно получить одно частное решение уравнения № 2.15, имеющего следующий вид:

$$y''(x) = (a^2 x^{2n} - 1)y(x). \quad (33)$$

В частном случае $n = 1$ оказалось возможным получить точное решение данного уравнения с помощью СКА Mathematica [15] в следующем виде:

$$y(x) = C_1 D_{\nu_1}(z) + C_2 D_{\nu_2}(iz).$$

Здесь $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра (форма Уиттекера) [16, с. 494–496],

$$\nu_1 = (1 - a)/(2a); \quad z = \sqrt{2}\sqrt{a}x; \quad i = \sqrt{-1}; \quad \nu_2 = (-1 - a)/(2a).$$

Пробелов в [5,6], например, в линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с рациональными коэффициентами, разрешимых в квадратурах, довольно много. Причём есть пробелы как в простых уравнениях, так и в сложных. Заполнение пробелов в справочниках не является темой данной статьи. Кроме того, максимальный размер статьи не позволяет это сделать. Поэтому заполнение пробелов методами, которыми владеет один из авторов, планируется в других статьях.

4.2. Новые частные решения уравнения (16)

Целью данного раздела является иллюстрация п. 2° из предыдущего пункта: показать, что можно найти в аналитическом виде некоторое количество новых частных решений уравнения (16) из [6]. Этих решений нет ни в одном из справочников [6–8].

Случай 1. $k = 0$. Из уравнения (19) получаем, что невязка равна нулю. Поэтому решением уравнения (16) является функция $y_1(x) = x$ согласно (17). Но представляет интерес следующий вопрос: сможет ли СКА Maple решить рассматриваемое уравнение в частном случае $k = 0$? Для ответа на этот вопрос была написана следующая короткая программа на языке СКА Maple:

```
eq185:= (a*x^3 + b*x^2 + c*x)*diff(y(x),x$2) +
        (n*x^2+m*x)*diff(y(x),x$1) - (n*x + m)*y(x);
dsolve(eq185,y(x));
```

СКА Maple выдала следующий ответ: $y(x) = C1 + C2 * x$. Чтобы проверить правильность этого ответа, подставим его в решаемое уравнение:

```
y(x):= C1+ C2*x; factor(eq185);
```

Получена ненулевая невязка: $-C1 * (n * x + m)$. Отсюда следует, что правильный ответ в виде $y(x) = C2 \cdot x$ получается при $C1 = 0$. Заметим, что решение $y(x) = C2 \cdot x$ совпадает с решением (18). Таким образом, правильность решения, выдаваемого СКА Maple, также нужно проверять его подстановкой в исходное уравнение.

Случай 2. $n = 2ac + a$, $m = 2bc + b$, $k = 2c$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Заметим, что в этом примере допускается наличие произвольного коэффициента c в решаемом уравнении (16).

Случай 3. $c = -k(b^2k + ak - bm)/[(bk - m)^2]$, $n = 2ak$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (bkx - mx - k)^{1-k}$.

Случай 4. $c = 0$, $n = (2ak^2 - b^2k - ak + b^2)/k$, $m = (b^2k + ak - b^2)/b$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (ax + b)^{-\frac{(k-1)(ak-b^2)}{ak}}$.

Случай 5. $n = 2ac/(c-1)$, $k = 2c/(c-1)$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2(c-1)}} \exp \left[\frac{2bc-2cm+b+2m}{(c-1)\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right]$, $4ac > b^2$.

Случай 6. $m = 2(c+1)b/(c-1)$, $k = 2c/(c-1)$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)^{\frac{2ac-cn+b+2a+n}{2a(c-1)}} \exp \left[-\frac{b(4ac-cn+b+2a+n)}{a(c-1)\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right]$, $4ac > b^2$.

Случай 7. $n = a(ck + c + k)/c$, $m = bk(c+1)/c$. Найдено следующее частное решение:

$$y_1(x) = (ax^2 + bx + c)^{\frac{1-k}{2}} \exp \left[\frac{b(1-k)}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right], \quad 4ac > b^2. \quad (34)$$

В этом же частном случае мы попытались решить уравнение (16) с помощью СКА Maple. Было получено огромное выражение для решения, но оно не имеет замкнутый вид, в отличие от нашего решения (34), а требует решения вспомогательного алгебраического уравнения с большими символьными выражениями для коэффициентов. Кроме того, предложенное решение содержит четыре функции $\ln(\operatorname{expr}_i)$ ($i = 1, \dots, 4$) – некоторые громоздкие выражения. В целях краткости мы не приводим здесь Maple-решение. В действительности способ нахождения решения довольно простой, но, очевидно, он неизвестен разработчикам СКА Maple.

Мы также применили СКА Mathematica для решения этого же уравнения. Соответствующая программа на языке данной СКА имеет следующий вид:

```

m = b*k*(c + 1)/c; n = a*(c*k + c + k)/c;
eq = (a*x^3 + b*x^2 + c*x)*y''[x] + (n*x^2 + m*x + k)*y'[x]
    + (k - 1)*((n - a*k)*x + m - b*k)*y[x]
DSolve[eq == 0, y[x], x]

```

Символьные вычисления выполнялись на персональном компьютере с тактовой частотой 3 ГГц и оперативной памятью 4 Гб. Время счёта составило 7 мин. Решение было получено в следующем виде: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$ даётся формулой (34); C_1, C_2 – произвольные константы;

$$\begin{aligned}
 y_2(x) = & (ax^2 + bx + c)^{\frac{1-k}{2}} \exp \left[\frac{b(1-k)}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right] \times \\
 & \times \int_1^x \exp \left\{ \frac{1}{c} \left[\frac{bc(k-1)}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2aK_1+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) - k \ln K_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} c(k-3) \ln(c + K_1(b + aK_1)) \right] \right\} dK_1.
 \end{aligned}$$

Случай 8. $c = \frac{3}{2}, m = 4b, k = 3$. Найдено следующее частное решение:

$$y_1(x) = \frac{1}{x}(2ax^2 + 2bx + 3)^{\frac{4a-n}{2a}} \exp \left[\frac{b(6a-n)}{a\sqrt{b^2-6a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-6a}} \right) \right], b^2 > 6a.$$

Случай 9. $n = 4a, k = 2$. Найдено следующее частное решение:

$$y_1(x) = x^{\frac{c-2}{c}}(ax^2 + bx + c)^{\frac{1-c}{c}} \exp \left[\frac{2(2bc-cm+b)}{c\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right], 4ac > b^2.$$

Случай 10. $n = ak + 2a, m = bk + b$. Найдено следующее частное решение:

$$y_1(x) = x^{\frac{c-k}{c}}(ax^2 + bx + c)^{\frac{k(1-c)}{2c}} \exp \left[\frac{bk(1-c)}{c\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right], 4ac > b^2.$$

Случай 11. $n = 4ac, m = 2bc + b, k = 2c$. Найдено следующее частное решение:

$$\begin{aligned}
 y_1(x) = & \frac{1}{x}(ax^2 + bx + c)^{1-c} \left[C_1 \cos \left(2(c-1) \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right) + \right. \\
 & \left. + C_2 \sin \left(2(c-1) \operatorname{arctg} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \right) \right) \right], \quad 4ac > b^2.
 \end{aligned}$$

Во всех частных случаях, описанных выше, была осуществлена проверка правильности решений с помощью СКА Maple, она подтвердила правильность решений (соответствующие Maple-программы опущены для краткости).

Приведённые выше примеры новых частных решений конкретного дифференциального уравнения из [6] показывают, что имеющиеся СКА общего назначения содержат неполные наборы общих и частных решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Это указывает на целесообразность разработки специализированной СКА, которая аккумулировала бы в себе все аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков, содержащиеся во всех справочниках, опубликованных в мировой литературе. Это очень большая работа, которая требует и инвестиций, и организационных усилий. В то же время ныне существующие СКА вполне успешно могут использоваться для верификации точных решений, содержащихся в имеющихся справочниках.

5. Выводы

По итогам выполненного выше исследования четырёх известных справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений было сделано:

1. Продемонстрированы три примера ошибочных решений из справочников Камке и Зайцева – Полянина и указано, как исправить ошибки в решениях.
2. Проанализирована структура метаданных в справочнике Камке и показаны её недостатки.
3. На примерах ошибок, выявленных в некоторых решениях из справочников [5,6], показано, что ни один из этих справочников не является стопроцентно надёжным.
4. Описан систематический подход, позволяющий кардинально улучшить качество справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход сводится к тотальной проверке всех решений с применением символьных вычислений на компьютере.
5. Представлено 10 новых частных решений двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Этих решений нет в справочниках [5–8].

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
2. Степанова Л.В. Автомодельные решения уравнений математической физики. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2010. 28 с.
3. Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V., Fomin V.M. Foundations of Fluid Mechanics with Applications. Problem Solving Using Mathematica. Boston: Birkhäuser, 1999. 575 p.
4. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. Methods for the Localization of Singularities in Numerical Solutions of Gas Dynamics Problems. New York; Berlin: Springer-Verlag, 1990. 406 p.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физико-математическая литература, 2001. 576 с.
7. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 1995. 720 p.
8. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. 2nd Ed. Boca Raton; London; New York: Chapman & Hall : CRC Press, 2002. 802 p.
9. Когаловский М.Р., Серебряков В.А. Метаданные. Большая российская энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия, 2022. URL: <https://bigenc.ru/c/metadannye-0b2c68?ysclid=m3mfvyb3pi652199835> (дата обращения: 17.10.2024).
10. Шубинский И.Б. Функциональная надёжность информационных систем. М.: ООО «Журнал Надежность», 2012. 296 с.
11. Mehreen K. 10 most common data quality issues and how to fix them. University of Cincinnati, November 22, 2022. URL: www.kdnuggets.com (дата обращения: 08.10.2024).
12. Moses M., Gavish L., Vorwerck M. Data Quality Fundamentals. Sebastopol, CA 95472. USA: Monte Carlo Data, Inc., 2022. 310 p.

13. Macsyma. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Масьюма> (дата обращения: 14.11.2024).
14. Maple User Manual. Canada: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2024. 348 p.
15. Wolfram S. The MATHEMATICA Book. 3rd Edition. Champaign, IL 61820. USA: Wolfram Media, 1996. 1403 p.
16. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

ON SOME NEW EXACT SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.Yu. Zaikov¹

security officer, e-mail: zaykov_tomsk@mail.ru

E.V. Vorozhtsov²

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Leading Research Scientist, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

¹Tomsk Winter Sports School, Tomsk, Russia

²Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. The paper examines the quality and reliability of data contained in four reference books on exact solutions of ordinary differential equations. Three examples of erroneous solutions from the Kamke and Polyanin – Zaitsev reference books are presented and it is shown how to correct errors in the solutions. The structure of metadata in the Kamke reference book is analyzed, and its shortcomings are shown. Using examples of errors found in some solutions from the reference books, it is shown that none of these reference books is 100 % reliable. A systematic approach is described that allows for a radical improvement in the quality of reference books on exact solutions of ordinary differential equations. This approach boils down to a total check of all solutions using symbolic calculations on a computer.

Keywords: ordinary differential equations, reference books, erroneous solutions, data quality.

Дата поступления в редакцию: 11.12.2024

О ТРУДОЁМКОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ С ИНЕРЦИЕЙ ПРИ РАСЧЁТЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С РЕШЁТЧАТОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

А.А. Магазев

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: magazev@omgtu.ru

Я.А. Серёгина

аспирант, e-mail: yana-1998-11@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. Статья посвящена проблеме определения потоков жидкости на участках гидравлической сети. Для решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений применяется много различных подходов, одним из которых является метод итерации с инерцией. К преимуществам этого метода следует отнести устойчивость сходимости при различных начальных данных, а также наблюдавшуюся в реальных практических задачах слабую зависимость трудоёмкости метода от размерности задачи. Для более детального изучения последнего феномена мы рассматриваем класс модельных гидравлических сетей с решётчатой топологией и исследуем зависимость числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, от размерности задачи. Полученные нами результаты подтверждают указанное наблюдение: число итераций метода практически не зависит от размерности задачи.

Ключевые слова: гидравлическая сеть, решётчатая топология, метод итераций с инерцией.

Введение

Одной из важнейших проблем в теории гидравлических систем является задача определения потоков на участках сети. Сложность решения данной задачи обусловлена, во-первых, большой размерностью гидравлических сетей, а во-вторых, нелинейным характером соответствующих систем алгебраических уравнений. При этом, не смотря на свою довольно длительную историю, теория таких систем всё ещё развивается, а используемые в ней методы и подходы совершенствуются.

Обзор актуальных и современных методов решения задач потокораспределения гидравлических сетей можно найти, например, в относительно свежей работе [1]. Наиболее часто применяемыми методами расчёта режимов работы гидравлических сетей являются итерационные методы [2–4], в основе которых положен метод Ньютона, а также методы, основанные на линеаризации уравнений гидравлической сети [5, 6]. Помимо разработки новых подходов, усилия специалистов также направлены на повышение эффективности существующих методов; например, в работе [7]

автор предлагает решать задачу потокораспределения аналитическим методом, сводящим исходную сложную задачу к более простой и тем самым сокращающим количество вычислительных операций.

В работах [8, 9] был предложен итерационный метод решения задач потокораспределения, модифицирующий стандартный метод простой итерации – *метод итерации с инерцией*. Впоследствии на основе этого метода был разработан программный комплекс, позволяющий производить расчёт тепловых сетей крупных городов, содержащих до 10000 участков труб [10]. Однако, не смотря на достигнутые практические результаты, указанный метод всё ещё довольно слабо исследован с теоретической точки зрения; имеется лишь ряд частных результатов, касающихся его сложности и скорости сходимости. В частности, в работе [8] в результате проведения численных экспериментов было отмечено следующее наблюдение: трудоёмкость метода итераций с инерцией очень слабо зависит от размерности задачи, которой является число участков гидравлической сети. Целью настоящей работы является более детальное исследование этого эффекта на примере гидравлических сетей, ассоциированных с решётчатыми графами.

1. Математическая модель гидравлической сети

Рассмотрим гидравлическую сеть с установившимся течением жидкости, состоящей из n участков и m узлов. Число независимых контуров в сети равно $k = (n - m) + 1$. Одной из основных задач расчёта гидравлических систем является задача определения потоков (скоростей течения жидкости) на участках сети. Напомним, как формулируется соответствующая математическая модель.

На каждом участке сети задаётся предполагаемое направление течения. Участки обозначаются буквами из середины латинского алфавита ($i, j, k, \dots$), в то время как узлы будем обозначать буквами из начала латинского алфавита ($a, b, c, \dots$). Кроме того, для каждого независимого контура выберем ориентацию по часовой стрелке; сами контуры будем обозначать греческими буквами ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$).

Рассмотрим i -й участок сети, для которого узел a является началом, а узел b – концом. Введём следующие обозначения:

x_i – неизвестный установившийся расход жидкости на i -м участке (считаем, что $x_i > 0$, если направление течения совпадает с ориентацией участка, и $x_i < 0$ – в обратном случае);

p_a и p_b – давления в начальном и конечном узлах участка;

$h_i = p_a - p_b$ – *напор* или падение давления на участке;

H_i – *действующий напор* на участке;

s_i – *гидравлическое сопротивление* участка.

В дальнейшем нам будет удобно использовать также векторно-матричную нотацию. В частности, мы будем рассматривать следующие n -мерные векторы:

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор расходов на всех участках сети;

$\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)^T$ – вектор напоров;

$\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)^T$ – вектор действующих напоров.

Кроме того, нам понадобятся следующие диагональные матрицы n -го порядка:

$$S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n), \quad X(\mathbf{x}) = \text{diag}(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Всюду далее мы будем рассматривать ситуацию, когда в гидравлической сети отсутствуют источники и расходы жидкости. Также будем считать, что на каждом участке сети имеет место *квадратичный закон* гидравлического сопротивления [2]:

$$s_i |x_i| x_i = h_i + H_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Данное равенство можно записать в более компактной матрично-векторной форме:

$$SX(|\mathbf{x}|)\mathbf{x} = \mathbf{h} + \mathbf{H}. \quad (2)$$

Любая гидравлическая сеть должна удовлетворять двум сетевым законам Кирхгофа. Во-первых, для каждого узла a соблюдается условие материального баланса: алгебраическая сумма расходов по всем участкам i , связанным общим узлом a , равна нулю. Во-вторых, суммарное изменение напоров для любого независимого контура α гидравлической сети должно также быть нулевым. В матричной форме законы Кирхгофа записываются как

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad B\mathbf{h} = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где A – матрица соединений, имеющая размер $(m-1) \times n$; B – матрица контуров размера $k \times n$. Обе эти матрицы однозначно задаются структурой графа гидравлической сети. С учётом (2) равенства (3) задают систему нелинейных алгебраических уравнений на неизвестный вектор расходов $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad BSX(\mathbf{x})\mathbf{x} = B\mathbf{H}. \quad (4)$$

Данная система и составляет основной объект исследования в математической модели гидравлической сети. Можно показать, что решение этой системы единственно [8].

На практике при построении системы уравнений (4) используют следующий приём [2]. В графе гидравлической сети выделяют некоторое дерево, включающее в себя все m узлов, после чего все участки сети разбиваются на два подмножества: $m-1$ участков дерева и k участков, не вошедших в это дерево и называемых *хордами*. Каждая хорда представляет собой замыкающий участок контура, соответствующий некоторой строке матрицы B . Подобное разбиение графа сети на дерево и хорды приводит к «расщеплению» всех матриц и векторов на «хордовые» и «древесные» части. Например, $A = (A_c | A_t)$, где A_c и A_t – подматрицы матрицы A , имеющие размеры $(m-1) \times k$ и $(m-1) \times (m-1)$ соответственно. В свою очередь, для матрицы B имеем следующее представление: $B = (I | B_t)$, где I – единичная матрица порядка k , а B_t – матрица размера $k \times (m-1)$. Удобно также считать, что нумерация участков сети выбрана таким образом, что первые k из них соответствуют хордам, $\mathbf{x}_c = (x_1, \dots, x_k)^T$, а последующие – участкам дерева, $\mathbf{x}_t = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$.

В работе [11] указаны полезные соотношения между матрицами A и B , а также между их «хордовыми» и «древесными» частями:

$$AB^T = \mathbf{0}, \quad B_t^T = -A_t^{-1}A_c. \quad (5)$$

Там же отмечается, что любая строка матрицы B является решением системы уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Метод итерации с инерцией

Сложность решения системы уравнений (4) состоит в том, что указанная система является нелинейной из-за нелинейного характера закона гидравлического сопротивления (1). В этой связи разработка соответствующих методов решения – нетривиальная задача, требующая учёта специфических особенностей рассматриваемой системы уравнений.

Одним из наиболее популярных способов решения задачи определения неизвестных потоков в гидравлической сети является *метод контурных расходов*, в основе которого лежит хорошо известный метод Ньютона [2]. Однако основным недостатком этого подхода является существенная зависимость скорости сходимости от начального приближения, особенно, в случае больших сетей. Кроме того, в задачах большой размерности требуемая точность задания начального приближения должна быть настолько высокой, что применение метода контурных расходов фактически теряет смысл. Рассмотрим альтернативный метод решения системы уравнений (4), который носит название *метод итераций с инерцией* [8, 9].

Посмотрим сначала, как можно попробовать поискать решение системы уравнений (4) методом простых итераций. Рассмотрим последовательность приближений вида

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = \mathbf{x}^{(N)} + \Delta \mathbf{x}^{(N+1)},$$

где N – номер очередного приближения, $N = 0, 1, 2, \dots$. Для того, чтобы каждое приближение $\mathbf{x}^{(N)}$ удовлетворяло системе $A\mathbf{x}^{(N)} = \mathbf{0}$, необходимо выполнение условия

$$\mathbf{x}^{(N)} = B^T \mathbf{x}_c^{(N)}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

где B – матрица контуров гидравлической сети; $\mathbf{x}_c^{(N)}$ – часть вектора $\mathbf{x}^{(N)}$, отвечающая хордам сети. Зная N -е приближение $\mathbf{x}^{(N)}$, следующее приближение ищем как решение $\mathbf{x}^{(N+1)}$ линейной системы уравнений:

$$BSX(\mathbf{x}^{(N)})\mathbf{x}^{(N+1)} = B\mathbf{H}.$$

Используя формулы (5), решение данной системы можно записать в виде

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = B^T [BSX(\mathbf{x}^{(N)})B^T]^{-1} B\mathbf{H}. \quad (6)$$

В результате мы получили итерационную последовательность приближений, в которой $(N + 1)$ -е приближение выражается через N -е.

Как показывают простейшие примеры, последовательность (6), к сожалению, в общем случае расходится. Для обеспечения её сходимости в работе [8] было предложено вместо вектора $\mathbf{x}^{(N)}$, входящего в правую часть равенства (6), брать взвешенное среднее векторов $\mathbf{x}^{(N)}$ и $\mathbf{x}^{(N-1)}$:

$$\bar{\mathbf{x}}^{(N+1)} = \alpha \mathbf{x}^{(N)} + (1 - \alpha) \mathbf{x}^{(N-1)}.$$

Здесь α – весовой коэффициент, удовлетворяющий условию $0 < \alpha < 1$. С учётом этого простая итерационная процедура (6) модифицируется следующим образом:

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = B^T [BSX(\alpha \mathbf{x}^{(N)} + (1 - \alpha) \mathbf{x}^{(N-1)}) B^T]^{-1} B\mathbf{H}. \quad (7)$$

Таким образом, данный подход можно рассматривать как модификацию метода простой итерации, где на каждом последующем шаге происходит усреднение полученных ранее приближений. Для однозначного задания данной итерационной последовательности необходимо выбрать два начальных вектора $\mathbf{x}_c^{(0)}$ и $\mathbf{x}_c^{(1)}$, соответствующих только хордовой части решения. Процесс приближения продолжается до тех пор, пока выполняется условие

$$\|\mathbf{x}^{(N+1)} - \mathbf{x}^{(N)}\| \geq \varepsilon,$$

где ε – заданная точность (погрешность) решения; $\|\cdot\|$ – некоторая фиксированная норма в $\mathbb{R}^n$. В нашей работе мы выбираем норму в виде $\|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Отметим, что на каждой итерации нам приходится обращаться $k \times k$ матрицу, что эквивалентно решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. На практике предпочтительно это делать с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента, что служит некоторой гарантией от ошибок округления.

3. Гидравлические сети с решётчатой топологией

В настоящем разделе мы исследуем трудоёмкость метода итераций с инерцией на примере гидравлической сети с решётчатой топологией. Мы рассматриваем сеть в виде решётки размера $1 \times k$, где k – произвольное натуральное число, задающее размерность задачи (рис. 1). Число k , очевидно, равно числу независимых контуров сети, в то время как числа узлов m и рёбер n сети определяются через k формулами

$$m = 2(k + 1), \quad n = 3k + 1.$$

На рис. 1 также изображены предполагаемые направления расходов x_i , причём на первых k участках расположены действующие напоры H_i , изображаемые стрелками в кружочках. Наличие ненулевых напоров H_i в каждом контуре гарантирует, что циркуляция жидкости не будет затухать с ростом номера ячейки. Положительным направлением всех контуров считается направление «по часовой стрелке».

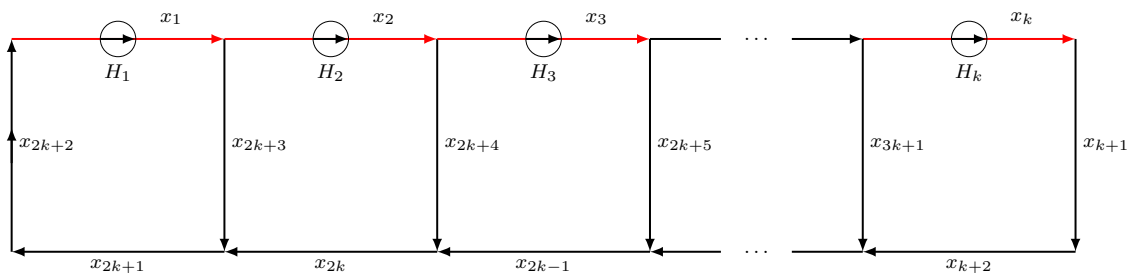


Рис. 1. Гидравлическая сеть в виде $1 \times k$ -решётки

Нашей основной задачей будет являться исследование зависимости числа итераций, необходимого для достижения заданной точности, от размерности системы, задаваемой числом k .

Для решения поставленной задачи мы разработали программу, написанную на языке Wolfram Language в рамках системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica. Входными параметрами программы являются число ячеек k гидравлической сети и точность решения ε . Сама сеть представляется в виде графа, конструируемого при помощи встроенной функции Graph. Матрица A , являющаяся матрицей инцидентности данного графа, формируется с помощью встроенной функции IncidenceMatrix, тогда как матрица контуров, имеющая структуру $B = (I | -A_t^{-1}A_c)$, однозначно определяется матрицей A .

Все гидравлические сопротивления мы полагаем равными единице, так что $S = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ – единичная $n \times n$ -матрица. В свою очередь, вектор напоров $\mathbf{H}$ выбирается случайно, т. е. каждая его компонента H_i есть равномерно распределённое (действительное) случайное число из диапазона $[-1, 1]$. Случайным образом также выбирается начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$ к решению задачи: хордовая часть $\mathbf{x}_c^{(0)}$ есть случайный вектор, компоненты которого равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$. Кроме того, мы полагаем $\mathbf{x}^{(1)} = 0,5\mathbf{x}^{(0)}$. После этого в цикле реализуется последовательное применение формулы (7) и продолжается до тех пор, пока не достигается заданная точность ε . Параметр α , обеспечивающий «инерцию» данной итерационной процедуры, выбран равным $\alpha = 0,3$. Как только решение получено, снова случайным образом выбираются вектор напоров $\mathbf{H}$ и начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$, после чего все описанные выше шаги алгоритма повторяются заново. При заданных k и ε алгоритм запускается $\text{гер} = 100$ раз. При каждом запуске мы подсчитываем требуемое число применений формулы (7) (число итераций алгоритма) и затем при завершении всей серии испытаний вычисляем среднее число итераций $\langle N \rangle$ и соответствующее среднее квадратическое отклонение σ_N .

В рамках настоящего исследования нами было проведено 90 описанных серий экспериментов: для каждого из трёх значений точности $\varepsilon = 0,01, 0,001$ и $0,0001$ мы провели по 30 серий экспериментов для значений k от $k_1 = 10$ до $k_{30} = 300$ с шагом $\Delta k = 10$. Полученные нами результаты приведены в табл. 1–3. В целях экономии места мы не указываем в этих таблицах соответствующие средние квадратические отклонения σ_N ; отметим лишь, что σ_N имеет тенденцию к уменьшению при росте N и/или уменьшении ε . Максимальное значение, которое принимала величина σ_N в наших экспериментах, была равна 1,92.

Таблица 1. Среднее число итераций $\langle N \rangle$ при различных k для $\varepsilon = 0,01$

k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$
10	12,03	70	14,15	130	14,92	190	15,26	250	15,19
20	12,63	80	14,51	140	14,89	200	15,18	260	15,23
30	13,17	90	14,50	150	15,09	210	15,31	270	15,30
40	13,40	100	14,66	160	15,12	220	15,42	280	15,52
50	13,79	110	14,72	170	15,23	230	15,22	290	15,46
60	14,18	120	14,83	180	15,28	240	15,39	300	15,37

Таблица 2. Среднее число итераций $\langle N \rangle$ при различных k для $\varepsilon = 0,001$

k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$
10	16,10	70	18,28	130	19,12	190	19,27	250	19,45
20	17,07	80	18,49	140	18,87	200	19,38	260	19,52
30	17,51	90	18,89	150	18,85	210	19,28	270	19,72
40	17,84	100	18,67	160	19,11	220	19,41	280	19,69
50	17,84	110	18,95	170	19,05	230	19,50	290	19,51
60	18,17	120	19,09	180	19,21	240	19,22	300	19,50

Таблица 3. Среднее число итераций $\langle N \rangle$ при различных k для $\varepsilon = 0,0001$

k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$	k	$\langle N \rangle$
10	19,62	70	21,73	130	22,27	190	22,61	250	22,75
20	20,35	80	21,90	140	22,22	200	22,59	260	22,82
30	20,76	90	22,05	150	22,41	210	22,66	270	22,92
40	21,23	100	22,10	160	22,44	220	22,59	280	22,77
50	21,30	110	22,23	170	22,45	230	22,77	290	22,71
60	21,73	120	22,05	180	22,62	240	22,90	300	22,86

На основании приведённых нами таблиц построены соответствующие графики зависимости среднего числа итераций $\langle N \rangle$, требуемого для достижения заданной точности ε , от числа k ячеек гидравлической сети. Эти графики изображены на рис. 2. Из данных графиков видно, что с уменьшением ε увеличивается требуемое число итераций, и, что более интересно, среднее число итераций $\langle N \rangle$ сначала растёт с ростом k , но затем этот рост замедляется, и при больших k это число *практически не зависит* от k . Иными словами, трудоёмкость метода итераций с инерцией очень слабо зависит от количества неизвестных задачи в силу того, что последнее представляет собой число участков сети, равное $n = 3k + 1$. В то же время следует отметить, что с увеличением n растёт, например, число операций, требуемых для обращения матриц в формуле (7), что, безусловно, приводит к увеличению времени, необходимому для поиска решения задачи.

Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели математическую модель гидравлической сети, предназначенную для расчёта режимов потокораспределения подобных систем. Для решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений применяется довольно много различных подходов, одним из которых является метод итерации с инерцией. К преимуществам данного метода следует отнести устойчивость сходимости при различных начальных данных, а также наблюдавшуюся в реальных практических задачах слабую зависимость трудоёмкости метода от

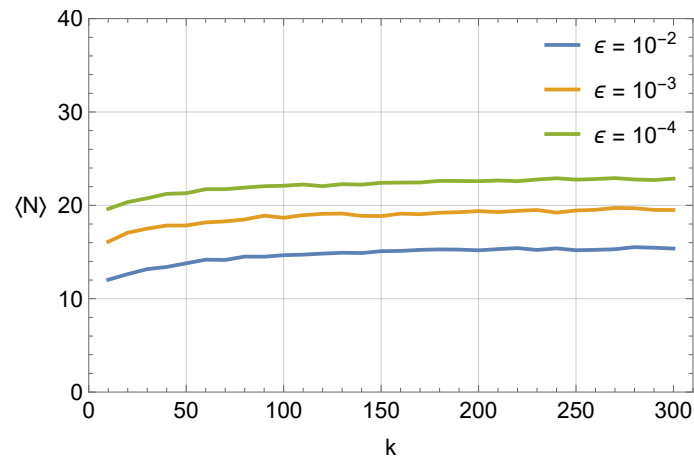


Рис. 2. Графики зависимости среднего числа итераций $\langle N \rangle$ от числа ячеек k гидравлической сети при трёх различных значениях точности ϵ

размерности задачи. Для более детального изучения последнего феномена мы рассмотрели класс модельных гидравлических сетей с решётчатой топологией, для которого исследовали зависимость числа итераций, необходимых для достижения заданной точности, от размерности задачи, в качестве которой рассматривалось число ячеек решётки. Полученные результаты подтверждают указанное наблюдение: число итераций метода практически не зависит от размерности задачи.

Дальнейший интерес представляет исследование трудоёмкости метода итераций с инерцией для более сложных модельных классов гидравлических сетей: двумерных решёток и их деформаций, а также сетей, ассоциированных со случайными графами более общего вида.

Литература

1. Корельштейн Л.Б. О сходимости метода «прогнозируемого расхода» расчёта гидравлических цепей // Автоматизация и информатизация ТЭК. 2023. Т. 605, № 12. С. 44–52.
2. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985.
3. Alvarruiz F., Martinez-Alzamora F., Vidal A.M. Improving the Efficiency of the Loop Method for the Simulation of Water Distribution Systems // Journal of Water Resources Planning and Management. 2015. Vol. 141, No. 10.
4. Мороз М.В. Методика избыточных проектных схем и метод поконтурной минимизации систем группового водоснабжения и водоотведения // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2021. Т. 11, № 1. С. 60–73.
5. Баранчикова Н.И., Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. Неканоническая задача потокораспределения с заданными напорами и отборами в узлах // Вода и экология: проблемы и решения. 2014. Т. 58, № 2. С. 31–38.
6. Новицкий Н.Н. Расчёт потокораспределения в гидравлических цепях на базе их линеаризации узловыми моделями секущих и хорд // Изв. РАН. Энергетика. 2013. № 6. С. 5669.
7. Якшин С.В. Аналитический метод решения задачи потокораспределения тепловой сети // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2021. Т. 25, № 1. С. 80–96.

8. Файзуллин Р.Т. О решении нелинейных алгебраических систем гидравлики // Сибирский журнал индустриальной математики. 1999. Т. 2, № 2. С. 176–184.
9. Жихалкина Н.Ф., Файзуллин Р.Т. Задача минимизации суммарных затрат по транспортировке нефтепродуктов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 1. С. 63–73.
10. Логинов К.В., Мызников А.М., Файзуллин Р.Т. Расчёт, оптимизация и управление режимами работы больших гидравлических сетей // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 9. С. 92–106.
11. Меренков А.П. Дифференциация методов расчёта гидравлических цепей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1973. Т. 13, № 5. С. 1237–1248.

COMPLEXITY ANALYSIS OF THE ITERATION METHOD WITH INERTIA FOR CALCULATING HYDRAULIC NETWORKS WITH THE LATTICE TOPOLOGY

A.A. Magazev

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: magazev@omgtu.ru

Ya.A. Seriochina

Graduate Student, e-mail: yana-1998-11@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. The article is devoted to the problem of determining flows in sections of a hydraulic network. Many different approaches are used to solve the corresponding system of nonlinear algebraic equations, one of which is the iteration method with inertia. The advantages of this method include the stability of convergence under initial data, as well as the weak dependence of the method's complexity on the problem dimension observed in real practical problems. For a more detailed study of the latter phenomenon, we consider a class of model hydraulic networks with the lattice topology and investigate the dependence of the number of iterations required to achieve a given accuracy on the problem dimension. The results obtained confirm this observation: the number of method iterations is practically independent of the problem dimension.

Keywords: hydraulic network, lattice topology, iteration method with inertia.

Дата поступления в редакцию: 03.04.2025

О СХЕМЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ РАЗРЕЗА, ПОРОЖДЕННОГО МИНИМАЛЬНЫМ ДОМИНИРУЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ

А.А. Тоцкий

аспирант, e-mail: TotckiiAA@omsu.ru

Р.Ю. Симанчёв

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: simanchevriu@omsu.ru

И.В. Уразова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: urazovaiv@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье описывается схема локального поиска для задачи максимизации разреза, порождённого минимальным доминирующим множеством. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: граф, доминирующее множество, локальный поиск, максимизация разреза.

Введение

Широко известна задача о поиске в простом неориентированном графе доминирующего множества минимального размера. Она приведена как задача ТГ 2 в [1, с. 235]. Задача является достаточно широко изученной NP-полной задачей. Ей и её различным вариациям посвящено множество публикаций [2, 3]. Мы рассмотрим её зеркальный (и обобщённый) вариант.

В настоящей работе рассматривается следующая задача. Дан обыкновенный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством рёбер E . Рёбра графа G будем обозначать как неупорядоченную пару вершин ij , где $i, j \in V$. Каждому ребру $ij \in E$ сопоставлен положительный вес c_{ij} . Подмножество $W \subseteq V$ называется доминирующим, если для любой вершины $j \in V \setminus W$ найдётся такая вершина $i \in W$, что $ij \in E$. Семейство всех доминирующих множеств в графе G обозначим через $D(G)$. Доминирующее множество называется минимальным (по включению), если оно не содержит в себе доминирующих множеств меньшего размера. Соответственно семейство всех минимальных доминирующих множеств будем обозначать через $D_{\min}(G)$. Всякое подмножество $W \subset V$ порождает в графе G разрез $(W, \bar{W}) = \{ij \in E \mid i \in W, j \in \bar{W}\}$, где $\bar{W} = V \setminus W$. Весом разреза назовём сумму весов входящих в него рёбер $c(W, \bar{W}) = \sum_{ij \in (W, \bar{W})} c_{ij}$. Среди всех минимальных доминирующих множеств требуется найти такое, которое порождает наибольший по весу разрез, т. е.

$$\max\{c(W, \bar{W}) \mid W \in D_{\min}(G)\}. \quad (1)$$

Эта задача возникает из большого числа прикладных вопросов системного анализа, когда для мониторинга системы требуется найти насколько возможно малое количество ключевых признаков, имеющих при этом наибольшее влияние на состояние и поведение системы в целом (см., например, [4–6]). В работе [6] для этой задачи предложено обозначение MAX MDS CUT. Там же доказывалась принадлежность этой задачи классу NP-трудных, обосновывается её полиномиальная разрешимость для деревьев и двудольных графов. Кроме того, в [6] показывается, что в случае $P \neq NP$ не существует приближённых полиномиальных алгоритмов её решения с гарантированной оценкой точности $|V|^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Помимо приведённых результатов по этой задаче, отметим, что в [7] построена модель целочисленного линейного программирования для поиска точного решения задачи MAX MDS CUT в случае ориентированного графа G . Эта модель естественным образом переносится на неориентированный граф, правда, с существенным увеличением числа переменных.

В настоящей работе мы предлагаем схему локального поиска для нахождения приближенного решения задачи (1).

1. Схема локального поиска

Процедура локального поиска предполагает два основных этапа: генерирование начального минимального доминирующего множества и правило перехода к соседнему множеству (окрестность решения). Вообще говоря, множество всех вершин графа G является доминирующим множеством, но не обязательно минимальным по включению.

Для вершины $i \in V$ введём обозначение $N(i) = \{j \in V \setminus \{i\} \mid ij \in E\}$ – множество вершин, смежных с i .

Отметим несколько простых свойств доминирующих множеств, которые лежат в основе предлагаемых процедур:

Свойство 1. Множество $W \subset V$ является доминирующим тогда и только тогда, когда для всякой вершины $j \in \bar{W}$ имеет место $W \cap N(j) \neq \emptyset$.

Свойство 2. Если $W \in D(G)$, то для любого $j \in \bar{W}$ имеем $W \cup \{j\} \in D(G)$. Как следствие, $W \cup U \in D(G)$ для любого $U \subseteq \bar{W}$.

Свойство 3. Доминирующее множество $W \in D_{\min}(G)$ является минимальным по включению тогда и только тогда, когда для каждой $i \in W$ имеем $W \setminus \{i\} \notin D(G)$.

Действительно, если $W \in D_{\min}(G)$, то требуемое следует из определения, так как $W \setminus \{i\} \subset W$ при $i \in W$. Обратно, пусть $W \in D(G)$ и $W \setminus \{i\} \notin D(G)$ при любом $i \in W$. Возьмём произвольно $U \subset W$ и покажем, что $U \notin D(G)$. Пусть $i \in W \setminus U$. Тогда $U \subseteq W \setminus \{i\} \subset W$, и, по условию, $W \setminus \{i\} \notin D(G)$. Значит, найдётся вершина $j \in V \setminus (W \setminus \{i\})$, которая не достижима из $W \setminus \{i\}$ за один шаг. Но тогда она не достижима и из U , так как $U \subseteq W \setminus \{i\}$. Следовательно, $U \notin D(G)$.

Начальное решение генерируется следующим образом:

Процедура MD

Полагаем, $V = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ – произвольное упорядочение множества вершин графа G ; $W = V$.

ШАГ 0. Полагаем $W := V, s = 1$.

ШАГ s . При $s < n$. Если $W \setminus \{i_s\} \in D(G)W$, то полагаем $W := W \setminus \{i_s\}$ и переходим на шаг $s + 1$. Если $W \setminus \{i_s\} \notin D(G)W$, то множество W не меняем и переходим на шаг $s + 1$. Если $s = n$, то конец: W – минимальное доминирующее множество в графе G .

Проверка на доминируемость осуществляется на основании свойства 1. Минимальность полученного в итоге доминирующего множества следует из свойства 3.

Переход к соседнему минимальному доминирующему множеству осуществляем посредством Процедуры NMD, которая заключается в следующем. Пусть $W \in D_{min}(G)$. Выбираем случайным образом множество $U \subset \bar{W}$, $|U| = q$, $q = f * |\bar{W}|$, $0 < f < 1$, и используем процедуру MD применительно к множеству $W := W \cup U$. В результате получим $W' \in D_{min}(G)$, которое назовём соседом множества W . Основанием для такой конструкции является свойство 2.

Теперь схема локального поиска может быть представлена так:

Процедура LSMD

Шаг 0. Выбираем максимальное количество просматриваемых соседей t и величину f .

Шаг 1. С помощью MD строим начальное множество $W \in D_{min}(G)$.

Шаг 2. С помощью NMD просматриваем не более t соседей множества W , выбирая множество U случайным образом. Если $c(W, \bar{W}) \leq c(W', \bar{W}')$, то полагаем $W := W'$ и повторяем шаг 2. Если за t просмотров множество с большим весом не найдено, то среди просмотренных соседей выбираем W' с наибольшим весом $c(W', \bar{W}')$, полагаем $W := W'$ и повторяем шаг 2.

Замечания.

1. Целесообразно применение процедуры LSMD для различных начальных решений (см. процедуру MD). Новое начальное решение легко получить, изменив порядок вершин графа G .
2. Просмотр соседей на шаге 2 также можно производить, изменяя упорядочение вершин в $W \cup U$.
3. Величину f , задающую мощность $q = f * |\bar{W}|$ множества U и количество просматриваемых соседей t , также можно считать пусковым параметром наряду с начальным решением.

Ситуацией, достаточной для окончания работы алгоритма, можно считать:

- стабильный затухающий рост весов получаемых минимальных доминирующих множеств;
- априорное ограничение времени работы;
- априорное ограничение числа полученных множеств W .

В качестве приближённого решения выбирается множество W с наибольшим весом порождённого им разреза.

2. Вычислительный эксперимент

С помощью построенного алгоритма был проведён численный эксперимент на наборах случайно сгенерированных задач, содержавших по десять графов с 10, 20, 30 и 40 вершин, 20 %-й заполненностью и целочисленными весами рёбер. Точные

решения для графов с количеством вершин менее 50 были получены решением задачи ЦЛП [7] с помощью демонстрационной версии пакета IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.10. Получение с помощью этого пакета точных решений для графов с 50 вершинами за разумное время уже представляется невозможным.

Для приближённого алгоритма в качестве критерия остановки было выбрано число s переходов к соседнему минимальному доминирующему множеству и заданное равным 30 для всех задач. Время работы точного и приближённого алгоритмов t_{app} и t_{opt} указано в секундах, относительная погрешность – в процентах. f_{app} и f_{opt} – веса разрезов, найденных приближённым и точным алгоритмами соответственно. $\epsilon = \frac{f_{opt} - f_{app}}{f_{opt}}$ – относительная погрешность, указана в процентах (табл. 1).

Таблица 1. Результаты вычислительного эксперимента

№	n	f_{opt}	f_{app}	$\epsilon, \%$	t_{app}	t_{opt}	№	n	f_{opt}	f_{app}	$\epsilon, \%$	t_{app}	t_{opt}
0	30	3918	3586	8,4	9	4	0	40	6183	4887	20,9	17	189
1	30	4014	3620	9,8	12	3	1	40	6148	5662	7,9	18	84
2	30	3625	3456	4,6	7	2	2	40	5827	5554	4,7	17	228
3	30	3808	3501	8,1	11	3	3	40	6810	5308	22,1	16	154
4	30	3628	3590	1,1	8	9	4	40	6329	6069	4,1	15	246
5	30	4071	3646	10,4	6	11	5	40	5628	5362	4,7	15	141
6	30	3777	3682	2,5	7	12	6	40	6016	5139	14,5	15	101
7	30	3900	3434	11,9	7	2	7	40	5828	5130	11,9	14	114
8	30	3678	3488	5,1	6	12	8	40	6916	6043	12,6	17	102
9	30	3564	3296	7,5	6	11	9	40	6304	6082	3,5	15	108
av:	30	-	-	7	8	7	-	40	-	-	11	16	147

На наборе задач с десятью вершинами в семи случаях из десяти решение, найденное приближённым алгоритмом, совпадало с точным.

Заключение

Для NP-трудной задачи минимизации в графе разреза, порождённого минимальным доминирующим множеством, составлен алгоритм локального поиска. Окрестность задана с помощью определения процедуры перехода от одного минимального доминирующего множества к соседнему. На случайных данных произведён численный эксперимент, приведены его результаты.

Дальнейшим развитием данной работы может стать внесение случайности в выбор окрестности, когда после определённого количества просмотров соседних доминирующих множеств с некоторой вероятностью происходит переход к другой процедуре перехода, т. е. меняется тип окрестности.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Омского научного центра СО РАН (номер госрегистрации проекта 121022000112-2).

Литература

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 420 с.
2. Boria N., Croce F. D., Paschosdef V. T. On the max min vertex cover problem // Discrete Applied Mathematics. 2015. Т. 196. Р. 62–71.
3. Lee J., Nagarajan V., Shen X. Max-Cut under Graph Constraints. 2015.
4. Агалаков С.А., Симанчев Р.Ю., Уразова И.В. Об одном подходе к построению системы ключевых показателей экономической безопасности // Вестник Омского университета. Серия «Экономика». 2018. № 4. С. 5–12.
5. Simanchev R. Yu., Urazova I. V., Voroshilov V. V. The minimal dominating sets in a directed graph and the key indicators set of socio-economic system // Ural Mathematical Journal. 2023. Vol. 9, No. 1. Р. 153–161.
6. Ворошилов В. В. Сложность задачи о максимальном разрезе с условием минимального доминирования // Дискретный анализ и исследование операций. 2022. Т. 29, № 1. С. 5–17.
7. Ворошилов В. В. Разрез наибольшего веса в орграфе, порождённый минимальным доминирующим множеством // Дискретный анализ и исследование операций. 2020. Т. 27, № 4. С. 5–20.

ON LOCAL SEARCH SCHEME FOR A PROBLEM OF MAXIMIZATION OF DICUT, GENERATED BY MINIMAL DOMINATING SET

A.A. Totskij

PhD student, e-mail: TotckiiAA@omsu.ru

R.Y. Simanchev

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: simanchevriu@omsu.ru

I.V. Urazova

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: urazovaiv@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The article describes local search scheme for a problem of maximization of dicut, generated by minimal dominating set. Results of a numerical experiment are presented.

Keywords: graph, dominating set, local search, cut maximization.

Дата поступления в редакцию: 12.07.2025

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТОРА В $\mathbb{R}^3$ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

И.М. Федотова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: firim@mail.ru

М.И. Медведева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: mimedvedeva@rambler.ru

А.С. Кацунова

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Аннотация. В статье рассматривается общий алгоритм построения минимальных кубатурных формул для поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ второй степени точности. Несмотря на то, что число узлов таких минимальных формул равно 4, минимальные кубатурные формулы для тора степени 2 известны лишь для отдельных соотношений радиусов r . Такие формулы были построены для случая, когда один из узлов лежит в плоскости Oxy и для случая, когда узлы попарно симметричны относительно оси Ox . В статье строятся минимальные кубатурные формулы, в которых узлы попарно несимметричны и ни один из них не лежит в плоскости Oxy . Для построения используется метод воспроизводящего ядра. Формулы, описанные в статье, существуют как для тора небольшого соотношения радиусов, так и для тора с соотношением радиусов достаточно большим, например равным 8 000. В работе приведены таблицы с узлами и коэффициентами данных формул.

Ключевые слова: кубатурные формулы, тор, воспроизводящее ядро.

Введение

При решении задач прикладной физики, небесной механики, машиностроения возникают задачи, связанные с интегрированием по поверхности тора. Это поверхность вращения, но, в отличие от других поверхностей вращения, поверхность тора является поверхностью четвёртого, а не второго порядка.

Уравнения классического тора в $\mathbb{R}^3$ может быть задано в параметрическом виде

$$\begin{aligned}X &= (R + a \cos \psi) \cos \varphi, \\Y &= (R + a \cos \psi) \sin \varphi, \\Z &= a \sin \psi,\end{aligned}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$; $\psi \in [-\pi, \pi)$, или в декартовых координатах

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + R^2 - a^2)^2 - 4R^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

При $R > a$ это будет открытый тор, при $R \leq a$ – закрытый тор. Интегралы по поверхности тора, как правило, сложные и громоздкие, и для их вычисления необходимо применять методы приближённого интегрирования. В связи с этим становится актуальной задача построения минимальных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$.

В настоящей статье решается задача нахождения минимальных кубатурных формул 2 степени точности для поверхности тора методом воспроизводящего ядра [1]. Будем рассматривать случаи $R > a$ открытого тора и $R = a$ вырожденного тора. Сделаем замену переменных $X = ax$, $Y = ay$, $Z = az$ и обозначим $r = R/a$, тогда получим нормированное уравнение тора

$$T: (x^2 + y^2 + z^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0, \quad r \geq 1. \quad (1)$$

Определение 1. Будем говорить, что кубатурная формула

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int_T f(x, y, z) dS \simeq \sum_{i=1}^N c_i f(x_i, y_i, z_i) \quad (2)$$

является кубатурной формулой степени d , если она обращается в точное равенство для всех многочленов от x, y, z степени не выше d .

Определение 2. Кубатурная формула (2) степени d называется минимальной, если не существует кубатурной формулы степени d с $N - 1$ узлом.

В этом случае число N называется нижней границей числа узлов для кубатурной формулы степени d .

Если начало координат не является узлом кубатурной формулы, то нижняя граница числа узлов формулы (2) степени $d = 2k$ равна $2(k^2 + 1)$ (см. [2]). В частности, для $d = 2$ имеем нижнюю границу, равную 4. Таким образом, для описания минимальной кубатурной формулы степени 2, не содержащей в качестве узла начало координат, нужно указать четыре узла и соответствующие им коэффициенты.

Зададим скалярное произведение для функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$, определённых на T , следующим образом

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int_T f(x, y, z) g(x, y, z) dS.$$

Ортонормируя систему многочленов $1, x, y, z$, получаем

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{w}}x, \quad f_3 = \sqrt{\frac{2}{w}}y, \quad f_4 = \sqrt{2}z,$$

где $w = r^2 + 3/2$.

Воспроизводящее ядро имеет вид

$$K_2(x^i, x^j) = 1 + \frac{2}{w}x_i x_j + \frac{2}{w}y_i y_j + 2z_i z_j, \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad i \neq j.$$

Наборы $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^4$ являются набором узлов некоторой минимальной 2-точной кубатурной формулы тогда и только тогда, когда

$$1 + \frac{2}{w}x_i x_j + \frac{2}{w}y_i y_j + 2z_i z_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad i \neq j, \quad (3)$$

а коэффициенты кубатурной формулы равны

$$c_i = \frac{w}{w + 2x_i^2 + 2y_i^2 + 2wz_i^2}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Положим, что узлы кубатурной формулы лежат на поверхности тора

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2(x_i^2 + y_i^2) = 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4)$$

Из-за осевой, относительно Oz , симметрии T будем считать, что узлы кубатурной формулы имеют вид

$$M_1(x_1, 0, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3), \quad M_4(x_4, y_4, z_4).$$

Из уравнений (3) и (4) получаем для координат узлов нелинейную систему уравнений

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{w}x_1 x_2 + 2z_1 z_2 &= 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_1 x_3 + 2z_1 z_3 &= 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_1 x_4 + 2z_1 z_4 &= 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_2 x_3 + \frac{2}{w}y_2 y_3 + 2z_2 z_3 &= 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_2 x_4 + \frac{2}{w}y_2 y_4 + 2z_2 z_4 &= 0, \\ 1 + \frac{2}{w}x_3 x_4 + \frac{2}{w}y_3 y_4 + 2z_3 z_4 &= 0, \\ (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2(x_i^2 + y_i^2) &= 0, \quad i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (5)$$

Система зависит от параметра r , содержит 10 уравнений и 11 неизвестных.

Ранее в работах [3,4] рассматривались частные случаи решения данной системы. В [3] рассматривался случай, когда один из узлов кубатурной формулы имеет вид $(r+1, 0, 0)$. Система (5) сводится к трём уравнениям и решается численно. Формулы такого вида существуют только для $1 \leq r \leq r_1$, где $r_1 = 1,5714$ – корень уравнения

$$12r^4 - 32r^3 + 28r^2 - 16r + 7 = 0.$$

В [4] рассматривался симметричный случай, когда узлы формулы имеют вид (x_1, y_1, z_1) , $(x_1, -y_1, -z_1)$, $(-x_2, y_2, -z_2)$, $(-x_2, -y_2, z_2)$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $z_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$, $z_2 > 0$. В этом случае сформулированы условия существования такого типа формул и получены ограничения на r : $r \geq r_1$, где $r_1 = 1,5714$ – корень уравнения

$$12r^4 - 32r^3 + 28r^2 - 16r + 7 = 0.$$

Для $r = r_1$ формулы, полученные в [3] и [4], совпадают. Одну из другой можно получить с помощью поворота системы координат

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\y' &= y \cos \varphi - x \sin \varphi, \\z' &= z.\end{aligned}$$

В данной работе рассматривается общий случай, когда узлы попарно несимметричны и ни один из них не лежит в плоскости Oxy . Узлы имеют вид $(x_1, 0, z_1)$, (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) . Фиксируем r и $z_1 \neq 0$, находим первое приближение, затем систему решаем численно методом Ньютона. В следующем разделе подробно приводится алгоритм построения таких кубатурных формул.

Алгоритм построения минимальных кубатурных формул 2 степени точности

Зафиксируем $z_1 \neq 0$. Тогда $x_1 = r + \sqrt{1 - z_1^2}$ или $x_1 = r - \sqrt{1 - z_1^2}$. Из первых трёх уравнений системы (5) выразим x_2 , x_3 и x_4 . Имеем:

$$x_2 = -\frac{w(1 + 2z_1z_2)}{2x_1}, \quad x_3 = -\frac{w(1 + 2z_1z_3)}{2x_1}, \quad x_4 = -\frac{w(1 + 2z_1z_4)}{2x_1}.$$

Из уравнений тора, используя последнее уравнение системы (5), найдем y_2 , y_3 , y_4 :

$$\begin{aligned}y_2 &= -\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - x_2^2}, \\y_3 &= \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - x_3^2}, \\y_4 &= \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - x_4^2}.\end{aligned}$$

Подставив найденные выражения в (5), получим систему из трёх уравнений, зависящую от z_2 , z_3 и z_4 :

$$\begin{aligned}G_1(z_2, z_3) &= 1 + \frac{w(1 + 2z_1z_2)(1 + 2z_1z_3)}{2x_1^2} - \frac{2}{w} \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1z_2)}{2x_1}\right)^2} \times \\&\times \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1z_3)}{2x_1}\right)^2} + 2z_2z_3 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(z_2, z_4) &= 1 + \frac{w(1 + 2z_1 z_2)(1 + 2z_1 z_4)}{2x_1^2} - \frac{2}{w} \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1 z_2)}{2x_1}\right)^2} \times \\
&\quad \times \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1 z_4)}{2x_1}\right)^2} + 2z_2 z_4 = 0, \\
G_3(z_3, z_4) &= 1 + \frac{w(1 + 2z_1 z_3)(1 + 2z_1 z_4)}{2x_1^2} + \frac{2}{w} \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1 z_3)}{2x_1}\right)^2} \times \\
&\quad \times \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1 z_4)}{2x_1}\right)^2} + 2z_3 z_4 = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Так как система иррациональная и имеет достаточно сложный вид, вопрос о её разрешимости для конкретных r и z_1 решался экспериментально. Начальное приближение можно находить разными способами:

- 1) графически;
- 2) с помощью генератора случайных чисел, имеющих равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$ с учётом факта, что значения z_2, z_3, z_4 лежат в отрезке $[-1, 1]$, минимизируя выражение

$$\sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2};$$

- 3) с помощью равномерной решетки, минимизируя выражение

$$\sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}.$$

Если система имеет решение, то с выбранным начальным приближением метод Ньютона быстро сходится к решению системы (за 6, 7 итераций). Для вычислений использовалась система компьютерной алгебры Maple 2017. Таким способом можно получить минимальные кубатурные формулы 2 степени точности для тора, порождённые z_1 , для различных радиусов. Приведём несколько примеров:

Пример 1. Зафиксируем $z_1 = 0,5$, тогда точка M_1 из уравнения тора может иметь координаты $(r + \sqrt{3}/2, 0, 0,5)$. В этом случае из первых трёх уравнений системы (5) получим:

$$x_2 = -\frac{w(1 + z_2)}{2r + \sqrt{3}}, \quad x_3 = -\frac{w(1 + z_3)}{2r + \sqrt{3}}, \quad x_4 = -\frac{w(1 + z_4)}{2r + \sqrt{3}}.$$

Из уравнений тора найдём y_2, y_3, y_4 :

$$y_2 = -\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - x_2^2},$$

$$y_3 = \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - x_3^2},$$

$$y_4 = \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - x_4^2}.$$

Подставив все в (5), получим нелинейную систему из трёх уравнений с тремя неизвестными z_2, z_3, z_4 и параметром r :

$$\begin{aligned} G_1(z_2, z_3) &= 1 + \frac{2w(1+z_2)(1+z_3)}{(2r+\sqrt{3})^2} - \frac{2}{w} \sqrt{(r+\sqrt{1-z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1+z_2)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{(r-\sqrt{1-z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1+z_3)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2} + 2z_2z_3 = 0, \\ G_2(z_2, z_4) &= 1 + \frac{2w(1+z_2)(1+z_4)}{(2r+\sqrt{3})^2} - \frac{2}{w} \sqrt{(r+\sqrt{1-z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1+z_2)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1+z_4)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2} + 2z_2z_4 = 0, \\ G_3(z_3, z_4) &= 1 + \frac{2w(1+z_3)(1+z_4)}{(2r+\sqrt{3})^2} + \frac{2}{w} \sqrt{(r-\sqrt{1-z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1+z_3)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1+z_4)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2} + 2z_3z_4 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Придавая r различные значения и находя графически первое приближение, мы найдём искомые кубатурные формулы.

Пусть $r = 1$. Первый узел имеет вид $(1+\sqrt{3}/2, 0, 0, 5)$. Из рис. 1–3 найдём начальное приближение $z_2 = -0,1, z_3 = -0,9, z_4 = 0,8$, затем методом Ньютона решаем нелинейную систему (7). Узлы и коэффициенты искомой кубатурной формулы приведены в табл. 1.

Таблица 1. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 1$

Узлы	Коэффициенты
$(1 + \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$	0,2333
$(-0,6152, -1,8994, -0,0812)$	0,2380
$(-0,01825, 0,7679, -0,9727)$	0,2972
$(-1,2247, 0,9664, 0,8283)$	0,2315

Пусть $r = 2$. Применяя описанную выше схему, находим узлы и коэффициенты искомой кубатурной формулы, которые приведены в табл. 2.

Численные эксперименты показали, что данный тип кубатурных формул с первым узлом $(r + \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$ существует только для $1 \leq r < 2,15$.

Пример 2. Зафиксируем $z_1 = 0,5$, тогда точка M_1 из уравнения тора может иметь координаты $(r - \sqrt{3}/2, 0, 0, 5)$. В этом случае из первых трёх уравнений системы (5) имеем:

$$x_2 = -\frac{w(1+z_2)}{2r-\sqrt{3}}, \quad x_3 = -\frac{w(1+z_3)}{2r-\sqrt{3}}, \quad x_4 = -\frac{w(1+z_4)}{2r-\sqrt{3}}.$$

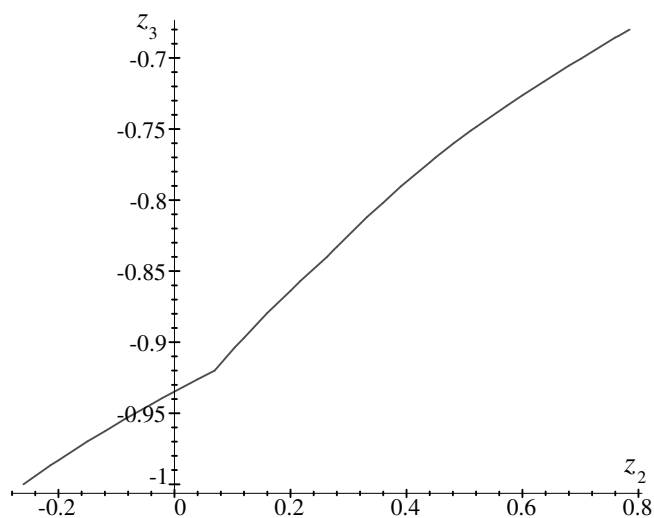


Рис. 1. График функции $G_1(z_2, z_3) = 0$

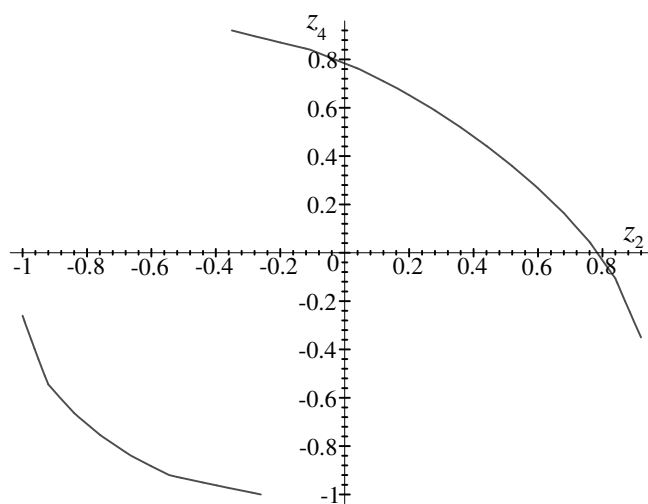
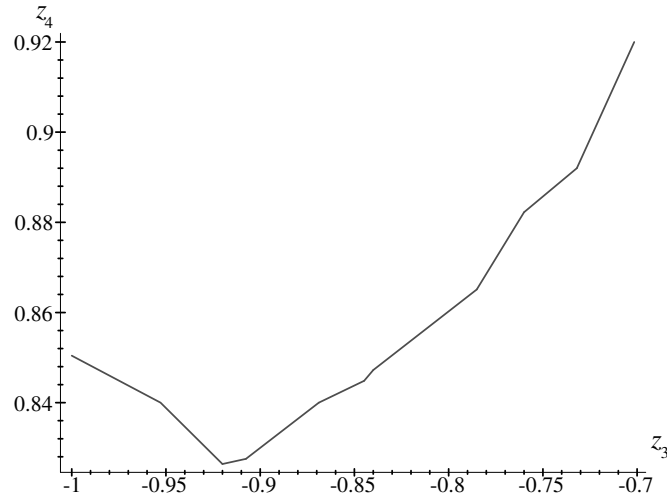


Рис. 2. График функции $G_2(z_2, z_4) = 0$

Таблица 2. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 2$

Узлы	Коэффициенты
$(2 + \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$	0,2229
$(-0,7112, -2,8794, -0,2587)$	0,2308
$(-0,1833, 1,4001, -0,8089)$	0,3296
$(-1,9111, 0,9369, 0,9917)$	0,2197

Рис. 3. График функции $G_3(z_3, z_4) = 0$

Из уравнений тора найдём y_2, y_3, y_4 :

$$y_2 = -\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - x_2^2},$$

$$y_3 = \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - x_3^2},$$

$$y_4 = \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - x_4^2}.$$

Подставив все в (5), получим нелинейную систему из трёх уравнений с тремя неизвестными z_2, z_3, z_4 и параметром r :

$$\begin{aligned} &1 + \frac{2w(1 + z_2)(1 + z_3)}{(2r - \sqrt{3})^2} - \frac{2}{w} \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_2)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_3)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} + 2z_2z_3 = 0, \\ &1 + \frac{2w(1 + z_2)(1 + z_4)}{(2r - \sqrt{3})^2} - \frac{2}{w} \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_2)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} \times \\ &\quad \times \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_4)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} + 2z_2z_4 = 0, \\ &1 + \frac{2w(1 + z_3)(1 + z_4)}{(2r - \sqrt{3})^2} + \frac{2}{w} \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_3)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} \times \end{aligned} \quad (8)$$

$$\times \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_4)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} + 2z_3z_4 = 0.$$

Придавая r различные значения и применяя схему, описанную выше, найдём искомый тип кубатурных формул.

Пусть $r = 9$. Первый узел имеет вид $(9 - \sqrt{3}/2, 0, 0, 5)$. Найдём начальное приближение, используя генератор случайных чисел $z_2 = -0,5570$, $z_3 = -0,9996$, $z_4 = 0,8068$, затем методом Ньютона находим решение нелинейной системы (8), результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 9$

Узлы	Коэффициенты
$(9 - \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$	0,3221
$(-2,3455, -9,5597, -0,5374)$	0,2547
$(-0,0065, 8,9491, -0,9987)$	0,2026
$(-9,1663, 2,8184, 0,8075)$	0,2206

Таблица 4. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 200$

Узлы	Коэффициенты
$(200 - \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$	0,2871
$(-50,1603, -194,5018, -0,5006)$	0,2842
$(-8,2796, 199,4306, -0,9175)$	0,2138
$(-191,6001, 58,8004, 0,9076)$	0,2149

Таблица 5. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 8000$

Узлы	Коэффициенты
$(8000 - \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$	0,2857
$(-2000,1571, -7746,8205, -0,5000)$	0,2857
$(-348,0864, 7992,0152, -0,9129)$	0,2143
$(-7651,7868, 2335,9570, 0,9127)$	0,2143

Применяя описанную выше схему, находим узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 200$ (табл. 4) и при $r = 8000$ (табл. 5).

Численные эксперименты показали, что данный тип кубатурных формул с первым узлом $(r - \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$ существует для радиусов $r \geq 8,2728$.

Заключение

По полученным результатам можно сделать вывод, что при $d = 2$ возникают вычислительные трудности в построении минимальных кубатурных формул для тора

в $\mathbb{R}^3$. Можно построить различные типы кубатурных формул с заданным первым узлом для отдельных диапазонов радиусов. Однако получить аналитическое выражение для границ радиусов существования данных формул не удалось. В дальнейшем планируется проводить исследования в направлении уточнения границ радиусов для каждого типа формул.

Литература

1. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.
2. Носков М.В. О приближенном интегрировании по поверхности тора // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1992. Вып. 3 (№ 15). С. 100–102.
3. Федотова И.М. Кубатурные формулы для тора второй степени с минимальным числом узлов // Кубатурные формулы и их приложения. Материалы V международного семинара-совещания. Красноярск: КГТУ, 2000. С. 201–206.
4. Носков М.В., Федотова И.М. Об одной минимальной кубатурной формуле второй степени точности для тора в $\mathbb{R}^3$ // Математические труды. 2020. Т. 23. № 1. С. 177–186. URL: <https://doi.org/10.33048/mattrudy.2020.23.109> (дата обращения: 28.01.2025).

ALGORITHM FOR CONSTRUCTION OF MINIMUM CUBATURAL FORMULAS FOR INTEGRALS OVER THE SURFACE OF A TORUS IN $\mathbb{R}^3$ SECOND DEGREE OF ACCURACY

I.M. Fedotova

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: firim@mail.ru

M.I. Medvedeva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: mimedvedeva@rambler.ru

A.S. Katsunova

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. The article discusses a general algorithm for constructing minimal cubature formulas for the surface of the torus in $\mathbb{R}^3$ of the second degree of accuracy. Despite the fact that the number of nodes of such minimal formulas is 4, minimal cubature formulas for the torus of degree 2 are known only for certain relations of radii r . Such formulas were constructed for the case when one of the nodes lies in the Oxy plane and for the case when the nodes are symmetrical pairwise about the Ox axis. The article constructs minimal cubature formulas in which the nodes are asymmetric pairwise and none of them lies in the Oxy plane. The reproducing kernel method is used for construction. The formulas described in the article exist both for a torus with a small radius ratio, and for a torus with a fairly large radius ratio, for example equal to 8000. The work contains tables with nodes and coefficients of these formulas.

Keywords: cubature formulas, torus, reproducing kernel.

Дата поступления в редакцию: 29.01.2025

MATHEMATICAL MODELING OF MTI AND MTD EFFICIENCY IN SHIPBORNE RADAR SYSTEMS

I.V. Chukhraev¹

Ph.D. (Tech.), Associate Professor, e-mail: chukhraev@bmstu.ru

V.E. Drach²

Ph.D. (Tech.), Associate Professor, e-mail: vladimir@drach.pro

J.V. Torkunova³

Dr.Sc. (Ped.), Professor, e-mail: torkynova@mail.ru

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

²Sochi State University, Sochi, Russia

³Kazan State Power Engineering University

Abstract. In this article we investigate the effectiveness of Moving Target Indication (MTI) and Moving Target Detection (MTD) technologies in enhancing the performance of ship-based aerial surveillance radars under conditions influenced by hydrometeors. The aim is to develop a comprehensive methodology that assesses the quality of radar target detection while addressing the unique operational challenges faced by shipboard radars, such as limited antenna size and specific scanning requirements. The research employs a modified methodology that evaluates radar performance across various frequency ranges (3–25 cm). It includes a mathematical model to characterize target detection against hydrometeor backgrounds, incorporating factors like signal-to-noise ratios and Doppler frequency shifts. The study utilizes simulation data to analyze the performance of MTI and MTD processing techniques, focusing on their ability to suppress clutter caused by hydrometeors. Simulation results indicate that MTD processing generally outperforms MTI processing in most scenarios, particularly in the decimeter wave band. However, for wavelengths exceeding 10 cm, MTI processing may yield better results due to its effectiveness in managing clutter frequencies. The analysis reveals that the fluctuation caused by hydrometeor movement significantly impacts detection quality, with decimeter wave band radars demonstrating superior performance compared to centimeter wave band systems. In conclusion, the findings underscore the importance of selecting appropriate processing techniques based on operational conditions and radar specifications. Enhanced signal-to-noise ratios can be achieved through spatial and polarization selection methods, although limitations exist due to antenna size constraints on shipboard radars.

Keywords: MTI; MTD; radar station; passive clutter; clutter removal; hydrometeors; frequency selection; selection of moving targets; notch filter; Doppler filter..

Introduction

The operation of a surveillance radar station (radar) under the influence of natural clutter is a normal (typical) mode of the station operation. An increase in the energy potential has little effect on the probability of detecting targets located in the hydrometeor cloud, therefore, processing issues are the primary determinants in the design process of the station [1, 2]. There are known methods of protection against passive clutter based on frequency, spatial and polarization selection. In literature [3], the effectiveness of various types of selection to protect ground-based surveillance radars from clutter caused by the presence of hydrometeors in the resolving volume is considered. A hypothetical number of air traffic control radars (ATC radars) operating in various wave ranges have been accepted as objects for analysis. The quality indicator characterizing the effectiveness of detecting a large passenger aircraft in a cloud of hydrometeors, expressed in terms of the coefficient of improvement of processing equipment and compared with the threshold (required) value, was numerically evaluated. Unlike ATC radars, shipboard radars have their own characteristics that should be taken into account during the research process, for example, as below:

1. The overall dimensions of the antenna aperture are strictly limited by the possibilities of placement on the carrier;
2. The scan rate, as well as the type of detected target, must be consistent with the typical tasks of ship stations. In addition to this, in the course of research, the research methodology given in [3] should be developed, namely: to revise the methodology for evaluating the effectiveness and range of operation of the studied radars [4], expand the range of quasi-optimal processing methods, expand the number of destabilizing factors under consideration, update the parameters of the emitted signals and the achievable characteristics of the receiver-detector. Taking into account the above features and technical aspects, the purpose of the article is a comprehensive assessment of the effectiveness of the use of MTI and MTD to reduce the influence of hydrometeors in ship-based aerial surveillance radars.

1. Problem analysis

Shipboard surveillance radars are designed to detect and track the air and above-water targets [5]. Consequently, these stations should be characterized by high information content in terms of the task of viewing space, namely, a circular viewing area and high resolution with unambiguity in range. Therefore, most of these radars belong to the class of coherent pulse stations (coherent pulse radars of long range). Taking into account a number of technical and economic reasons, a circular view of the space is provided by a mechanical method of scanning with a beam (rotation of the antenna web) [6]. Methods and techniques of scanning (as well as the station channel) in the vertical plane can be any, if the condition is met, that a packet of reflected pulses with a length sufficient for optimal processing is formed. Thus, the objects of research are coherent pulse radars with a sequential overview in the horizontal plane. Let's consider the most typical case – the detection of an aerodynamic target of medium size moving uniformly and rectilinearly in a cloud of hydrometeors. As the basis of the research methodology, we will take the

methodology set out in [3], supplemented and modified as follows:

1. A hypothetical series of radars operating in the wavelength ranges of 3...25 cm is analyzed, which corresponds to the operating ranges of ship stations [7, 8].
2. The size of the antenna aperture for the entire range of radars under consideration is assumed to be constant [9]. This condition makes practical sense due to the actual shortage of space for the location of radar antennas on ships of modern construction and the corresponding restrictions on the size of the aperture [10, 11]. Moreover, the relevance of this problem is increasing due to the widespread introduction of stealth technologies in shipbuilding [12, 13].
3. We will assume that quasi-optimal signal processing at the video frequency takes place in the radars under consideration, based on MTI (Moving Target Indication) technology (fig. 1, a) and MTD (Moving Target Detection) technology (fig. 1, b). And that the MTI-processing is organized using the simplest notch filters based on delay line cancellers devices, and the MTD-processing is a set of Doppler filters with a finite impulse response (i.e. FIR filters) [5] synthesized using FFT [14]. The presence of a limiter and other nonlinearities in the path is neglected [15].

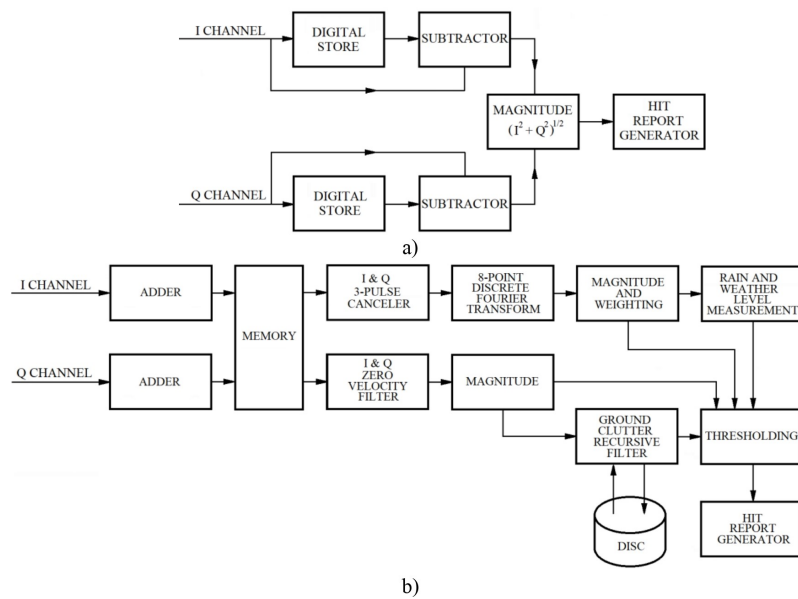


Figure 1. Block diagram of typical digital MTI (a) and MTD (b) signal processor

4. We will evaluate the quality of processing taking into account a number of destabilizing factors that cause both the expansion of the spectrum of external clutter and the appearance of additional ones. The filtration quality will be evaluated numerically in the spectral region. The extremely laconic formula expressions used in [3] for the improvement coefficients obtained by D. Barton [16] are unacceptable in our case due to a noticeable error. Since a linear approximation of the trigonometric function was used in the process of outputting these expressions [17], then these expressions are valid for the case when the width of the clutter spectrum is negligibly less than $\frac{2F}{\pi}$ (where F is a pulse repetition frequency (PRF)), which is not always the case.

5. To assess the quality of detection, we will use a differential estimation method in the field of Doppler frequencies. The classical integral method of quality assessment, expressed in terms of a single coefficient of improvement, has little practical significance, since filters (in particular, notch filters) have a rugged frequency response (up to zeros in the areas of notch) [18]. Therefore, in order to update the quality indicator for comparative assessments, it is necessary to abandon the single (integral) value of the quality indicator, and the quality assessment itself should be carried out separately for each conditionally accepted sub-band of Doppler frequencies.

2. Mathematical model

Let's consider a mathematical model that characterizes the fact of target detection. A condition for detecting a target against the background of hydrometeors for the i -th sub-band of the Doppler shift of the signal (where $i = 0, 1, \dots, (N - 1)$, N is the number of sub-bands) at the output of the phase detector we will consider:

$$\overline{I}_i > \overline{K}_r,$$

where $\overline{I}_i$ is the signal-to-noise ratio improvement coefficient for the i -th sub-band; $\overline{K}_r = (\gamma_\Sigma \overline{\sigma}_h / \overline{\sigma})$ is the required signal-to-noise ratio for target detection against hydrometeors; γ_Σ is the distinctness coefficient; $\overline{\sigma}_h$ is the average radar cross-section (RCS) of hydrometeors in the radar resolution volume; $\overline{\sigma}$ is the target RCS.

The values of $\overline{I}_i$ and $\overline{K}_r$ are estimated for a target at distance D in moderate rain conditions (with precipitation rate $w = 10$ mm/h and wind speed $\sigma_v = 4$ m/s, following [3]). First, we calculate the reflectivity factor Z and specific RCS of hydrometeors $\overline{\sigma}_{00}$ [19]:

$$Z = 200w^{1,6} \quad (\text{mm}^6/\text{m}^3),$$

$$\overline{\sigma}_{00} = \frac{0,93\pi^5}{\lambda^4} Z \quad (\text{mm}^2/\text{m}^3),$$

where λ is the radar wavelength in millimeters.

The average RCS of hydrometeors in the resolution volume is:

$$\overline{\sigma}_h = \overline{\sigma}_{00} \frac{c\tau}{2B} \frac{\pi D^2}{4} \theta_1 \theta_2,$$

where τ is the pulse width, B is the pulse compression ratio, and θ_1, θ_2 are the horizontal and vertical beamwidths respectively. For a fixed aperture size D $d_1 \times d_2$ the width of radiation pattern can be calculated according to the expressions: $\theta_1 = 1,25\lambda/d_1$, $\theta_2 = 1,25\lambda/d_2$, where d_1 and d_2 are maximum aperture sizes in horizontal and vertical planes (measured in meters). We will evaluate the limiting value of the spectral processing improvement coefficient $\overline{K}_{SCi}$. The width of the clutter spectrum at the input is determined by the fluctuation of the reflecting surface of meteorological formations, the modulation of signals when viewing space with a beam and internal instabilities of the station. In this case, the energy spectrum of passive clutter $S_c(f)$ near the zero spectral line, can be approximated by a bell-shaped (Gaussian) function of the following type [16, 19]:

$$S_c(f) = S_{c0} \exp \left(-\frac{f^2}{2(\sigma_c^2 + \sigma_a^2 + \Delta F_{sys}^2 + \Delta F_{mov}^2)} \right), \text{ for } -\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2},$$

where S_{c0} is the power density at zero frequency (normalizing coefficient) of the energy spectrum; f is frequency; $\sigma_c = \frac{\Omega_A}{3.78\theta_1}$ is the width of the spectrum of signals reflected from meteorological formations; is the magnitude of the spectrum expansion caused by the rotation of the antenna with angular velocity Ω_A ; ΔF_{sys} is absolute value of frequency instability of radar receiving and transmitting devices; $\Delta F_{mov} = \frac{v_{mov}}{\lambda\sqrt{2}\theta_1}$ – characterizes the maximum expansion of the spectrum (i.e. for the traverse directions of the radiation pattern) caused by the movement of the radar carrier (the phase center of the antenna) at a speed of v_{mov} . Then to find the improvement coefficient $\overline{K}_{SCi}$ of processing devices, it's necessary to find the coefficient of passive clutter suppression k_C and coefficient of the power gain the of the required signal $\overline{K}_i$ for i -th frequency sub-band:

$$k_C = \frac{\int_{-\frac{F}{2}}^{\frac{F}{2}} S_C(f) df}{\int_{-\frac{F}{2}}^{\frac{F}{2}} S_C(f) K^2(f) df}, \quad (1)$$

$$\overline{K}_i = \frac{\int_{f_i}^{f_i+\Delta f} S_S(f) K^2(f) df}{\int_{f_i}^{f_i+\Delta f} S_S(f) df}, \quad (2)$$

where $i = 0, 1, \dots, (N - 1)$; $K(f)$ is a frequency response of the processing device; f_i and Δf – the initial frequency and width of the i -th sub-band: $f_i = f_0 + i * \Delta f$, $f_0 = -\frac{F}{2}$, $\Delta f = \frac{F}{N}$; $S_S(f)$ – spectral density of the radial velocity distribution of the target. Usually, the value of the Doppler shift of the signal frequency is assumed to be equally probable, then $S_S(f) = N_0$, where N_0 is spectral density of a white noise. Frequency response of processing devices $K(f)$, when using MTI processing based on the delay line cancellers of the n -th multiplicity, corresponds to the expression [20]:

$$K_{MTI}(f) = 2^n \left(\left| \sin \left(\frac{\pi f}{F} \right) \right| \right)^n.$$

For the case of MTD processing [21], there is a set of filters, the frequency characteristics of which overlap the frequency band of the signals, which allows not only to separate the signals by Doppler frequency increment, but also to improve the ratio of the useful signal to noise (due to the narrowness of the Doppler filters). Frequency response of k -th filter is defined by the following expression [2]:

$$K_{DFk}(f) = \left| \frac{\sin \left(N_{DF} \pi \left(\frac{f}{F} - \frac{k}{N_{DF}} \right) \right)}{\sin \left(\pi \left(\frac{f}{F} - \frac{k}{N_{DF}} \right) \right)} \right|, \quad (3)$$

where $k = 0, 1, \dots, (N_{DF} - 1)$. According to 3, central ($k=0$) the Doppler filter corresponds to the zero Doppler offset of the signals, which may make practical sense, for example,

when forming a clutter map, or for detecting low-speed targets [22]. The issues of building a radar detector, as well as the selection of low-speed and sedentary targets [23] are not considered here. Given that it is advisable to choose the value equal to an integer power of 2 (and therefore even), it makes sense to arrange the passbands of the filter set symmetrically relative to the zero Doppler offset point (point of $f=0$). In addition to this, in order to preserve the generality of research, we give the expression 3 to the above-accepted research frequency band:

$$K_{DFk}(f) = \left| \frac{\sin\left(N_{DF}\pi\left(\frac{2f - \frac{F}{N_{DF}}}{2F} + \frac{1}{2} - \frac{k}{N_{DF}}\right)\right)}{\sin\left(\pi\left(\frac{2f - \frac{F}{N_{DF}}}{2F} + \frac{1}{2} - \frac{k}{N_{DF}}\right)\right)} \right|.$$

Frequency response $K_{DFk}(f)$ and $K_{MTI}(f)$, and also the energy spectrum of passive clutter $S_C(f)$ conventionally shown on fig. 2. Directly, the value of the improvement coefficient in spectral signal processing for the i -th sub-band is determined using 1 and 2 according to the following expression: The value of the improvement coefficient, taking into account

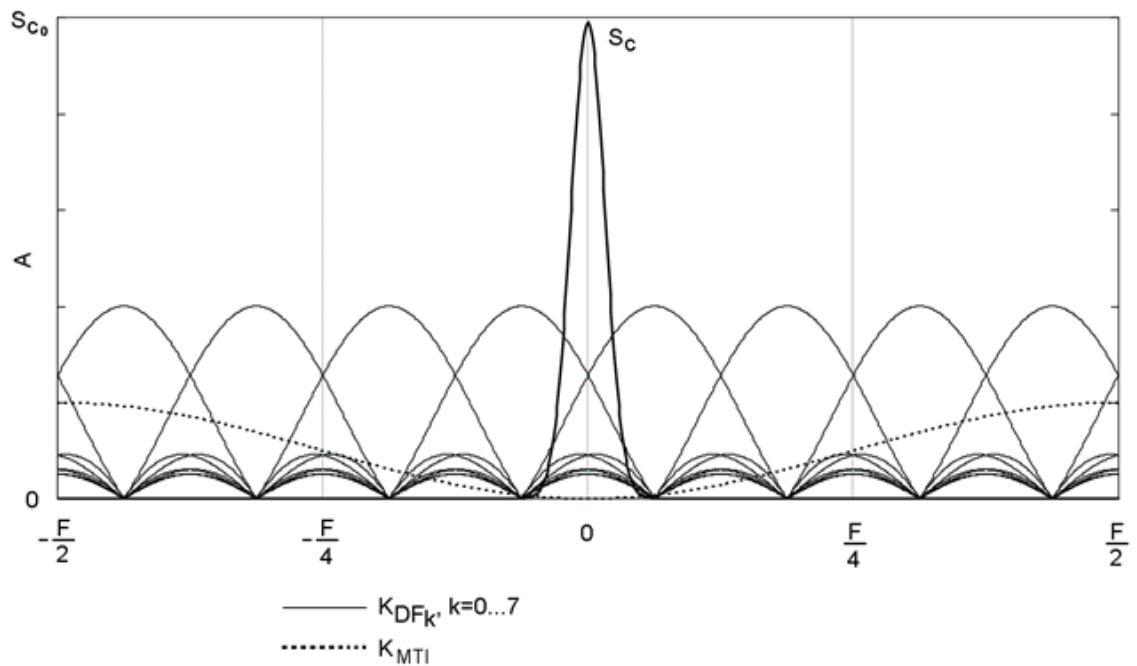


Figure 2. Frequency response and the energy spectrum of passive clutter

all limiting factors, is determined by the expression:

$$\bar{I}_i = \left(\frac{1}{K_{SCi}} + \sum_{j=1}^5 \frac{1}{I_j} \right)^{-1}.$$

where I_j stands for limit values of the improvement coefficient limited by various instability factors and features of the processing equipment. The frequency instability of the receiving and transmitting equipment (frequency and phase of the transmitter, local and

coherent heterodynes) was taken into account above by the value ΔF_{sys} (see expression for $S_c(f)$). Other destabilizing factors are expressed in terms of a variety of values I_j , namely:

1. *Fluctuations in the time position of probing pulses* (time jitter) of Δt value leads to a deterioration in the suppression of the leading and trailing edges of the pulse and the corresponding limitation for improvement factor: $I_1 = \frac{\tau}{2B(\Delta t)^2}$ or $I_1 = \frac{\tau}{2B^2(\Delta t)^2}$ – for pulse compression with linear frequency modulation and pulse compression with phase modulation signals respectively.
2. *Fluctuations in pulse duration* Δt lead to residuals that make up half of the remainder of the time jitter with an equal fluctuation value. Thus, to calculate the corresponding limit on improvement factor I_2 one can use the expression for I_1 , taking into account that $\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{2}}$.
3. *The amplitude jitter* causes the improvement factor to be limited to the level of: $I_3 = (\frac{\Delta A}{A})^{-2}$, where $\frac{\Delta A}{A}$ is a relative change in amplitude as a result of fluctuations.
4. *Quantization noise*, caused by the limited size of the ADC bit depth N . For the case of two independently fluctuating quadrature channels I and Q (see fig. 1) noise leads to the following value of the maximum improvement factor: $I_5 = 0,75(2^N - 1)^2$.

Influence of the pulse repetition period wobble (respectively, value of F), what leads to additional expansion of the spectrum of clutter, during scanning, and random (uncorrelated) movements of hydrometeors are not considered here. The quality of the detector and the detection statistics are taken into account through the value of γ_Σ .

3. Modelling Results

We assume that a target with the radar cross-section of $\bar{\sigma} = 10 \text{ m}^2$ value is located at a distance of $D = 50 \text{ km}$ from radar in a cloud of hydrometeors with the above parameters corresponding to medium-intensity rain conditions. Let's take the following data values of the station parameters formed on the basis of [7, 16]: the size of the aperture of the radar antenna $d_1 \times d_2 = 2 \times 2 \text{ m}^2$, relative frequency instability $\frac{\Delta F_{sys}}{f_R} = 10^{-8}$ (where f_R is carrier frequency of the signal), the coefficient of distinguishability $\gamma_\Sigma = 8$. The target is probed by a coherent sequence of complex ($B=10$) pulse signals with a duration of $\tau = 1 \text{ } \mu\text{s}$, with repetition rates of $F = 2 \text{ kHz}$. For a well-designed system, we can confidently assume that the following expression will be valid for any values of i and j : $I_j << \overline{K_{SC_i}}$ [24,25]. Antenna rotation speed $\Omega_A = 12 \text{ min}^{-1}$. Vehicle speed (we neglect rolling) is $v_{mov} = 30 \text{ kn}$ [8]. When considering delay line cancellers (for MTI processing), we will limit ourselves to devices with a multiplicity of n not higher than 2. The use of a higher multiplicity leads to a significant narrowing of the frequency response of a filter and the deterioration in the speed characteristics. For MTD processing, we assume the dimension of Doppler filtering to be equal to the number of sub-bands of frequency analysis: $N_{DF} = 8$, $N = 8$. In this case, the zero value of the Doppler frequency offset is located on the border of the sub-bands with numbers of i equal to 3 and 4. The results of mathematical modeling (value of $\frac{\bar{I}_i}{\bar{K}_r}$, calculated in dB, rounded to integer) for various carrier frequencies and processing methods

are summarized in Tables 1 (for MTI processing) and 2 (for MTD processing). Positive values (in dB) characterize the possibility of detecting a target against the background of hydrometeors. Values greater than +10 dB and less than -10 dB are replaced by the signs "+" and "-" respectively.

Table 1. Simulation results for MTI processing

λ , cm	n	Sub-band number, i							
		0	1	2	3	4	5	6	7
3	1	-5	-7	-	-	-	-	-7	-5
	2	-1	-4	-	-	-	-	-4	-1
5	1	2	1	-2	-	-	-2	1	2
	2	+	7	1	-	-	1	7	+
10	1	+	+	+	1	1	+	+	+
	2	+	+	+	4	4	+	+	+
25	1	+	+	+	+	+	+	+	+
	2	+	+	+	+	+	+	+	+

Table 2. Simulation results for MTD processing

λ , cm	Sub-band number, $i(i = k)$							
	0	1	2	3	4	5	6	7
3	4	-1	-6	-	-	-6	-1	4
5	+	8	1	-6	-6	1	8	+
10	+	+	+	-1	-1	+	+	+
25	+	+	+	7	7	+	+	+

The analysis of the simulation results showed that the use of MTD processing, in comparison with MTI processing, in most of the considered cases gives the best result. There will be an exception for the case when the wavelength is more than 10 cm. In this case, the bandwidth of the clutter frequencies is significantly narrowed and ensuring a high level of signal suppression with a Doppler shift close to zero comes out on top in terms of efficiency (what is better provided by the equipment of delay line cancellers). Additionally, it is worth considering the possibility of supplementing the MTI notch filter with a set of MTD Doppler filters. Analysis of the simulation results indicates that this construction for the above conditions makes sense in terms of energy (in terms of increasing the signal-clutter ratio) only in the UHF frequency range ($\lambda=10\dots 25$ cm).

Conclusion

The article presents a comprehensive methodology for assessing the quality of target detection, taking into account the energy and spectral characteristics of passive clutter, as well as the characteristics of radiation pattern formation, processing equipment, signal formation and radar survey. Of all the considered factors that cause the expansion of the clutter spectrum, the fluctuation caused by the movement of hydrometeors has the greatest influence. As the result of above, there is a strong dependence of the quality of frequency selection on the wavelength. Decimeter wave band radars offer better detection quality in hydrometeor conditions compared to centimeter-range stations. However, they do not always possess satisfactory characteristics for resolving targets and providing a smaller viewing area, which limits their potential use for detecting a wide range of aerial targets. To improve the signal-to-noise ratio at the input of the processing device, it is necessary to additionally use spatial and polarization selection [26], as well as use signals with a larger base. It is worth noting that the possibilities of spatial selection for shipboard radars are limited by the permissible size of the antenna aperture. And when using polarization selection (using, for example, circular polarization of radiation instead of linear), simultaneously with the suppression of the signal from raindrops by 25 dB, the level of the useful signal decreases by 6-8 dB [8, 16]. Overall, the presented article eliminates inaccuracies, clarifies and complements the conclusions of the scientific work [27].

REFERENCES

1. Kryuchkov I.V., Slukin G.P., Chapurskii V.V. The accuracy of coordinate measurements in multistatic radar systems with complex consideration for primary measurement errors due to noise, atmospheric fluctuations, and uncertainty in position topo binding // *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2016. Vol. 61. P. 1245–1251.
2. Rastorguev V., Ananenko A., Skosyrev V., Marin D. Evaluation of visibility phenomenon in clearances of clutter in the short-range radar // *Revue Roumaine de Science Technologie – Électrotechnie et Énergie*. 2016. Vol. 61, No. 3. P. 289–292.
3. Tomilo O.G. Ocenka effektivnosti razlichnyh vidov selekcii dlya zashchity ot gidrometeorov v obzornyh RLS [Evaluation of the effectiveness of various types of selection for protection against hydrometeors in surveillance radars] // *Radiotekhnika*. 2001. No. 11. P. 54–55. (In Russ.)
4. Shi C. [et al.] Collaborative radar node selection and transmitter resource allocation algorithm for target tracking applications in multiple radar architectures // *Digital Signal Processing*. 2022. Vol. 121. Art. 103318.
5. Richards M.A., Scheer J.A., Holm W.A. (eds.) *Principles of Modern Radar: Basic Principles*. Raleigh: SciTech Publishing, 2010.
6. Vilenskiy A.R., Litun V.I., Lyulyukin K.V. Wideband beam steering antenna array of printed cavity-backed elements with integrated EBG structure // *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*. 2019. Vol. 18, No. 2. P. 245–249.
7. *Principles of Modern Radar: Vol. III: Radar Applications*. Edison: SciTech Publishing, 2014. 820 p.
8. Briggs J.N. *Target Detection by Marine Radar*. London: Institution of Electrical Engineers, 2004.

9. Tupper E.C. Introduction to Naval Architecture. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
10. Esbati S. Design for support in the initial design of naval combatants: PhD Thesis in Naval Architecture and Marine Engineering. London: University College London, 2018.
11. Shin H., Yoon D., Kim C., Yang Y.S. Shape optimization of an integrated mast for RCS reduction of a stealth naval vessel // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11. No. 6. Art. 2819.
12. Khan J., Duan W., Sherbaz S. Radar cross section prediction and reduction for naval ships // *Journal of Marine Science and Application*. 2012. Vol. 11, No. 2. P. 191–199.
13. Guo Y., Li X., Wang J., Zhang X. DFN // *Proceedings of the 2nd International Conference on Computer Science and Application Engineering (CSAE '18)*. New York, USA. 2018.
14. Hang C.C., Ming W.C., Liu W., Fu J. Radar MTI/MTD implementation and performance // *ICMMT 2000: 2000 2nd International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceedings*. Beijing, China, 2000.
15. Cohen I., Levanon N. Adjusting 3-pulse canceller to enhance slow radar targets // *IEEE International Conference on Microwaves Communications Antennas and Electronic Systems (COMCAS)*. Tel Aviv, Israel, 2015.
16. Skolnik M.I. (ed.) *Radar Handbook*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1990.
17. Barton D.K. *Radar System Analysis*. Norwood: Artech House, 1976.
18. Isaev I.D., Savelyev A.N., Semenov A.N. Analysis of radar frame quality indicators properties // *Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS)*. Hangzhou, China, 2021. P. 2238–2242.
19. Finkel'shteyn M.I. *Osnovy radiolokatsii [Basics of Radar]*. Moscow: Sovetskoye Radio, 1983. (In Russ.)
20. Schleher D.C. *MTI and Pulsed Doppler Radar*. Norwood: Artech House, 1991.
21. Qiaona D., Yonghua T. Optimal design of MTD filter based on FIR // *Proc. of 2019 IEEE International Conference on Signal Information and Data Processing (ICSIDP)*. Chongqing, China, 2019. P. 1–4.
22. Fitasov E.S., Legovtsova E.V., Pal'guyev D.A., Kozlov S.A., Sabarov A.G., Borzov A.B., Vasil'ev D.A. Experimental estimation of the projection method of the Doppler filtering of radar signals when detecting air objects with low radial velocities // *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2021. Vol. 54, No. 4. P. 300–308.
23. Ahmed F.M. Tangential targets detection in LFM CW radars // *2020 12th International Conference on Electrical Engineering (ICEENG)*. Cairo, Egypt, 2020. P. 223–227.
24. Streetly M. (ed.) *Jane's Radar and Electronic Warfare Systems 2009-2010*. Coulsdon: IHS Jane's, 2009.
25. Matthews B.L., Srivastava A.N., Iverson D., Beil B., Lane B. Space shuttle main propulsion system anomaly detection: A case study // *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*. 2011. Vol. 26, No. 9. P. 4–13.
26. Wallbank J.R., Dufton D., Neely R.R., Bennett L., Cole S.J., Moore R.J. Assessing precipitation from a dual-polarisation X-band radar campaign using the Grid-to-Grid hydrological model // *Journal of Hydrology*. 2022. Vol. 613. Art. 128311.
27. Drach V.E., Samburov N.V., Chukhraev I.V. Matematicheskaya model dlya analiza effektivnosti selektsii i obnaruzheniya dvizhushchih-sya celey [Mathematical model for analysis of efficiency and selection of moving targets] // *Vestnik of RSREU*. 2023. No. 86. P. 22–31. (In Russ.)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МТИ И МТД-ОБРАБОТКИ КОРАБЕЛЬНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМ

И.В. Чухраев¹

к.т.н., доцент, e-mail: chukhraev@bmstu.ru

В.Е. Драч²

к.т.н., доцент, e-mail: vladimir@drach.pro

Ю.В. Торкунова³

д.п.н., профессор, e-mail: torkynova@mail.ru

¹Московский государственный технический университет им. Н. Баумана, Москва, Россия

²Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

³Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия

Аннотация. В настоящем исследовании изучается эффективность методик индикации движущихся целей (МТИ) и обнаружения движущихся целей (МТД) для повышения эффективности работы корабельных радаров воздушного наблюдения в условиях, зависящих от гидрометеорологической обстановки. Цель заключается в разработке комплексной методологии, позволяющей оценивать качество обнаружения целей с помощью радиолокатора и одновременно учитывать уникальные эксплуатационные проблемы, с которыми сталкиваются судовые радары, такие как ограниченный размер антенны и особые требования к сканированию. В исследовании используется модифицированная методология, которая оценивает характеристики радара в различных частотных диапазонах (3–25 см). Она включает математическую модель для характеристики обнаружения цели на фоне гидрометеорологических условий, учитывающую такие факторы, как отношение сигнал/шум и доплеровские сдвиги частоты. В исследовании используются данные моделирования для анализа эффективности методов обработки данных МТИ и МТД, с акцентом на их способность устранять помехи, вызванные гидрометеорологическими факторами. Результаты моделирования показывают, что обработка МТД в целом превосходит обработку МТИ в большинстве сценариев, особенно в дециметровом диапазоне волн. Однако для длин волн, превышающих 10 см, обработка МТИ может дать лучшие результаты благодаря своей эффективности в управлении частотами помех. Анализ показывает, что колебания, вызванные перемещением гидрометеора, существенно влияют на качество обнаружения, при этом радары дециметрового диапазона волн демонстрируют более высокую производительность по сравнению с системами сантиметрового диапазона волн. Полученные данные подчеркивают важность выбора подходящих методов обработки, основанных на условиях эксплуатации и технических характеристиках радара. Улучшения отношения сигнал/шум можно достичь с помощью методов пространственного и поляризационного выбора, хотя существуют ограничения, связанные с размерами антенны судовых радаров.

Ключевые слова: МТИ; МТД; радар; пассивная помеха; устранение помех; гидрометеоры; выбор частоты; выбор движущихся целей; режекторный фильтр; доплеровский фильтр.

Дата поступления в редакцию: 26.02.2025

МОДЕЛЬ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНО-СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И НЕЙРОННОЙ СЕТИ LSTM

А.Д. Байдалин

аспирант, e-mail: alexander.baydalin@gmail.com

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: varlamov@subsui.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Статья посвящена разработке модели прогнозирования цены акции компании с использованием сингулярно-спектрального анализа в комбинации с нейронной сетью LSTM. В статье предлагается подход к анализу временных рядов цен акций, основанный на применении сингулярно-спектрального анализа, который позволяет выделить скрытые закономерности и тренды в данных, а также устранить шум, улучшая точность прогноза. Методика включает в себя разложение временного ряда на несколько составляющих, что способствует более глубокому пониманию динамики цен и повышению надежности предсказаний. Результаты экспериментов показали высокую эффективность предложенного метода по сравнению с традиционными статистическими и машинными методами анализа, что открывает новые возможности для оптимизации инвестиционных стратегий и анализа финансовых рынков.

Ключевые слова: сингулярно-спектральный анализ, временные ряды, финансовые рынки, анализ данных, инвестиционные стратегии, нейронные сети.

Введение

Сингулярно-спектральный анализ (SSA, Singular Spectrum Analysis) является мощным методом для анализа временных рядов, который активно используется в различных областях науки и техники. В отличие от традиционных статистических методов, таких как автокорреляция или спектральный анализ, SSA не требует строгих предположений о распределении данных или линейности временного ряда. Это делает его особенно полезным для работы с нестационарными, шумными и сложными данными, часто встречающимися в реальных приложениях.

Основная идея SSA заключается в разложении временного ряда на компоненты, отражающие его скрытые структуры – тренды, циклы и случайные флуктуации. Процесс анализа включает несколько этапов: создание матрицы траектории, сингулярное разложение, выбор значимых компонент и их реконструкция. Это позволяет не только выявить долгосрочные тренды и циклические изменения, но и очистить данные от шума, что важно для предсказания и прогнозирования.

Метод SSA нашёл широкое применение в таких областях, как экономика, финансы, экология, метеорология и другие, где требуется анализ временных рядов для выявления скрытых закономерностей и принятия информированных решений. Кроме того, SSA активно используется для обработки и анализа сигналов в физике, биологии и инженерии. В статье рассматриваются основные принципы и этапы SSA, а также его применение для решения реальных задач, связанных с обработкой временных рядов.

В данной работе применяется метод анализа временных рядов SSA, который позволяет эффективно выделить основные компоненты исходных данных и устранить шум. Далее для построения прогноза на основе полученных временных рядов используется модель LSTM (Long Short-Term Memory), способная учитывать долгосрочные зависимости и тенденции в данных. Применение LSTM в сочетании с SSA позволяет улучшить точность прогноза, обеспечив более стабильные результаты, по сравнению с традиционными методами. Таким образом, предложенный подход демонстрирует высокую эффективность в прогнозировании временных рядов, что открывает возможности для его использования в различных областях, требующих точного анализа и предсказания динамики данных.

1. Основные этапы метода SSA

Применение SSA к котировкам акций представляет собой метод анализа временных рядов, который позволяет выявлять скрытые закономерности, тренды и цикличности в данных о ценах акций. SSA – это метод, который используется для выделения структуры временных рядов без необходимости использования сложных моделей или предварительных предположений о данных. В этом параграфе кратко рассмотрим основные этапы метода SSA.

1.1. Представление временного ряда в виде матрицы траектории

Первым этапом SSA является преобразование временного ряда в матричную форму. Это необходимо для того, чтобы последующий процесс сингулярного разложения (SVD) мог выделить скрытые структуры и компоненты ряда. Этот этап называется формированием матрицы траектории. Рассмотрим его более детально [1].

Предположим, что у нас есть одномерный временной ряд $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, состоящий из N наблюдений. Это могут быть данные о температуре, стоимости акций, показателях продаж и т. д. В данной статье будет рассматриваться реализация SSA по отношению к временному ряду, состоящему из истории котировок акций компании «Сбербанк».

Для того чтобы сформировать матрицу траектории, используется принцип скользящего окна. В SSA выбирается фиксированная длина окна L , которое «перемещается» по временным данным, формируя из них подматрицы. Каждое окно охватывает L последовательных значений временного ряда, и это окно переносится по ряду с некоторым шагом d . Обычно шаг d равен 1, но в некоторых случаях могут использоваться и другие значения.

Если окно длины L и шаг $d = 1$, то для первого окна мы возьмём значения временного ряда с индексами $1, 2, \dots, L$; для второго окна значения с индексами $2, 3, \dots, L + 1$; и т. д. Таким образом, для временного ряда длиной N получится $M = N - L + 1$ окон [2].

Когда окно определено, необходимо из этих окон собрать матрицу траектории. Каждое окно представляется как строка в матрице. Таким образом, получаем матрицу размера $L * M$, где L — количество строк (размер окна); $M = N - L + 1$ — количество столбцов (количество окон). Каждая строка в этой матрице представляет собой последовательность значений временного ряда в пределах одного окна, а каждый столбец — это окно, смещённое по временной оси.

Размер окна L играет важную роль в SSA. Если окно слишком большое, то может быть захвачено слишком много информации, что приведёт к затруднениям в выделении нужных компонент. Если окно слишком маленькое, то может быть упущена информация о долгосрочных трендах и циклах.

Траекторная матрица временного ряда X состоит из векторов вложения в качестве столбцов. Траекторная матрица представлена в следующей формуле:

$$X = (f_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{bmatrix} f_0 & \cdots & f_{K-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & \cdots & f_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Пусть $N = 6$, т. е. у нас есть временной ряд из шести значений: $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$. Пусть длина окна $L = 3$. Тогда матрица траекторий будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_2 & X_3 & X_4 \\ X_3 & X_4 & X_5 \\ X_4 & X_5 & X_6 \end{bmatrix}.$$

Представленная матрица уже является входными данными для SSA. Задача SSA заключается в том, чтобы найти скрытые зависимости и структуры в этом представлении данных. Траекторная матрица является базой для реализации следующего этапа метода SSA: сингулярного разложения (SVD, Singular Value Decomposition), которое позволяет выделить важные компоненты, такие как тренды, циклы и случайные флуктуации.

1.2. SVD траекторной матрицы

SVD — это ключевая операция в SSA, которая позволяет выделить основные компоненты временного ряда, представленного в виде матрицы траектории. SVD используется для разложения матрицы на несколько составных частей [1].

SVD матрицы A размером $L \times M$ (где L — количество строк, а M — количество столбцов) представляет собой разложение этой матрицы на три матрицы:

$$A = U \Sigma V^T, \quad (2)$$

где U – матрица размером $L \times L$, содержащая левые сингулярные векторы; Σ – диагональная матрица размером $L \times M$ с сингулярными числами на диагонали, которые являются квадратными корнями собственных значений матрицы $A^T A$; V^T – транспонированная матрица размером $M \times M$, содержащая правые сингулярные векторы.

Сингулярные числа (элементы диагональной матрицы Σ) представляют собой показатели важности каждого из компонентов матрицы A . Чем больше сингулярное число, тем более значимый компонент оно представляет. Сингулярные векторы в матрицах U и V содержат информацию о направлениях, в которых эти компоненты проявляются в исходных данных.

Так, для траекторной матрицы A размером $L \times M$ применение SVD даёт следующие компоненты:

- Левые сингулярные векторы U описывают, как компоненты (тренды, циклы и шум) связаны с наблюдаемыми значениями временного ряда на каждом моменте времени. Эти векторы определяют веса, с которыми каждая компонента влияет на наблюдение в определённые моменты времени.
- Сингулярные числа Σ представляют собой величины, указывающие на силу каждой компоненты. Большие сингулярные числа означают более значимую компоненту, которая будет более выражена в данных.
- Правые сингулярные векторы V^T показывают, как каждая компонента связана с временными интервалами. Эти векторы описывают, в каком порядке и с какой интенсивностью различные компоненты проявляются в каждом из окон временного ряда [3].

1.3. Реконструкция ряда

SVD позволяет выделить несколько важных аспектов данных. Если сингулярные числа σ_i быстро убывают (например, несколько из них значительно больше остальных), это означает, что данные можно аппроксимировать с использованием только первых нескольких компонент. Эти компоненты обычно содержат информацию о долгосрочных трендах или циклических паттернах в данных. Меньшие сингулярные числа связаны с компонентами, которые можно интерпретировать как шум или случайные колебания. Обычно компоненты с малыми сингулярными числами можно отбросить, поскольку они не вносят существенного вклада в основную структуру данных.

Реконструкция осуществляется с использованием тех же сингулярных векторов, но с отбором только значимых компонент. Это позволяет выделить только важные паттерны, такие как тренды или циклические колебания, и отфильтровать менее значимые компоненты, например, шум.

Реконструкция происходит для каждой компоненты временного ряда отдельно:

- Если SVD показало, что первая компонента представляет собой тренд, то её можно восстановить и использовать для анализа долгосрочных изменений.
- Если вторая компонента представляет собой циклические колебания, то она также восстанавливается, и мы можем изучить частотные или сезонные паттерны в данных.

- Меньшие компоненты, связанные с шумом, часто отбрасываются, так как они не содержат значимой информации.

Чтобы восстановить основные компоненты временного ряда, мы выбираем $r = 2$ самых значимых компонент, что соответствует первому и второму сингулярным числам. Оставшиеся компоненты (с малыми сингулярными числами) можно отбросить как шум.

Реконструированная матрица будет выглядеть так (см. формулу (2)):

$$A_r = U_r \Sigma_r V_r^T,$$

где U_r , Σ_r , V_r^T содержат только первые два столбца, два сингулярных числа и две строки соответственно. В результате мы получим новую матрицу траектории, которая воссоздаст временной ряд с исключением шума.

2. Рекуррентная нейронная сеть LSTM

Когда результаты SSA применяются к данным, нейронные сети могут использовать эти очищенные и разделённые компоненты для более точного анализа и предсказания. Разделив временной ряд на тренды, циклические компоненты и остаточные элементы, можно значительно упростить задачу, предоставив нейронной сети более понятные и чётко структурированные входные данные. Это позволяет модели сосредоточиться на самых значимых паттернах и значительно повышает её способность делать точные прогнозы.

Таким образом, комбинирование методов SSA и нейронных сетей представляет собой перспективный подход для работы с временными рядами. Эта комбинация открывает новые возможности для повышения точности предсказаний, особенно в задачах, где данные имеют высокую степень сложности и зашумлённости.

Рекуррентные нейронные сети (RNN, Recurrent Neural Networks) – это класс нейронных сетей, предназначенных для обработки последовательных данных, таких как временные ряды, тексты, звуковые сигналы и другие типы последовательностей. В отличие от стандартных нейронных сетей (например, многослойных перцептронов), в RNN имеется механизм, который позволяет учитывать информацию о предыдущих шагах (временных точках) последовательности.

Основная идея RNN заключается в наличии петли связи, которая позволяет сети «помнить» информацию о предыдущих состояниях. Это делает RNN идеальными для работы с последовательными данными, где контекст предыдущих элементов важен для понимания текущего.

В отличие от обычных нейронных сетей, где данные передаются от слоя к слою, в RNN выход на текущем шаге зависит от выходных данных на предыдущем шаге. Это создаёт «память» о том, что происходило раньше.

В самой простой форме RNN представляет собой цепочку нейронов, каждый из которых соединён с собой через петлю. Рассмотрим основные элементы этого процесса.

Пусть у нас есть последовательность данных (например, восстановленный ряд после SSA)

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_T.$$

Для каждого времени t на вход в RNN подаётся вектор x_t , и сеть генерирует скрытое состояние h_t на основе предыдущего скрытого состояния h_{t-1} и текущего входа x_t . Процесс вычислений для RNN на каждом временном шаге можно описать следующим уравнением [4]:

$$h_t = f(W_h h_{t-1} + W_t x_t + b), \quad (3)$$

где

h_t – скрытое состояние на текущем шаге t ;

h_{t-1} – скрытое состояние на предыдущем шаге $t - 1$;

x_t – входной вектор на текущем шаге t ;

W_h, W_t – весовые матрицы для скрытого состояния входа;

b – вектор смещения;

$f()$ – нелинейная активация, часто используемая – это функция $\tanh$ или ReLU .

Выход из сети осуществляется по следующей формуле:

$$y_t = W_y h_t + c, \quad (4)$$

где y_t – выход сети на текущем шаге t ; W_y – матрица весов для выхода; c – вектор смещения на выходе.

Таким образом, на каждом шаге t скрытое состояние h_t зависит от текущего входа x_t и скрытого состояния h_{t-1} , которое несёт информацию о прошлых шагах. Это позволяет модели «запоминать» контекст последовательности.

LSTM (Long Short-Term Memory) – это улучшенный тип RNN, который решает основные проблемы стандартных RNN, такие как затухание и взрыв градиентов. LSTM включает в себя специальные ячейки памяти и несколько гейтов для контроля потока информации, что позволяет ей эффективно запоминать долгосрочные зависимости в данных.

Забывающее состояние (Forget gate): решает, какую информацию из предыдущего состояния памяти C_{t-1} нужно забыть. Это делается с помощью сигмоидной функции активации σ , которая выводит значения от 0 до 1, где 0 означает «забыть всё», а 1 – «сохранить всё». Забывающее состояние определяется формулой

$$f_t = \sigma(W_f * [h_{t-1}, x_t] + b_f), \quad (5)$$

где f_t – забывающее состояние на текущем шаге t ; W_f – весовая матрица для забывающего состояния; $[h_{t-1}, x_t]$ – конкатенированный вектор скрытого состояния на предыдущем шаге и текущего входа; b_f – вектор смещения для забывающего состояния.

Входное состояние (Input gate): управляет тем, какая информация будет добавлена в состояние памяти на текущем шаге. Сначала рассчитывается промежуточная величина $\tilde{C}_t$, которая будет добавлена к состоянию памяти. Также используется сигмоидная функция для решения, какая информация из $\tilde{C}_t$ будет использована:

$$i_t = \sigma(W_i * [h_{t-1}, x_t] + b_i), \quad (6)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C * [h_{t-1}, x_t] + b_C), \quad (7)$$

где i_t – входное состояние, которое контролирует, сколько информации будет добавлено в память; $\tilde{C}_t$ – кандидатное состояние памяти на шаге t ; W_i, W_C – весовые матрицы для входного состояния и состояния памяти; b_i, b_C – векторы смещения.

Обновление состояния памяти (Cell state update): следующим шагом происходит обновление состояния памяти C_t . Сначала забывающее состояние f_t умножается на предыдущее состояние памяти C_{t-1} , что позволяет забыть часть старой информации. Затем добавляется новая информация, которая определяется входным состоянием и кандидатным состоянием [5]:

$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t, \quad (8)$$

где C_t – обновлённое состояние памяти на шаге t , f_t – забывающее состояние на текущем шаге t , i_t – входное состояние, $\tilde{C}_t$ – кандидатное состояние памяти на шаге t .

Выходное состояние (Output gate): контролирует, какая информация из состояния памяти C_t будет передана на следующий шаг и на выход модели. Для этого используется сигмоидная функция и гиперболический тангенс для масштабирования значения:

$$o_t = \sigma(W_o * [h_{t-1}, x_t] + b_o), \quad (9)$$

$$h_t = o_t * \tanh(C_t), \quad (10)$$

где o_t – выходное состояние, которое управляет тем, какая информация будет передана дальше; h_t – скрытое состояние (выход из LSTM) на шаге t ; $\tanh(C_t)$ – активация гиперболическим тангенсом из обновлённого состояния памяти.

Каждый шаг LSTM можно интерпретировать так:

- Забывающее состояние f_t – на этом шаге модель решает, какую часть информации из предыдущего состояния памяти нужно забыть. Например, если информация больше не актуальна, она будет игнорироваться.
- Входное состояние i_t – модель решает, какие новые данные стоит добавить в память. Для этого вычисляется $\tilde{C}_t$, который представляет собой кандидатную информацию.
- Обновление памяти – новое состояние памяти C_t , формируется как комбинация старого состояния и новой информации. Это позволяет сохранять долгосрочные зависимости.
- Выходное состояние h_t – решает, какая информация из состояния памяти будет передана на следующий шаг [6].

3. Реализация прогноза с помощью SSA и LSTM

Перед началом реализации прогнозной функции необходимо собрать данные о котировках акций за определённый промежуток времени. Для этого необходимо обратиться к официальному API Московской биржи МоехАлго.

Обратим внимание на рис. 1. Здесь создаётся объект `sber` класса `Ticker`, который представляет тикер акций компании (в данном случае компании «Сбер», тикер

SBER на бирже). Это объект, через который можно получать финансовые данные для указанной компании.

Создаётся переменная `current_day`, которая содержит текущую дату, но уменьшенную на один день. Т. е. это вчерашний день (если сегодня, например, 21 ноября 2024 года, то переменная `current_day` будет содержать «2024-11-20»).

Переменная `first` будет содержать дату, которая была 900 дней назад от текущего дня. Это может быть сделано для того, чтобы получить исторические данные о котировках за несколько лет (900 дней – это примерно 2,5 года).

```
yndx = Ticker('SBER')
current_day = (dt.datetime.now().date() - dt.timedelta(days=1)).strftime("%Y-%m-%d")
first = (dt.datetime.now().date() - dt.timedelta(days=900)).strftime("%Y-%m-%d")

df_full = yndx.candles(start=first, end=current_day, period='1d')

from sklearn import preprocessing
df = df_full.copy()
x = df[['close']] #returns a numpy array
min_max_scaler = preprocessing.MinMaxScaler()
x_scaled = min_max_scaler.fit_transform(x)
df = pd.DataFrame(x_scaled)
```

Рис. 1. Сбор информации OHLC.

На основе объекта `sber` вызывается метод `candles`, который запрашивает данные о котировках акций компании за период с `first` (900 дней назад) по `current_day` (вчерашний день). Параметр `period='1d'` указывает, что данные должны быть в виде дневных свечей (т. е. информация о цене открытия `Open`, закрытия `Close`, максимуме `High` и минимуме `Low` за каждый день).

В результате выполнения этого кода переменная `df` будет содержать `DataFrame` с историческими данными о ценах акций компании «Сбер» (тикер `SBER`) за последние 900 дней. Эти данные можно использовать для анализа или построения графиков (см. рис. 2).

Следующим этапом будет формирование функции SSA. Функция `ssa` выполняет роль SSA на временном ряду `series`:

- `Window` – это размер окна, которое используется для разбиения временного ряда на части (траекторная матрица X).
- Создаётся матрица X , состоящая из окон размера `window`. Каждый столбец этой матрицы – это последовательность значений ряда, размером с окно.
- Затем выполняется SVD матрицы X на три матрицы: U , S , и VT . Эти матрицы представляют собой составляющие разложения (сингулярные векторы и значения).

На рис. 3 видно часть кода, где задаётся размер окна (`window = 20`) и выполняется SSA с использованием функции `ssa`. Результат разложения сохраняется в переменные U , S , и VT :

U – матрица левых сингулярных векторов.

S – диагональная матрица сингулярных значений.

	open	close	high	low	value	volume	begin	end
0	137.70	141.15	141.77	136.77	9.812403e+09	69963540.0	2022-06-27	2022-06-27 23:59:59
1	141.75	139.99	142.35	138.50	7.675925e+09	54863240.0	2022-06-28	2022-06-28 23:59:59
2	139.80	132.80	139.89	132.75	7.517498e+09	55164310.0	2022-06-29	2022-06-29 23:59:57
3	132.50	125.20	135.44	123.55	1.177445e+10	91499020.0	2022-06-30	2022-06-30 23:59:59
4	124.13	129.91	132.00	122.50	7.809272e+09	60628570.0	2022-07-01	2022-07-01 23:59:59
...	...	...	...	...	...	...	...	...
624	231.00	224.55	233.79	224.30	1.661712e+10	72417390.0	2024-12-04	2024-12-04 23:59:59
625	224.57	233.48	233.75	222.82	1.985159e+10	86989140.0	2024-12-05	2024-12-05 23:59:59
626	233.63	237.84	238.25	231.52	1.908810e+10	81096070.0	2024-12-06	2024-12-06 23:59:59
627	239.29	237.29	240.51	236.75	1.252639e+10	52493640.0	2024-12-09	2024-12-09 23:59:59
628	238.00	230.82	238.01	230.65	1.371039e+10	58740230.0	2024-12-10	2024-12-10 23:59:59

Рис. 2. Результат сбора информации о котировках акции Сбербанка

VT – матрица правых сингулярных векторов.

Восстановление тренда осуществляется путём вычисления произведения матриц U , S , и VT . Для тренда используется первая компонента (первый столбец из U и первая строка из VT), умноженная на соответствующие сингулярные значения из S . `trend_component_mean` содержит среднее значение каждого столбца тренда, что помогает сгладить и интерпретировать тренд.

Восстановление сезонного компонента производится аналогично тренду, но теперь используется вторая компонента (второй столбец из U и вторая строка из VT), умноженная на соответствующие сингулярные значения из S . `Seasonal_component_mean` содержит средние значения каждого столбца сезонного компонента.

Далее на рис. 4 выводятся графики, которые отображают исходный временной ряд, трендовую и сезонную составляющую.

В коде на рис. 5 выполняется подготовка модели для прогноза временных рядов с использованием LSTM (длительная кратковременная память).

Далее приведено пошаговое описание действий:

- `create_lstm_features` – функция, которая будет генерировать обучающие примеры для LSTM, где каждый пример – это окно из `window` предыдущих значений временного ряда.
- `window=60` – размер окна для формирования признаков. Каждое окно будет содержать 60 предыдущих значений.
- Функция возвращает два массива: `features` (признаки для модели) и `target` (цели для предсказания, т. е. следующее значение ряда).
- `MinMaxScaler` масштабирует данные в диапазон (0, 1), что помогает модели лучше обучаться

```

# Преобразуем в DataFrame
df = pd.DataFrame({'time': df.index, 'value': series})

# Функция для выполнения SSA
def ssa(series, window):
    n = len(series)
    X = np.asarray([series[i:i + window] for i in range(n - window + 1)])
    U, S, VT = svd(X)
    return U, S, VT

# Выделение компонентов
window = 20 # Размер окна
U, S, VT = ssa(series, window)

# Восстановление тренда
trend_component = np.dot(U[:, 0].reshape(-1, 1), S[0] * VT[0, :].reshape(1, -1))
trend_component_mean = []
for j in range(0, len(trend_component)):
    trend_component_mean.append(trend_component[j].mean())

# Восстановление сезонного компонента
seasonal_component = np.dot(U[:, 1].reshape(-1, 1), S[1] * VT[1, :].reshape(1, -1))
seasonal_component_mean = []
for j in range(0, len(seasonal_component)):
    seasonal_component_mean.append(seasonal_component[j].mean())

```

Рис. 3. Код SSA

- Разделяем данные на тренировочную и тестовую выборки. Обычно для временных рядов используется 80 % данных для тренировки и 20 % для тестирования.
- `train_size` вычисляется как 80 % от общего количества примеров в данных.
- Первый слой LSTM содержит 100 единиц и параметр `return_sequences=True`, чтобы передавать выходные данные в следующий LSTM слой.
- Для предотвращения переобучения добавляется слой Dropout с вероятностью 0,2.
- Второй слой LSTM содержит 100 единиц и `return_sequences=False`, так как он является последним слоем.
- Выходной слой содержит 1 нейрон, который предсказывает одно значение.
- Компиляция модели используется оптимизатор `adam` и функция потерь `mean_squared_error`, подходящая для задачи регрессии.
- `early_stopping` добавляет механизм раннего завершения для предотвращения переобучения. Если валидационная ошибка не улучшится в течение 20 эпох, обучение будет остановлено, и веса модели будут восстановлены на лучшее состояние.

После построения функции обучения модели необходимо её запустить. Эта часть кода представлена на рис. 6.

Следующий этап – это запуск самого прогноза (рис. 7):

- `model_lstm.predict(X_test)` – делает прогнозы для тестовой выборки `X_test`. Это создаёт массив предсказанных значений, который сохраняется в переменной

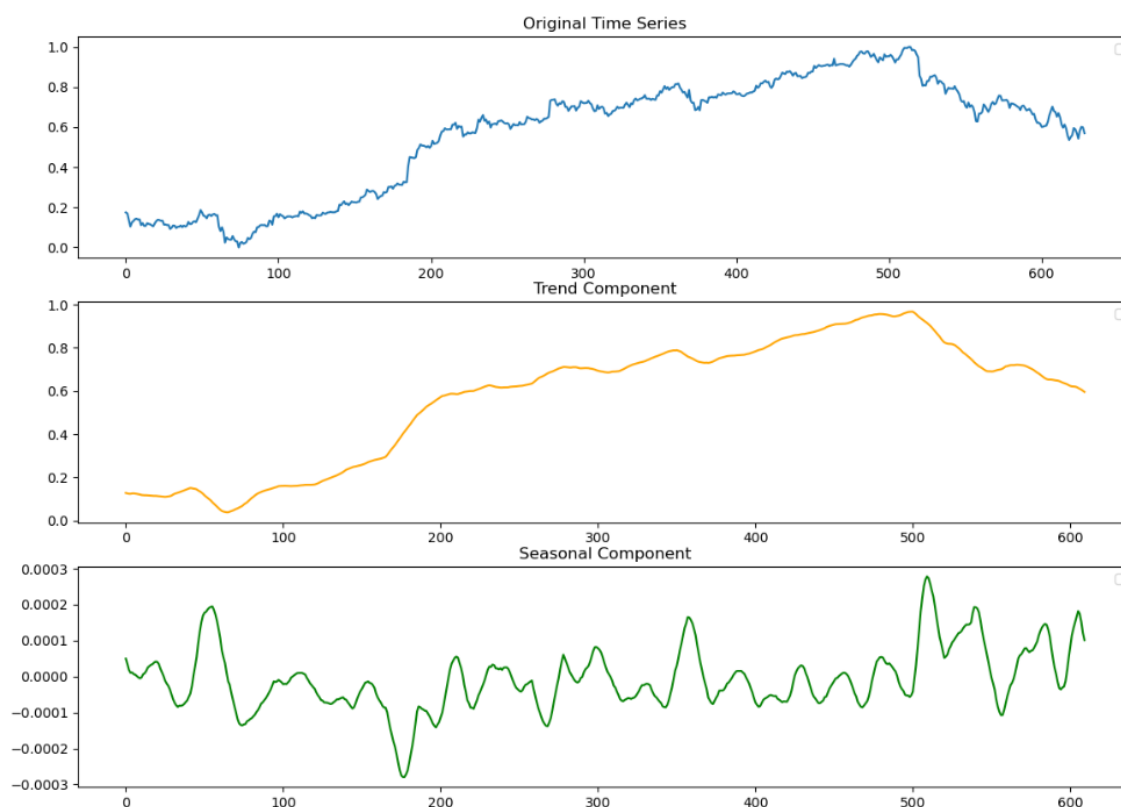


Рис. 4. Графики SSA

`y_pred_lstm`.

- `r2_score(y_test, y_pred_lstm)` – функция из библиотеки `sklearn`, которая вычисляет R^2 между истинными значениями `y_test` и предсказанными значениями `y_pred_lstm`. Значение R^2 выводится на экран. Если оно близко к 1, это означает, что модель хорошо предсказывает данные.
- `last_window = scaled_data[-60:].reshape(1, 60, 1)` – создаётся окно из последних 60 значений, которые будут использоваться для прогноза. Оно преобразуется в нужный формат (3D: sample, time steps, features).
- В цикле на протяжении 10 итераций модель делает прогноз для следующего дня. На каждом шаге: `y_forecast_lstm = model_lstm.predict(last_window)` – модель прогнозирует следующее значение.
- `last_window = np.append(last_window[:, 1:, :], y_forecast_lstm.reshape(1, 1, 1), axis=1)` – для следующего шага прогнозирования окно обновляется. Из него «выбрасывается» первое значение, а предсказанное значение добавляется в конец. Это позволяет использовать новые предсказания как входные данные для следующих шагов прогноза.

Финальным этапом является представление прогноза на 10 дней на графике. Это можно увидеть на рис. 8.

После обучения модели LSTM для предсказания временного ряда результаты на тренировочных и тестовых данных продемонстрировали отличные показатели. Ко-

```

close_prices = pd.DataFrame(trend_component_mean).values
close_prices = close_prices.flatten()
# Преобразование временного ряда в структуру для XGBoost
def create_lstm_features(data, window=60):
    features, target = [], []
    for i in range(window, len(data)):
        window_data = data[i-window:i]
        features.append(window_data)
        target.append(data[i])
    return np.array(features), np.array(target)

# Нормализация данных для LSTM
scaler = MinMaxScaler(feature_range=(0, 1))
scaled_data = scaler.fit_transform(close_prices.reshape(-1, 1))

# Создаем признаки и цели для LSTM
X_lstm, y_lstm = create_lstm_features(scaled_data, window=60)

# Разделение на тренировочную и тестовую выборки
train_size = int(len(X_lstm) * 0.8)
X_train, X_test = X_lstm[:train_size], X_lstm[train_size:]
y_train, y_test = y_lstm[:train_size], y_lstm[train_size:]

# Ресайзим данные для LSTM (3D: samples, time steps, features)
X_train = np.reshape(X_train, (X_train.shape[0], X_train.shape[1], 1))
X_test = np.reshape(X_test, (X_test.shape[0], X_test.shape[1], 1))

# Создание модели LSTM с улучшениями
model_lstm = Sequential()

# Добавляем первый слой LSTM с Dropout для предотвращения переобучения
model_lstm.add(LSTM(units=100, return_sequences=True, input_shape=(X_train.shape[1], 1)))
model_lstm.add(Dropout(0.2)) # Dropout для регуляризации

# Добавляем второй слой LSTM
model_lstm.add(LSTM(units=100, return_sequences=False))
model_lstm.add(Dropout(0.2)) # Dropout для регуляризации

# Выходной слой
model_lstm.add(Dense(units=1))

# Компиляция модели
model_lstm.compile(optimizer='adam', loss='mean_squared_error')

# Добавляем раннее завершение для предотвращения переобучения
early_stopping = EarlyStopping(monitor='val_loss', patience=20, restore_best_weights=True)

```

Рис. 5. Построение нейронной сети

эffiциент детерминации R^2 на тренировочных данных составил 0,9957, что свидетельствует о высокой степени объясняемой модели изменчивости данных и отличной обучаемости. Модель прекрасно справляется с воспроизведением закономерностей в тренировочных данных.

На тестовых данных коэффициент $R^2 = 0,9815$, что также указывает на высокую способность модели обобщать на новые данные и точность её предсказаний. Это значение близко к 1, что подтверждает хорошее качество прогноза и уверенность модели в предсказаниях.

Средняя абсолютная ошибка (MAE) составила 0,0119, что указывает на очень низкую среднюю ошибку предсказаний по сравнению с реальными значениями. Это означает, что модель делает точные прогнозы, отклоняясь от реальных данных всего на несколько тысячных единиц.

```
model_lstm.fit(X_train, y_train, epochs=100, batch_size=32, validation_data=(X_test, y_test), verbose=1, callbacks=[early_stopping_monitor])
```

```
Epoch 1/100
14/14 — 1s 55ms/step - loss: 0.0013 - val_loss: 2.7688e-04
Epoch 2/100
14/14 — 1s 57ms/step - loss: 0.0012 - val_loss: 0.0011
Epoch 3/100
14/14 — 1s 50ms/step - loss: 0.0014 - val_loss: 0.0012
Epoch 4/100
14/14 — 1s 53ms/step - loss: 0.0011 - val_loss: 2.8362e-04
Epoch 5/100
14/14 — 1s 50ms/step - loss: 0.0016 - val_loss: 2.0498e-04
Epoch 6/100
14/14 — 1s 51ms/step - loss: 0.0013 - val_loss: 0.0025
Epoch 7/100
14/14 — 1s 54ms/step - loss: 0.0014 - val_loss: 1.5655e-04
Epoch 8/100
14/14 — 1s 48ms/step - loss: 9.4336e-04 - val_loss: 6.3167e-04
Epoch 9/100
14/14 — 1s 50ms/step - loss: 0.0011 - val_loss: 0.0027
Epoch 10/100
14/14 — 1s 51ms/step - loss: 0.0017 - val_loss: 0.0014
```

Рис. 6. Обучение нейронной сети

```
# Прогнозирование на тестовых данных
y_pred_lstm = model_lstm.predict(X_test)

# Вычисляем R^2 на тестовых данных
r2 = r2_score(y_test, y_pred_lstm)
print(f"R^2 на тестовых данных: {r2:.4f}")

# Прогнозирование на 10 дней вперед
last_window = scaled_data[-60:].reshape(1, 60, 1) # последние 60 значений для прогноза
forecast_10_days_lstm = []
for _ in range(10):
    y_forecast_lstm = model_lstm.predict(last_window)
    forecast_10_days_lstm.append(y_forecast_lstm[0][0])
    last_window = np.append(last_window[:, 1:, :], y_forecast_lstm.reshape(1, 1, 1), axis=1)

# Обратная трансформация прогноза
forecast_10_days_lstm = scaler.inverse_transform(np.array(forecast_10_days_lstm).reshape(-1, 1))
```

Рис. 7. Реализация прогноза на 10 дней

Среднеквадратичная ошибка (MSE) оказалась ещё более низкой – 0,0002, что ещё раз подтверждает высокую точность модели. Меньшие значения MSE означают, что модель минимизирует ошибки, особенно более значительные, которые могли бы существенно повлиять на прогноз.

В целом модель показывает отличные результаты как на тренировочных, так и на тестовых данных, и её можно считать высокоэффективной для решения задачи предсказания временного ряда. Модель может быть использована для дальнейших прогнозов, таких как предсказание на 10 дней вперёд, с уверенностью в точности предсказаний.

Литература

1. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница – SSA»: анализ временных рядов: учеб. пособие. СПб: С.-Петербург. гос. ун-т, 2004. 76 с.

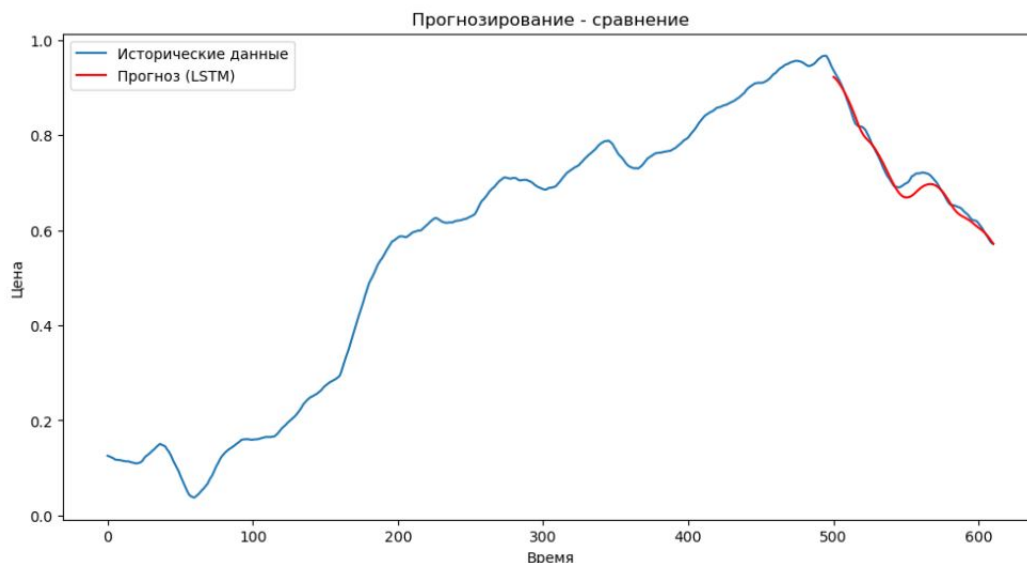


Рис. 8. Результат прогнозной функции

2. Главные компоненты временных рядов: «Гусеница-SSA» / под ред. Д. Л. Данилова, А.А. Жиглявского. СПб: Пресском, 1997.
3. Цыплаков А. Введение в прогнозирование в классических моделях временных рядов // Квантиль. 2006. № 1. С. 3–19.
4. Stratigakos A., Bachoumis A. Vita V., Zafriopoulos E. Short-Term Net Load Forecasting with Singular Spectrum Analysis and LSTM Neural Networks // Energies. 2021. Vol. 14. 10.3390/en14144107.
5. Duan J., Zuo H., Duan J., Chang M., Chen B. (2021). Short-term wind speed forecasting using recurrent neural networks with error correction // Energy. 2021. Vol. 217. 119397. 10.1016/j.energy.2020.119397.
6. Ye Zhang, Weide Li. SSA-LSTM neural network for hourly PM2.5 concentration prediction in Shenyang, China // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. 1780 012015

TIME SERIES FORECASTING MODEL BASED ON SINGULAR SPECTRAL ANALYSIS AND LSTM NEURAL NETWORK

A.D. Baydalin

Graduate student, e-mail: alexander.baydalin@gmail.com

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The article is devoted to the development of a model for predicting the company's share price using singular spectral analysis in combination with the LSTM neural network. The article suggests an approach to analyzing stock price time series based on the use of singular spectral analysis, which allows us to identify hidden patterns and trends in the data,

as well as eliminate noise, improving forecast accuracy. The technique involves decomposing a time series into several components, which contributes to a deeper understanding of price dynamics and increases the reliability of predictions. The experimental results showed the high efficiency of the proposed method in comparison with traditional statistical and machine analysis methods, which opens up new opportunities for optimizing investment strategies and analyzing financial markets.

Keywords: singular spectral analysis, time series, financial markets, data analysis, investment strategies, neural networks.

Дата поступления в редакцию: 24.12.2024

СИНТЕТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ: ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ

Т.Л. Салова

к.т.н., доцент, e-mail: salova@mail.ru

И.С. Суворов

магистрант, e-mail: ioannsuvr@yandex.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Синтетические данные стали ключевым инструментом в машинном обучении, тестировании программного обеспечения и защите приватности. Однако их генерация и применение сопряжены с проблемами качества, этики и технической сложности. Например, применение синтетических данных в социологии, в форме синтетических респондентов, с одной стороны, позволяет имитировать реальное поведение исследуемой аудитории, с другой стороны, не исключает проблему предвзятости. В данной статье анализируются основные вызовы, связанные с синтетическими данными, и предлагаются пути их решения, включая усовершенствование алгоритмов генерации, внедрение методов валидации и соблюдение этических норм.

Ключевые слова: синтетические данные, этические нормы, генеративно-состязательные системы, синтетические респонденты, трансформеры, генеративные нейронные сети.

В эпоху цифровой трансформации синтетические данные перешли из категории экспериментальных инструментов в разряд критически важных ресурсов для технологических инноваций. В отличие от данных, собранных эмпирическим путём, они создаются алгоритмически с использованием методов машинного обучения (например, генеративно-состязательных сетей), физического моделирования или стохастических процессов, что позволяет гибко управлять их объёмом, разнообразием и параметрами распределения. Подобные возможности делают их незаменимыми в сценариях, где доступ к реальным данным ограничен правовыми нормами (медицина, финансы), требует значительных временных затрат (автономные транспортные системы) или сопряжён с высокими рисками (кибербезопасность) [1].

Несмотря на растущий интерес к технологии, её повсеместное внедрение сдерживается фундаментальными проблемами. Во-первых, сохраняются вопросы к качеству синтеза: даже современные алгоритмы не всегда корректно воспроизводят скрытые зависимости в данных, такие как пространственно-временные корреляции в геоданных или причинно-следственные связи в клинических исследованиях. Во-вторых, сохраняется парадокс анонимности: комбинирование синтетических наборов с внешними источниками информации в ряде случаев позволяет реконструировать прототипы исходных записей, что ставит под угрозу концепцию «этичного

ИИ». В-третьих, генерация данных, адекватно отражающих сложные доменные особенности (например, многоуровневые социальные взаимодействия в метавселенных), требует не только мощных вычислительных ресурсов, но и междисциплинарных знаний в предметной области [2].

Целью настоящей работы является структурирование накопленного опыта в области синтетических данных через призму преодоления указанных ограничений. В статье систематизированы современные подходы к оценке качества синтеза, проанализированы кейсы неудачного применения технологии, а также предложена архитектура комплексного решения, объединяющего технические, методологические и регуляторные аспекты. Особое внимание уделено роли человекоцентричного дизайна в создании систем генерации, обеспечивающего баланс между утилитарной ценностью данных и соблюдением этико-правовых норм.

Главным ограничением синтетических данных остаётся их неспособность полноценно воспроизводить многомерные зависимости и нюансы, присущие реальным данным. Современные алгоритмы, включая классические генеративно-состязательные сети (GAN), часто фокусируются на аппроксимации глобальных статистических характеристик, таких как средние значения или дисперсия, но игнорируют локальные аномалии, редкие события и контекстуальные взаимосвязи. Например, при моделировании финансовых временных рядов простые GAN могут корректно генерировать тренды, но не учитывать «чёрных лебедей» – экстремальных рыночных событий, критически важных для стресс-тестирования. Это приводит к тому, что модели, обученные на таких данных, демонстрируют завышенную точность в контролируемых условиях, но терпят неудачи при столкновении с реальными сценариями [3].

Особую остроту проблема приобретает в областях с высокой стоимостью ошибки. В медицинской диагностике, где синтетические данные используются для расширения выборок редких заболеваний, некорректный синтез аномалий (например, артефактов МРТ-снимков при опухолях мозга) искажает представление модели о паттернах болезни. В результате система может пропускать ранние стадии онкологии или, напротив, генерировать ложноположительные диагнозы, ставя под угрозу персонализированное лечение.

Для количественной оценки качества применяется комбинация метрик:

1. Статистические расстояния (KL-дивергенция, расстояние Вассерштейна) – измерение расхождения между распределениями реальных и синтетических признаков и выявление систематических смещений.

2. Семантическая согласованность – анализ сохранения смысловых связей между переменными (например, корреляция между возрастом пациента и частотой определённых диагнозов).

3. Адверсарное тестирование – проверка, способна ли модель-классификатор отличить синтетические записи от реальных при их смешивании.

Тем не менее ни одна метрика не гарантирует абсолютной достоверности. Так, KL-дивергенция может «не замечать» локальных расхождений в хвостах распределений, а адверсарные методы чувствительны к переобучению тестовой модели. Поэтому валидация требует привлечения экспертов предметной области – радиологов, финансистов, социологов – для ручной проверки содержательной целостности

данных.

Даже тщательно сгенерированные данные несут риск деанонимизации при интеграции с внешними источниками. Например, синтетическая медицинская запись, содержащая уникальную комбинацию возраста, региона проживания и истории вакцинации, может быть сопоставлена с публичными демографическими базами, раскрывая прототип реального пациента. Это ставит под вопрос этичность использования технологии в конфиденциальных сферах без дополнительных защитных механизмов, таких как дифференциальная приватность или синтез на уровне агрегированных признаков [4].

Генерация высококачественных данных для сложных доменов (например, мультимодальные наборы, сочетающие текст, изображения и сенсорные сигналы) требует не только продвинутых алгоритмов, но и значительных вычислительных ресурсов. Тренировка моделей на базе трансформеров или диффузионных архитектур для создания реалистичных синтетических видеопоследовательностей может занимать недели даже на кластерах с GPU, что ограничивает доступ к технологии для небольших исследовательских групп.

Создание синтетических данных, несмотря на их потенциальную безопасность, сопряжено с серьёзными этическими и правовыми рисками. Одной из ключевых проблем остаются атаки на повторную идентификацию. Даже искусственно сгенерированные данные могут содержать скрытые закономерности, позволяющие восстановить исходную информацию о реальных людях. Правовое регулирование ужесточает требования к защите персональных данных. Регламенты GDPR (Общий регламент по защите данных ЕС) и HIPAA (Закон о переносимости и подотчётности медицинского страхования США) предъявляют строгие требования к анонимизации информации. Например, GDPR требует, чтобы данные не могли быть повторно связаны с конкретным человеком даже при использовании дополнительной информации. Это создаёт парадокс: для обучения реалистичных генеративных моделей необходимы детальные исходные данные, но их может нарушить принцип анонимности. В результате разработчикам приходится искать компромисс между качеством синтетических данных и юридическими ограничениями [5].

Синтетические данные, применяемые в социологии в форме синтетических респондентов, когда искусственный интеллект имитирует поведение исследуемой аудитории, используются для проверки базовых гипотез, предсказания реального поведения. И здесь существует проблема приватности, встроенной в технологии. Поэтому важно, чтобы исследования были этически обоснованными и научно достоверными. «При осторожном использовании эти технологии будут способствовать методологическим инновациям в социальных науках» [6, с. 67].

Отдельную проблему представляет воспроизведение уникальных комбинаций признаков. Синтетические данные, созданные на основе редких или уникальных случаев (например, пациентов с экзотическими заболеваниями или комбинациями генетических мутаций), могут косвенно идентифицировать конкретных людей. Если в реальной популяции существует только один человек с определённым набором характеристик, его синтетический «двойник» сохраняет прямую связь с оригиналом. Это особенно критично в медицинских исследованиях, где утечка подобных паттернов может привести к разглашению диагноза, генетических особенностей

или других конфиденциальных сведений.

Современные методы генерации синтетических данных, такие как диффузионные модели или архитектуры на основе трансформеров, требуют колоссальных вычислительных ресурсов. Например, обучение модели StyleGAN3, разработанной NVIDIA для создания фотореалистичных изображений, занимает более 300 GPU-часов даже на высокопроизводительных серверах с графическими процессорами уровня Tesla V100 [7]. Это связано с необходимостью обработки миллионов параметров и многократной оптимизации модели для достижения правдоподобности результатов.

Помимо аппаратных затрат, возникают сложности с обеспечением репрезентативности данных. Генеративные модели склонны воспроизводить системные смещения, присутствующие в обучающих наборах. Например, если исходные данные содержат дисбаланс по расовому или гендерному признаку, синтетические данные усилят эти перекосы, что может привести к дискриминационным последствиям в системах искусственного интеллекта. Для устранения этой проблемы требуются дополнительные этапы валидации и коррекции, что ещё больше увеличивает время и стоимость разработки.

Кроме того, поддержание конфиденциальности в процессе генерации требует интеграции специализированных методов, таких как дифференциальная приватность или федеративное обучение. Эти технологии добавляют «шум» в данные или распределяют вычисления между устройствами, чтобы минимизировать риски утечек. Однако их внедрение снижает точность моделей и усложняет процесс настройки, создавая дилемму между безопасностью и практической применимостью синтетических данных.

Современные подходы, такие как диффузионные модели (DDPM), работают по принципу поэтапного «очищения» данных от шума, что позволяет создавать высокодетализированные объекты. Например, в генерации изображений это помогает избежать артефактов вроде размытых границ или неестественных текстур. Трансформеры, в свою очередь, за счёт механизма внимания анализируют контекстные зависимости, что критично для последовательностей (текст, временные ряды) [8].

Для задач, требующих соблюдения физических законов, применяют гибридные архитектуры. Например, в симуляции жидкостей нейросеть обучается на уравнениях Навье – Стокса, а в генерации медицинских данных – на анатомических атласах. Это позволяет синтетическим данным сохранять научную достоверность.

Метрики качества моделей (F1, AUC-ROC) используются в схеме тренировки на-синтетике/тест-на-реальных. Если модель показывает близкие результаты на обоих наборах, данные считаются пригодными.

Для достижения неотличимости от реальных данных критически важны три аспекта.

Первый – контекстная достоверность, требующая адаптации генерации под специфику домена: тексты создаются через дообучение языковых моделей (GPT-4o, Claude) на целевых данных с последующим ручным устранением логических противоречий, а изображения генерируются в высоком разрешении (1024x1024+) с добавлением артефактов, имитирующих шум камеры или сжатие JPEG.

Второй принцип – динамическая вариативность, которая обеспечивает есте-

ственность за счёт внедрения контролируемой случайности: временные ряды обогащаются фликкер-шумом и «сбоями», аналогичными помехам датчиков, а изображения – вариациями освещения и ракурсов.

Третий элемент – бесшовная интеграция в экосистему, где синтетика смешивается с реальными данными (например, 30 % искусственных транзакций в финансовых выборках) и соблюдает стандарты метаданных (EXIF, ISO8601), что позволяет использовать их в единых аналитических пайплайнах. Комбинация этих подходов не только обеспечивает статистическую и семантическую близость к реальности, но и усложняет обнаружение алгоритмами-детекторами (GPTZero, Anti-Forgery Toolkit) за счёт имитации «неидеальностей», присущих естественным данным [9].

Синтетические данные стали ключевым инструментом в эпоху цифровой трансформации, позволяя преодолевать ограничения реальных наборов через внедрение диффузионных моделей, трансформеров и гибридных архитектур, интегрирующих предметные знания. Однако их применение требует строгой этической дисциплины – от внедрения дифференциальной приватности до аудита на смещения, – а также оптимизации вычислительных ресурсов через квантованные модели и облачные решения. Будущие направления зависят от баланса между инновациями (квантовые вычисления, DaaS-платформы) и регуляторной зрелостью, чтобы синтетика оставалась не заменой, а безопасной средой для ответственных экспериментов, где технологический прогресс не противоречит социальным и правовым нормам.

Литература

1. Копылов Д.А., Агешин Е.С., Хомутская О.В. Формирование синтетических данных для обучения системы компьютерного зрения // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. 2022. № 4. С. 18–19.
2. Пчелинцев С., Юляшков М. А., Ковалева О. А. Метод создания синтетических наборов данных для обучения нейросетевых моделей распознаванию объектов // Информационно-управляющие системы. 2022. № 3. С. 9–17.
3. Узких Г. Ю. Применение генеративно-состязательных сетей (gan) в обработке изображений // Вестник науки. 2024. № 8. С. 182–184.
4. Воронов Ю.П., Свиридов М.А Новые средства измерения межрегиональных различий // Интерэкспо Гео-Сибирь. 2019. № 1. С. 71–76.
5. Колесникова Г.И. Искусственный интеллект: проблемы и перспективы // Видеонаука. 2018. № 2. С. 34–38.
6. Драч В.Е., Торкунова Ю.В. Использование генеративного искусственного интеллекта для социологических исследований. // ДИСКУРС. 2025. Т. 11. № 1. С. 52–70.
7. Кумратова А. М., Борлакова М. А., Сайкинов В. Е., Когай И. Е. Использование диффузионных моделей для разработки приложений, генерирующих изображения на основе текстовых запросов // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2022. № 4. С. 66–70.
8. Гайнетдинов А.Ф. Исследование влияния трансформеров на улучшение генерации изображений // Universum: технические науки. 2024. № 4. С. 45–48.
9. Малышев И.О., Смирнов А.А. Обзор современных генеративных нейросетей: отечественная и зарубежная практика // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. 2024. № 1–2. С. 168–171.

SYNTETIC DATA: PROBLEMS AND SOLUTIONS

T.L. Salova

Ph.D. (Tech.), Associate Professor, e-mail: salova@mail.ru

I.S. Suvorov

Master's Degree Student, e-mail: ioannsuvr@yandex.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. Synthetic data has become a key tool in machine learning, software testing, and privacy protection. However, their generation and application are fraught with issues of quality, ethics, and technical complexity. For example, the use of synthetic data in sociology, in the form of synthetic respondents, on the one hand, allows imitating the real behavior of the audience under study, on the other hand, does not exclude the problem of bias. This article analyzes the main challenges associated with synthetic data and suggests ways to solve them, including improving generation algorithms, implementing validation methods, and complying with ethical standards.

Keywords: synthetic data, ethical norms, generative-adversarial systems, synthetic respondents, transformers, generative neural networks.

Дата поступления в редакцию: 16.05.2025

SVM В ОПРЕДЕЛЕНИИ АВТОРСТВА ТЕКСТА: АКТУАЛЬНОСТЬ И ПЕРСПЕКТИВЫ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Р.А. Светлов¹

студент, e-mail: roman.svetlov.dude@gmail.com

А.Н. Кабанов²

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: kabanovan@omsu.ru

¹Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

²Нижевартовский государственный университет, Нижневартовск, Россия

Аннотация. В последние годы, с ростом популярности алгоритмов глубокого обучения, возникает вопрос об актуальности дальнейших исследований методов машинного обучения, включая SVM. Данная статья анализирует недостатки, преимущества и перспективы SVM, выявленные в других исследованиях, и делает вывод о том, что исследования SVM для классификации текста ещё не потеряли своей актуальности.

Ключевые слова: SVM, классификация, обзор.

Введение

Определение авторства текста с помощью метода опорных векторов (SVM, Support Vector Machine) остаётся актуальным, несмотря на рост популярности методов глубокого обучения. Метод демонстрирует высокую точность (до 98,8 %) в задачах классификации текстов, сравнимую с результатами нейросетей (например, 98 % у свёрточной нейронной сети (CNN, Convolutional Neural Network)), особенно на коротких текстах и при ограниченных вычислительных ресурсах. Однако прямые сравнения затрудняются тем, что условия тестирования часто не стандартизированы.

Перспективы SVM связаны с работой с редкими признаками (например, гапками), интеграцией гибридных моделей (SVM + нейросети) и разработкой универсальных многомоделных классификаторов. Вместе с тем метод имеет ограничения: нелинейный рост вычислительных затрат, сложности в выборе ядра и худшая эффективность на сгенерированных текстах. Цель статьи – обобщить текущие данные о применимости SVM, его преимуществах и недостатках, сделать выводы об актуальности данного метода.

В статье рассматриваются данные, полученные из нескольких систематических обзоров классификации текстов, а также некоторых работ, посвящённых попыткам улучшить результаты классификации.

Проблема сопоставления данных по разным наборам и параметрам классификации

В различных исследованиях используются различные наборы данных с различными условиями тестирования, что не даёт провести прямое и точное сравнение, что очевидным образом является проблемой для данной статьи.

Среди используемых наборов данных: 20Newsgroup, Amazon Review, Bike Review, Blogger, Chinese Microblog, Counter, Gold, IMDb, PAN-12, Reuters, Spam-1000, Twitter, Webkb [1, с. 14], а также классическая литература и фанфикшен. О проблеме можно судить хотя бы по разбросу точности одного классификатора в различных наборах данных; для SVM, например, от 93 % на Reuters до 99 % на 20Newsgroup [1].

Актуальность

SVM демонстрирует высокую эффективность в задачах классификации текстов, сохраняя свою актуальность даже в условиях конкуренции с методами глубокого обучения. Согласно систематическому обзору [1], SVM является наиболее часто используемым алгоритмом в этой области (118 из 224 проанализированных работ). Как показано в таб. 1, его максимальная точность достигает 98,88 % на датасете 20Newsgroup – результат, который превосходит Naive Bayes (95,52 %).

Таблица 1. Лучшие показатели SVM в различных наборах данных

Датасет	Ассигасу (точность), %	Показатели других моделей, %
20Newsgroup	98,88	NB (95,52)
Reuters	97,60	NB (97,89), kNN (96,64)
Spam-1000	95,20	NB (92,70), ANN (85,30)
Reuters	95,10	Traditional SVM (82,76)
Reuters	93	kNN (53), NB (24)

Это подтверждает, что SVM остаётся мощным инструментом даже при сравнении с современными нейросетями (например, CNN, показывающей 98 % точности на датасете Twitter, как показано в табл. 2).

Ключевые преимущества SVM:

- Одни из лучших результатов точности.
- Хорошо работает с нелинейным распределением данных.
- Устойчивость к переобучению. В отличие от нейросетей, SVM имеет теоретически обоснованную способность минимизировать риск переобучения за счёт максимизации разделяющего гиперплоского зазора между классами.
- Скорость обучения. SVM обучается быстрее, чем глубокие архитектуры, такие как CNN или длинная цепь элементов краткосрочной памяти (LSTM, Long Short-Term Memory), особенно на средних по размеру датасетах. Это делает

Таблица 2. Максимальные уровни точности, полученные из лучших наборов данных

Датасет	Accuracy (точность), %	Алгоритм
Enron8715	86	ANN
Bug Report	47,60	RNN
EHR	88,30	RF
Yelp Review	84,20	SVM
Twitter	98	CNN
Bike Review	79,25	RF
20Newsgroup	98,88	SVM
Amazon Review	91	LSA
IMDb	88,87	LR
Ohsumed	54,10	LDA
Movie Review	86,50	SVM
Spam-1000	95,20	SVM
Reuters	97,89	NB
Webkb	91,30	SVM

его предпочтительным для сценариев с ограниченными вычислительными ресурсами.

Недостатки в методах глубокого обучения:

- Зависимость от качества и объёма данных: нейросети требуют больших размеченных датасетов, тогда как SVM эффективен даже на малых выборках.
- Высокие вычислительные затраты: обучение глубоких моделей. Например, модель BERT, Bidirectional Encoder Representations from Transformers («двухнаправленные презентации кодировщика для трансформеров») требует мощного GPU-ускорителя (графический процессор (GPU, Graphics Processing Unit)).

Перспективы

Несмотря на длительное изучение, SVM остаётся актуальным в задачах классификации текстов.

Одним из перспективных направлений является использование редких слов – гапков. [2].

В статье [3, с. 30] отмечается, что, по сравнению со статистическими методами, основанными на евклидовом расстоянии и косинусном сходстве, One-Class SVM + fastText может улучшить результаты до 15 %.

Статья [4] даёт информацию об использовании гибридных ансамблевых методов, состоящих из SVM и шести различных алгоритмов бустинга, причём SVM+CBC достиг точности 92 %.

В работе [5] рассматривается возможность повышения точности определения авторства текста за счёт интеграции данных о демографических характеристиках автора, таких как пол и возраст. Авторы предлагают архитектуру, в которой используется стек моделей: одна модель анализирует текст для классификации автора, а другая – предсказывает социально-демографические признаки, которые затем используются как дополнительные входные данные. Такой подход позволил повысить точность классификации в сравнении с более традиционными моделями.

В исследовании [6] представлено применение генетического алгоритма для отбора информативных признаков при решении задачи определения автора русскоязычного текста. В экспериментах обучение SVM на подмножестве из 400 наиболее информативных признаков позволило увеличить точность классификации на 10 % по сравнению с использованием всего исходного набора признаков. Генетический алгоритм помог сократить размерность пространства признаков, улучшить обобщающую способность модели и снизить вычислительную нагрузку. При этом глубокие нейронные сети показали более высокую точность (до 96 %), но требовали значительно больше времени на обучение.

Таким образом, перспективными направлениями улучшения SVM являются связанные с работой с редкими признаками и гибридными архитектурами. Однако большинство количественных оценок эффективности этих подходов требует дополнительной верификации.

Недостатки SVM

- Большие требования к ресурсам в процессе классификации. Нелинейный рост требований с ростом датасета.
- Сложности в подборе ядра под конкретную задачу [1, с. 9].
- SVM хуже нейросетей определяет сгенерированные тексты [3].

Заключение

В данной статье проведён обзор актуальности и перспектив SVM в конкуренции с методами глубокого обучения. Анализ показал, что, несмотря на хорошие результаты нейронных сетей, метод опорных векторов сохраняет не только актуальность, но и перспективы для дальнейших исследований. В то же время использование SVM имеет свои ограничения, часть которых можно решить гибридными моделями.

Литература

1. Palanivinayagam A., El-Bayeh C.Z., Damaševičius R. Twenty Years of Machine-Learning-Based Text Classification: A Systematic Review // *Algorithms*. 2023. Vol. 16, No. 5. Art. 236.
2. Faltýnek D., Matlach V. Hapax remains: Regularity of low-frequency words in authorial texts // *Digital Scholarship in the Humanities*. 2022. Vol. 37, Iss. 3. P. 693–715.
3. Fedotova A., Romanov A., Kurtukova A., Shelupanov A. Digital Authorship Attribution in Russian-Language Fanfiction and Classical Literature // *Algorithms*. 2023. Vol. 16, No. 1. Art. 13.

4. Khan T.F., Sabir M., Malik M.H., Ghous H., Ijaz H.M., Nadeem A., Ejaz A. Comparative Analysis of Hybrid Ensemble Algorithms for Authorship Attribution in Urdu Text // Journal of Computers and Intelligent Systems. 2024. Vol. 3, No. 1. P. 81–91.
5. Deutsch C., Paraboni I. Authorship attribution using author profiling classifiers // Natural Language Engineering. 2023. Vol. 29. P. 110–137.
6. Куртукова А.В., Романов А.С., Федотова А.М., Шелупанов А.А. Применение методов машинного обучения и отбора признаков на основе генетического алгоритма в решении задачи определения автора русскоязычного текста для кибербезопасности // Доклады ТУСУР. 2022. № 1.

SUPPORT VECTOR MACHINE IN TEXT AUTHORSHIP ATTRIBUTION: RELEVANCE AND PROSPECTS FOR FURTHER RESEARCH

R.A. Svetlov¹

Student, e-mail: roman.svetlov.dude@gmail.com

A.N. Kabanov²

Ph.D. (Phys.-Match.), Associate Professor, e-mail: kabanovan@omsu.ru

¹Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

²Nizhnevartovsk State University, Omsk, Russia

Abstract. In recent years, with the growing popularity of deep learning algorithms, the question arises about the relevance of further research into machine learning methods, including SVM. This article analyzes the disadvantages, advantages, and prospects of SVM identified in other studies and concludes that SVM-based text classification research has not yet lost its relevance.

Keywords: SVM, classification, review.

Дата поступления в редакцию: 14.06.2025

ОБЗОР И СРАВНЕНИЕ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОТРИСОВКЕ ОБЪЕКТОВ НА ДАЛЬНИХ РАССТОЯНИЯХ В UNITY 3D

В.В. Фирстов

аспирант, e-mail: ckontro@gmail.com

Омский государственный университет имени Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье представлен обзор современных методов оптимизации производительности при отрисовке объектов на дальних расстояниях в Unity 3D. Рассмотрены техники, такие как уровни детализации (LOD), окклюзионное отсекаание, использование билбордов, объединение объектов и GPU Instancing. Проведён анализ их эффективности на основании тестов с использованием сцены с открытым миром. Работа подчёркивает важность комплексного подхода к оптимизации для достижения высоких показателей производительности.

Ключевые слова: оптимизация производительности, разработка игр, Unity 3D.

Введение

Оптимизация производительности является ключевым аспектом разработки игр, особенно при создании больших и динамичных игровых миров. Особенности прорисовки объектов на дальних расстояниях могут значительно влиять на потребление ресурсов игры и конечного пользователя. Настоящая статья представляет обзор и анализ таких методов оптимизации, как LOD, окклюзионное отсекаание (встроенные инструменты Unity3D), билборды, объединение объектов и современные техники GPU Instancing.

1. Цель исследования

Основной целью настоящего исследования является выявление наиболее эффективных подходов для оптимизации сцен с открытым миром. Задача работы – изучить существующие методы оптимизации, произвести их тестирование в одинаковых условиях, сравнить полученные результаты.

1.1. Методы исследования

Анализировались следующие методы оптимизации:

- Уровни детализации (LOD) – автоматическое переключение между высоко- и низкополигональными моделями в зависимости от расстояния до камеры.

- Окклюзионное отсекаание (Occlusion Culling) – исключение из рендеринга объектов, закрытых другими элементами сцены.
- Билборды (Billboards) – замена сложных моделей двухмерными изображениями на дальних расстояниях.
- Объединение объектов (Static Batching) – уменьшение количества вызовов отрисовки путём группировки статичных объектов.
- GPU Instancing – рендеринг множества экземпляров одной модели с минимальными затратами ресурсов.

1.2. Спецификации оборудования, на котором проводилось тестирование

- ОС: Windows 11 Домашняя, 23H2.
- Процессор: AMD Ryzen 5 7500F.
- Видеокарта: NVIDIA GeForce RTX 4070 SUPER.
- Оперативная память: 32,0 ГБ, 6000 МГц.
- Unity 3D 2021.3.45f1.

2. Словарь терминов

- **Draw Calls** – последовательность команд, которые сообщают GPU, как следует обработать рендер.
- **Batches** – количество отрисовок, сделанных видеокартой в текущем цикле.
- **Tris** – количество отрисовываемых треугольников в мешах.
- **Verts** – количество отрисовываемых вершин в мешах.
- **Avg FPS** – среднее количество кадров в секунду.

3. Ход работы

3.1. LOD (Levels of Detail)

LOD (Levels of Detail) – это метод оптимизации, при котором используются разные версии модели с различной степенью детализации в зависимости от расстояния до камеры [1]. Чем дальше объект от игрока, тем более упрощённая модель используется, что снижает количество полигонов, которые необходимо обработать (рис. 1).

Основные преимущества LOD:

- Существенное снижение нагрузки на видеокарту.
- Для каждой модели можно задать свои уникальные настройки.

Однако LOD также обладает и недостатками:

- Для каждой модели необходимо создать несколько уровней детализации.
- Увеличение занимаемой памяти как в игре, так и в билде.

Для тестирования на сцену были помещены 180 объектов (рис. 2) с настроенным LOD. Проведём тест и посмотрим влияние данного метода оптимизации на производительность.

Результаты без LOD:

- Batches: 112074.

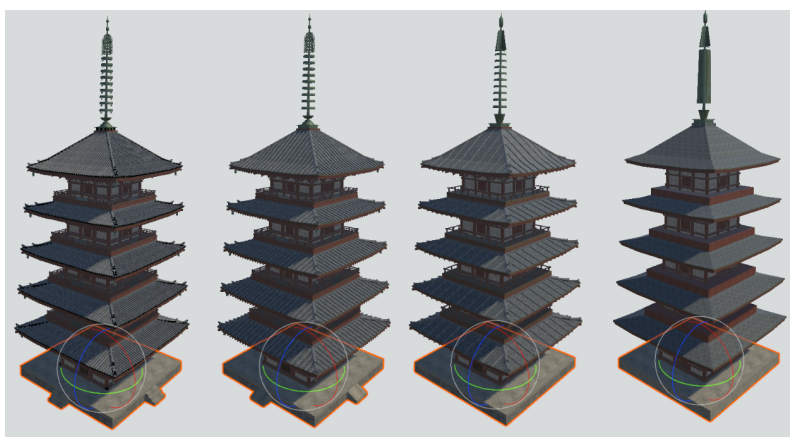


Рис. 1. Пример разных уровней LOD, применённых к одной модели

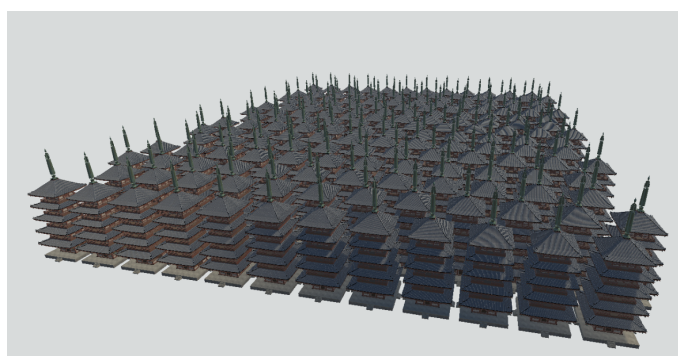


Рис. 2. Сцена, в которой проводятся тесты

- Tris: 178.2M.
- Verts: 492.2M.
- Avg FPS: 15–20.

Результаты с LOD на близком расстоянии:

- Batches: 31158.
- Tris: 31.4M.
- Verts: 84.5M.
- Avg FPS: 130.

Результаты с LOD на дальнем расстоянии:

- Batches: 13681.
- Tris: 2.1M.
- Verts: 5.2M.
- Avg FPS: 260–270.

Вывод: использование LOD позволяет уменьшить нагрузку на видеокарту и сильно увеличить производительность в зависимости от количества объектов на сцене и их расстояния от камеры. Метод отлично подходит для высокополигональных моделей.

3.2. Occlusion Culling

Occlusion Culling — это метод оптимизации, при котором движок не отрисовывает объекты, полностью закрытые другими объектами (рис. 3). В Unity эта функция встроена в инструменты рендеринга и позволяет исключить из обработки объекты, которые невидимы игроку, тем самым снижая нагрузку на графический процессор (GPU) и повышая производительность [2].

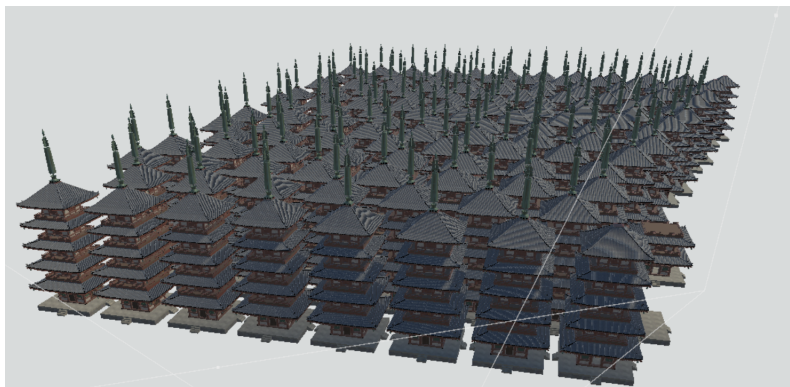


Рис. 3. Визуализация отсекаания объектов вне поля зрения камеры

Этот метод особенно полезен в сценах с большим количеством объектов, где многие из них могут быть скрыты стенами, другими моделями или элементами окружения, например, в городской застройке или в закрытых помещениях.

Основные преимущества Occlusion Culling:

- Снижение количества отрисовываемых объектов.
- Лёгкая настройка.

Недостатки Occlusion Culling:

- Неэффективность на открытых пространствах.
- Запекание может занять длительное время.
- Сложно использовать с динамическими объектами.

Для тестирования объекты были помечены как статические, и включено отсечение.

Результаты без Occlusion Culling:

- Batches: 112074.
- Tris: 178.2M.
- Verts: 492.2M.
- Avg FPS: 15–20.

Результаты с Occlusion Culling:

- Batches: 29411.
- Tris: 107.6M.
- Verts: 292.5M.
- Avg FPS: 35–40.

3.3. Billboards

Billboards – метод оптимизации рендеринга, при котором плоские изображения (спрайты) отображаются вместо сложных трёхмерных объектов (рис. 4). Эти изображения автоматически поворачиваются лицевой стороной к камере, создавая иллюзию объёма [3]. Биллборды используются для растительности, эффектов частиц и декоративных элементов на дальних расстояниях.

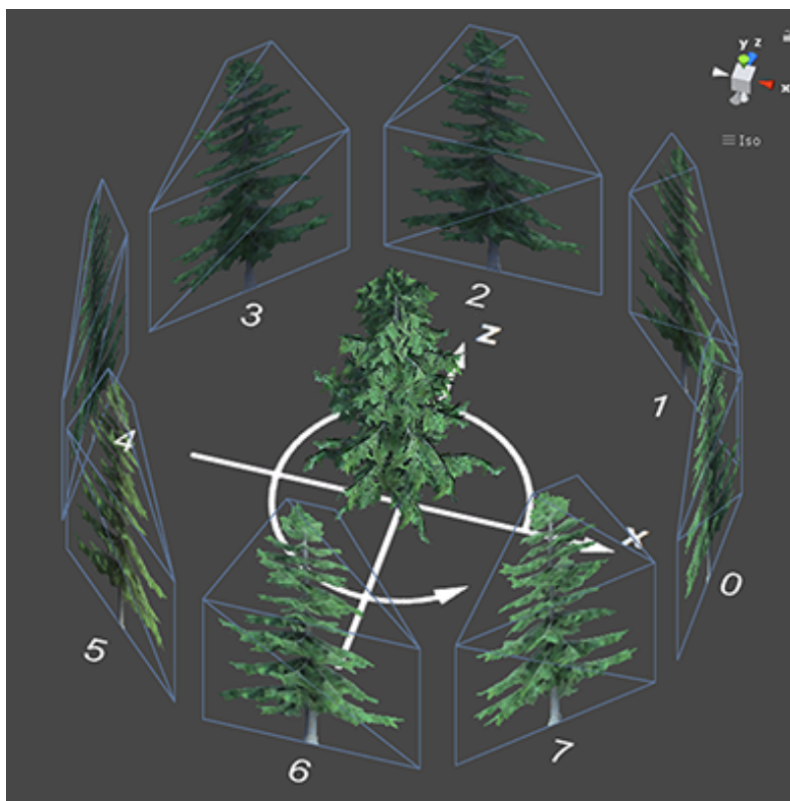


Рис. 4. Визуализация работы Billboards

Основные преимущества Billboards:

- Увеличение производительности: заменяют сложные модели на простые текстуры, уменьшая нагрузку на графический процессор (GPU).
- Экономия ресурсов: позволяют сократить количество полигонов и шейдерных вычислений.
- Универсальность: подходят для объектов, которые не требуют высокой детализации на расстоянии.

Недостатки Billboards:

- Ограниченная реалистичность: при близком приближении выглядит плоско и теряет качество.
- Отсутствие объёмных теней: биллборды не создают корректные тени как полноценные 3D-модели.
- Проблемы с перспективой: могут выглядеть неестественно при изменении углов обзора.

Результаты без Billboards:

- Batches: 112074.
- Tris: 178.2M.
- Verts: 492.2M.
- Avg FPS: 15–20.

Результаты с Billboards:

- Batches: 213.
- Tris: 4.1T.
- Verts: 8.3T.
- Avg FPS: 350–370.

3.4. Прочие методы

Существуют подходы, которые не сравнятся с другими инструментами, но также могут улучшить производительность.

3.4.1. Объединение объектов (Static/Dynamic Batching)

Объединение объектов (Static/Dynamic Batching) – слияние нескольких объектов в один меш для уменьшения количества вызовов рендеринга (Draw Calls).

Преимущества:

- Быстрая и лёгкая настройка, считается базовым методом оптимизации работы видеокарты.

Недостатки:

- Дополнительная нагрузка на CPU.
- Разные подходы для разных типов объектов (статичные/динамичные).

Данный способ на тестируемой сцене сократил количество Batches примерно в 2 раза, облегчив работу видеокарты, но при этом, из-за повышенной нагрузки на CPU, FPS также упал, а не увеличился.

3.4.2. GPU Instancing

GPU Instancing, её техника, позволяющая отрисовывать множество одинаковых объектов за один вызов рендеринга [4].

Преимущества:

- Эффективно для большого количества идентичных объектов.
- Меньшая нагрузка на CPU и RAM по сравнению с Static Batching.

Недостатки:

- Применимо не ко всем материалам.
- Меньшая эффективность при малом количестве объектов.

Данный способ снизил количество Batches более чем на 90 %, тем самым разгружая видеокарту, но из-за того, что нагрузка не перераспределялась на CPU, FPS также незначительно вырос.

3.4.3. Сравнение результатов

Сравнение результатов проводилось путём измерения показателей FPS и Batching на заранее заготовленной сцене, состоящей из 180 высокополигональных объектов. Для обеспечения сопоставимости результатов каждый метод оптимизации тестировался изолированно.

Тестирование началось с базового замера производительности без каких-либо оптимизаций, которое показало средний показатель в 17 FPS и 112,074 Batches. Затем последовательно проверялись различные методы: Level of Detail с тремя уровнями детализации для всех 3D-моделей, Occlusion Culling с автоматической разметкой зон видимости, замена зданий на билборды на дальних расстояниях, статический батчинг и GPU Instancing для материалов. Результаты по каждому из основных способов были получены через стандартные средства диагностики Unity 3D. График результатов тестирования представлен на рис. 5.

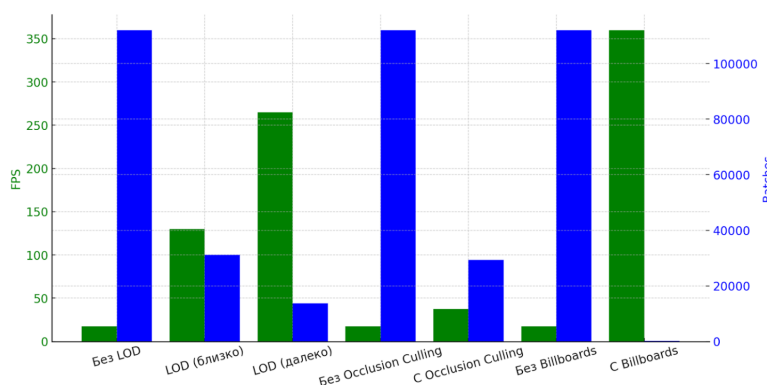


Рис. 5. Результаты работы различных методов оптимизации

Заключение

В данной статье был проведён обзор и сравнение основных методов оптимизации производительности при отрисовке объектов на дальних расстояниях в Unity 3D. Рассмотренные техники, такие как LOD, Occlusion Culling, Billboards, Static/Dynamic Batching и GPU Instancing, продемонстрировали свою эффективность в различных сценариях, особенно в контексте сцен с открытым миром.

LOD показал себя как высокопроизводительный инструмент для снижения нагрузки на GPU за счёт использования упрощённых моделей на дальних расстояниях, что значительно повысило средний FPS. Однако его настройка требует дополнительных временных затрат и увеличивает объём данных проекта.

Occlusion Culling эффективно снижает количество отрисовываемых объектов, особенно в сценах с большим количеством перекрывающихся элементов, но его применение ограничено в открытых пространствах и с динамическими объектами.

Billboards продемонстрировали высокую производительность, заменяя сложные 3D-модели на простые текстуры, что особенно полезно для растительности и деко-

ративных элементов. Однако их использование ограничено из-за потери реалистичности при близком рассмотрении.

Для проектов с открытым миром рекомендуется приоритизировать LOD и Billboards. В сложных сценах с множеством перекрытий (например, здания) Occlusion Culling становится обязательным. Оптимальная стратегия – комбинирование методов в зависимости от доминирующего типа объектов. При этом важно учитывать, что скорость и сложность внедрения различных методов оптимизации существенно различаются. Настройка LOD для ключевых объектов хоть и требует значительных временных затрат (в том числе на создание оптимизированных копий моделей), окупается стабильным приростом производительности. Billboards, напротив, настраиваются относительно быстро и идеально подходят для массовой растительности, но их реализация ограничивается определёнными типами объектов. GPU Instancing требует технической подготовки материалов, однако после правильной настройки практически не нуждается в дополнительном внимании. Наиболее трудоёмким остаётся Occlusion Culling – разметка зон видимости в сложных сценах может отнять много времени, но именно этот метод становится незаменимым для городских локаций с плотной застройкой. Static Batching хоть и прост в реализации, часто оказывается недостаточным для комплексной оптимизации.

Таким образом, при выборе методов следует учитывать не только их эффективность, но и соотношение трудозатрат к потенциальному выигрышу в производительности, отдавая предпочтение тем решениям, которые дают максимальный результат при минимальных усилиях в конкретных условиях проекта.

Литература

1. Дикинсон, К. Оптимизация игр на Unity 5: Практические советы и методы для повышения производительности приложений Unity3D. Бирмингем: Packt Publishing, 2015. 161 с.
2. How to Use Occlusion Culling in Unity - The Sneaky Way // TheGamedev.Guru. URL: <https://thegamedev.guru/unity-performance/occlusion-culling-tutorial/> (дата обращения: 15.01.2025).
3. Billboards in Unity (and How to Make Your Own) // GameDev Beginner. URL: <https://gamedevbeginner.com/billboards-in-unity-and-how-to-make-your-own/> (дата обращения: 16.01.2025).
4. Miroslav Martinovič. Unity3D Adventures in Creating Huge Outdoor Areas & Terrains. Part 4: The Real Adventure of GPU // Medium. URL: <https://midnight-shcode.medium.com/unity3d-adventures-in-creating-huge-outdoor-areas-terrains-part-4-the-real-adventure-of-gpu-cc265a423d53> (дата обращения: 19.01.2025).

REVIEW AND COMPARISON OF EXISTING METHODS FOR OPTIMIZING PERFORMANCE IN RENDERING DISTANT OBJECTS IN UNITY 3D

V.V. Firstov

Ph.D. Student, e-mail: ckontro@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The article provides an overview of modern methods for optimizing performance when rendering objects at long distances in Unity 3D. Techniques such as levels of detail (LOD), occlusion culling, billboard usage, object combining, and GPU Instancing are examined. Their effectiveness is analyzed based on tests conducted using an open-world scene. The study highlights the importance of a comprehensive optimization approach to achieve high-performance metrics.

Keywords: performance optimization, game development, Unity 3D.

Дата поступления в редакцию: 14.05.2025

Научный журнал

Математические структуры И моделирование

№ 3 (75)

Главный редактор
А.К. Гуц

Зам. гл. ред., выпускающий редактор
Д.Н. Лавров

Зам. гл. ред., технический редактор
Н.Ф. Богаченко

Корректор:
Ф.А. Абдурашитова

Перевод на английский язык в авторской редакции

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,
Омский государственный университет

E-mail: aguts@mail.ru, dmtrl@ya.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



Подписано в печать 07.10.2025. Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 15,8. Тираж 25 экз. Заказ № 265.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



25075 >