Математические структуры и моделирование
2025. № 3 (75). С. 49–65

УДК 517.926.4
DOI 10.24147/2222-8772.2025.3.49-65

ПРОБЛЕМЫ КАЧЕСТВА И НАДЁЖНОСТИ ДАННЫХ В СПРАВОЧНИКАХ ПО ТОЧНЫМ РЕШЕНИЯМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.Ю. Зайков[1]
охранник, e-mail: zaykov_tomsk@mail.ru
Е.В. Ворожцов[2]
д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

[1]Спортивная школа зимних видов спорта, Томск, Россия

[2]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Рассматриваются вопросы качества и надёжности данных, содержащихся в четырёх справочниках по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Продемонстрированы три примера ошибочных решений из справочников Камке и Зайцева – Полянина и указано, как исправить ошибки в решениях. Проанализирована структура метаданных в справочнике Камке и показаны её недостатки. На примерах ошибок, выявленных в некоторых решениях из справочников, показано, что ни один из них не является стопроцентно надёжным. Описан систематический подход, позволяющий кардинально улучшить качество справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход сводится к тотальной проверке всех решений с применением символьных вычислений на компьютере.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, справочники, ошибочные решения, качество данных.

Введение

Математическое моделирование широко применяется при исследовании разнообразных явлений и процессов в естественных науках. Обыкновенные дифференциальные уравнения часто используются в качестве сравнительно простых математических моделей. Если известно точное решение обыкновенного дифференциального уравнения, то это существенно облегчает исследование различных свойств явлений. Дело в том, что общие решения дифференциальных уравнений обычно содержат константы и свободные параметры. Варьируя их, можно обнаруживать такие свойства решения, как возрастание, убывание, осцилляции, периодичность, гистерезис и т. д.

При исследовании процессов, описываемых уравнениями или системами уравнений в частных производных, нередко удаётся использовать автомодельные переменные. Тогда система уравнений в частных производных переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что облегчает поиск точного решения системы. Таким образом, автомодельные решения расширяют область применимости справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений на уравнения в частных производных. Приведём ряд примеров задач в области теоретической и прикладной механики и вычислительной гидродинамики, где успешно применялись автомодельные переменные для получения точных решений систем уравнений в частных производных:

Пример 1. Рассмотрим два газа, разделённые перегородкой при $t < 0$. Каждый газ характеризуется своим давлением, плотностью, скоростью и температурой. В момент времени $t = 0$ перегородка убирается. Необходимо найти решение системы уравнений Эйлера, описывающих течение невязкого сжимаемого нетеплопроводного газа при $t > 0$. Эта задача называется задачей о распаде разрыва. В [1] показано, что её решение зависит только от одной автомодельной переменной $\xi_1 = x/t$, где x – пространственная координата. В [1] приведено полное аналитическое исследование задачи.

Пример 2. Уравнение Кортевега – де Фриза имеет решения типа бегущей волны (в частности, солитоны), которые зависят только от переменной $\xi_2 = x - \lambda t$, где $\lambda = \text{const}$ [2, 3].

Пример 3. Пограничный слой на плоской пластине. Вязкая жидкость течёт вдоль оси x, параллельной пластине. При этом у поверхности пластины возникает пограничный слой, являющийся функцией от единственной автомодельной переменной $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x}}$, где y – координата вдоль нормали к пластине [2, 3].

Пример 4. При сквозном расчёте задач динамики невязкого сжимаемого газа, которые содержат контактные разрывы, ширина зоны размазывания контактного разрыва растёт со временем пропорционально $t^{\frac{1}{r+1}}$, где r – порядок точности разностной схемы ($r \geqslant 1$). В [4] показано, что численное решение задачи о движении контактного разрыва является автомодельным и зависящим только от одной автомодельной переменной $\xi_4 = (x - u_0 t)/[\beta(\mu t)^{1/(r+1)}]$, где $\beta = \text{const}$; μ – постоянная, зависящая от шагов расчётной сетки в плоскости (x, t); u_0 – скорость движения контактного разрыва.

Большое количество других автомодельных решений уравнений математической физики приведено в [2]. Отметим, что автомодельные решения часто используются для тестирования новых компьютерных программ, созданных для приближённого решения уравнений в частных производных (см., например, [1, 3, 4]).

В изданных на русском языке справочниках [5, 6] по обыкновенным дифференциальным уравнениям приведено много точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков. Одна глава в [5] посвящена конкретным дифференциальным уравнениям второго порядка. В справочнике [6] даётся гораздо больше точных решений уравнений второго порядка. Имеются два американских перевода книги [6] (см. [7, 8]).

Наряду со справочниками по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений издано много справочников для биологов, медиков, металлургов, фармацевтов, химиков, экономистов и т. д. Все справочники имеют ряд общих проблем, а именно: проблемы качества данных, надёжности данных, релевантности данных, содержащихся в справочнике. Все эти проблемы давно являются предметом серьёзного изучения как за рубежом, так и в России. Всю информацию, содержащуюся в справочниках, можно разделить на два класса: метаданные и данные. Метаданные – это данные о данных: об их составе, содержании, статусе, происхождении, местонахождении, качестве, форматах, объёме, условиях доступа, авторских правах, верификации данных и т. п. [9].

Специалисты в областях, перечисленных выше, зачастую не являются специалистами по теории дифференциальных уравнений. Поэтому, как правило, основным источником получения сведений о дифференциальных уравнениях для них являются справочники. Применительно к справочникам по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, основными метаданными являются математические формулы, показывающие решаемые дифференциальные уравнения, а данными являются точные решения указанных конкретных уравнений. Кроме того, согласно [9], рассматриваемые справочники должны также содержать метаданные о происхождении каждого решения, включённого в справочник. Справочник [5] содержит эту информацию в виде ссылок на статьи, в которых опубликованы решения конкретных дифференциальных уравнений. С этой точки зрения данный справочник удовлетворяет современным требованиям информационных технологий к метаданным. Но в то же время он не удовлетворяет следующему важному требованию: в нём нет никаких сведений о том, как осуществлялась *верификация* каждого конкретного решения.

Проблемы качества и надёжности данных о точных решениях, которые содержатся в справочниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям, тесно связаны со следующими простыми вопросами: (i) имеются ли ошибки в решениях дифференциальных уравнений; (ii) как можно безопасно пользоваться справочниками при наличии знания о том, что в них есть ошибки?

И.Б. Шубинский [10, с. 3] даёт следующее определение ошибки: «Здесь под термином *ошибка* понимается: в широком смысле – непреднамеренное отклонение от истины или правил; в узком смысле – отклонение значения измеряемой или теоретически определяемой величины от ее настоящего значения». Термин *ошибка* в узком смысле можно пояснить следующим образом. Для численного решения задач математической физики, описываемых уравнениями с частными производными, широко применяются такие приближённые методы, как метод конечных разностей, метод конечного объёма и метод конечных элементов. В силу того, что все эти методы приближённые, они дают численное решение с ошибками, размер которых определяется точностью используемого метода. При этом даже результаты применения методов очень высокой точности при очень малых размерах шагов расчётной сетки всегда будут содержать ошибки в узком смысле из-за ограниченности основных параметров современных суперкомпьютеров – памяти и быстродействия.

Под *качеством* данных в [11] понимаются такие показатели текущего состояния данных, как полнота, точность, надёжность, релевантность и своевременность. Проблемы с качеством данных сигнализируют о наличии изъянов, снижающих перечисленные выше показатели. Данные полезны только тогда, когда они имеют высокое качество. Использование низкокачественных данных может привести к следующим последствиям:

- – Используя ошибочное решение дифференциального уравнения, инженер из

промышленности или научный сотрудник НИИ может принять ошибочное решение о том, в каком направлении вести дальше разработку технического устройства либо научное исследование. В результате, например, ракета может взорваться на старте.
- Неточный или полностью неверный анализ, ведущий к плохой репутации завода-изготовителя и/или увольнению работника, допустившего фатальную ошибку (из-за того, что он излишне доверился какому-то справочнику).
- Снижение продуктивности.
- В широком смысле, тормозится научно-технический прогресс в выбранном направлении.

Надёжность данных заключается в том, что они являются точными, полными, непротиворечивыми и не содержат ошибок [11]. Некоторые характеристики ненадёжных данных:
- Ошибочные данные. Они могут ввести в заблуждение и привести к крайне нежелательным последствиям.
- Дублирующиеся данные. Могут исказить результаты анализа.
- Нерелевантные данные. Не представляют ценности в контексте текущего анализа.

В монографии [10] имеется обсуждение проблемы качества и надёжности программного обеспечения (ПО). Даётся определение качества ПО. Описываются метрики качества и модели надёжности ПО. В свою очередь, можно говорить также о математическом обеспечении ПО для инженерных расчётов. Для математического обеспечения инженерных расчётов используются различные программные системы, например, MATLAB, MathCAD, метод конечных элементов. В математическое обеспечение могут входить и справочники по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, потому что точные решения нужны для проверки правильности (верификации) программной реализации численных методов для инженерных расчётов. Поэтому и с точки зрения качества и надёжности ПО крайне важно, чтобы справочники по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений не содержали ошибок.

Книга [12] целиком посвящена проблеме качества данных и её влиянию на финансовое благополучие как крупных корпораций, так и малых фирм. В этой книге даётся следующее определение качества данных: «Data quality is defined as the health of data at any stage in its life cycle» («Качество данных определяется как здоровье данных на любом этапе их жизненного цикла»).

В случае справочника по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений низкое качество предлагаемого решения может, в частности, состоять в следующем: формально решение правильное, но оно содержит корень из отрицательного числа, т. е. комплексное число. Но в естественнонаучных приложениях требуются в подавляющем большинстве случаев вещественные решения дифференциальных уравнений. К сожалению, такие примеры комплексных решений имеются в [5, 6]. Если авторы справочника не указывают, в каких случаях комплексное решение приводимо к вещественному виду, то для пользователя, который не является математиком, решение оказывается неприменимым (см. ниже обсуждение примера 2.282a из [5]).

Каким образом можно повышать качество данных – в нашем случае точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений? Важнейший способ проверки правильности точного решения – его подстановка в обыкновенное дифференциальное уравнение. Предположим, что нам требуется решение следующего дифференциального уравнения

$$F(x, y, y', y'') = f(x), \tag{1}$$

где $F(\cdot)$ и $f(x)$ – заданные функции. Предположим, что в справочнике [5] имеется решение $y(x)$ уравнения (1). Тогда перед его подстановкой в уравнение (1) сначала перепишем его в виде

$$F(x, y, y', y'') - f(x) = 0. \tag{2}$$

Затем решение $y(x)$, взятое из [5], подставляется в (2). Если в результате подстановки в правой части (2) появляется ненулевая невязка $r(x)$

$$F(x, y, y', y'') - f(x) = r(x), \tag{3}$$

то это указывает на ошибочность решения, данного в справочнике [5]. Тогда можно поступить следующим образом: найти другой справочник по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, например, справочник [6]. Если повезёт, то в [6] найдётся решение уравнения (1) в виде, отличном от решения, данного в [5]. Это решение тоже нужно подставить в (1), и если не появится ненулевая невязка $r(x)$ в (3), то, следовательно, решение из [6] правильное.

Подстановку точного решения в дифференциальное уравнение можно делать вручную, используя бумагу и ручку. Но этот процесс часто бывает весьма трудоёмким, что повышает вероятность человеческой ошибки [11]. Поэтому предпочтительнее использование символьных вычислений на компьютере. Как указано в [5], данный справочник является переводом с немецкого шестого издания 1959 г. В справочнике собраны решения, полученные различными авторами за период с XX в. по 1959 г.

Разработка системы компьютерной алгебры Macsyma [13] велась в США с 1968 г. Это была первая всеобъемлющая система символьной математики и одна из ранних систем, основанных на знаниях. Поэтому в 1950-е гг. у Э. Камке не было возможности проверять правильность решений, внесённых им в свой справочник, с помощью символьных вычислений на компьютере. К настоящему времени разработан ряд систем компьютерной алгебры (СКА) общего назначения. Из них отметим СКА Maple [14] и Mathematica [15]. Но чтобы успешно пользоваться ими, нужно сначала освоить языки, на которых написаны эти системы. Необходимо отметить, что если пользователь уже освоил по минимуму синтаксис языка СКА, он может непреднамеренно сделать ошибку при вводе и уравнения, и решения в программу на языке СКА. Поэтому пользователь должен тщательно проверять правильность тех уравнений и их решений, которые он ввёл в программу на языке СКА. Сам процесс символьных вычислений на современном настольном компьютере при подстановке решения в уравнение занимает менее одной секунды.

В настоящей работе проводится анализ некоторых точных решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка из [5, 6] и даются 10 новых частных точных решений дифференциальных уравнений второго порядка, которые отсутствуют в [5, 6]. Забегая вперёд, отметим, что ни один из справочников [5, 6] не является стопроцентно надёжным. Составители англоязычных справочников [7, 8] включили в свои справочники много примеров дифференциальных уравнений из справочника [5], поэтому эти справочники также не являются стопроцентно надёжными. Кроме того, во всех четырёх справочниках [5–8] нет метаданных о том, как осуществлялась верификация точных решений.

В формулах, где присутствует функция $e^{f(x)}$ с достаточно громоздким выражением для $f(x)$, ниже применяется обозначение $\exp[f(x)]$.

1. Анализ двух решений из справочника Камке

1.1. Пример 2.126б

Рассмотрим пример № 2.126б дифференциального уравнения второго порядка из [5, с. 393]:

$$xy''(x) + (x^{a+1} - a)y'(x) + bx^{2a+1}y(x) = 0, \quad a \neq -1. \tag{4}$$

Для этого уравнения в [5] предлагаются следующие решения:
Решение 1:

$$y(x) = C_1 e^{a_1 X} + C_2 e^{a_2 X} \quad \text{при } b \neq \frac{1}{4}, \tag{5}$$

где $X = (a+1)^{-1}x^{a+1}$ и a_1, a_2 – корни уравнения $a^2 + a + b = 0$, т. е.

$$a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}, \quad a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b},$$

тогда

$$\begin{aligned} y(x) \;&=\; C_1 \exp\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}\right)(a+1)^{-1}x^{a+1}\right] + \\ &+\; C_2 \exp\left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4b}\right)(a+1)^{-1}x^{a+1}\right], \; b \neq \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение 2:

$$y(x) = \exp\left[(a+1)^{-1}x^{a+1}\right](C_1 + C_2 x^{a+1}), \quad b = \frac{1}{4}. \tag{7}$$

Очевидно, что $\sqrt{1-4b} = 0$ в (6) при $b = \frac{1}{4}$, оба решения совпадают, и это общее решение

$$y_1(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}(a+1)^{-1}x^{a+1}\right], \quad b = \frac{1}{4},$$

является одним из решений случая $b = \frac{1}{4}$, но это не соответствует указанному у Э. Камке решению (7). Полагая, что в (7) не указана в экспоненте дробь $-\frac{1}{2}$, подставляем её в решение (7):

$$y(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}(a+1)^{-1}x^{a+1}\right](C_1 + C_2 x^{a+1}), \quad b = \frac{1}{4}. \tag{8}$$

Покажем теперь с помощью небольшой программы, написанной на языке СКА Maple [14], что решение (7), приведённое в [5], является ошибочным. В целях краткости мы опустили промежуточные результаты ввиду их громоздкости:

```
restart;
eq126б := x*ddy+(x^(a+1)-a)*dy+b*x^(2*a+1)*y;
b := 1/4;
y := exp(x^(a+1)/(a+1))*(C1+C2*x^(a+1));
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq126б);
```

$$\frac{3}{4}\frac{e^{\frac{x^{a+1}}{a+1}}(4ax^{2a+2}C_2+3x^{2a+2}C_1+3x^{3a+3}C_2+4C_2x^{2a+2})}{x}. \tag{9}$$

Выражение, заданное формулой (9), – это ненулевая невязка, появившаяся в правой части уравнения (4) после подстановки в его левую часть решения (7) из справочника Камке. Следовательно, решение (7) является ошибочным.

Теперь посмотрим, какой результат получится, если в (4) подставить наше исправленное решение (8):

```
restart;
eq126б := x*ddy+(x^(a+1)-a)*dy+b*x^(2*a+1)*y;
b := 1/4;
y := exp(-x^(a+1)/((a+1)*2))*(C1+C2*x^(a+1));
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq126б);
```

Видим, что в правой части уравнения (4) невязка остаётся нулевой после подстановки в левую часть нашего решения (8). Таким образом, оно оказывается правильным (и, по сути дела, уточнённым, обновлённым) решением. Ошибка исправлена. Попутно заметим, что уравнение (4) не включено в справочники [6] и [8].

На рис. 1 представлены кривые $y = y(x)$ ошибочного решения (7) из справочника Камке [5] и правильного решения (8). Обе кривые были получены при одинаковых значениях констант: $a = -0.5$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.5$. Видно, что кривые демонстрируют прямо противоположное поведение с ростом x: ошибочная кривая растёт, а правильная кривая убывает.

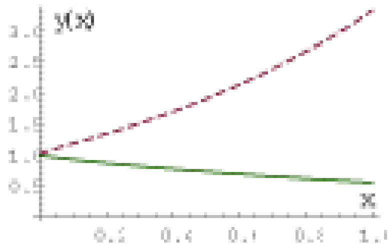

Рис. 1. Пример 2.126б. (— — —) – ошибочное решение (7) из справочника Камке; (——) – правильное решение (8)

1.2. Пример 2.282а

Рассмотрим пример № 2.282а дифференциального уравнения второго порядка из [5, с. 432]:

$$4x^2y''(x) + 4x^3y'(x) + (x^4 + ax^2 + b)y(x) = 0, \tag{10}$$

которое при $a = 2$ имеет решение

$$y(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1 x^{\frac{\sqrt{1-b}}{2}} + C_2 x^{-\frac{\sqrt{1-b}}{2}}\right), \tag{11}$$

и в [5] указано, что при $a = b = 1$ уравнение (10) имеет решение

$$y(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}(C_1 + C_2\ln(x)), \tag{12}$$

что не соответствует действительности. Подставив $b = 1$ в (11), получим совпадение решений

$$y_1(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}, \tag{13}$$

и (13) является частью решения (12). В [5] решение (12) ошибочно указано как отдельное, имеющее место при $a = b = 1$, т. е. не имеющее отношения к случаю $a = 2$. А решение (11), указанное в [5] для случая $a = 2$, является неполным, так как оно не учитывает случай $b = 1$. Поэтому предположим, что (12) является решением уравнения (10) не при $a = b = 1$, как указано в [5], а при $a = 2$, $b = 1$. Правильное изложение решения: при $a = 2$ уравнение (10) имеет решение:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1 x^{\frac{\sqrt{1-b}}{2}} + C_2 x^{-\frac{\sqrt{1-b}}{2}}\right), \quad b \neq 1, \\ y(x) &= \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{4}}(C_1 + C_2\ln(x)), \quad b = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Покажем теперь с помощью небольшой программы, написанной на языке СКА Maple [14], что решение (12), приведённое в [5], является ошибочным. В целях краткости мы опустили промежуточные результаты ввиду их громоздкости:

```
restart;
eq282a := 4*x^2*ddy + 4*x^3*dy + (x^4 + a*x^2 + b)*y;
a:= 1; b := 1;
y := (C1 + C2*ln(x))*exp(-x^2/4)*sqrt(x);
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq282a);
```

$$-(C1 + C2\ln(x))x^{5/2}e^{-x^2/4}. \tag{15}$$

Выражение, заданное формулой (15), это ненулевая невязка, появившаяся в правой части уравнения (10) после подстановки в его левую часть решения (12) из справочника Камке. Следовательно, решение (12) является ошибочным.

Теперь посмотрим, какой результат получится, если в (10) подставить наше исправленное решение (14):

```
restart;
eq282a := 4*x^2*ddy + 4*x^3*dy + (x^4 + a*x^2 + b)*y;
a:= 2; b := 1;
y := (C1 + C2*ln(x))*exp(-x^2/4)*sqrt(x);
dy := diff(y, x); ddy := diff(dy, x);
simplify(eq282a);
```

Видим, что в правой части уравнения (10) невязка остаётся нулевой после подстановки в левую часть нашего решения (14). Таким образом, оно оказывается правильным (и, по сути дела, уточнённым, обновлённым) решением. Ошибка исправлена. Попутно заметим, что уравнение (10) не включено в справочники [6] и [8].

Заметим, что решения (11) и (14) не остаются вещественными для любых вещественных значений величин x и b. Решение (11) остаётся вещественным только при $x > 0$ и $b \leqslant 1$. Решение (14) вещественно только при $x > 0$. Так что если пользователь хочет использовать решения (11) и (14) только как вещественные, ему необходимо учитывать ограничения на x и b. Эти ограничения не приводятся в явном виде в [5], поэтому пользователю самому нужно проявлять внимательность и осмотрительность при использовании рассматриваемых решений.

Итак, мы представили выше два примера ошибочных решений, которые мы нашли в справочнике Камке. Из этого рассмотрения вытекает следующий достаточно очевидный вывод: для того, чтобы кардинально улучшить качество справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, необходимо осуществить тотальную проверку **всех** решений с применением символьных вычислений с помощью СКА.

Как указывалось во Введении, автор справочника [5] не проверял правильность представленных им решений с помощью символьных вычислений на компьютере. Хотя в настоящее время имеются очень удобные СКА, до сих пор никем не предпринималась попытка тотальной проверки справочника [5]. В этих условиях исключается *доверие* к данным, содержащимся в справочнике [5]. Поэтому приходится подозревать наличие ошибки в *каждом* решении. Но если очень востребовано точное решение конкретного дифференциального уравнения, то что нужно делать, чтобы убедиться в правильности решения, предлагаемого в справочнике? Ответ на этот вопрос дан в предыдущем разделе.

2. Анализ решения из справочника Зайцева – Полянина

Рассмотрим пример № 185 дифференциального уравнения второго порядка из [6, с. 177]:

$$(ax^3+bx^2+cx)y''(x)+(nx^2+mx+k)y'(x)+(k-1)[(n-ak)x+m-bk]y(x) = 0. \quad (16)$$

Для этого уравнения в [6] предлагается следующее частное решение:

$$y_0(x) = x^{1-k}. \quad (17)$$

Постоянная c указана лишь при второй производной. Это означает, что решение обязательно должно зависеть от c, но в частном решении её нет. Рассмотрим вместо (17) частное решение несколько более общего вида

$$y_0(x) = C_1 x^{1-k}, \quad (18)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Подстановка решения (18) в (16) приводит к появлению ненулевой правой части:

$$\begin{aligned}&(ax^3 + bx^2 + cx)y_0''(x) + (nx^2 + mx + k)y_0'(x) + \\ &+(k-1)[(n-ak)x + m - bk]y_0(x) = C_1(c-1)(k-1)kx^{-k}.\end{aligned} \quad (19)$$

Из уравнения (19) следует, что при $c \neq 1$ его правая часть не равна нулю. Это означает, что решения (17) и (18) являются ошибочными при $c \neq 1$. Очевидно, что для исправления ошибки нужно изменить уравнение (16) следующим образом:

$$(ax^3+bx^2+x)y''(x)+(nx^2+mx+k)y'(x)+(k-1)[(n-ak)x+m-bk]y(x) = 0. \quad (20)$$

Решение (18) удовлетворяет уравнению (20) и при произвольной постоянной C_1, как это следует из (19). Но в [6] нет этого решения. Так что решение (18) можно рассматривать как подкорректированный вариант решения (17).

Если частное решение имеет настолько сложный вид, что равенство нулю невязки в правой части уравнения не очевидно, то можно применить другой способ доказательства ошибочности частного решения (17). Опишем его.

Мы увидели выше, что в уравнении или в решении допущена ошибка. Для исправления этой ошибки нужно правильно подобрать критерий, которым можно проверить правильность уравнения и решения одновременно. Таким критерием может быть наличие у уравнения (16) частного решения, не зависящего от коэффициентов a, b, c, n, m, что следует из (17). Тогда уравнение (16) распадается на следующие независимые уравнения:

$$a[x^3y''(x) + k(1-k)xy(x)] = 0, \quad (21)$$
$$b[x^2y''(x) + k(1-k)y(x)] = 0, \quad (22)$$
$$c[xy''(x)] = 0, \quad (23)$$
$$n[x^2y'(x) + (k-1)xy(x)] = 0, \quad (24)$$
$$m[xy'(x) + (k-1)y(x)] = 0, \quad (25)$$
$$ky'(x) = 0. \quad (26)$$

При этом $y_0(x) = Cx^{1-k}$ является общим решением уравнений (24) и (25) и частным решением уравнений (21) и (22). Это означает, что решение было указано верно, ошибка в уравнении.

Поскольку решения (23) и (26) не соответствуют (17), сложим их, получим

$$cxy''(x) + ky'(x) = 0 \quad (27)$$

и, подставив (17) в (27), получим $c = 1$, т. е. правильным написанием уравнения является уравнение (20).

3. Недостатки структуры метаданных в справочнике Камке

Справочники по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений имеют определённые недостатки, препятствующие использованию заложенного в них потенциала. Для авторов справочников этих недостатков практически невозможно было избежать. Например, при таком объёме материала невозможно было не допустить какие-нибудь ошибки. Но ошибки – это самый безобидный из недостатков. Ведь тот, кто собирается использовать конкретное дифференциальное уравнение для моделирования, например, физического процесса, может проверить, соответствует ли указанное в справочнике решение уравнению. И, если не соответствует, попробовать найти ошибку и исправить её.

Гораздо более худшим недостатком является неудобная систематизация (структура) материала в справочнике, препятствующая полноценному его использованию. Авторы справочников, как правило, не имеют возможности проводить научные исследования собранного ими материала, поскольку они и без того проделали огромный объём работы. Поэтому появление недостатков систематизации закономерно. Но такие недостатки, как будет показано ниже, могут не только препятствовать нахождению нужной специалисту информации, но и даже установить, есть ли в справочнике эта информация. И порождать многократное дублирование информации.

Полагаем, что недостатки систематизации наиболее ярко проявляются в разделах справочников о линейных дифференциальных уравнениях второй степени. Эти уравнения представлены в справочниках в виде либо однородных

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{28}$$

либо неоднородных уравнений

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x).$$

Если известно решение однородного уравнения, то способ решения неоднородного уравнения многократно описан в учебниках по дифференциальным уравнениям. И наличие их в справочниках излишне, лишь захламляет справочники. А неоднородных уравнений слишком много в [5], встречаются они и в [6].

В справочнике [5] решённые линейные дифференциальные уравнения второго порядка систематизированы таким образом, что справочник почти невозможно использовать. Это относится и к уравнениям с коэффициентами, являющимися рациональными, решения которых представимы в элементарных функциях.

Хорошо известно, что подстановкой

$$z(x) = \exp\left[\frac{1}{2}\int a_1(x)dx\right] y(x) \tag{29}$$

уравнение (28) можно привести к виду

$$z''(x) + b_0(x)z(x) = 0, \tag{30}$$

где

$$b_0(x) = a_0(x) - \frac{1}{4}[a_1(x)]^2 - \frac{1}{2}a_1'(x). \tag{31}$$

Предположим, что кому-то понадобилось решение уравнения вида (28). Подстановкой (29) он сводит его к уравнению вида (30), и если уравнения в справочниках представлены в виде (30), то ему достаточно сравнить коэффициенты (31), чтобы установить, есть ли в справочниках решение нужного ему уравнения.

Но в справочниках уравнения представлены в виде (28), и чтобы установить, приведено ли в них решение конкретного уравнения, сперва нужно эти уравнения (а их много) привести к виду (30), т. е. провести полноценное научное исследование лишь для того, чтобы воспользоваться справочниками для одного уравнения!

Это приводит и к такому недостатку справочников, что уравнения, сводящиеся к одному уравнению вида (30), приводятся в справочниках неоднократно. Это означает дублирование данных, что отнесено в [11] к проблеме надёжности данных (см. также выше Введение). Дублирующиеся данные могут присутствовать в справочниках потому, что составители справочника часто берут данные из различных источников. Поэтому при объединении данных в одном справочнике и появляются дубли данных.

Например, даже уравнение с постоянными коэффициентами, для которого достаточно одного примера, в [5] представлено следующими примерами (список неполный): № 2.1, с. 363; № 2.2, с. 364; № 2.3, с. 364; № 2.4, с. 364; № 2.5, с. 364; № 2.6, с. 364; № 2.7, с. 365; № 2.8, с. 365; № 2.9, с. 365; № 2.35, с. 375–376; № 2.36, с. 376, 2.41a, с. 377; № 2.47, с. 378; № 2.50, с. 379; № 2.51, с. 379; № 2.53, с. 379; № 2.55, с. 379; № 2.91, с. 385; № 2.100, с. 386; № 2.101, с. 386; № 2.107, с. 387, при a = 1, b = 2; № 2.125a, с. 392; № 2.174, с. 405; № 2.176, с. 405; № 2.177, с. 405; № 2.178, с. 405; № 2.179, с. 405; № 2.184, с. 406; № 2.202, с. 408; № 2.229, с. 411; № 2.243, с. 418; № 2.276, с. 431; № 2.277, с. 431; № 2.281, с. 432; № 2.322, с. 438; № 2.325a, сл. (в), с. 439; № 2.340, с. 442; № 2.366, с. 445; № 2.404, с. 450; № 2.405, с. 450; № 2.409, при a = 0, с. 453. В [6] указанное уравнение также дублируется, но в намного меньшей степени.

В [6] имеется уравнение

$$y''(x) + (-a^2x^2 + a)y(x) = 0. \tag{32}$$

Его точное решение

$$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x^2}\left(C_1 + C_2\int e^{ax^2}dx\right)$$

либо представлено, либо к нему сводится в следующих уравнениях: № 3, с. 157; № 5, с. 157; № 8, при $n = 1$, с. 157; № 14, с. 158; № 16, при $n = 1$, с. 158; № 17, при $n = 1$, с. 158; № 21, с. 159; № 23, с. 159; № 26, с. 159; № 29, при $n \in \{0, 1\}$, с. 159; № 45, при $n = 1$, $m = \{0, 1\}$, с. 160; № 47, при $n = 1$, с. 160; № 57, при $n = 1$, $m = \{0, 1\}$, с. 161; № 87, при $n = 2$, с. 164; № 139, при $n = 3$, $m = 0$, с. 170; № 230, при $n = 1$, $a = 2c$, с. 182; № 232, при $n = -1$, $m \in \{0, 1\}$, с. 182; № 232, при $n = 0$, $m = 1$, с. 182. В [5] уравнение (32) также дублируется, но меньше. И таких примеров можно привести много.

4. О неполноте данных в справочниках Камке и Зайцева – Полянина

4.1. Предварительное обсуждение

Как отмечалось во Введении, одним из атрибутов качества данных является полнота данных. С учётом примеров, рассмотренных выше в п. 1 и 2, можно выделить три вида неполноты данных:

1°. Некоторые дифференциальные уравнения, имеющиеся в справочнике [5], отсутствуют в справочнике [6]. И наоборот, в справочнике [5] нет некоторых дифференциальных уравнений из справочников [6–8]. Таким образом, ни один из справочников [5–8] не удовлетворяет критерию полноты данных.

2°. Для некоторых уравнений в справочниках [5–8] приводится только по одному частному решению, хотя в дифференциальных уравнениях присутствуют несколько постоянных коэффициентов. Но как раз другие недостающие частные решения могут быть востребованы пользователями.

3°. Для некоторых дифференциальных уравнений имеет место следующая ситуация: уравнение приводится, но о его решении сообщается следующее: «Решение неизвестно». Эту ситуацию можно назвать *пробелом*. В случае справочника [5] решения некоторых уравнений были неизвестны в период с XIX в. века по 1959 г. Но с 1959 г. по 2024 г. происходило дальнейшее развитие методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому можно надеяться, что некоторые из нерешённых уравнений уже можно решить. Например, в гл. 2 ч. 3 справочника [5] есть, по меньшей мере, два нерешённых уравнения № 2.15 и № 2.19. Мы сейчас покажем, что можно получить одно частное решение уравнения № 2.15, имеющего следующий вид:

$$y''(x) = (a^2x^{2n} - 1)y(x). \tag{33}$$

В частном случае $n = 1$ оказалось возможным получить точное решение данного уравнения с помощью СКА Mathematica [15] в следующем виде:

$$y(x) = C_1 D_{\nu_1}(z) + C_2 D_{\nu_2}(\mathrm{i}z).$$

Здесь $D_\nu(z)$ – функция параболического цилиндра (форма Уиттекера) [16, с. 494–496],

$$\nu_1 = (1 - a)/(2a); \quad z = \sqrt{2}\sqrt{a}x; \quad \mathrm{i} = \sqrt{-1}; \quad \nu_2 = (-1 - a)/(2a).$$

Пробелов в [5,6], например, в линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с рациональными коэффициентами, разрешимых в квадратурах, довольно много. Причём есть пробелы как в простых уравнениях, так и в сложных. Заполнение пробелов в справочниках не является темой данной статьи. Кроме того, максимальный размер статьи не позволяет это сделать. Поэтому заполнение пробелов методами, которыми владеет один из авторов, планируется в других статьях.

4.2. Новые частные решения уравнения (16)

Целью данного раздела является иллюстрация п. 2° из предыдущего пункта: показать, что можно найти в аналитическом виде некоторое количество новых частных решений уравнения (16) из [6]. Этих решений нет ни в одном из справочников [6–8].

Случай 1. $k = 0$. Из уравнения (19) получаем, что невязка равна нулю. Поэтому решением уравнения (16) является функция $y_1(x) = x$ согласно (17). Но представляет интерес следующий вопрос: сможет ли СКА Maple решить рассматриваемое уравнение в частном случае $k = 0$? Для ответа на этот вопрос была написана следующая короткая программа на языке СКА Maple:

```
eq185:= (a*x^3 +b*x^2 + c*x)*diff(y(x),x$2) +
        (n*x^2+m*x)*diff(y(x),x$1) - (n*x + m)*y(x);
dsolve(eq185,y(x));
```

СКА Maple выдала следующий ответ: $y(x) = C1 + C2 * x$. Чтобы проверить правильность этого ответа, подставим его в решаемое уравнение:

```
y(x):= C1+ C2*x; factor(eq185);
```

Получена ненулевая невязка: $-C1 * (n * x + m)$. Отсюда следует, что правильный ответ в виде $y(x) = C2 \cdot x$ получается при $C1 = 0$. Заметим, что решение $y(x) = C2 \cdot x$ совпадает с решением (18). Таким образом, правильность решения, выдаваемого СКА Maple, также нужно проверять его подстановкой в исходное уравнение.

Случай 2. $n = 2ac + a$, $m = 2bc + b$, $k = 2c$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = \frac{1}{x}$. Заметим, что в этом примере допускается наличие произвольного коэффициента c в решаемом уравнении (16).

Случай 3. $c = -k(b^2k + ak - bm)/[(bk - m)^2]$, $n = 2ak$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (bkx - mx - k)^{1-k}$.

Случай 4. $c = 0$, $n = (2ak^2 - b^2k - ak + b^2)/k$, $m = (b^2k + ak - b^2)/b$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (ax + b)^{-\frac{(k-1)(ak-b^2)}{ak}}$.

Случай 5. $n = 2ac/(c-1)$, $k = 2c/(c-1)$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)^{-\frac{1}{2(c-1)}} \exp\left[\frac{2bc-2cm+b+2m}{(c-1)\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right]$, $4ac > b^2$.

Случай 6. $m = 2(c + 1)b/(c - 1)$, $k = 2c/(c - 1)$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = (ax^2 + bx + c)^{\frac{2ac-cn+n}{2a(c-1)}} \exp\left[-\frac{b(4ac-cn+b+2a+n)}{a(c-1)\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right]$, $4ac > b^2$.

Случай 7. $n = a(ck + c + k)/c$, $m = bk(c + 1)/c$. Найдено следующее частное решение:

$$y_1(x) = (ax^2 + bx + c)^{\frac{1-k}{2}} \exp\left[\frac{b(1-k)}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right], \quad 4ac > b^2. \quad (34)$$

В этом же частном случае мы попытались решить уравнение (16) с помощью СКА Maple. Было получено огромное выражение для решения, но оно не имеет замкнутый вид, в отличие от нашего решения (34), а требует решения вспомогательного алгебраического уравнения с большими символьными выражениями для коэффициентов. Кроме того, предложенное решение содержит четыре функции $\ln(expr_i)$, где $expr_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ – некоторые громоздкие выражения. В целях краткости мы не приводим здесь Maple-решение. В действительности способ нахождения решения довольно простой, но, очевидно, он неизвестен разработчикам СКА Maple.

Мы также применили СКА Mathematica для решения этого же уравнения. Соответствующая программа на языке данной СКА имеет следующий вид:

```
m = b*k*(c + 1)/c; n = a*(c*k + c + k)/c;
eq = (a*x^3 + b*x^2 + c*x)*y''[x] + (n*x^2 + m*x + k)*y'[x]
   + (k - 1)*((n - a*k)*x + m - b*k)*y[x]
DSolve[eq == 0, y[x], x]
```

Символьные вычисления выполнялись на персональном компьютере с тактовой частотой 3 ГГц и оперативной памятью 4 Гб. Время счёта составило 7 мин. Решение было получено в следующем виде: $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, где $y_1(x)$ даётся формулой (34); C_1, C_2 – произвольные константы;

$$\begin{aligned} y_2(x) &= (ax^2+bx+c)^{\frac{1-k}{2}} \exp\left[\frac{b(1-k)}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right] \times \\ &\times \int_1^x \exp\left\{\frac{1}{c}\left[\frac{bc(k-1)}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2aK_1+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) - k\ln K_1 + \right.\right. \\ &+ \left.\left. \frac{1}{2}c(k-3)\ln(c+K_1(b+aK_1))\right]\right\} dK_1. \end{aligned}$$

Случай 8. $c = \frac{3}{2}$, $m = 4b$, $k = 3$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = \frac{1}{x}(2ax^2+2bx+3)^{\frac{4a-n}{2a}} \exp\left[\frac{b(6a-n)}{a\sqrt{b^2-6a}} \operatorname{arcth}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-6a}}\right)\right]$, $b^2 > 6a$.

Случай 9. $n = 4a$, $k = 2$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = x^{\frac{c-2}{c}}(ax^2+bx+c)^{\frac{1-c}{c}} \exp\left[\frac{2(2bc-cm+b)}{c\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right]$, $4ac > b^2$.

Случай 10. $n = ak + 2a$, $m = bk + b$. Найдено следующее частное решение: $y_1(x) = x^{\frac{c-k}{c}}(ax^2+bx+c)^{\frac{k(1-c)}{2c}} \exp\left[\frac{bk(1-c)}{c\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right]$, $4ac > b^2$.

Случай 11. $n = 4ac$, $m = 2bc + b$, $k = 2c$. Найдено следующее частное решение:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{x}(ax^2+bx+c)^{1-c}\left[C_1 \cos\left(2(c-1)\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right) + \right. \\ &+ \left. C_2 \sin\left(2(c-1)\operatorname{arctg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right)\right)\right], \quad 4ac > b^2. \end{aligned}$$

Во всех частных случаях, описанных выше, была осуществлена проверка правильности решений с помощью СКА Maple, она подтвердила правильность решений (соответствующие Maple-программы опущены для краткости).

Приведённые выше примеры новых частных решений конкретного дифференциального уравнения из [6] показывают, что имеющиеся СКА общего назначения содержат неполные наборы общих и частных решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Это указывает на целесообразность разработки специализированной СКА, которая аккумулировала бы в себе все аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков, содержащиеся во всех справочниках, опубликованных в мировой литературе. Это очень большая работа, которая требует и инвестиций, и организационных усилий. В то же время ныне существующие СКА вполне успешно могут использоваться для верификации точных решений, содержащихся в имеющихся справочниках.

5. Выводы

По итогам выполненного выше исследования четырёх известных справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений было сделано:

1. Продемонстрированы три примера ошибочных решений из справочников Камке и Зайцева – Полянина и указано, как исправить ошибки в решениях.

2. Проанализирована структура метаданных в справочнике Камке и показаны её недостатки.

3. На примерах ошибок, выявленных в некоторых решениях из справочников [5,6], показано, что ни один из этих справочников не является стопроцентно надёжным.

4. Описан систематический подход, позволяющий кардинально улучшить качество справочников по точным решениям обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот подход сводится к тотальной проверке всех решений с применением символьных вычислений на компьютере.

5. Представлено 10 новых частных решений двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Этих решений нет в справочниках [5–8].

Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
2. Степанова Л.В. Автомодельные решения уравнений математической физики. Самара: Изд-во «Самарский университет», 2010. 28 с.
3. Kiselev S.P., Vorozhtsov E.V., Fomin V.M. Foundations of Fluid Mechanics with Applications. Problem Solving Using Mathematica. Boston: Birkhäuser, 1999. 575 p.
4. Vorozhtsov E.V., Yanenko N.N. Methods for the Localization of Singularities in Numerical Solutions of Gas Dynamics Problems. New York; Berlin: Springer-Verlag, 1990. 406 p.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физико-математическая литература, 2001. 576 с.
7. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. Boca Raton: CRC Press, 1995. 720 p.
8. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. 2nd Ed. Boca Raton; London; New York: Chapman & Hall : CRC Press, 2002. 802 p.
9. Когаловский М.Р., Серебряков В.А. Метаданные. Большая российская энциклопедия. М.: Большая российская энциклопедия, 2022. URL: `https://bigenc.ru/c/metadannye-0b2c68?ysclid=m3mfvyb3pi652199835` (дата обращения: 17.10.2024).
10. Шубинский И.Б. Функциональная надёжность информационных систем. М.: ООО «Журнал Надежность», 2012. 296 с.
11. Mehreen K. 10 most common data quality issues and how to fix them. University of Cincinnati, November 22, 2022. URL: `www.kdnuggets.com` (дата обращения: 08.10.2024).
12. Moses M., Gavish L., Vorwerck M. Data Quality Fundamentals. Sebastopol, CA 95472. USA: Monte Carlo Data, Inc., 2022. 310 p.

13. Macsyma. URL: `https://ru.wikipedia.org/wiki/Macsyma` (дата обращения: 14.11.2024).
14. Maple User Manual. Canada: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2024. 348 p.
15. Wolfram S. The MATHEMATICA Book. 3rd Edition. Champaign, IL 61820. USA: Wolfram Media, 1996. 1403 p.
16. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

ON SOME NEW EXACT SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.Yu. Zaikov[1]
security officer, e-mail: zaykov_tomsk@mail.ru
E.V. Vorozhtsov[2]
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, Leading Research Scientist, e-mail: vorozh@itam.nsc.ru

[1]Tomsk Winter Sports School, Tomsk, Russia
[2]Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Abstract. The paper examines the quality and reliability of data contained in four reference books on exact solutions of ordinary differential equations. Three examples of erroneous solutions from the Kamke and Polyanin – Zaitsev reference books are presented and it is shown how to correct errors in the solutions. The structure of metadata in the Kamke reference book is analyzed, and its shortcomings are shown. Using examples of errors found in some solutions from the reference books, it is shown that none of these reference books is 100 % reliable. A systematic approach is described that allows for a radical improvement in the quality of reference books on exact solutions of ordinary differential equations. This approach boils down to a total check of all solutions using symbolic calculations on a computer.

Keywords: ordinary differential equations, reference books, erroneous solutions, data quality.

Дата поступления в редакцию: 11.12.2024