

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ НА ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА**

**А.А. Бугаенко<sup>1,2</sup>**

вед. инж.-мат., e-mail: BugaenkoAA@vniitf.ru

**И.Ю. Крутова<sup>1</sup>**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

<sup>1</sup>Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

<sup>2</sup>Российский Федеральный Ядерный Центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е.И. Забабахина, Снежинск, Россия

**Аннотация.** Для линеаризованной на точном решении полной системы уравнений Навье – Стокса при учёте действия сил тяжести и Кориолиса численно моделируется возникновение и развитие восходящих закрученных потоков разной интенсивности с использованием продува вверх по трубе. Численное решение линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса с поставленными начально-краевыми условиями описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Численный расчёт скоростных характеристик трёхмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в восходящем закрученном потоке, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа происходит в положительном направлении, обусловлена наличием в линеаризованной полной системе уравнений Навье – Стокса членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, ещё раз численно получила подтверждение схема возникновения восходящего закрученного потока.

**Ключевые слова:** система уравнений Навье – Стокса, сила Кориолиса, линеаризация, численное моделирование, продув.

### **Введение**

Согласно предложенной в монографии [1] схеме возникновения и устойчивого существования восходящего закрученного потока (ВЗП) основными причинами устойчивого функционирования ВЗП являются: существование достаточно длительного по времени восходящего потока воздуха; вращение Земли, которое через действие силы Кориолиса придаёт существенную окружную скорость частицам воздуха в придонной части ВЗП. В статье описываются численные исследования по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части ВЗП с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу вверх. Исходя из результатов экспериментов, весьма

интересно численно смоделировать возникновение и развитие ВЗП именно с использованием продува вверх по трубе. Поэтому далее в этой статье описываются результаты численных расчётов газодинамических параметров: плотности, температуры, включая скоростные характеристики трёхмерных нестационарных восходящих закрученных течений газа определённого масштаба, вызванных вертикальным продувом. Численный расчёт подобных течений газа позволяет дать конкретные предложения и рекомендации по возможному проведению крупномасштабного эксперимента по закрутке больших масс воздуха.

## 1. Линеаризованная полная система уравнений Навье – Стокса

Полная система уравнений Навье – Стокса в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, линеаризованная на точном решении (однородном покое)? имеет следующий вид [1–6]:

$$\begin{cases} \rho_t + (u_x + v_y + w_z) = 0, \\ u_t + \frac{\rho_x}{\gamma} + \frac{T_x}{\gamma} = av - bw + \mu_0 \left( u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right), \\ v_t + \frac{\rho_y}{\gamma} + \frac{T_y}{\gamma} = -au + \mu_0 \left( \frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right), \\ w_t + \frac{\rho_z}{\gamma} + \frac{T_z}{\gamma} = bu - g + \mu_0 \left( \frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right), \\ T_t + (\gamma - 1)(u_x + v_y + w_z) = \kappa_0 (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$  – плотность газа;  $T$  – температура газа;  $(u, v, w)$  – вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси  $Ox, Oy, Oz$ ;

$$\Omega = (0; \Omega_2; \Omega_3), \quad \Omega_2 = \Omega \cos \psi, \quad \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

– вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси;  $\psi$  – широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат  $(x, y, z)$ , вращающейся вместе с Землёй;  $a = 2\Omega_3$ ;  $b = 2\Omega_2$ ;  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ ;  $\mu_0, \kappa_0$  – постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности;  $g = \text{const} > 0$  – ускорение свободного падения.

Благодаря наличию в правых частях уравнений движений – второго, третьего и четвёртого уравнений системы (1) – слагаемых, отвечающих за присутствие ускорения Кориолиса, в поток газа вносится дополнительный внешний импульс. Именно он и приводит к закрутке вязкого теплопроводного газа в придонной части вертикального теплового восходящего потока.

В системе (1) при введении безразмерных переменных масштабные значения связаны следующими соотношениями [1–5]:

$$u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}} = c_{00}, \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}, \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}, \quad e_{00} = c_{v0}T_{00},$$

где  $\gamma = 1 + R/c_{v0}$ ,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $c_{v0}$  – удельная теплоёмкость. Следовательно, за масштабные значения скорости, давления и внутренней

энергии выбраны соответственно скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами  $\rho_{00}, T_{00}$ . В качестве масштабного значения скорости берётся значение  $u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3}10^3$  м/с, близкое к значению скорости распространения звука в воздухе при стандартных условиях, т. е. при  $\rho_{00} = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>,  $T_{00} = 288$  К:

Постоянные безразмерные значения коэффициентов вязкости  $\mu_0$  и теплопроводности  $\kappa_0$  определяются следующими соотношениями

$$\mu_0 = \frac{4\mu_*}{3\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}r_{00}},$$

где  $\mu_*, \kappa_*$  – размерные значения постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Для воздуха  $\gamma = 1,4$ , тогда  $\kappa_0 \approx 1,46\mu_0$ .

## 2. Конечно-разностная аппроксимация линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса и начально-краевых условий

Для расчёта нестационарных трёхмерных течений в качестве расчётной области принимается прямоугольный параллелепипед, в котором строится равномерная прямоугольная сетка. Для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса при учёте действия силы Кориолиса и силы тяжести строится следующая разностная аппроксимация. Для аппроксимации производной по временной переменной используются значения функции с двух последовательных временных слоёв. А для аппроксимации производных по пространственным переменным используются центральные разности значений функций с предыдущего временного слоя:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_{i,j,k}^{n+1} - f_{i,j,k}^n}{\Delta t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - f_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} \approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - f_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z}, \quad (3)$$

где под  $f$  подразумеваются проекции вектора скорости на декартовы оси, а также плотность и температура газа

$$f = (\rho, T, u, v, w).$$

Вторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &\approx \frac{f_{i,j,k+1}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}. \end{aligned}$$

Смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \approx \frac{f_{i+1,j,k+1}^n - f_{i-1,j,k+1}^n - f_{i+1,j,k-1}^n + f_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \approx \frac{f_{i,j+1,k+1}^n - f_{i,j-1,k+1}^n - f_{i,j+1,k-1}^n + f_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}.$$

Использование формул (4)–(5) подразумевает, что расчёт трёхмерного нестационарного течения ведётся по явной схеме переходом с очередного  $n$ -го временного слоя на следующий  $(n + 1)$ -й временной слой с постоянным заданным шагом. При этом по пространственным переменным используется равномерная прямоугольная сетка с постоянными заданными шагами  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  соответственно.

Разностное уравнение для вычисления плотности газа во внутреннем узле  $(i, j, k)$  расчётной области:

$$\frac{\rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = 0. \quad (4)$$

Аналогично для второго уравнения системы (1):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} = & av_{i,j,k}^n - bw_{i,j,k}^n + \\ & + \mu_0 \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j+1,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{u_{i,j,k+1}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i+1,j+1,k}^n - v_{i-1,j+1,k}^n - v_{i+1,j-1,k}^n + v_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x \Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления второй компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} = & -av_{i,j,k}^n + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i+1,j,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{v_{i,j,k+1}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j+1,k}^n - u_{i-1,j+1,k}^n - u_{i+1,j-1,k}^n + u_{i-1,j-1,k}^n}{4\Delta x \Delta y} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y \Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления третьей компоненты вектора скорости:

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i,j,k}^{n+1} - w_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + \frac{1}{\gamma} \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} = bu_{i,j,k}^n + \\ & + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i+1,j,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \mu_0 \frac{3}{4} \frac{w_{i,j+1,k}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + m\mu_0 \frac{w_{i,j,k+1}^n - 2w_{i,j,k}^n + w_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{u_{i+1,j,k+1}^n - u_{i-1,j,k+1}^n - u_{i+1,j,k-1}^n + u_{i-1,j,k-1}^n}{4\Delta x\Delta z} + \\ & + \mu_0 \frac{1}{4} \frac{v_{i,j+1,k+1}^n - v_{i,j-1,k+1}^n - v_{i,j+1,k-1}^n + v_{i,j-1,k-1}^n}{4\Delta y\Delta z}. \end{aligned}$$

Разностное уравнение для вычисления температуры газа:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + (\gamma - 1) \left( \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^n - w_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} \right) = \\ & = \kappa_0 \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{(\Delta x)^2} + \kappa_0 \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{(\Delta y)^2} + \\ & + \kappa_0 \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{(\Delta z)^2}. \end{aligned}$$

Исходя из данных проведённых экспериментов, математическое моделирование вертикального продува осуществляется заданием вертикальной составляющей скорости газа в центре верхней грани расчётной области (рис. 1) в виде функции  $w(t) = M * (1 - e^{-10*t})$ , описывающей постепенное увеличение со временем вертикальной скорости продува от 0 до  $M$ .

За начальные условия принимается набор функций

$$\rho = \rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \nu = \frac{\gamma g}{k}, \quad u = 0, v = 0, w = 0,$$

$$T = 1 - kz, k = \frac{lx_{00}}{T_{00}}, l = 0,0065 \frac{K}{m},$$

поскольку они являются точными решениями полной системы уравнений Навье – Стокса и описывают стационарные газодинамические параметры газа, покоящегося в поле силы тяжести, когда плотность и температура зависят только от высоты.

Граничные условия для искоемых пяти функций выбираются в предположении, что газ из расчётной области может выходить только через ту часть верхней грани, где осуществляется продув, а входить только через боковые грани. Все компоненты вектора скорости на четырёх боковых гранях рассчитываются из условия непрерывности. Это означает, что воздух может пересекать все боковые граничные поверхности расчётной области. В этом случае краевые условия для искоемых функций задаются с помощью линейной интерполяции значений функции из внутренней части расчётной области на её границу.

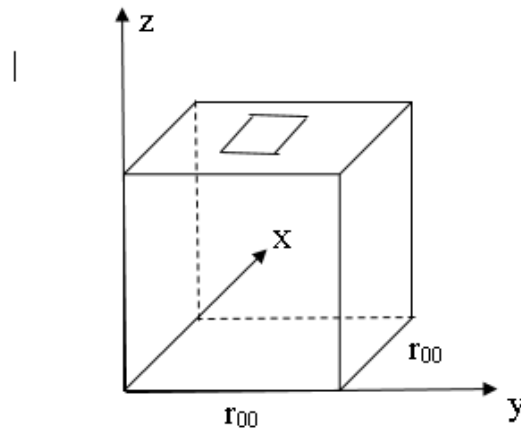
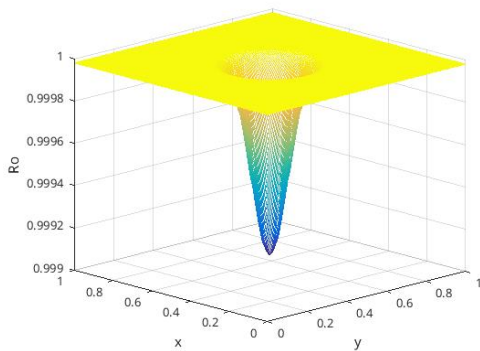
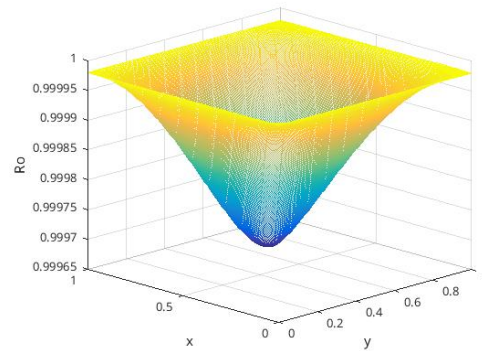


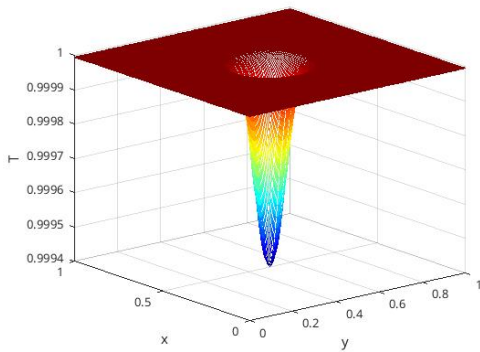
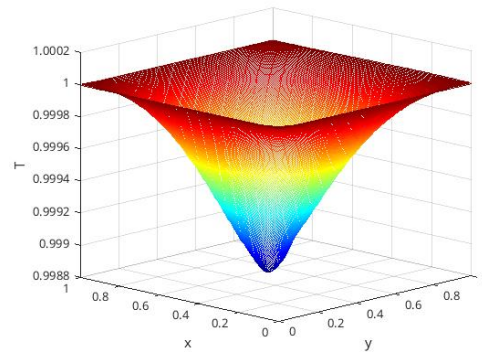
Рис. 1. Расчётная область

Рис. 2. Плотность газа при  $t = 0,1$  сРис. 3. Плотность газа при  $t = 30$  с

### 3. Численное моделирование течений газа в ВЗП малых масштабов

Расчёты течений газа в малых ВЗП проводились при масштабном значении расстояния  $r_{00} = 10$  м, масштабном значении времени  $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0,03$  с, разностным шагом по трём пространственным переменным  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,005$  и шаге по времени  $\Delta t = 0,001$ . Через квадратное отверстие размером  $0,1 \times 0,1$  в центре верхней грани расчётной области задаётся вертикальная скорость течения газа при  $M = 0,003$ . На рис. 2, 3 представлены результаты расчётов плотности газа на высоте  $0,025$  (размерное значение  $0,25$  м) для двух различных моментов расчётного времени.

Плотность газа по периметру расчётной области сохраняется постоянной и равной значению плотности стационарного распределения. В начальные моменты времени происходят колебания плотности в четвёртом десятичном знаке, а с течением

Рис. 4. Температура газа при  $t = 0,1$  сРис. 5. Температура газа при  $t = 30$  с

времени амплитуда колебаний плотности постепенно уменьшается, и наблюдается плавное понижение плотности в центре расчётной области. При увеличении времени расчёта процесс изменения плотности плавно выходит на стационарный режим. Поверхность плотности газа приобретает вид воронки с пониженной плотностью в центре расчётной области.

На рис. 4, 5 представлены результаты расчётов температуры газа на той же высоте для тех же моментов расчётного времени.

Несмотря на продув газа через верхнее отверстие, в результате численного решения линеаризованной полной системы уравнений Навье — Стокса (ПСУНС) отмечается понижение температуры в центре расчётной области под отверстием продува. Периферийное же значение температуры соответствует постоянному значению начального стационарного распределения. Следует отметить, что так же, как и для плотности, видны незначительные изменения температуры в начальные моменты времени счёта, которые постепенно исчезают при выходе процесса на стационарный режим.

Общим в поведении термодинамических характеристик является то, что по мере приближения к центру расчётной области прослеживается их осевая симметрия. Ось симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчётной области и совпадает с центром отверстия продува газа через верхнюю плоскость расчётного параллелепипеда.

На рис. 6 представлены в виде поверхностей результаты расчётов первой компоненты скорости газа на высоте 0,25 м для четырёх расчётных моментов времени.

В начальные моменты времени счёта (рис. 6 а) на общем фоне нулевых по значению скоростей в центре расчётной области возникают зоны, в которых  $x$ -е компоненты скорости отличны от нуля и противоположны по знаку. Такое распределение скоростей означает встречное движение частиц газа в центральной области расчётного параллелепипеда. Стрелками на рисунках помечены направления движения частиц газа. Ясно, что в начальный момент времени пока нет никакой закрутки газа. В последующий момент расчётного времени (рис. 6 б) происходит заметное смещение областей с положительными и отрицательными значениями  $x$ -й компоненты скорости. Такое пространственное перераспределение рассматриваемой компонен-

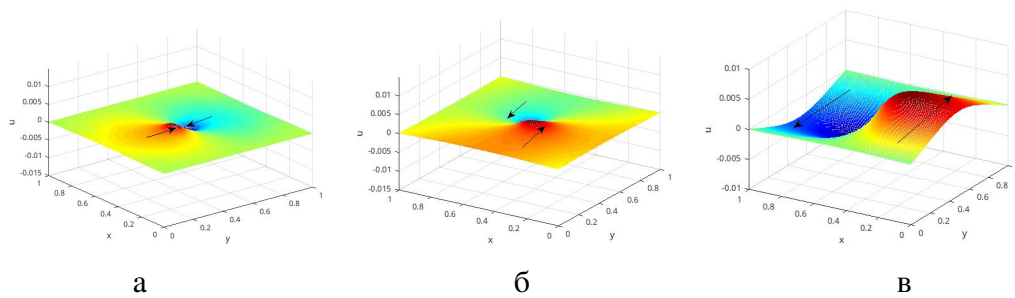


Рис. 6. Первая компонента вектора скорости: а –  $t = 0,5$  с; б –  $t = 2$  с; в –  $t = 30$  с

ты скорости частиц газа означает, что вблизи геометрического центра расчётной области возникают встречные и разведённые в пространстве потоки газа, что равносильно возникновению вокруг вертикальной оси закрученного в положительном направлении движения частиц газа.

На рис. 6 в такое пространственное перераспределение областей с противоположными по знаку компонентами частиц газа усиливается. Причём процесс сопровождается увеличением модулей скоростей и увеличением размеров этих областей, т. е. закрутка газа в положительном направлении усиливается. На момент расчётного времени 30 с (рис. 6 в) видно, что распределение областей с противоположными по знаку значениями скоростей полностью завершилось и продолжается рост абсолютных значений скоростей вплоть до выхода на стационарный режим течения. Другими словами, закрутка газа полностью сформировалась, и происходит только её усиление с точки зрения увеличения скоростей течения.

Вторая компонента скорости имеет такие же особенности изменения от времени, поэтому её описание здесь не приводится.

Особенностью в поведении вертикальной компоненты скорости частиц газа (рис. 7) в расчётной области является близость её значений к нулю во всех периферийных областях. В области продува вертикальная скорость постепенно растёт в соответствии с законом продува и в сечении повторяет квадратный контур отверстия продува.

На рис. 8 представлены результаты трёхмерных расчётов мгновенных линий тока частиц газа в области, близкой к вертикальной части ВЗП.

Видно, как постепенно происходят закрутка газа вблизи нижней плоскости расчётного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП. Следует отметить, что мгновенные линии тока были построены исходя из рассчитанных составляющих скорости во всех узлах расчётной области и их количество специально ограничено для большей наглядности. Высота, с которой начинался процесс построения линий тока, составляла порядка 0,0001 в безразмерных единицах. Поэтому можно считать, что построенные мгновенные линии тока начинаются практически с подстилающей поверхности. Сформировавшаяся же вертикальная часть, которую видно на рисунках, представляет собой аналог (численную модель) хобота реального природного вихря.

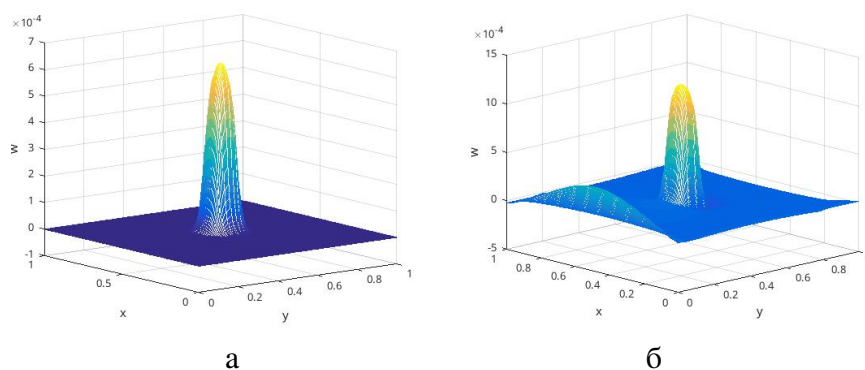


Рис. 7. Третья компонента скорости: а –  $t = 0,1$ ; б –  $t = 30$  с

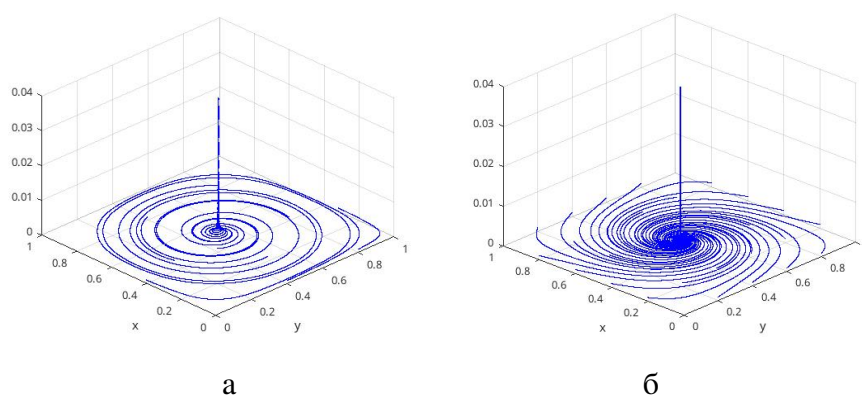


Рис. 8. Линии тока: а –  $t = 0,5$  с; б –  $t = 1$  с

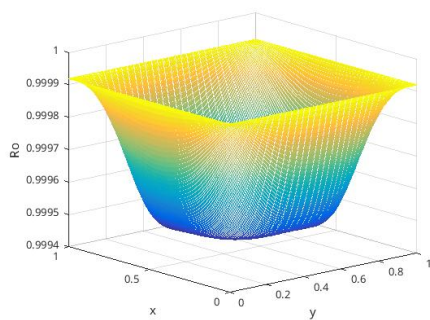


Рис. 9. Плотность газа при  $t = 0,5$  с

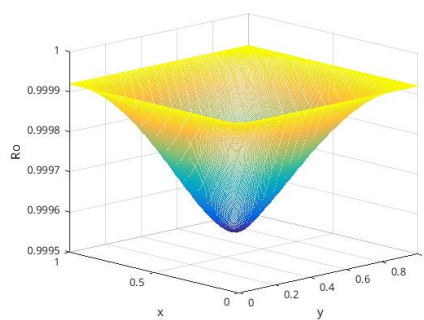


Рис. 10. Плотность газа при  $t = 30$  с

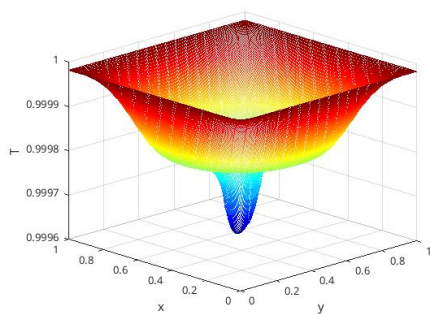


Рис. 11. Температура газа при  $t = 0,1$  с

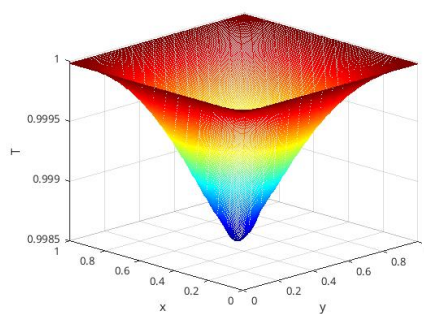


Рис. 12. Температура газа при  $t = 30$  с

#### 4. Численное моделирование течений газа в ВЗП средних масштабов

В данном пункте приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающих в результате вертикального продува через трубу 5 м. Тем самым проводится расчёт газодинамических характеристик в нестационарных трёхмерных течениях воздуха в будущих возможных экспериментах. Расчёты течений газа в данных ВЗП проводились при масштабном значении расстояния  $r_{00} = 50$  м, масштабном значении времени  $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 0,15$  с, разностным шагом по трём пространственным переменным  $\Delta x = \Delta y = 0,005$ ,  $\Delta z = 0,004$  и шаге по времени  $\Delta t = 0,001$ . Начальные и граничные условия, а также скорость вертикального продува выбирались такими же, как в предыдущем пункте.

На рис. 9, 10 представлены результаты расчётов плотности газа на высоте 0,02 (размерное значение 1 м) для двух различных моментов расчётного времени, а на рис. 11, 12 – температуры газа.

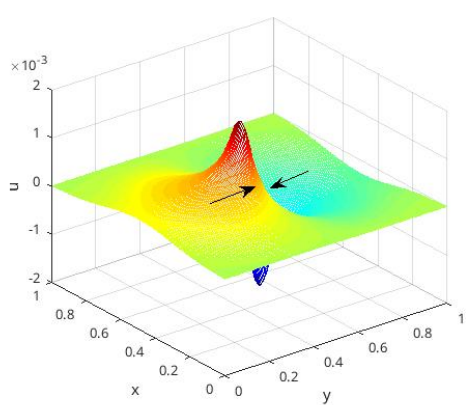
По плотности и температуре газа видно, что процесс нестационарный. Величины в зоне продува уменьшаются, и с течением времени происходит выход на стационарный режим. В данном расчёте явно наблюдается цилиндрическая симметрия, не смотря на то, что расчёт проводился в прямоугольной системе координат.

На рис. 13 представлены в виде поверхностей результаты расчётов первой компоненты скорости газа. Из рис. 13 видно, что первоначально встречные в направлении оси ОХ потоки газа с течением времени перераспределяются в пространстве. Такое перераспределение движущихся встречных потоков иллюстрирует возникновение закрутки газа в положительном направлении, т. е. против хода часовой стрелки. С течением времени происходит рост абсолютных значений скоростей встречных потоков с постепенным выходом на стационарный режим течения.

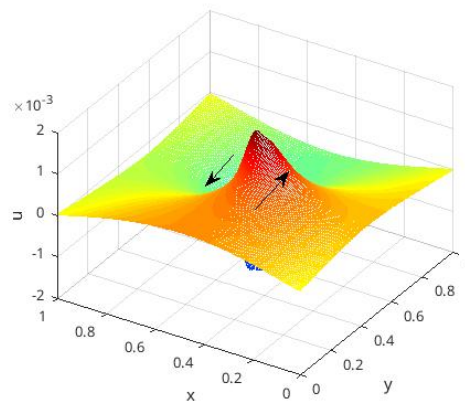
На рис. 14, 15 представлены результаты трёхмерных расчётов мгновенных линий тока частиц газа и вид на них сверху в области, близкой к вертикальной части ВЗП. Видно, как происходят закрутка газа вблизи нижней плоскости расчётного параллелепипеда и процесс передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП.

#### 5. Численное моделирование течений газа в ВЗП больших масштабов

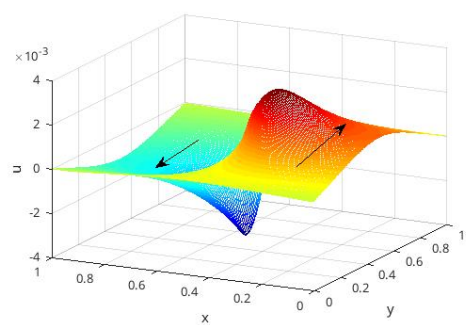
Приводятся результаты численного моделирования ВЗП воздуха, возникающих в результате вертикального продува его через трубу большого диаметра. Тем самым проводится расчёт газодинамических характеристик в нестационарных трёхмерных течениях воздуха в тропическом циклоне средних размеров. Расчёты течений газа в данных ВЗП проводились с начальными и граничными условиями, описанными в двух предыдущих пунктах при масштабном значении расстояния  $r_{00} = 50000$  м, масштабном значении времени  $t_{00} = r_{00}/u_{00} = 150,15$  с, разностным шагом по трём пространственным переменным  $\Delta x = \Delta y = 0,005$ ,  $\Delta z = 0,02$  и шаге по времени  $\Delta t = 0,001$ . Через квадратное отверстие размером  $0,1 \times 0,1$  в центре верхней грани расчётной области задаётся вертикальная скорость течения газа при  $M = 0,0125$ .



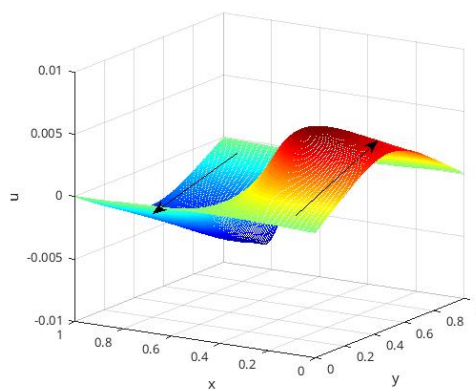
а



б



в



г

Рис. 13. Первая компонента вектора скорости; а –  $t = 0,5$  с; б –  $t = 2$  с; в –  $t = 10$  с; г –  $t = 30$  с

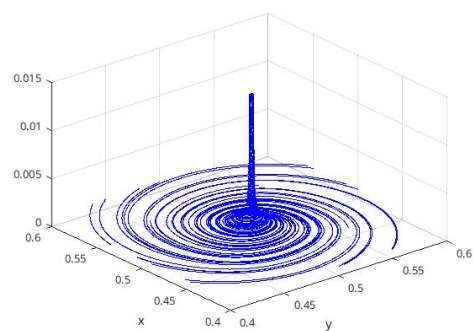


Рис. 14. Линии тока

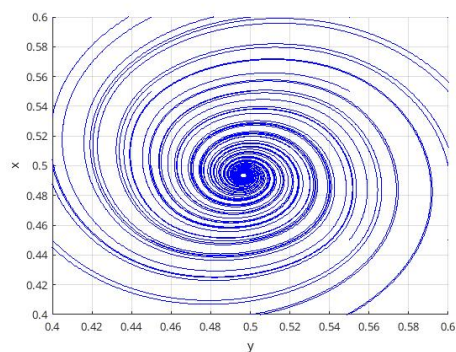
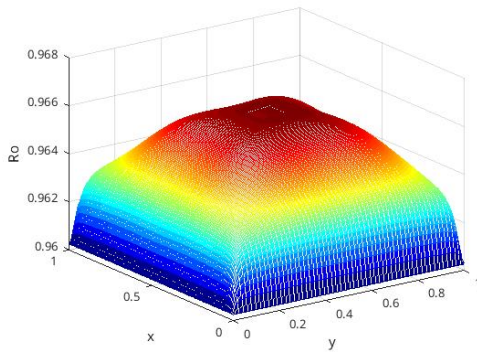
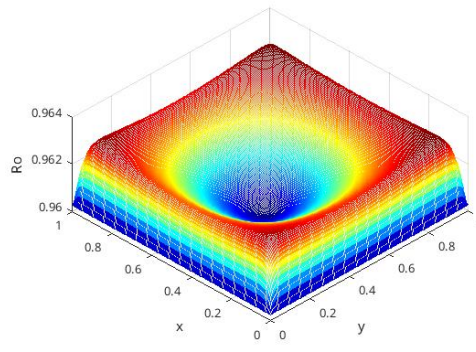
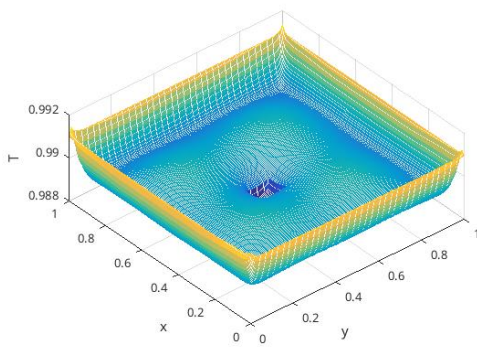
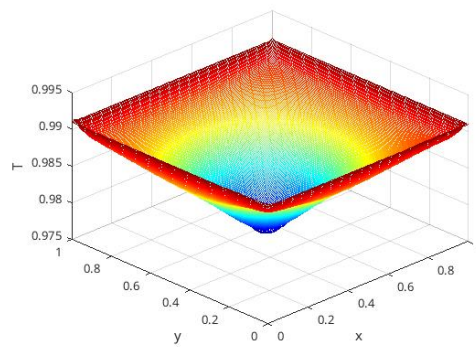


Рис. 15. Проекция линий тока

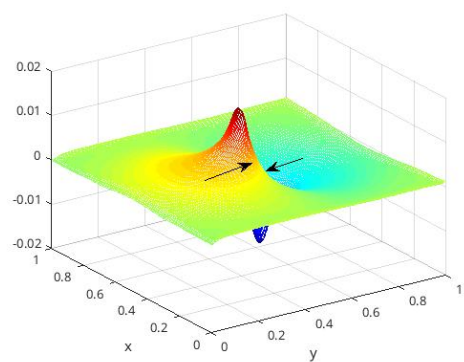
Рис. 16. Плотность газа при  $t = 1$  сРис. 17. Плотность газа при  $t = 30$  сРис. 18. Температура газа при  $t = 1$  сРис. 19. Температура газа при  $t = 30$  с

В начальные моменты времени происходят колебания плотности газа (рис. 16, 17) в третьем десятичном знаке, а с течением времени наблюдается понижение плотности в центре расчётной области. При приближении к центру прослеживается осевая симметрия в поведении плотности газа. Ось симметрии расположена вертикально, проходит через геометрический центр расчётной области и совпадает с центром отверстия продува воздуха через верхнюю плоскость прямоугольного параллелепипеда.

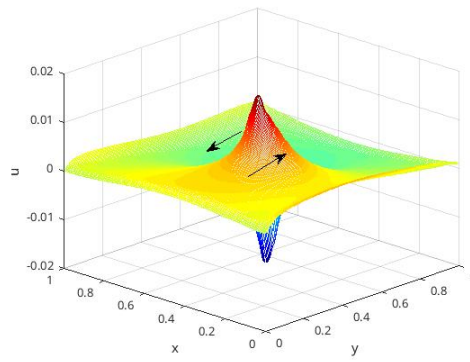
Существенным моментом в расчёте температуры в исследуемых восходящих закрученных течениях является то, что причиной возникновения таких течений является не нагрев подстилающей поверхности, а вертикальный продув газа. При увеличении времени расчёта поверхность температуры газа приобретает вид воронки с пониженными значениями в центре расчётной области (рис. 18, 19).

На рис. 20, представляющем графическое изображение  $x$ -й компоненты скорости для четырёх различных моментов времени, продемонстрировано возникновение закрутки течения воздуха в положительном направлении от нулевого значения.

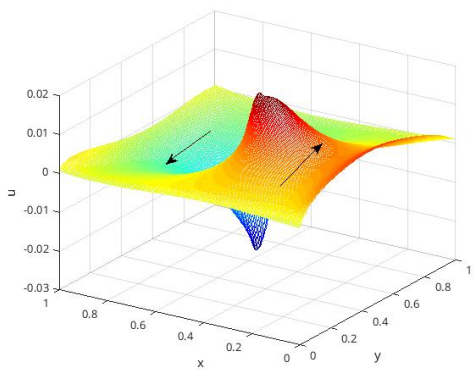
На рис. 21, 22 представлены результаты трёхмерных расчётов мгновенных линий тока частиц газа в области, близкой к вертикальной части ВЗП. Видно, как происходят закрутка газа вблизи нижней плоскости расчётного параллелепипеда и процесс



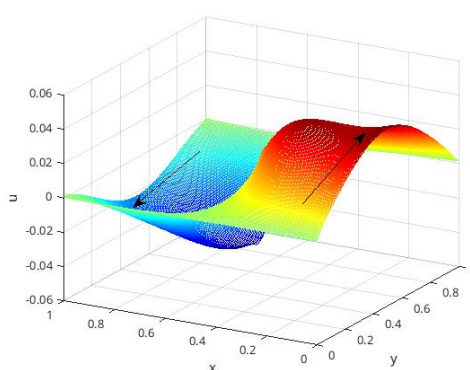
а



б



в



г

Рис. 20. Первая компонента вектора скорости: а –  $t = 0,5$  с; б –  $t = 2$  с; в –  $t = 5$  с; г –  $t = 30$  с

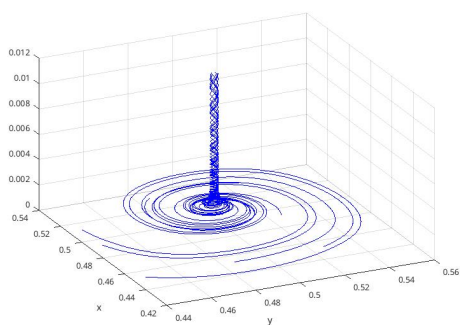


Рис. 21. Линии тока

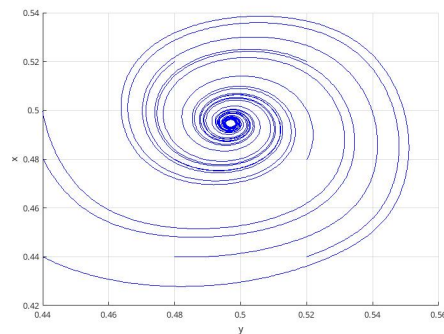


Рис. 22. Проекция линий тока

передачи вращательного движения сплошной среды в вертикальную часть ВЗП.

## Заключение

В работе для линеаризованной полной системы уравнений Навье – Стокса проведены численные исследования по созданию стабильного окружного движения воздуха в придонной части ВЗП с применением вертикальной трубы с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу вверх. По результатам исследований можно сделать вывод, что численное решение линеаризованной ПСУНС с поставленными начально-краевыми условиями описывает сложные течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Установлено, что плотность и температура при таком сложном течении претерпевают заметные изменения на начальной стадии. При увеличении времени расчёта термодинамические параметры и всё течение в целом стабилизируются с постепенным выходом на стационарный режим.

Численный расчёт скоростных характеристик трёхмерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа в ВЗП, инициированном вертикальным продувом, показал, что закрутка газа в положительном направлении обусловлена наличием в уравнениях линеаризованной ПСУНС дополнительных членов, описывающих ускорение Кориолиса. Таким образом, ещё раз численно получила подтверждение схема возникновения ВЗП [1].

## Литература

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / С.П. Баутин и др. Новосибирск : Наука ; Екатеринбург : УрГУПС. 2013. 216 с.
3. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / С.П. Баутин и др. Екатеринбург : УрГУПС, 2017. 216 с.
4. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург : УрГУПС, 2019. 181 с.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск : Наука, 2012. 152 с.
6. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учете действия силы Кориолиса: препринт. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2019. 52 с.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE COMPLETE SYSTEM OF NAVIER – STOKES EQUATIONS LINEARIZED ON THE EXACT SOLUTION

**A.A. Bugaenko**<sup>1,2</sup>

Leading engineer of mathematics, e-mail: bugaenkoaa@vniitf.ru

**I.Yu. Krutova**<sup>1</sup>

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

<sup>1</sup>Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University "MEPhI",  
Snezhinsk, Russia

<sup>2</sup>Federal State Unitary Enterprise "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research  
Institute of Technical Physics named after Academician E.I. Zababakhin", Snezhinsk, Russia

**Abstract.** For the complete Navier-Stokes equations linearized on the exact solution, taking into account the effects of gravity and Coriolis, the origin and development of ascending swirling flows of different intensity is numerically simulated using blowing up the pipe. The numerical solution of the linearized complete Navier–Stokes equations with the set initial-boundary conditions describes complex flows of viscous compressible heat-conducting gas. Numerical calculation of the velocity characteristics of a three-dimensional unsteady flow of viscous heat-conducting gas in an ascending swirling flow initiated by vertical blowing showed that the gas swirl occurs in the positive direction due to the presence of terms describing the Coriolis acceleration in the linearized complete Navier-Stokes equations. Thus, the scheme of origin of an ascending swirling flow was once again numerically confirmed.

**Keywords:** Navier–Stokes equations system, Coriolis force, linearization, numerical simulation, blowing.

*Дата поступления в редакцию: 31.01.2025*