*Математические структуры и моделирование*
*2025. № 3 (75). С. 80–89*

УДК 519.644.7
DOI 10.24147/2222-8772.2025.3.80-89

# АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТОРА В $\mathbb{R}^3$ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

**И.М. Федотова**
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: firim@mail.ru
**М.И. Медведева**
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: mimedvedeva@rambler.ru
**А.С. Кацунова**
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

**Аннотация.** В статье рассматривается общий алгоритм построения минимальных кубатурных формул для поверхности тора в $\mathbb{R}^3$ второй степени точности. Несмотря на то, что число узлов таких минимальных формул равно 4, минимальные кубатурные формулы для тора степени 2 известны лишь для отдельных соотношений радиусов $r$. Такие формулы были построены для случая, когда один из узлов лежит в плоскости $Oxy$ и для случая, когда узлы попарно симметричны относительно оси $Ox$. В статье строятся минимальные кубатурные формулы, в которых узлы попарно несимметричны и ни один из них не лежит в плоскости $Oxy$. Для построения используется метод воспроизводящего ядра. Формулы, описанные в статье, существуют как для тора небольшого соотношения радиусов, так и для тора с соотношением радиусов достаточно большим, например равным 8 000. В работе приведены таблицы с узлами и коэффициентами данных формул.

**Ключевые слова:** кубатурные формулы, тор, воспроизводящее ядро.

## Введение

При решении задач прикладной физики, небесной механики, машиностроения возникают задачи, связанные с интегрированием по поверхности тора. Это поверхность вращения, но, в отличие от других поверхностей вращения, поверхность тора является поверхностью четвёртого, а не второго порядка.

Уравнения классического тора в $\mathbb{R}^3$ может быть задано в параметрическом виде

$$
\begin{aligned}
X &= (R + a\cos\psi)\cos\varphi,\\
Y &= (R + a\cos\psi)\sin\varphi,\\
Z &= a\sin\psi,
\end{aligned}
$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$; $\psi \in [-\pi, \pi)$, или в декартовых координатах

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + R^2 - a^2)^2 - 4R^2(X^2 + Y^2) = 0.$$

При $R > a$ это будет открытый тор, при $R \leqslant a$ – закрытый тор. Интегралы по поверхности тора, как правило, сложные и громоздкие, и для их вычисления необходимо применять методы приближённого интегрирования. В связи с этим становится актуальной задача построения минимальных кубатурных формул для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$.

В настоящей статье решается задача нахождения минимальных кубатурных формул 2 степени точности для поверхности тора методом воспроизводящего ядра [1]. Будем рассматривать случаи $R > a$ открытого тора и $R = a$ вырожденного тора. Сделаем замену переменных $X = ax$, $Y = ay$, $Z = az$ и обозначим $r = R/a$, тогда получим нормированное уравнение тора

$$T: \quad (x^2 + y^2 + z^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0, \quad r \geqslant 1. \tag{1}$$

**Определение 1.** Будем говорить, что кубатурная формула

$$\frac{1}{4\pi^2 r} \int\limits_T f(x, y, z) dS \simeq \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i, y_i, z_i) \tag{2}$$

является кубатурной формулой степени $d$, если она обращается в точное равенство для всех многочленов от $x$, $y$, $z$ степени не выше $d$.

**Определение 2.** Кубатурная формула (2) степени $d$ называется минимальной, если не существует кубатурной формулы степени $d$ с $N - 1$ узлом.

В этом случае число $N$ называется нижней границей числа узлов для кубатурной формулы степени $d$.

Если начало координат не является узлом кубатурной формулы, то нижняя граница числа узлов формулы (2) степени $d = 2k$ равна $2(k^2 + 1)$ (см. [2]). В частности, для $d = 2$ имеем нижнюю границу, равную 4. Таким образом, для описания минимальной кубатурной формулы степени 2, не содержащей в качестве узла начало координат, нужно указать четыре узла и соответствующие им коэффициенты.

Зададим скалярное произведение для функций $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$, определённых на $T$, следующим образом

$$(f, g) = \frac{1}{4\pi^2 r} \int\limits_T f(x, y, z) g(x, y, z) dS.$$

Ортонормируя систему многочленов $1$, $x$, $y$, $z$, получаем

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{\frac{2}{w}} x, \quad f_3 = \sqrt{\frac{2}{w}} y, \quad f_4 = \sqrt{2} z,$$

где $w = r^2 + 3/2$.

Воспроизводящее ядро имеет вид

$$K_2(x^i, x^j) = 1 + \frac{2}{w}x_ix_j + \frac{2}{w}y_iy_j + 2z_iz_j, \quad i, j = 1, \ldots, 4, \ i \neq j.$$

Наборы $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^4$ являются набором узлов некоторой минимальной 2-точной кубатурной формулы тогда и только тогда, когда

$$1 + \frac{2}{w}x_ix_j + \frac{2}{w}y_iy_j + 2z_iz_j = 0, \quad i, j = 1, \ldots, 4, \ i \neq j, \tag{3}$$

а коэффициенты кубатурной формулы равны

$$c_i = \frac{w}{w + 2x_i^2 + 2y_i^2 + 2wz_i^2}, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Положим, что узлы кубатурной формулы лежат на поверхности тора

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2(x_i^2 + y_i^2) = 0, \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{4}$$

Из-за осевой, относительно $Oz$, симметрии $T$ будем считать, что узлы кубатурной формулы имеют вид

$$M_1(x_1, 0, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad M_3(x_3, y_3, z_3), \quad M_4(x_4, y_4, z_4).$$

Из уравнений (3) и (4) получаем для координат узлов нелинейную систему уравнений

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{2}{w}x_1x_2 + 2z_1z_2 = 0,\\
&1 + \frac{2}{w}x_1x_3 + 2z_1z_3 = 0,\\
&1 + \frac{2}{w}x_1x_4 + 2z_1z_4 = 0,\\
&1 + \frac{2}{w}x_2x_3 + \frac{2}{w}y_2y_3 + 2z_2z_3 = 0,\\
&1 + \frac{2}{w}x_2x_4 + \frac{2}{w}y_2y_4 + 2z_2z_4 = 0,\\
&1 + \frac{2}{w}x_3x_4 + \frac{2}{w}y_3y_4 + 2z_3z_4 = 0,\\
&(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 + r^2 - 1)^2 - 4r^2(x_i^2 + y_i^2) = 0, \ i = 1, \ldots, 4.
\end{aligned} \tag{5}$$

Система зависит от параметра $r$, содержит 10 уравнений и 11 неизвестных.

Ранее в работах [3,4] рассматривались частные случаи решения данной системы. В [3] рассматривался случай, когда один из узлов кубатурной формулы имеет вид $(r+1, 0, 0)$. Система (5) сводится к трём уравнениям и решается численно. Формулы такого вида существуют только для $1 \leqslant r \leqslant r_1$, где $r_1 = 1{,}5714$ – корень уравнения

$$12r^4 - 32r^3 + 28r^2 - 16r + 7 = 0.$$

В [4] рассматривался симметричный случай, когда узлы формулы имеют вид $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_1, -y_1, -z_1)$, $(-x_2, y_2, -z_2)$, $(-x_2, -y_2, z_2)$, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $z_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_2 > 0$, $z_2 > 0$. В этом случае сформулированы условия существования такого типа формул и получены ограничения на $r: \ r \geqslant r_1$, где $r_1 = 1{,}5714$ – корень уравнения

$$12r^4 - 32r^3 + 28r^2 - 16r + 7 = 0.$$

Для $r = r_1$ формулы, полученные в [3] и [4], совпадают. Одну из другой можно получить с помощью поворота системы координат

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y' &= y\cos\varphi - x\sin\varphi, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

В данной работе рассматривается общий случай, когда узлы попарно несимметричны и ни один из них не лежит в плоскости $Oxy$. Узлы имеют вид $(x_1, 0, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$, $(x_3, y_3, z_3)$, $(x_4, y_4, z_4)$. Фиксируем $r$ и $z_1 \neq 0$, находим первое приближение, затем систему решаем численно методом Ньютона. В следующем разделе подробно приводится алгоритм построения таких кубатурных формул.

## Алгоритм построения минимальных кубатурных формул 2 степени точности

Зафиксируем $z_1 \neq 0$. Тогда $x_1 = r + \sqrt{1 - z_1^2}$ или $x_1 = r - \sqrt{1 - z_1^2}$. Из первых трёх уравнений системы (5) выразим $x_2$, $x_3$ и $x_4$. Имеем:

$$x_2 = -\frac{w(1 + 2z_1z_2)}{2x_1}, \quad x_3 = -\frac{w(1 + 2z_1z_3)}{2x_1}, \quad x_4 = -\frac{w(1 + 2z_1z_4)}{2x_1}.$$

Из уравнений тора, используя последнее уравнение системы (5), найдем $y_2$, $y_3$, $y_4$:

$$y_2 = -\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - x_2^2},$$

$$y_3 = \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - x_3^2},$$

$$y_4 = \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - x_4^2}.$$

Подставив найденные выражения в (5), получим систему из трёх уравнений, зависящую от $z_2$, $z_3$ и $z_4$:

$$G_1(z_2, z_3) = 1 + \frac{w(1 + 2z_1z_2)(1 + 2z_1z_3)}{2x_1^2} - \frac{2}{w}\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1z_2)}{2x_1}\right)^2} \times$$

$$\times \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + 2z_1z_3)}{2x_1}\right)^2} + 2z_2z_3 = 0,$$

$$G_2(z_2,z_4)=1+\frac{w(1+2z_1z_2)(1+2z_1z_4)}{2x_1^2}-\frac{2}{w}\sqrt{(r+\sqrt{1-z_2^2})^2-\left(\frac{w(1+2z_1z_2)}{2x_1}\right)^2}\times$$

$$\times\sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2-\left(\frac{w(1+2z_1z_4)}{2x_1}\right)^2}+2z_2z_4=0, \qquad (6)$$

$$G_3(z_3,z_4)=1+\frac{w(1+2z_1z_3)(1+2z_1z_4)}{2x_1^2}+\frac{2}{w}\sqrt{(r-\sqrt{1-z_3^2})^2-\left(\frac{w(1+2z_1z_3)}{2x_1}\right)^2}\times$$

$$\times\sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2-\left(\frac{w(1+2z_1z_4)}{2x_1}\right)^2}+2z_3z_4=0.$$

Так как система иррациональная и имеет достаточно сложный вид, вопрос о её разрешимости для конкретных $r$ и $z_1$ решался экспериментально. Начальное приближение можно находить разными способами:

1) графически;

2) с помощью генератора случайных чисел, имеющих равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$ с учётом факта, что значения $z_2$, $z_3$, $z_4$ лежат в отрезке $[-1,1]$, минимизируя выражение

$$\sqrt{G_1^2+G_2^2+G_3^2};$$

3) с помощью равномерной решетки, минимизируя выражение

$$\sqrt{G_1^2+G_2^2+G_3^2}.$$

Если система имеет решение, то с выбранным начальным приближением метод Ньютона быстро сходится к решению системы (за 6, 7 итераций). Для вычислений использовалась система компьютерной алгебры Maple 2017. Таким способом можно получить минимальные кубатурные формулы 2 степени точности для тора, порождённые $z_1$, для различных радиусов. Приведём несколько примеров:

**Пример 1.** Зафиксируем $z_1=0{,}5$, тогда точка $M_1$ из уравнения тора может иметь координаты $(r+\sqrt{3}/2,0,0{,}5)$. В этом случае из первых трёх уравнений системы (5) получим:

$$x_2=-\frac{w(1+z_2)}{2r+\sqrt{3}},\quad x_3=-\frac{w(1+z_3)}{2r+\sqrt{3}},\quad x_4=-\frac{w(1+z_4)}{2r+\sqrt{3}}.$$

Из уравнений тора найдём $y_2$, $y_3$, $y_4$:

$$y_2=-\sqrt{(r+\sqrt{1-z_2^2})^2-x_2^2},$$

$$y_3=\sqrt{(r-\sqrt{1-z_3^2})^2-x_3^2},$$

$$y_4=\sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2-x_4^2}.$$

Подставив все в (5), получим нелинейную систему из трёх уравнений с тремя неизвестными $z_2$, $z_3$, $z_4$ и параметром $r$:

$$G_1(z_2,z_3)=1+\frac{2w(1+z_2)(1+z_3)}{(2r+\sqrt{3})^2}-\frac{2}{w}\sqrt{(r+\sqrt{1-z_2^2})^2-\left(\frac{w(1+z_2)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2}\times$$
$$\times\sqrt{(r-\sqrt{1-z_3^2})^2-\left(\frac{w(1+z_3)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2}+2z_2z_3=0,$$
$$G_2(z_2,z_4)=1+\frac{2w(1+z_2)(1+z_4)}{(2r+\sqrt{3})^2}-\frac{2}{w}\sqrt{(r+\sqrt{1-z_2^2})^2-\left(\frac{w(1+z_2)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2}\times$$
$$\times\sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2-\left(\frac{w(1+z_4)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2}+2z_2z_4=0, \quad (7)$$
$$G_3(z_3,z_4)=1+\frac{2w(1+z_3)(1+z_4)}{(2r+\sqrt{3})^2}+\frac{2}{w}\sqrt{(r-\sqrt{1-z_3^2})^2-\left(\frac{w(1+z_3)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2}\times$$
$$\times\sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2-\left(\frac{w(1+z_4)}{2r+\sqrt{3}}\right)^2}+2z_3z_4=0.$$

Придавая $r$ различные значения и находя графически первое приближение, мы найдём искомые кубатурные формулы.

Пусть $r=1$. Первый узел имеет вид $(1+\sqrt{3}/2,0,0{,}5)$. Из рис. 1–3 найдём начальное приближение $z_2=-0{,}1$, $z_3=-0{,}9$, $z_4=0{,}8$, затем методом Ньютона решаем нелинейную систему (7). Узлы и коэффициенты искомой кубатурной формулы приведены в табл. 1.

Таблица 1. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r=1$

| Узлы | Коэффициенты |
|---|---|
| $(1+\sqrt{3}/2,0,1/2)$ | $0{,}2333$ |
| $(-0{,}6152,-1{,}8994,-0{,}0812)$ | $0{,}2380$ |
| $(-0{,}01825,0{,}7679,-0{,}9727)$ | $0{,}2972$ |
| $(-1{,}2247,0{,}9664,0{,}8283)$ | $0{,}2315$ |

Пусть $r=2$. Применяя описанную выше схему, находим узлы и коэффициенты искомой кубатурной формулы, которые приведены в табл. 2.

Численные эксперименты показали, что данный тип кубатурных формул с первым узлом $(r+\sqrt{3}/2,0,1/2)$ существует только для $1\leqslant r<2{,}15$.

**Пример 2.** Зафиксируем $z_1=0{,}5$, тогда точка $M_1$ из уравнения тора может иметь координаты $(r-\sqrt{3}/2,0,0{,}5)$. В этом случае из первых трёх уравнений системы (5) имеем:

$$x_2=-\frac{w(1+z_2)}{2r-\sqrt{3}},\quad x_3=-\frac{w(1+z_3)}{2r-\sqrt{3}},\quad x_4=-\frac{w(1+z_4)}{2r-\sqrt{3}}.$$

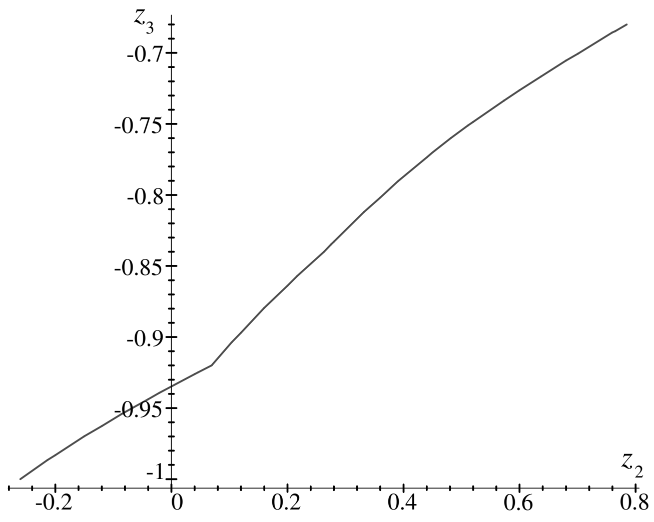


Рис. 1. График функции $G_1(z_2, z_3) = 0$

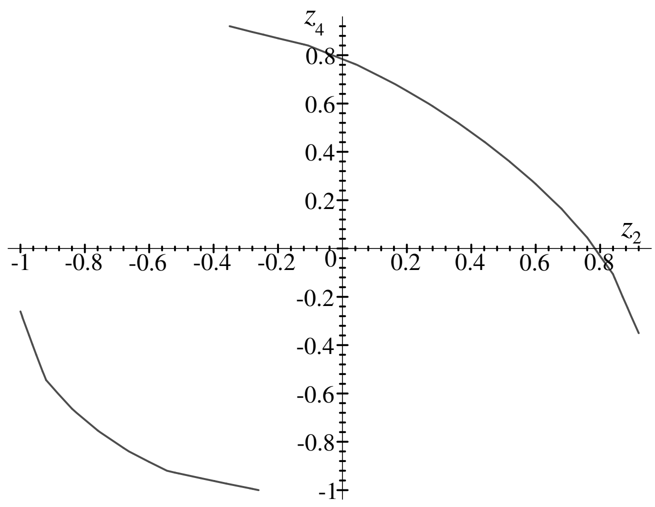


Рис. 2. График функции $G_2(z_2, z_4) = 0$

Таблица 2. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r = 2$

| Узлы | Коэффициенты |
|---|---|
| $(2 + \sqrt{3}/2, 0, 1/2)$ | 0,2229 |
| $(-0{,}7112, -2{,}8794, -0{,}2587)$ | 0,2308 |
| $(-0{,}1833, 1{,}4001, -0{,}8089)$ | 0,3296 |
| $(-1{,}9111, 0{,}9369, 0{,}9917)$ | 0,2197 |

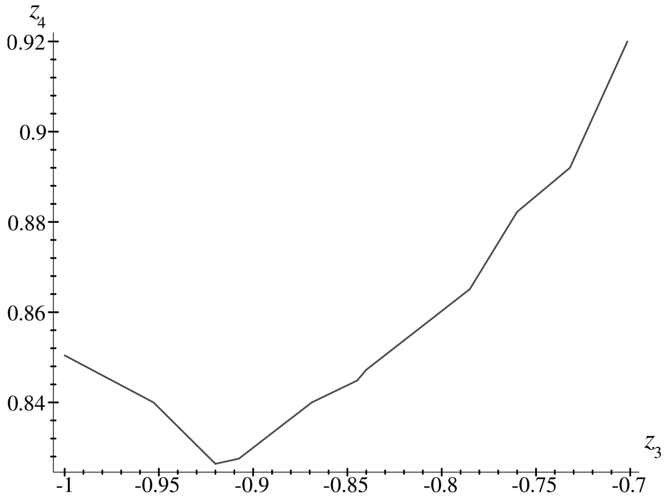


Рис. 3. График функции $G_3(z_3, z_4) = 0$

Из уравнений тора найдём $y_2$, $y_3$, $y_4$ :

$$y_2 = -\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - x_2^2},$$

$$y_3 = \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - x_3^2},$$

$$y_4 = \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - x_4^2}.$$

Подставив все в (5), получим нелинейную систему из трёх уравнений с тремя неизвестными $z_2$, $z_3$, $z_4$ и параметром $r$:

$$1 + \frac{2w(1 + z_2)(1 + z_3)}{(2r - \sqrt{3})^2} - \frac{2}{w}\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_2)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} \times$$

$$\times \sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_3)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} + 2z_2 z_3 = 0,$$

$$1 + \frac{2w(1 + z_2)(1 + z_4)}{(2r - \sqrt{3})^2} - \frac{2}{w}\sqrt{(r + \sqrt{1 - z_2^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_2)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} \times$$

$$\times \sqrt{(r + \sqrt{1 - z_4^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_4)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} + 2z_2 z_4 = 0, \qquad (8)$$

$$1 + \frac{2w(1 + z_3)(1 + z_4)}{(2r - \sqrt{3})^2} + \frac{2}{w}\sqrt{(r - \sqrt{1 - z_3^2})^2 - \left(\frac{w(1 + z_3)}{2r - \sqrt{3}}\right)^2} \times$$

$$\times\sqrt{(r+\sqrt{1-z_4^2})^2-\left(\frac{w(1+z_4)}{2r-\sqrt{3}}\right)^2}+2z_3z_4=0.$$

Придавая $r$ различные значения и применяя схему, описанную выше, найдём искомый тип кубатурных формул.

Пусть $r=9$. Первый узел имеет вид $(9-\sqrt{3}/2,0,0{,}5)$. Найдем начальное приближение, используя генератор случайных чисел $z_2=-0{,}5570$, $z_3=-0{,}9996$, $z_4=0{,}8068$, затем методом Ньютона находим решение нелинейной системы (8), результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r=9$

| Узлы | Коэффициенты |
|---|---|
| $(9-\sqrt{3}/2,0,1/2)$ | 0,3221 |
| $(-2{,}3455,-9{,}5597,-0{,}5374)$ | 0,2547 |
| $(-0{,}0065,8{,}9491,-0{,}9987)$ | 0,2026 |
| $(-9{,}1663,2{,}8184,0{,}8075)$ | 0,2206 |

Таблица 4. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r=200$

| Узлы | Коэффициенты |
|---|---|
| $(200-\sqrt{3}/2,0,1/2)$ | 0,2871 |
| $(-50{,}1603,-194{,}5018,-0{,}5006)$ | 0,2842 |
| $(-8{,}2796,199{,}4306,-0{,}9175)$ | 0,2138 |
| $(-191{,}6001,58{,}8004,0{,}9076)$ | 0,2149 |

Таблица 5. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r=8000$

| Узлы | Коэффициенты |
|---|---|
| $(8000-\sqrt{3}/2,0,1/2)$ | 0,2857 |
| $(-2000{,}1571,-7746{,}8205,-0{,}5000)$ | 0,2857 |
| $(-348{,}0864,7992{,}0152,-0{,}9129)$ | 0,2143 |
| $(-7651{,}7868,2335{,}9570,0{,}9127)$ | 0,2143 |

Применяя описанную выше схему, находим узлы и коэффициенты кубатурной формулы при $r=200$ (табл. 4) и при $r=8000$ (табл. 5).

Численные эксперименты показали, что данный тип кубатурных формул с первым узлом $(r-\sqrt{3}/2,0,1/2)$ существует для радиусов $r\geqslant 8{,}2728$.

## Заключение

По полученным результатам можно сделать вывод, что при $d=2$ возникают вычислительные трудности в построении минимальных кубатурных формул для тора в $\mathbb{R}^3$. Можно построить различные типы кубатурных формул с заданным первым узлом для отдельных диапазонов радиусов. Однако получить аналитическое выражение для границ радиусов существования данных формул не удалось. В дальнейшем планируется проводить исследования в направлении уточнения границ радиусов для каждого типа формул.

## Литература

1. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.
2. Носков М.В. О приближенном интегрировании по поверхности тора // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 1992. Вып. 3 (№ 15). С. 100–102.
3. Федотова И.М. Кубатурные формулы для тора второй степени с минимальным числом узлов // Кубатурные формулы и их приложения. Материалы V международного семинара-совещания. Красноярск: КГТУ, 2000. С. 201–206.
4. Носков М.В., Федотова И.М. Об одной минимальной кубатурной формуле второй степени точности для тора в $\mathbb{R}^3$ // Математические труды. 2020. Т. 23. № 1. С. 177—186. URL: `https://doi.org/10.33048/mattrudy.2020.23.109` (дата обращения: 28.01.2025).

## ALGORITHM FOR CONSTRUCTION OF MINIMUM CUBATURAL FORMULAS FOR INTEGRALS OVER THE SURFACE OF A TORUS IN $\mathbb{R}^3$ SECOND DEGREE OF ACCURACY

**I.M. Fedotova**
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: firim@mail.ru
**M.I. Medvedeva**
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: mimedvedeva@rambler.ru
**A.S. Katsunova**
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

**Abstract.** The article discusses a general algorithm for constructing minimal cubature formulas for the surface of the torus in $\mathbb{R}^3$ of the second degree of accuracy. Despite the fact that the number of nodes of such minimal formulas is 4, minimal cubature formulas for the torus of degree 2 are known only for certain relations of radii $r$. Such formulas were constructed for the case when one of the nodes lies in the $Oxy$ plane and for the case when the nodes are symmetrical pairwise about the $Ox$ axis. The article constructs minimal cubature formulas in which the nodes are asymmetric pairwise and none of them lies in the $Oxy$ plane. The reproducing kernel method is used for construction. The formulas described in the article exist both for a torus with a small radius ratio, and for a torus with a fairly large radius ratio, for example equal to 8000. The work contains tables with nodes and coefficients of these formulas.

**Keywords:** cubature formulas, torus, reproducing kernel.

*Дата поступления в редакцию: 29.01.2025*