

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ КОШИ – РИМАНА С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.Н. Баротов

преподаватель, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова,
Худжанд, Таджикистан

Аннотация. В статье рассматривается задача линейного сопряжения для обобщённой системы Коши – Римана вида

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $z = re^{i\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$ – множество целых чисел и $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z| & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$

Изложена схема построения решений системы (1) из класса M – функций из $C^1(G^+ \cup G^-)$, непрерывно продолжаемые на окружность $\{t : |t| = 1\}$ как изнутри, так и извне, $G^+ = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, $G^- = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$ и удовлетворяющие условиям:

$$w^+(t) = t^k w^-(t), \quad |t| = 1, \quad (2)$$

$$|w(z)| \leq P(1 + |z|^N), \quad (3)$$

здесь $k \in \mathbb{Z}$; N – неотрицательное целое число; $w^+(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| < 1$; $w^-(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| > 1$; P – постоянная, в общем зависящая от $w(z)$. Определена размерность пространства решений задачи (1) – (3). Эта размерность непосредственно выражается через числа m и k .

Ключевые слова: обобщённая система Коши – Римана, задача линейного сопряжения, ограниченные коэффициенты.

Введение

Задача сопряжения для обобщённых аналитических функций, т. е. решений уравнения

$$w_{\bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0,$$

рассматривалась Л.Г. Михайловым [1, 2], Г.Н. Александрия [3] и другими (см., например, [4]). Используя так называемое представление первого рода обобщённых

аналитических функций, Л.Г. Михайлов задачу сопряжения свёл к такой же задаче для аналитических функций. В работах В.Н. Монахова и С.Н. Антонцева (см., например, [5]) рассматривалась задача сопряжения для квазилинейных равномерно эллиптических систем вида

$$w_{\bar{z}} + q_1(z, w) w_z + q_2(z, w) \overline{w_z} = f(z, w),$$

где $|q_1(z, w)| + |q_2(z, w)| \leq q_0 < 1$; получены условия разрешимости задачи. Г. Джангибеков и его ученики (см., например, [6]) рассматривали задачу сопряжения для случая $A(z) = \bar{z}^{-1}a(z)$, $B(z) = \bar{z}^{-1}b(z)$, где $a(z)$ и $b(z)$ – измеримые и ограниченные в единичном круге функции, имеющие предельные значения при $z \rightarrow 0$. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи и получена формула для индекса.

В настоящей статье для обобщённых систем Коши – Римана вида

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \overline{w} = 0, \quad (4)$$

где $z = re^{i\varphi}$; $m \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z| & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |z| > 1, \end{cases}$ рассматривается задача линейного сопряжения.

Системы вида (1), а также более общие системы в гёльдеровых пространствах C_α^1 функций, определённых на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, изучены в ряде работ Э. Мухамадиева и С. Байзаева (см., например, [7, 8]), найдены критерии нётеровости соответствующих операторов $L : C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$, и подсчитан индекс. В частности, для оператора $L_m : C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ имеет место следующая

Теорема 1. 1) оператор $L_m : C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ нётеров;

2) индекс оператора L_m равен m ;

3) $\dim \text{Ker} L_m = \begin{cases} m & \text{при } m \geq 0, \\ 0 & \text{при } m < 0. \end{cases}$

Постановка задачи $S_{m,k}$

Найти решения уравнения (1) из класса M , удовлетворяющие условиям:

$$w^+(t) = t^k w^-(t), \quad |t| = 1, \quad (5)$$

$$|w(z)| \leq P(1 + |z|^N), \quad (6)$$

здесь $k \in \mathbb{Z}$; N – неотрицательное целое число; $w^+(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| < 1$; $w^-(t)$ – предел $w(z)$ при $z \rightarrow t$, $|z| > 1$; P – постоянная, в общем зависящая от $w(z)$.

Для нахождения решений задачи $S_{m,k}$ будем использовать ниже приводимую теорему, установленную нами в [9].

Теорема 2. Решения из класса M уравнения (1) представляются в виде

$$w(z) = \begin{cases} W^+(r, \varphi) & \text{при } r < 1, \\ W^-(r, \varphi) & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

$$\text{где } W^+(r, \varphi) = h_m r^s \left(A_s e^{1-r^2} + i B_s e^{r^2-1} \right) e^{is\varphi} + w_+(r, \varphi);$$

$$W^-(r, \varphi) = h_m r^s \left(A_s e^{2-2r} + i B_s e^{2r-2} \right) e^{is\varphi} + w_-(r, \varphi);$$

здесь $h_m = \frac{1-(-1)^m}{2}$, $s = \frac{m-1}{2}$, A_s ; B_s – произвольные вещественные постоянные,

$$\begin{aligned} w_+(r, \varphi) = r^{s+1} \sum_{n \geq [s+1]} & \left[\left(A_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2) + B_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2) \right) e^{in\varphi} + \right. \\ & \left. + \left(-\bar{A}_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) + \bar{B}_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} w_-(r, \varphi) = r^{\frac{m}{2}} \sum_{n \geq [s+1]} & \left[\left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) \right) e^{in\varphi} + \right. \\ & \left. + \left(-\bar{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) + \bar{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right]; \end{aligned} \quad (4')$$

$[\cdot]$ – целая часть числа; A_n – произвольные комплексные постоянные при $n \geq 0$ и $A_n = 0$ при $[s+1] \leq n \leq -1$; B_n – произвольные комплексные постоянные при $1 \leq s+1 \leq n \leq m-1$ и $B_n = 0$ в остальных случаях; C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные; I_ν, K_ν – функции Бесселя и Макдональда.

Построение решений задачи $S_{m,k}$

Условие (2) перепишем в виде:

$$W^+(1, \varphi) = e^{ik\varphi} W^-(1, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (8)$$

Учитывая условие (3), экспоненциальный рост функции $I_\nu(r)$ при $r \rightarrow +\infty$, сингулярность функции $K_\nu(r)$ при $r = 0$ и непрерывность функции $w(z)$ в точке $z = 0$, имеем:

$$B_s = 0, \quad B_n = 0 \quad \forall n \geq m, \quad C_n = 0 \quad \forall n \geq [s+1]. \quad (9)$$

Для удобства разложения граничных значений $W^+(1, \varphi)$ и $W^-(1, \varphi)$ представим в виде

$$W^+(1, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{in\varphi}, \quad W^-(1, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{in\varphi},$$

где

$$\alpha_n = \begin{cases} h_m A_s & \text{при } n = [s], \\ A_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(1) & \text{при } n \geq [s+1], \\ -\bar{A}_{m-1-n} I_{-\frac{n}{2} + \frac{m+1}{4}}(1) + \bar{B}_{m-1-n} K_{-\frac{n}{2} + \frac{m+1}{4}}(1) & \text{при } n < [s]; \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} h_m A_s \text{ при } n = [s], \\ D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2) \text{ при } n \geq [s+1], \\ \overline{D}_{m-1-n} K_{-n+\frac{m}{2}}(2) \text{ при } n < [s]. \end{cases}$$

Тогда условие (8) будет эквивалентно равенству:

$$\alpha_n = \beta_{n-k}. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда m — чётное положительное число и $k > 0$. Тогда из (10) следуют соотношения:

$$\begin{cases} a_n = c_{n-k} \text{ при } n \geq \frac{m}{2} + k, \\ b_n = d_{m+k-n-1} \text{ при } \frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1, \\ b_n = d_{n+k} \text{ при } n \geq \frac{m}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Эти соотношения, в свою очередь, в зависимости от изменения n распадаются на следующие две системы равенств:

$$\begin{cases} a_n = d_{m+k-n-1} \\ b_n = d_{n+k}, \end{cases} \text{ при } \frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1, \quad (12)$$

$$\begin{cases} a_n = c_{n-k}, \\ b_n = d_{n+k}, \end{cases} \text{ при } n \geq \frac{m}{2} + k. \quad (13)$$

Подставляя выражения для a_n , b_n , c_n , d_n в (12) и (13), получим следующие соотношения

$$\begin{cases} A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = \overline{D}_{m-n+k-1} K_{n-k-\frac{m}{2}}(2), \\ -A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = D_{n+k} K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2), \end{cases} \quad \frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1, \quad (14)$$

$$\begin{cases} A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = D_{n-k} K_{n-k-\frac{m}{2}}(2), \\ -A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = D_{n+k} K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2), \end{cases} \quad n \geq \frac{m}{2} + k. \quad (15)$$

Отсюда можно выразить A_n , B_n через D_{n-k} , D_{n+k} и $D_{m-n+k-1}$.

При $\frac{m}{2} \leq n \leq \frac{m}{2} + k - 1$:

$$A_n = \gamma_n \overline{D}_{m-n+k-1} - \delta_n D_{n+k}, \quad B_n = \zeta_n \overline{D}_{m-n+k-1} + \eta_n D_{n+k}, \quad (16)$$

где $\gamma_n = K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) K_{n-k-\frac{m}{2}}(2)$, $\delta_n = K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2)$;

$$\zeta_n = I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) K_{n-k-\frac{m}{2}}(2), \quad \eta_n = I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) K_{n+k+1-\frac{m}{2}}(2).$$

При $n \geq \frac{m}{2} + k$:

$$A_n = \gamma_n D_{n-k} - \delta_n D_{n+k}, \quad B_n = \zeta_n D_{n-k} + \eta_n D_{n+k}, \quad (17)$$

здесь мы учитывали чётность функции $K_\nu(r)$ относительно индекса ν .

Возможны два случая: а) $k \leq \frac{m}{2}$; б) $k \geq \frac{m}{2} + 1$.

Случай $k \leq \frac{m}{2}$. Так как m – чётное, то в (16) индексы постоянных $\overline{D}_{m-n+k-1}$ и D_{n+k} не совпадают, поэтому эти постоянные, другими словами постоянные D_j для $\frac{m}{2} \leq j \leq \frac{m}{2} + 2k - 1$, можно взять произвольными, при этом количество таких постоянных будет равно $2k$.

Теперь перейдём к рассмотрению системы (15). Если $k \geq \frac{m}{6}$, то в (15) $\frac{m}{2} + k \leq n \leq m - 1$ или $\frac{m}{2} \leq n - k \leq m - k - 1 \leq \frac{m}{2} + 2k - 1$. В этом случае D_{n-k} заданы и, взяв произвольными D_{n+k} (их количество равно $\frac{m}{2} - k$), по формулам (17) находим A_n и B_n . При $n \geq m$, учитывая соотношения (9) и (17), получим

$$D_{n+k} = -\frac{\zeta_n}{\eta_n} D_{n-k}. \quad (18)$$

Для $m \leq n \leq m + 2k - 1$ правая часть формулы (18) известна, поэтому для таких n будут известны D_{n+k} . Далее, опять используя (18), можно определить D_{n+k} для остальных $n \geq m$.

Таким образом, при $\frac{m}{6} \leq k \leq \frac{m}{2}$, задавая D_j произвольными для $\frac{m}{2} \leq j \leq m + k - 1$, определяем все остальные коэффициенты. Общее количество произвольных постоянных будет равно $\frac{m}{2} + k$. Размерность пространства решений задачи $S_{m,k}$ будет равна $2 \left(\frac{m}{2} + k \right) = m + 2k$.

Пусть $0 < k < \frac{m}{6}$. Тогда для $\frac{m}{2} + k \leq n \leq m - 1$, т. е. $\frac{m}{2} + 2k \leq n + k \leq m + k - 1$, задаём произвольно D_{n+k} (их количество равно $\frac{m}{2} - k$). Индекс постоянной D_{n-k} меняется в промежутках $\left[\frac{m}{2}, \frac{m}{2} + 2k - 1 \right]$ и $\left[\frac{m}{2} + 2k, m - k - 1 \right]$. Для первого промежутка D_{n-k} известны (см. решение системы (11)), а для второго – совпадают с $D_{n'+k}$, где $\frac{m}{2} + k \leq n' \leq m - 2k - 1 < m - 1$. В этом случае общее количество произвольных постоянных будет равно $2k + \frac{m}{2} - k = \frac{m}{2} + k$, т. е. и в этом случае размерность пространства решений задачи $S_{m,k}$ также будет равна $m + 2k$.

Итак, в случае m – чётное и $0 < k \leq \frac{m}{2}$, мы определили множество решений задачи $S_{m,k}$, которое зависит от $\frac{m}{2} + k$ произвольных комплексных постоянных.

Теорема 3. Пусть m – чётное и $0 < k \leq \frac{m}{2}$. Тогда решения задачи $S_{m,k}$ даются формулами вида (7), (4'), в которых $B_n = 0$ при $n \geq m$, $C_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, D_j – произвольны для $\frac{m}{2} \leq j \leq m + k - 1$, A_n , B_n и D_t при $t \geq n + k$ определяются через D_j . Множество решений задачи зависит от $\frac{m}{2} + k$ произвольных комплексных постоянных.

Остальные случаи исследуются аналогично. Размерность пространства решений задачи $S_{m,k}$ находится следующим образом:

$$\dim S_{m,k} = \begin{cases} m + 2|k| - 2, & \text{если } k \neq 0, m \in \mathbb{H}, \\ 2 \left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + |k| \right), & \text{если } \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + |k| \geq 0, m \notin \mathbb{H}, \\ m, & \text{если } m \geq 0, k = 0, \\ 0, & \text{если } \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + |k| < 0, \end{cases}$$

где $\mathbb{H}$ – множество нечётных положительных чисел.

Литература

1. Михайлов Л.Г. Краевая задача типа задачи Римана для систем дифференциальных урав-

- нений эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения // Учёные записки. Труды физико-математического факультета Таджикского государственного университета. 1957. Т. 10. С. 32–79.
2. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963. 183 с.
 3. Александрия Г.Н. Об одной граничной задаче для обобщённых аналитических функций // Труды Тбилисского университета. 1955. Т. 56. С. 135–139.
 4. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 510 с.
 5. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: СО Наука, 1977. 424 с.
 6. Джангибеков Г., Бобоев Э.Д. Задача линейного сопряжения решений обобщённой системы Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Вестник ТНУ. Серия естественных наук. 2021. № 4. С. 12–20.
 7. Байзаев С., Мухамадиев Э.М. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.
 8. Байзаев С. О задаче линейного сопряжения для обобщённых аналитических функций на полуплоскости // Доклады АН Респ. Таджикистан, 1999. Т. 42, № 3. С. 74–79.
 9. Байзаев С., Баротов Р.Н. О построении регулярных решений одного класса обобщённых систем Коши – Римана с ограниченными на всей плоскости коэффициентами // Учёные записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 297–305.

ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO THE COUPLING PROBLEM FOR A CLASS OF GENERALIZED CAUCHY – RIEMANN SYSTEMS WITH BOUNDED COEFFICIENTS

R.N. Barotov

Instructor, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Khujand State University named after Academician B. Gafurov, Khujand, Tajikistan

Abstract. The article discusses the problem of linear conjugation for generalized Cauchy – Riemann systems of the form

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \bar{w} = 0, \quad (1)$$

where $z = re^{i\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$ – the set of integers, and $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z| & \text{if } |z| \leq 1, \\ 1 & \text{if } |z| > 1. \end{cases}$ A scheme for constructing solutions to the system (1) from the class of M -functions in $C^1(G^+ \cup G^-)$, continuously extended on the circle $\{t : |t| = 1\}$ both from the inside and outside, is presented. Here, $G^+ = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ and $G^- = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$, and the conditions are satisfied:

$$w^+(t) = t^k w^-(t), \quad |t| = 1, \quad (2)$$

$$|w(z)| \leq P(1 + |z|^N), \quad (3)$$

where $k \in \mathbb{Z}$, N is a non-negative integer, $w^+(t)$ is the limit of $w(z)$ as $z \rightarrow t$ with $|z| < 1$, and $w^-(t)$ is the limit of $w(z)$ as $z \rightarrow t$ with $|z| > 1$. P is a constant that generally depends on $w(z)$. The dimension of the solution space for the problem (1) – (3) is defined. This dimension is directly expressed in terms of the numbers m and k .

Keywords: generalized Cauchy – Riemann system, linear conjugation problem, bounded coefficients .

Дата поступления в редакцию: 30.04.2025