Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–3

УДК 514:510.642

СВЯЗНОСТЬ ЛЕВИ-ЧЕВИТА В СИНТЕТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ КОКА-ЛОВЕРА

А.А. Звягинцев

In the article we consider correspondence between connection and the Riemannian metric on a microlinear spaces.

Цель данной работы – восполнить пробел, возникший в литературе по синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера (СДГ). А именно дадим определение аффинной связности, согласованной с римановой метрикой, заданной на произвольном микролинейном пространстве, и выведем известное в классической римановой геометрии соотношение:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right).$$

Вкратце напомним некоторые факты и определения из СДГ, большую часть которых можно найти в [2].

1. Основные определения

Аффинной связностью на микролинейном пространстве M будем называть отображение $\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D \times D}$ такое, что

$$\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1), \quad \nabla(t_1, t_2)(0, d_2) = t_2(d_2), \tag{1}$$

$$\nabla(\alpha \cdot t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(\alpha \cdot d_1, d_2), \tag{2}$$

$$\nabla(t_1, \alpha \cdot t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(d_1, \alpha \cdot d_2). \tag{3}$$

Для всех $(t_1, t_2) \in M^D \times_M M^D$, $d_i \in D$, $\alpha \in R$. Здесь R – коммутативное локальное кольцо (подробнее см. [2]), а $D = \{d \in R | d^2 = 0\}$.

Аффинную связность будем называть симметричной, если

$$\nabla(t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_2, t_1)(d_2, d_1).$$

В том случае, когда M совпадает с некоторым конечномерным R-модулем V, аффинная связность однозначно описывается функцией

$$\widetilde{\nabla}_x : V \times V \to V,$$

E-mail: zvyagin@math.omsu.omskreg.ru
Омский государственный университет

определенной на главных частях касательных векторов пространства M в точке x. При этом

$$\nabla(t_1,t_2)(d_1,d_2) = x + b_1 d_1 + b_2 d_2 + \widetilde{\nabla}_x(b_1,b_2)d_1 d_2. \tag{4}$$

Кроме того, если $\{e_1,...,e_n\}$ является базисом V, то

$$\widetilde{\nabla}_x(e_i,e_j) = -\Gamma_{ij}^k(x)e_k. \tag{5}$$

Коэффициенты Γ_{ij}^k, как и в классическом случае, будем называть символами Кристоффеля второго рода.

Римановой метрикой на микролинейном пространстве M будем называть такое отображение $g: M^D \times_M M^D \to R$, для которого выполняются следующие условия (см. [1]):

$$t = 0 \Rightarrow g(t,t) = 0, \tag{6}$$

$$t \neq 0 \Rightarrow g(t,t) > 0, \tag{7}$$

$$g(t_1 + t, t_2) = g(t_1,t_2) + g(t,t_2), \tag{8}$$

$$g(t_1, t + t_2) = g(t_1,t) + g(t_1,t_2), \tag{9}$$

$$g(\alpha \cdot t_1, t_2) = g(t_1, \alpha \cdot t_2) = \alpha \cdot g(t_1,t_2) \tag{10}$$

для любых $t, t_1, t_2 \in M^D$ и $\alpha \in R$.

2. Связность Леви-Чевита

Мы непосредственно подошли к цели этой статьи и сейчас дадим следующее:

Определение 1. Если на микролинейном пространстве M задана риманова метрика g, то будем говорить, что аффинная симметричная связность ∇ согласована с метрикой g, если

$$g(\nabla(t,t_1)(d), \nabla(t,t_2)(d)) = g(t_1,t_2) \tag{11}$$

для любых $t, t_1, t_2 \in M^D$ и $d \in D$. Связность ∇ в этом случае будем называть связностью Леви-Чевита.

Теорема 1. *Аффинная связность согласована с римановой метрикой на конечномерном R-модуле V тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il} = 0. \tag{12}$$

Здесь g_{ik} – обозначение для $g(x, e_i, e_k)$.

Доказательство. Пусть $\{e_1,...,e_n\}$ – базис на V, тогда каждый касательный вектор пространства V в точке x можно представить как пару $(x, \alpha^i e_i)$. Ограничимся рассмотрением пар вида (x, e_i). Заметим также из (4), что

$$\nabla((x,e_i),(x,e_j))(d) = (x + d \cdot e_i, e_j + d \cdot \nabla_x(e_i,e_j)).$$

Тогда

$$g(\nabla((x,e_k),(x,e_i))(d),\nabla((x,e_k),(x,e_j))(d)) = g(x+d\cdot e_k, e_i - d\cdot\Gamma^l_{ik}e_l, e_j - d\cdot\Gamma^l_{jk}e_l) =$$

$$g(x+d\cdot e_k, e_i, e_j - d\cdot\Gamma^l_{jk}e_l) - d\cdot\Gamma^l_{ik}g(x+d\cdot e_k, e_l, e_j - d\cdot\Gamma^l_{jk}e_l) =$$

$$g(x+d\cdot e_k, e_i, e_j) - d\cdot\Gamma^l_{ik}g(x+d\cdot e_k, e_l, e_j) - d\cdot\Gamma^l_{jk}g(x+d\cdot e_k, e_i, e_l) =$$

$$g(x,e_i,e_j) + d\cdot\frac{\partial g}{\partial x^k}(e_i,e_j) - d\cdot\Gamma^l_{ik}g(x,e_l,e_j) - d\cdot\Gamma^l_{jk}g(x,e_i,e_l) = g(x,e_i,e_j). \quad (13)$$

Отсюда для любого $d\in D$ выполняется равенство

$$d\cdot\frac{\partial g}{\partial x^k}(e_i,e_j) - d\cdot\Gamma^l_{ik}g(x,e_l,e_j) - d\cdot\Gamma^l_{jk}g(x,e_i,e_l) = 0. \quad (14)$$

А значит, и

$$\frac{\partial g}{\partial x^i}(e_j,e_k) - \Gamma^l_{ik}g(x,e_j,e_l) - \Gamma^l_{ij}g(x,e_l,e_k) = 0 \quad (15)$$

или

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik}g_{lj} - \Gamma^l_{jk}g_{il} = 0. \quad (16)$$

■

Предложение 1. *Если на конечномерном R-модуле V задана риманова метрика g, тогда на V существует и единственная симметричная аффинная связность, согласованная с этой метрикой. Эта связность в любой системе координат задается формулами*

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{li}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right). \quad (17)$$

Доказательство. Доказательство совпадает с классическим. ■

Литература

1. Guts A.K., Grinkevich E.B. *Toposes in General Theory of Relativity.* Preprint gr-qc/9610073 (1996).
2. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.