Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–7

УДК 517.91:510.642

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СИНТЕТИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЛОВЕРА-КОКА

А.А. Звягинцев

Theory of differential equations in intuitionistic Synthetic Differential Geometry of Kock-Lawvere is considered. The problem of solution uniquness is disscussed.

Как и в классическом случае, под дифференциальным уравнением первого порядка над многообразием (микролинейным пространством [1]) M будем понимать пару (M, X), состоящую из самого многообразия M и векторного поля X над ним, т. е. отображения вида $X : M \to T(M)$, здесь $T(M)$ – обозначение для M^D [2]. В свою очередь, морфизмом векторных полей $(M_1, X_1) \to (M_2, X_2)$ назовем такое отображение $f : M_1 \to M_2$, что коммутативен следующий квадрат:

$$\begin{array}{ccc} T(M_1) & \xrightarrow{Tf} & T(M_2) \\ X_1 \uparrow & & \uparrow X_2 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

Объединяя теперь эти определения, построим категорию обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1ODE), взяв в качестве объектов всевозможные пары вида (M, X), а в качестве морфизмов – морфизмы векторных полей.

1. Формальная теория дифференциальных уравнений первого и второго порядка [3]

Изучение свойств этой категории и будет составлять основную часть этого параграфа.

Следует заметить, что понятие решения дифференциального уравнения также можно записать внешним образом, т.е. через некоторую диаграмму в категории (1ODE). А именно, если $(M, X) \in Ob(1ODE)$, то его (глобальным) решением называется отображение из $(R, \frac{\partial}{\partial x})$ в (M, X).

Подобным образом 2ODE – категория дифференциальных уравнений второго порядка – обычно строится как категория векторных полей на $T(M)$, т.е. отображений вида

$$\xi : TM \to TTM$$

E-mail: zvyagin@math.omsu.omskreg.ru
Омский государственный университет

В качестве ее морфизмов берется такое отображение $f : M_1 \to M_2$, что коммутативен следующий квадрат:

$$\begin{array}{ccc} TT(M_1) & \xrightarrow{TTf} & TT(M_2) \\ \xi_1 \uparrow & & \uparrow \xi_2 \\ T(M_1) & \xrightarrow{Tf} & T(M_2) \end{array}$$

В отличие от решений уравнений первого порядка решения уравнений второго порядка в общем случае не являются гомоморфизмами из R, если, конечно, это уравнение не струя на M. Кроме того, верна следующая теорема.

Теорема 1 [3]. *Пусть $\xi : M^D \to M^{D_2}$ является объектом 2ODE на M, и $\tilde{\xi} : M^D \xrightarrow{\xi} M^{D_2} \xrightarrow{M^+} M^{D\times D}$ соответствует 1ODE на M^D, и пусть задан морфизм $y : R \to M$. Тогда, если y – решение 2ODE ξ, то $\dot{y}$: $R \to M^D$ – решение 1ODE $\tilde{\xi}$. Обратное верно, если M^+ мономорфизм.* ■

В контексте всего вышесказанного, необходимо потребовать, чтобы категория $\mathcal{E}$, являлась атомом, т.е. функтор $(-)^D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ имел бы не только левый присоединенный $- \times D$, но также и правый присоединенный $(-)^{1/D}$, который обычно называется дробной экспонентой (терминология Ловера). Подробнее о свойствах моделей, удовлетворяющих этому условию, можно прочитать в [1]. Обратимся теперь к категориям 1ODE и 2ODE, но вначале заметим (см. [1]), что дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентным образом можно определить как отображение

$$M^D \to M^{D_2},$$

которое «продолжает» 1-джет на 2-джет.

Определение 1. Предсвязностью на M называется отображение $\xi : M^{D(2)} \to M^{D\times D}$ такое, что

$$M^{D(2)} \xrightarrow{\xi} M^{D\times D} M^i {\to} M^{D(2)} = \mathrm{id}_{M^{D(2)}},$$

где $i : D(2) \to D \times D$ – каноническое включение.

Теорема 2 [3]. *Пусть $\mathcal{E}$ – топос Гротендика, который одновременно является моделью SDG, и пусть $\mathbf{G}$ – одна из следующих категорий:*
1. Векторных полей (1ODE) на $\mathcal{E}$;
2. Дифференциальных уравнений второго порядка (2ODE) на $\mathcal{E}$;
3. Предсвязностей на $\mathcal{E}$;
4. Струй на $\mathcal{E}$;
5. Аффинных связностей на $\mathcal{E}$.
Тогда $\mathbf{G}$ – топос Гротендика, и точный функтор $(M, \xi) \mapsto M$ является обратным образом неотъемлемой геометрической сюръекции $\mathcal{E} \to \mathbf{G}$. ■

2. Примеры и решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка

Важной задачей как классической, так и синтетической теории дифференциальных уравнений, базирующейся на Синтетической дифференциальной геометрии Ловера-Кока (СДГ) [2], является задача нахождения одного или нескольких решений некоторого дифференциального уравнения. Однако изложенная выше формальная теория не справляется с ней, поскольку порой поиск векторного поля, удовлетворяющего исходному уравнению, становится трудоемким, а иногда и неразрешимым процессом. Исходя из этого, введем иное определение дифференциального уравнения, основанное на понятии функции, определенной на $M|_U \times M^{D_n}$ со значениями в R. Здесь U подобъект объекта M. Далее будем считать, что $M = R$, а $U = [a, b]$.

Определение 2. Дифференциальным уравнением над кольцом R называется уравнение вида

$$F(t, y(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in [a, b]. \tag{$*$}$$

Определение 3. Функция $g : [a, b] \to R$ называется решением уравнения $(*)$, если

$$F(t, g(t), \ldots, g^{(n)}(t)) \equiv 0.$$

Перейдем теперь к интерпретации дифференциальных уравнений над кольцом R. Итак, пусть $y \in R^{[a,b]}$ и $F : R^{n+1} \to R$ – функция, определенная на многообразии $S = \{(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \mid t \in [a, b]\}$. Тогда дифференциальное уравнение

$$F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \tag{$*$}$$

на стадии lA перепишется в следующем виде:

$$F(x, t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \mod \pi^*(I). \tag{$**$}$$

Следовательно, решение уравнения $(*)$ — это класс $Y(x, t) \mod \pi^*(I)$, т.ч.

$$F\left(x, t, Y(x, t), \frac{\partial Y(x, t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^n Y(x, t)}{\partial t^n}\right) \equiv 0 \mod \pi^*(I).$$

Рассмотрим несколько важных примеров.

Пример 1. Найдем решение задачи Коши

$$\begin{gathered} y'(t) = y(t) \\ y(0) = a, \quad a \in R \end{gathered}$$

Решение. На стадии $lA = lC^\infty(\mathbf{R}^n)/I$ она запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial Y(x, t)}{\partial t} = Y(x, t) \mod \pi^*(I) \\ Y(x, 0) = A(x) \mod I, \quad A \in lC^\infty(\mathbf{R}^n). \end{gathered}$$

Решим вначале дифференциальное уравнение. Из доказательства истинности аксиомы интегрирования следует, что:

$$Y(x,t) = (Y(x,0) + \int\limits_0^t Y(x,s)\,ds) \mod \pi^*(I).$$

Отсюда видно, что решение д.у. = решение классического д.у. в частных производных $+ \mod \pi^*(I)$. Таким образом, достаточно решить дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial Y(x,t)}{\partial t} = Y(x,t).$$

Это классическое квазилинейное дифференциальное уравнение. Запишем уравнения характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{0} = \frac{dy}{y}.$$

Находя характеристики, имеем:

$$\{x = C_1, \quad \ln y - t = C_2\} \Rightarrow \Phi(x, \ln y - t) = 0,$$

$$\ln y - t = C(x) \Rightarrow \ln y = t + C(x) \Rightarrow y = e^{C(x)} e^t,$$

$$(e^{C(x)} = C_1(x)) \Rightarrow Y(x,t) = C_1(x) e^t.$$

Проверяем начальное условие:

$$Y(x,0) = A(x) \Rightarrow C_1(x) = A(x) \Rightarrow y(x,t) = A(x) \cdot e^t.$$

$\blacksquare$

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = c \cdot y$, где $c \in R$ – необратимо.

Решение. На стадии $lA = lC^\infty(\mathbf{R}^n)/I$ оно запишется следующим образом

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = C(u) \cdot Y(u,t) \mod \pi^*(I).$$

Очевидно, что $Y(u,t) = e^{t\ C(u)}$ — решение дифференциального уравнения. Положим, что $F(u,t)$ — решение дифференциального уравнения. Следовательно,

$$\frac{\partial F(u,t)}{\partial t} = C(u) \cdot F(u,t),$$

тогда запишем $F(u,t)$ в виде:

$$F(u,t) = \frac{F(u,t)}{e^{C(u)\cdot t}} \cdot e^{C(u)\cdot t}.$$

Очевидно, что $G(u,t) \overset{df}{=} \dfrac{F(u,t)}{e^{C(u)\cdot t}}$ — гладкая функция. Подставляем $F(u,t) = G(u,t)\cdot e^{t\cdot C(u)}$ в дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial(G(u,t)\cdot e^{t\cdot C(u)})}{\partial t} = C(u)\cdot G(u,t)\cdot e^{t\cdot C(u)}.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial G(u,t)}{\partial t}\right)\cdot e^{t\cdot C(u)} + C(u)G(u,t)\cdot e^{t\cdot C(u)} = C(u)\cdot G(u,t)\cdot e^{t\ C(u)}.$$

Отсюда получаем:

$$e^{t\cdot C(u)}\cdot\frac{\partial G(u,t)}{\partial t} = 0.$$

А следовательно:

$$\frac{\partial G(u,t)}{\partial t} = 0.$$

Это уравнение является классическим квазилинейным дифференциальным уравнением. Запишем его уравнение характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{0} = \frac{dG}{0}.$$

Находим характеристики:

$$u = C_1 \quad G = C_2.$$

Значит, $\Phi(u,G) = 0$. Тогда: $G(u,t) = C_1(u) \Rightarrow F(u,t) = C_1(u)\cdot e^{t\cdot C(u)}$.
Совершая обратный переход из модели в теорию, получаем:

$$f = C_1(u)\cdot e^{t\cdot C(u)} \mod \pi^*(I) = c_1\cdot e^{c\cdot t},$$

здесь c_1 – произвольный элемент кольца R.

В случае, если $c = 0$, получаем, что $f = c_1$. То есть всякое решение уравнения $y' = 0$ есть константа. ■

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$d\cdot y'(t) = y(t), \tag{1}$$

где $d \in D \overset{df}{=} \{x \in R \mid x^2 = 0\}$.

Решение. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения (1).

Теперь умножим на d обе части равенства. Тогда слева будет стоять выражение

$$d\cdot d\cdot y'(t), \tag{2}$$

а справа

$$d\cdot y(t).$$

Так как $d \cdot d$ равно нулю (по определению d), тогда

$$d \cdot y(t) = 0. \tag{3}$$

Взяв производную от выражения (3), получим, что

$$d \cdot y'(t) = 0. \tag{4}$$

Если $g : R \to R$ решение уравнения (1), то для него выполнено и уравнение (4). Отсюда следует, что $g = 0$. Таким образом, получили, что уравнение (1) имеет единственное решение, равное нулю. ∎

Но не для всякой задачи Коши первого порядка можно найти точное решение.

Пример 4. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$d \cdot y'(t) = y^2(t), \tag{5}$$

где $d \in D \overset{df}{=} \{x \in R \mid x^2 = 0\}$.

Решение. Очевидно, что $y = 0$ является решением уравнения (5). Теперь умножим на d обе части равенства. Тогда слева будет стоять выражение

$$d \cdot d \cdot y'(t), \tag{6}$$

а справа

$$d \cdot y^2(t).$$

Так как $d \cdot d$ равно нулю (по определению d), тогда

$$d \cdot y^2(t) = 0. \tag{7}$$

Взяв производную от выражения (7), получим, что

$$2 \cdot d \cdot y(t) \cdot y'(t) = 0. \tag{8}$$

Если $g : R \to R$ решение уравнения (5), то для него выполнено и уравнение (8). Отсюда следует, что $g^3 = 0$. Таким образом, получили, что решением уравнения (5) является некоторая функция $g : R \to D_2$.
Кроме этого, для уравнения (5) можно указать в явном виде ненулевое решение

$$d_1 \cdot \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right) + \frac{d}{2} \cdot f(t),$$

где d_1 – произвольный элемент D, а $f : R \to R$ – произвольная функция. Таким образом, добавление одного начального условия к уравнению (5) однозначно не определяет решение полученной задачи Коши. Следовательно, теорема о единственности решения для

$$\begin{gathered} d \cdot y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = a,\ a \in D_2 \end{gathered}$$

не выполняется. ∎

Обобщая последние два примера, получим следующий

Принцип 1. *Если* $y : R \to R$ *является решением уравнения*

$$d \cdot y'(t) = y^n(t),$$

где $d \in D$, *то* $y^{2n-1} = 0$.

Заменяя теперь D на D_k, получаем

Принцип 2. *Если* $y : R \to R$ *является решением уравнения*

$$d \cdot y'(t) = y^n(t),$$

где $d \in D_k$, *то* $y^{k \cdot n + (n-k)} = 0$.

Литература

1. Moerdijk I., Reyes G.E. *Models for Smooth Infinitesimal Analysis.* Springer-Verlag, 1991.
2. Kock A. *Synthetic Differential Geometry.* Cambridge University Press, 1981.
3. Kock A., Reyes G.E. *Aspects of Fractional Exponent Fuctors* // Theory and Applications of Categories. 1999, V.5, No.10.