Математические структуры и моделирование
2002, вып. 9, с. 1–5

УДК 378.147:539.196

ЗАДАЧИ С ЭЛЕМЕНТАМИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ

М.П. Ланкина

In this article is presented one example of estimation task on physics solution as the means of projective and cognitive skills formation on the way of physicist training.

Среди особенностей деятельности преподавателей высшей школы выделяют проектировочные, гностические, организаторские и коммуникативные умения [1]. К проектировочным умениям относят целеполагание в информационном поиске, умения строить умозаключения по аналогии, опираться на интуицию в научном поиске, открывать новые связи элементов проблемы, формулировать гипотезы исследования, находить способы проверки гипотез, планировать научный поиск, сравнивать несходные явления, мысленно представить результат, построить его модель. К гностическим относят умения воспринимать возникновение проблемной ситуации, формулировать проблему, решать ее известным способом, находить новые способы решения проблемы путем выдвижения гипотез, обосновать гипотезу, проверить найденное решение.

Рассмотрев все виды учебных физических задач, можно заметить, что процесс решения оценочных задач наиболее полно включает в себя комплекс перечисленных умений. Кроме того, каждая оценочная задача позволяет диагностировать уровень сформированности целого ряда понятий, представлений о явлениях, усвоения различных физических законов, умений выделять существенные факторы при построении моделей.

Для того чтобы студент-физик мог успешно решать учебные, а на старших курсах — научные задачи, формирование перечисленных умений должно начинаться еще в школе. В частности, формирование умений 1) найти в окружающем мире физическую проблему (в ходе наблюдения или эксперимента); 2) сформулировать условие и требование задачи текстом (качественно); 3) построить модель явления; 4) перевести условие и требование задачи в количественную форму; 5) решить задачу любым доступным обучаемому способом; 6) объяснить результаты, обсудить условия применимости выбранной модели.

В качестве примера рассмотрим задачу-оценку, придерживаясь указанной последовательности действий.

1. Гудит водопроводная труба. Почему? — физическая проблема найдена в ходе наблюдений.

© **2002 М.П. Ланкина**
E-mail: lankina@univer.omsk.su
Омский государственный университет

2. Сформулируем задачу — оценить частоту излучаемой звуковой волны.

3. Построим модель явления. Предложим один из возможных механизмов возникновения звука в водопроводных трубах.

При увеличении скорости потока в местах сужений в трубах может возникнуть турбулентность, которая приводит к кавитации — образованию в жидкости разрывов сплошности с появлением полостей (кавитационных пузырьков), заполненных газом, паром или их смесью, в результате местного понижения давления [2]. Кавитация возникает в тех участках потока, где давление понижается до некоторого критического значения $P_{\text{кр}}$. Минимумы давления возникают на криволинейных твердых телах, а при наличии сильной завихренности — и во внутренних областях жидкости. При этом присутствующие в жидкости пузырьки газа или пара, двигаясь с потоком жидкости и попадая в области давления $P < P_{\text{кр}}$, приобретают способность к росту. После перехода в область, где $P > P_{\text{кр}}$, рост пузырька прекращается, и он начинает сокращаться. Сокращение кавитационного пузырька происходит с большой скоростью и сопровождается звуковым импульсом тем более сильным, чем меньше газа содержит пузырек.

Если степень развития кавитации такова, что возникает и схлопывается множество пузырьков, то явление сопровождается сильным шумом со сплошным спектром от нескольких сотен Гц до сотен кГц. Спектр расширяется в область низких частот по мере увеличения максимального радиуса пузырька [2]. Колебания пузырьков усиливаются трубами, а также стенами, полами, потолками, к которым трубы прикреплены [3].

Этот механизм возникновения звука позволяет рассмотреть явление кавитации и целый ряд связанных с ним понятий и законов: ламинарное, турбулентное течения, закон Бернулли, гидравлический удар, звуковая волна, акустический резонанс в трубе, стоячая и бегущая волны и многие другие.

Задача о схлопывании кавитационного пузырька в жидкости впервые была рассмотрена Рэлеем в 1917 году. Он использовал гидродинамическую модель, в которой жидкость считалась идеальной, несжимаемой и безграничной; предполагалось, что внутри пузырька вакуум и пузырек сохраняет сферическую форму в течение всего процесса схлопывания, а давление в жидкости вдали от пузырька (в бесконечности) постоянно.

4, 5. Количественная формулировка задачи и решение. Время схлопывания пузырька тем больше, чем больше его первоначальный радиус a, плотность жидкости ρ и чем меньше давление в жидкости P_0 вдали от пузырька. Пусть в первом приближении от других параметров это время не зависит.

Школьники могут использовать метод размерностей.

$$\tau = a^x \rho^y P_0^z \Longrightarrow M^{y+z} L^{x-3y-z} T^{-2z} = T \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y+z=0 \\ x-3y-z=0 \\ -2z=1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=-\frac{1}{2}; \\ y=\frac{1}{2}; \\ x=1 \end{array} \right.$$

$$\tau = a\sqrt{\frac{\rho}{P_0}}, \tag{1}$$

тогда частоту звуковой волны, которая при этом возникает, можно оценить $\nu \sim \tau^{-1}$. Взяв для оценки $P_0 \sim 10^5$ Па, $\rho \sim 10^3$кг/м^3, $a \sim 10^{-2}$ м, получим $\nu \sim 10^3$ Гц, тогда длина звуковой волны $\lambda = c/\nu \approx 1,4$м, где $c = 1400$м/с — скорость звука в воде.

Для студентов возможен более сложный вариант математической постановки задачи. Студент может повторить решение задачи Рэлея. Он записывает уравнение движения единицы объема жидкости. Для идеальной жидкости это уравнение Эйлера [4]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P. \tag{2}$$

Из несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиуса a. Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполняется жидкостью.

Движение жидкости после образования полости будет центрально-симметричным со скоростями, направленными в каждой точке по радиусу к центру. Уравнение Эйлера в сферических координатах для радиальной составляющей скорости $v_r \equiv v < 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}. \tag{3}$$

Уравнение непрерывности дает:

$$r^2 v = F(t), \tag{4}$$

где $F(t)$ — произвольная функция времени; (4) выражает тот факт, что в силу несжимаемости жидкости объем, протекающий через сферу любого радиуса, не зависит от этого радиуса. Из (4) следует: $v = F(t)/r^2$, подставим это в (3):

$$\frac{\dot{F}}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}. \tag{5}$$

Проинтегрируем это уравнение по r от ∞ до $R(t)$ при $a \geq R(t)$ — радиуса заполняющейся полости. Интегрирование дает:

$$-\frac{\dot{F}}{R(t)} + \frac{V^2}{2} = \frac{P_0}{\rho}, \tag{6}$$

где $V = \dot{R}$ — скорость изменения радиуса полости. Граничные условия: $V(\infty) = 0, P(R) = 0, P(\infty) = P_0$. На поверхности полости: $F(t) = R^2(t)V(t)$, подставим в (6):

$$-\frac{R}{2}\frac{d(V^2)}{dR} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{3V^2}{2} \tag{7}$$

— уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его при начальном условии $V = 0$ при $R = a$ (в начальный момент жидкость покоилась).

Интегрирование и потенцирование дает

$$\frac{2}{3}\frac{P_0}{\rho}\Big(\frac{a}{R}\Big)^3 = V^2 + \frac{2}{3}\frac{P_0}{\rho} \implies V = \dot{R} = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{P_0}{\rho}\left[\Big(\frac{a}{R}\Big)^3 - 1\right]}.$$

Время заполнения полости

$$\tau = \int\limits_0^a \frac{dR}{V} = \sqrt{\frac{3\rho}{2P_0}}\int\limits_0^a dR[(\frac{a}{R})^3 - 1]^{-\frac{1}{2}}.$$

Интегрирование дает

$$\tau = \sqrt{\frac{3a^2\rho\pi}{2P_0}}\frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})} = 0,915a\sqrt{\frac{\rho}{P_0}}. \qquad (8)$$

При прежних значениях P_0, ρ и a время $\tau \sim 9,15 \cdot 10^{-4}c$, частота $\nu = \tau^{-1} \sim 1,1 \cdot 10^3$Гц, $\lambda = c/\nu = 1,28$м.

6. Задача Рэлея, конечно, дает заниженную оценку времени схлопывания пузырька. Реальная жидкость имеет вязкость, теплопроводность, сжимаемость; внутри кавитационного пузырька имеется некоторое количество пара и газов; изменение давления, обусловливающее сокращение пузырька, происходит не скачком, а с некоторой конечной скоростью. Эти отклонения от модели Рэлея должны увеличивать время сокращения пузырька.

Усложним нашу модель. Учтем противодавление пара, содержащегося в пузырьке. Жидкость будем считать по-прежнему идеальной, т.е. не учитываем процессы теплопроводности и вязкости. Иначе говоря, движение идеальной жидкости считаем адиабатическим. Значит, и процесс сжатия пара будем считать адиабатическим.

В правой части уравнения (5) произойдет изменение

$$\frac{\dot{F}}{r^2} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(P - P_{\text{пара}})}{\partial r}. \qquad (9)$$

Уравнение Пуассона для адиабатического процесса:

$$P_{\text{пара}} = P^0_{\text{пара}}\Big(\frac{a}{r}\Big)^{3\gamma},$$

где $P^0_{\text{пара}}$ — давление пара в начальном состоянии. Интегрирование (9) по r с учетом $V = 0$ при $R = a$ дает

$$-\frac{\dot{F}}{R} + \frac{V^2}{2} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{P^0_{\text{пара}}}{\rho}\left[\Big(\frac{a}{R}\Big)^{3\gamma} - 1\right].$$

Подставим $F(t)$, получим

$$R\frac{d(V^2)}{dR} = -3V^2 - \frac{2P^0_{\text{пара}}}{\rho}\Big(\frac{a}{R}\Big)^{3\gamma} - 2\frac{P_0 - P^0_{\text{пара}}}{\rho}.$$

Обозначим $y \equiv V^2; x \equiv R \implies$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = -\frac{2P^0_{\text{пара}}a^{3\gamma}}{\rho}\frac{1}{x^{3\gamma+1}} - \frac{2(P_0 - P^0_{\text{пара}})}{\rho x}. \tag{10}$$

Решение этого уравнения:

$$y = \frac{2P^0_{\text{пара}}}{3\rho(\gamma-1)}\left(\frac{a}{x}\right)^{3\gamma} + \left[\frac{2(P_0 - P^0_{\text{пара}})}{\rho} - \frac{2P^0_{\text{пара}}}{3\rho(\gamma-1)}\right]\left(\frac{a}{x}\right)^3 - \frac{2(P_0 - P^0_{\text{пара}})}{\rho}. \tag{11}$$

Время схлопывания

$$\tau = \int \frac{dR}{V} = \int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{y}}. \tag{12}$$

Введем обозначение: $A = 3(\gamma-1)(P_0 - P^0_{\text{пара}})/P^0_{\text{пара}}$, тогда (12) дает:

$$\tau = \sqrt{\frac{3\rho(\gamma-1)}{2P^0_{\text{пара}}}}a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k(A-1)^{n-k}A^k}{3\gamma/2+1+3n(\gamma-1)+3k}. \tag{13}$$

Для оценок возьмем $\rho \sim 10^3$кг/м^3, $P_0 \sim 10^5$Па, $\gamma = 1,32$ для H_2O, $P^0_{\text{пара}} \sim 10^3$Па, тогда $\tau \sim 1,1 \cdot 10^{-3}c$; $\nu \approx 910$Гц; $\lambda \approx 1,54$м.

Следующим шагом усложнения модели может быть учет конечности диаметра трубы. Предполагаем, что центр пузырька находится на оси трубы. В этом случае пузырек можно считать по-прежнему сферически симметричным. Если скорость схлопывания полости V значительно меньше скорости звука в воде, то сжимаемость воды можно не учитывать.

На следующем этапе усложнения модели можно показать несущественность растяжимости труб и влияния поля тяготения на процесс распространения звуковой волны в воде, учесть распределение пузырьков по размерам и т.д.

Модель явления можно усложнять сколь угодно долго, учитывая все новые и новые факторы. Любая оценочная задача дает в этом отношении неисчерпаемые возможности. Поэтому задачи-оценки включаются в процесс подготовки физиков как на пропедевтическом этапе обучения в физико-математических классах, так и на формирующем этапе в университете.

Литература

1. Есарева З.Ф. *Особенности деятельности преподавателя высшей школы.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1974. 112 с.
2. *Физическая энциклопедия. Т.II.* /Гл. ред. А.М. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1990. 703 с.
3. Уокер Дж. *Физический фейерверк.* М.: Мир, 1979. 288 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика:* Учеб. пособ. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.