

СИММЕТРИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, НЕ ВЫВОДЯЩЕЕ ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ЗА ПРЕДЕЛЫ КОНУСА

А.К. Гуц

We study a control dynamic system in \mathbb{R}^3 that is symmetric with respect to Lie group G which acts simple transitively and affinely in \mathbb{R}^3 and linear with respect to control parameters. The purpose is discription of all convex cones in which lies the system trajectory.

Введение

Пусть дана задача оптимального управления

$$\int_0^T s(x, u) dt \rightarrow inf$$

при условии, что

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ x(0) = a, \\ x(T) = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^r. \end{cases} \quad (1)$$

В случае, когда функции s, f линейны относительно u , т.е. $s(x, u) = S(x) + Au + a$, $f(x, u) = F(x) + Bu + b$, и множество U является выпуклым многогранником (или выпуклым компактом), то эта задача сводится к следующей [1–3]:

$$J[x(\cdot)] = \int_{x(\cdot)} \omega \rightarrow inf \quad (2)$$

при условии, что

$$\dot{x} \in K_{x(t)}, \quad t \in [0, 1], \quad (3)$$

$$x(0) = a, \quad x(1) = b, \quad (4)$$

где ω – дифференциальная 1-форма на n -мерном гладком многообразии $X \approx \mathbb{R}^n$, K_x выпуклый конус в каждой точке $x \in X$ и лежащий в касательном пространстве $T_x X$.

Таким образом, управление $u \in U$ в виде (1) сводится к управлению в форме задания семейства выпуклых конусов $\mathcal{K} = \{K_x \subset T_x X : x \in X\}$.

© 2002 А.К. Гуц

E-mail: guts@univer.omsk.su

Омский государственный университет

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 01-01-00303).

1. Симметричное управление

Группа Ли G действует на многообразии X , если каждому $g \in G$ соответствует диффеоморфизм $\alpha(g) : X \rightarrow X$ такой, что произведению gh отвечает композиция $\alpha(g) \circ \alpha(h)$ диффеоморфизмов, а единице $e \in G$ – тождественное отображение $id_X : X \rightarrow X$. Иначе говоря, действие G на X – это гомоморфизм $\alpha : G \rightarrow Diff(X)$.

Определение 1. Управление динамической системой (2)–(4) называется *симметричным* относительно действия группы G , если для любого $g \in G$

$$d\alpha(g)_x[K_x] = K_{[\alpha(g)](x)} \quad (5)$$

и

$$\alpha^*(g)[\omega_{[\alpha(g)](x)}] = \omega_x. \quad (6)$$

Здесь $d\alpha(g)_x$ – дифференциал диффеоморфизма $\alpha(g)$ в точке $x \in X$, а $\alpha^*(g)_x : T_{[\alpha(g)](x)}^*X \rightarrow T_x^*X$ соответствующий кодифференциал.

2. Упорядоченное симметричное управление

Пусть X и семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x \subset X : x \in X\}$ задает порядок в X , т.е. выполняются условия:

- 1) $x \in P_x$;
- 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$;
- 3) если $y \neq x$, то $P_y \not\subset P_x$.

Мы будем предполагать далее, что $X = \mathbb{R}^n$ и группа Ли G действует просто транзитивно на X . Зафиксируем точку $a \in X$. Тогда имеем диффеоморфизм

$$\varphi : G \cong \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

$$\varphi(g) = [\alpha(g)](a), \quad \varphi(e) = [\alpha(e)](a) = a.$$

Определение 2. Порядок \mathcal{P} инвариантен относительно действия группы G (G -инвариантный порядок), если для любой точки $x \in X$ и любого $g \in G$

$$\alpha(g)[P_x] = P_{[\alpha(g)](x)}. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться, что если \mathcal{P} – G -инвариантный порядок на X , то $S = \varphi^{-1}(P_a)$ – подполугруппа группы G .

Касательный объект к S – это множество вида $L(S) = \{\xi \in \mathfrak{g} : \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} n\xi_n, \exp \xi_n \in S\}$, где \mathfrak{g} алгебра Ли группы Ли G .

Контингенция множества P_x в точке x – это совокупность векторов, касательных в точке x к гладким кривым, исходящим из точки x и лежащим в P_x . Для контингенции используем обозначение: $cont(\mathcal{P}, x)$. Известно, что $K_x = cont(\mathcal{P}, x)$ – замкнутый выпуклый конус, лежащий в T_xX .

Ясно,

$$d\varphi_e[L(S)] = K_a \quad \text{и} \quad d\varphi_g[d(l_g)_e[L(S)]] = d\alpha(g)_a[K_a] = K_x, \quad (9)$$

$$x = \alpha(g)(a),$$

где $l_g : G \rightarrow G$ левый сдвиг на g .

Предложение 1. Пусть подполугруппа S порождает G . Тогда $L(S) = \{\xi \in \mathfrak{g} : \exp(\mathbb{R}^+) \xi \subset \overline{S}\}$, т.е. $\exp[L(S)] \subset \overline{S}$. ■

Мы можем использовать семейство $\mathcal{K}(\mathcal{P}) = \{K_x : x \in X\}$, $K_x = \text{cont}(\mathcal{P}, x)$ в качестве управления для динамической системы (3)–(4).

Определение 2. Управление $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ называется *упорядоченным*, если \mathcal{P} задает порядок на X .

Предложение 2. Если порядок \mathcal{P} инвариантен относительно группы G , то очевидно, что $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ -управляемая система симметрична относительно действия группы G .

Доказательство. Это очевидно, поскольку из (9) вытекает (5). ■

Предложение 3. Если порядок \mathcal{P} , $P_a \neq \emptyset$, инвариантен относительно группы G , то $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ -управляемая система (3)–(4) не выходит за пределы множества $\overline{P_a}$.

Доказательство. Следует из условия 2) в определении порядка, определения контингенции, формул (9) и предложения 1. ■

3. Упорядоченное аффинное управление

Пусть действие группы Ли G на $X = \mathbb{R}^3$ является *аффинным*, т.е. $\alpha : G \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^3)$. Просто транзитивное аффинное действие α порождает полную левоинвариантную аффинную структуру \mathcal{A} на самой группе Ли G . Действительно, диффеоморфизм

$$\begin{aligned} \phi : G \cong \mathbb{R}^3, \quad \varphi(g) = [\alpha(g)](0, 0, 0) = (x^1, x^2, x^3) = x \in \mathbb{R}^3, \\ \phi(e) = a = (0, 0, 0) \end{aligned} \quad (10)$$

можно использовать для задания глобальной аффинной системы координат на G , в которых левые сдвиги $l_h : G \rightarrow G$, $l_h(g) = hg$ имеет вид

$$[l_h]^k(g) = [l_h]^k(\phi^{-1}(x^1, x^2, x^3)) = \sum_{i=1}^3 L_i^k x^i + L^i \quad (k = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Предположим, что порядок \mathcal{P} в \mathbb{R}^3 является *коническим*, т.е. состоит из замкнутых выпуклых конусов. Тогда можно отождествить $P_x = K_x$.

Предложение 4. Если порядок \mathcal{P} инвариантен относительно просто транзитивного аффинного действия группы Ли G , то $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ -управляемая система (3)–(4) не выходит за пределы конуса K_a . ■

Поставим задачу описать все конусы K_a в \mathbb{R}^3 , за которые не выходит $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ -управляемая система, эволюционирующая в \mathbb{R}^3 . Данная задача сводится к задаче классификации и описания всех G -инвариантных конических порядков в

пространстве \mathbb{R}^3 относительно разрешимых¹ односвязных 3-мерных групп Ли, действующих аффинно и просто транзитивно на \mathbb{R}^3 . Такое описание содержится в работе [5], а краткая формулировка результата приводится в следующей теореме 1.

Теорема 1. *Если G_3 не является группой Гейзенберга, тогда G_3 допускает левоинвариантный эллиптический конический порядок относительно полной левоинвариантной аффинной структуры \mathcal{A} , содержащей канонические координаты 2-го рода. Следовательно, $X = \mathbb{R}^3$ допускает G_3 -инвариантный эллиптический конический порядок. При этом аффинное просто транзитивное действие α , соответствующее аффинной структуре \mathcal{A} , является нормальным² и строится на основе метода Ямагучи [6].* ■

4. Упорядоченное однородное аффинное управление

Если потребовать, чтобы упорядоченное аффинное управление было не только симметричным, но и *однородным*, т.е. либо внутри (*Int-однородность*), либо на границе, за исключением вершины (*∂ -однородность*) конуса K_a , либо вне $K_a \cup K_a^-$ (*ext-однородность*)³ действовала транзитивно аффинная группа $Aut(\mathcal{P})_a \subset Aff(\mathbb{R}^3)$, состоящая из порядковых автоморфизмов⁴, то необходимо найти описание всех *однородных аффинных причинных порядков* на 3-мерных разрешимых группах Ли. Эта задача решена в статье [8] следующим образом.

Пусть \mathcal{A}_γ – полная левоинвариантная аффинная структура на разрешимой группе Ли G_3 , которая вводится с помощью метода С.П.Гаврилова [7]. Эта структура определяет естественное просто транзитивное аффинное действие α_γ в \mathbb{R}^3 . В статье [7] С.П.Гаврилов описывает $\alpha_\gamma(G_3)$ -инвариантные лоренцевы метрики в \mathbb{R}^3 . Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – такая метрика. Конус $P_x \subset \mathbb{R}^3$ назовем *причинным*, если луч из P_x исходит в направлении ξ , лежащем в фиксированной половине касательного конуса $K_x = \{\zeta : \langle \zeta, \zeta \rangle_x \geq 0\}$. Порядок \mathcal{P} в \mathbb{R}^3 называется *аффинно причинным*, если он состоит из множества эллиптических причинных конусов $\{P_x : x \in \mathbb{R}^3\}$.

Теорема 2. *Пусть \mathcal{P} аффинно причинный порядок относительно аффинной структуры Гаврилова \mathcal{A}_γ . Тогда для связных односвязных разрешимых групп Ли G_3 типа I, VI₀, VII₀ класса I (см. [7]) порядок \mathcal{P} является одновременно Int-, ∂ - и ext-однородными. Соответствующие лоренцевы метрики плоские. Для остальных типов групп Ли порядок \mathcal{P} не является однородным ни в одном из указанных выше смыслах.*

Доказательство. Дано в статье [8]. ■

¹Разрешимость есть следствие диффеоморфности (7).

²Просто транзитивное аффинное действие α на \mathbb{R}^3 и соответствующая аффинная структура на G_3 называются нормальными, если $\alpha(g)$ – параллельный перенос для любого $g \in T$, где T – максимальная абелева нормальная подгруппа группы G_3 .

³Здесь K_a^- – конус центрально симметричный K_a относительно точки a .

⁴Аффинное преобразование $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ является порядковым автоморфизмом, если $A(P_x) = P_{A(x)}$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеликин М.И. *Синтез оптимальных траекторий на пространствах представлений групп Ли* // Мат. сб. 1987. Т.132. С.541–555.
2. Зеликин М.И. *Необходимые условия для оптимальности особых траекторий в линейной задаче управления* // Некоторые вопросы современного анализа / Ред. В.М.Тихомиров. МГУ, мехмат, 1984. С.35–41.
3. Zelikin M.I. *Totally extremal manifolds for optimal control problems* // Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis (ed. K.H.Hofmann, J.D.Lawson, E.B.Vinberg). De Gruyter Expositions in Mathematics. Berlin, 1995. 368 pp. P.339–354.
4. Винберг Э.Б. *Инвариантные конусы и упорядочивание в группах Ли* // Функ. анализ и прилож. 1980. Т.14. С.1–13.
5. Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Грибанова И.А. *Описание аффинных конических порядков на трехмерных разрешимых группах Ли* // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНТИ 15.06.94, N 1467–В94. 35 с.
6. Yamaguchi S. *On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups.* // Mem. Fac. Sci. Kyuchi Univ. 1979. Ser.A33. P.209–218.
7. Гаврилов С.П. *Левосинвариантные метрики на разрешимых односвязных 3-мерных группах Ли* // Теория относительности и гравитация (Казань). 1985. Вып.22. С.31–64.
8. Гуц А.К., Ермакова Е.В. *Однородные аффинные причинные порядки на трехмерных разрешимых группах Ли* // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНТИ 05.07.93, N 1841–В93. 42 с.