

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ: VI. ВОСЬМИМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Периодическая система химических элементов представляется в рамках весовой диаграммы алгебры Ли четвёртого ранга группы вращений 8-мерного псевдоевклидова пространства. Дается интерпретация спина как четвёртого генератора подалгебры Картана, двум собственным значениям которого соответствуют две 3-мерные проекции весовой диаграммы, содержащие элементы периодической системы от водорода до московия (первая проекция) и от гелия до оганессона (вторая проекция). Одним из главных преимуществ предложенной теоретико-групповой конструкции периодической системы является естественное включение антиматерии в общую схему.

Ключевые слова: периодическая система, алгебра Ли, весовая диаграмма, подалгебра Картана, спин, антиматерия.

Введение

Исторически сложилось так, что графическое представление периодического закона имеет очень важное значение. Первоначальные таблицы Менделеева и Мейера, помимо наглядного визуального образа, обозначают распределение химических элементов согласно периодам, группам и подгруппам, а также содержат связи между гомологичными элементами, что позволило Д.И. Менделееву предсказать новые на тот момент времени элементы (галлий и германий). Однако уже с первых лет после появления таблицы Менделеева (1869) стали предприниматься попытки выхода за пределы 2-мерного табличного представления. Так, в 1882 г. появляется пирамидальная модель Бэйли, далее усовершенствованная И. Томсеном (1895) и Н. Бором (1922). Более того, ранее таблиц Менделеева и Мейера появляются винтовые и спиральные модели («теллуrow винт» Шанкуртуа (1862) и спираль Хинрикса (1867)). Спираль – это 2-мерная фигура, в то время как винт имеет три измерения. Обе конструкции были использованы для того, чтобы дать чёткое представление о периодической системе элементов. Преимущество как спиральной, так и винтовой (спиралевидной) систем заключается в том, что они образуют единое целое. Проекцией винта на плоскость является спираль. Винтовая система обеспечивает дополнительное средство выражения аналогий в свойствах и, что также важно, различий. Поскольку это преимущество изначально недооценивалось, винт использовался ре-

же, чем спираль. Только после открытия изотопов некоторые исследователи пришли к выводу, что форма винта позволяет решить проблему включения изотопов в периодическую систему Менделеева. О различных графических представлениях периодической системы см. [1–3].

Главной особенностью перечисленных выше моделей (табличных, пирамидальных, спиральных и винтовых) является построение системы химических элементов в зависимости от возрастания атомного веса. Однако квантовая механика и первое построение квантовомеханической модели атома (модель Бора) привели к пониманию, что главной структурной характеристикой периодического закона является не линейное возрастание атомного веса, а структура, определяемая порядком квантовых чисел. Одним из первых, кто это осознал, был немецкий математик Г. Генцель. Во введении к статье [4] Г. Генцель пишет: «Прежние представления о периодической системе элементов как таблицы с горизонтальными и вертикальными рядами и столбцами (Мейер – Менделеев) или с соединительными линиями между родственными элементами¹ уже не соответствуют нынешнему пониманию систематики элементов, поскольку не согласуются с результатами волновой механики и их выводами, которые в достаточной мере справедливо отражают химию и физику периодической системы. Исходя из элементарной геометрической конфигурации концентрических правильных многоугольников, получается многослойная плоскость, на которой эти многоугольники с нечётным числом углов распределяются таким образом, что каждый многоугольник окружён контуром предыдущего. Эта плоскость, которая, таким образом, берет своё начало из одного из первых объектов геометрии, оказывается подходящим носителем системы химических элементов, поскольку её структура и топология полностью соответствуют теоремам, управляющим этой системой». В 1943 г. В. Финке в статье [5] представляет систему кругов и колец Генцеля в пространстве. Трёхмерная система Финке, подобно винту по отношению к спирали в системах, построенных согласно возрастанию атомного веса, обеспечивает дополнительное средство выражения аналогий в свойствах (линии Бэйли – Томсена – Бора). Однако общим недостатком систем Генцеля и Финке является искусственное представление четвёртого квантового числа s (спин) в виде двух точек на трансверсалах.

Настоящая статья является продолжением серии работ [6–11], в которых предпринимается попытка построения периодической системы химических элементов в рамках весовой диаграммы групповой алгебры некоторой группы симметрии. Так, в статье [11] построена весовая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$ конформной группы $SO(4, 2)$. Поскольку $\mathfrak{so}(4, 2)$ является алгеброй третьего ранга, весовая диаграмма ($SO(4, 2)$ -башня) определена в 3-мерном весовом пространстве, в котором координатными осями выступают три генератора, образующие подалгебру Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 2)$. Однако для теоретико-группового описания структуры периодической системы, определяемой четвёркой квантовых чисел (n, l, m, s) , алгебры третьего ранга недостаточно. Необходим переход к алгебре Ли четвёртого ранга. В п. 5 настоящей статьи рассматривается группа вращений $SO(4, 4)$ 8-мерного псев-

¹Здесь, по всей видимости, Г. Генцель имеет в виду уже упоминавшиеся выше пирамидальные модели периодической системы Бэйли, Томсена и Бора, в которых родственные (гомологичные) элементы соединялись линиями.

доевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(4,4)$ группы $SO(4,4)$ имеет четвёртый ранг. Четвёртый генератор $\mathbf{L}_{78}$ (понимаемый как генератор спина) подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4,4)$ коммутирует со всеми 15 генераторами подалгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Как следствие, базис алгебры двулистного накрытия $\mathbf{Spin}_+(4,4)$ расщепляется на два структурно идентичных базиса, каждый из которых изоморфен базису Яо [?] для групповой алгебры группы $\mathbf{Spin}_+(4,2) \simeq SU(2,2)$, накрывающей конформную группу. Это позволяет построить две 3-мерные проекции весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4,4)$ с использованием базиса Маделунга. Первая проекция содержит все элементы периодической системы со значением спина $s = -1/2$, начиная с водорода **H** ($Z = 1$) до московия **Mc** ($Z = 115$), вторая проекция содержит все элементы со значением $s = +1/2$, начиная с гелия **He** ($Z = 2$) до оганессона **Og** ($Z = 118$).

1. Polygonfläche Генцеля

Главной идеей статьи [4] является расположение химических элементов периодической системы согласно квантовым числам n , l , m и s , которые Г. Генцель обозначает n_1 , n_2 , n_3 и n_4 ². Как известно, диапазоны изменения квантовых чисел следующие:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots, \nu, \dots, \\ l &= 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1), \\ s &= -1/2, +1/2. \end{aligned}$$

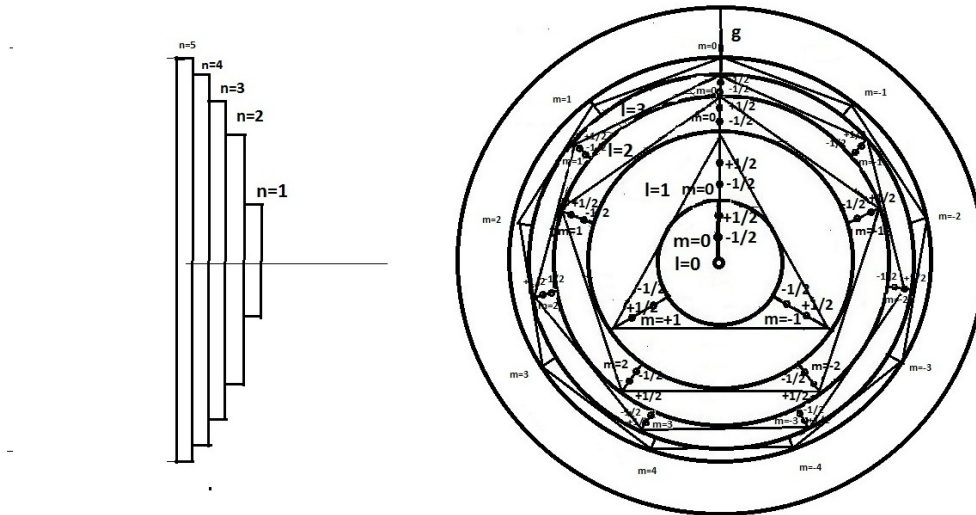


Рис. 1. Круги и кольца Генцеля

Общая схема строения листов и колец Генцеля представлена на рис. 1. Ряд наложенных друг на друга плоских листов (кругов) пронумерован снизу вверх: $n =$

²Далее мы будем придерживаться стандартных обозначений n , l , m , s .

$1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$ Все листы содержат единичный круг, площадь которого обозначена $l = 0$, и полупрямую g с направлением $m = 0$. Единичный круг самого нижнего листа $n = 1$ разрезается по его краю и прикрепляется к листу $n = 2$, находящемуся над ним, так что из области $n = 1, l = 0$ можно выйти только забравшись на лист $n = 2$. На этом листе единичная окружность $n = 2, l = 0$ вписана в равносторонний треугольник (с углом, лежащем на g). Площадь кольца между единичной окружностью и окружностью, описанной вокруг треугольника, обозначается $l = 1$. В ней отмечены три трансверсали (поперечные линии) к углам: $m = 0, \pm 1$. Внешний край кольца $l = 1$ прикреплён к плоскости $n = 3$. Она содержит единичный круг $l = 0$, первое круговое кольцо $l = 1$ с треугольными трансверсалими $m = 0, \pm 1$ и второе круговое кольцо $l = 2$ с пятиугольными трансверсалими $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Внешний край кольца $l = 2$ соединён с плоскостью $n = 4$ и т. д. В общем случае лист $n = \nu$ содержит круговые кольца $l = 0, 1, 2, \dots, \nu - 1$ и содержащиеся в них трансверсали $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\nu - 1)$.

Согласно рис. 1 предполагается, что на каждой трансверсали в отдельных круговых кольцах существует две симметрично расположенные точки, которые отличаются друг от друга четвёртым квантовым числом $s = \pm 1/2$ (спин). Все эти точки называются точками собственных значений Polygonfläche, а их четвёрки являются собственными значениями квантовой системы. Система собственных значений распределяется на поверхности следующим образом: на нижнем листе $n = 1$ имеется две точки собственных значений $n = 1, l = 0, m = 0, s = \pm 1/2$. На втором листе – 8 точек: $n = 2, l = 0, m = 0, s = \pm 1/2$; $l = 1, m = 0, \pm 1, s = \pm 1/2$. На третьем листе имеется 18 точек. В общем случае лист $n = \nu$ содержит $2\nu^2$ точек собственных значений. При этом данный лист n содержит кольца от $l = 0$ до $l = n - 1$, и в каждом кольце с номером l имеется $2l + 1$ трансверсалий так, что плоскость n содержит $\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1)$ трансверсалий каждая.

На рис. 2 показано применение Polygonfläche к периодической системе химических элементов.

В нижнем листе $n = 1$ лежат одно- и двухэлектронные системы (**H** и **He**), выше в $n = 2$ – восьмизрядная последовательность от лития к неону, на следующем листе – восемнадцатизрядная последовательность и т. д. На момент написания Г. Генцелем статьи [4] (1942) было известно только 94 элемента. С учётом современного знания периодической системы на рис. 2 представлено следующее расширение Polygonfläche: 1) добавлено 24 новых элемента, начиная от америция **Am** ($Z = 95$) до оганессона **Og** ($Z = 118$), что привело к расширению листа $n = 5$ до кольца $l = 3$ и листа $n = 7$ до кольца $l = 2$; 2) добавлен лист $n = 8, l = 0$, содержащий два гипотетических элемента **Uue** ($Z = 119$) и **Ubn** ($Z = 120$), поскольку эти элементы логически завершают f -оболочку.

2. Трёхмерная система Финке

В этом же году (1943) в «Zeitschrift für Physik» выходит статья В. Финке [5], посвящённая замечаниям по Polygonfläche Генцеля. Во-первых, В. Финке приводит Polygonfläche в соответствие с правилом Маделунга. Во-вторых, раздвигает в пространстве круги Генцеля, образуя тем самым 3-мерное представление периоди-

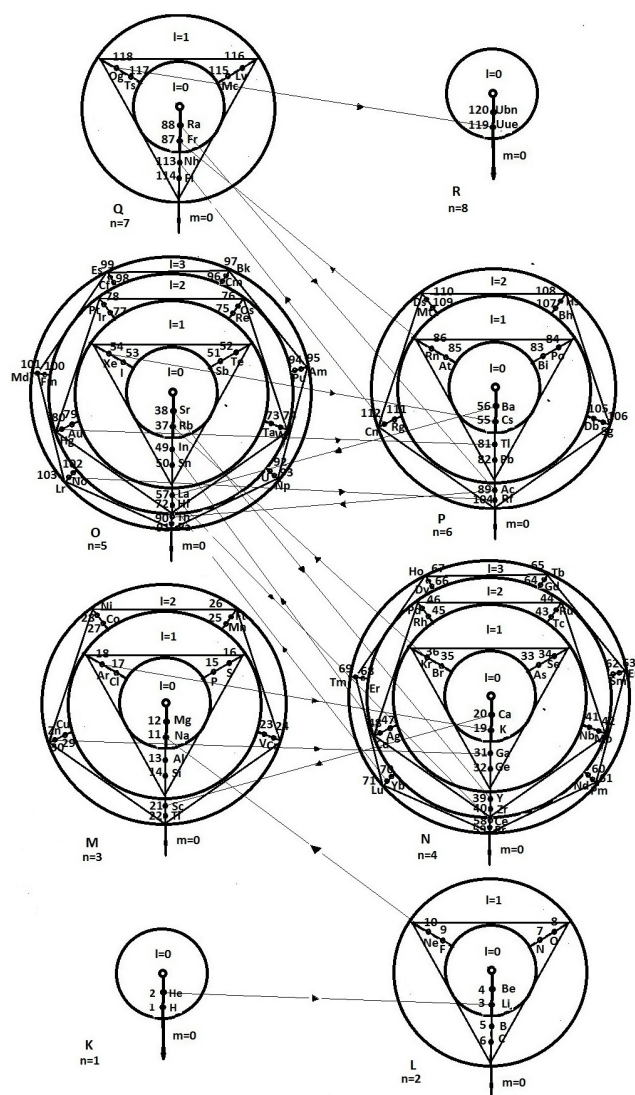


Рис. 2. Polygonfläche и периодическая система.

ческой системы³ (см. рис. 3). Среди главных преимуществ 3-мерного представления следует отметить появление графической связи между гомологичными элементами (линии Бэйли – Томсена – Бора). Однако при этом теряется порядок заполнения квантовых уровней (кругов и колец Генцеля) периодической системы, который в Polygonfläche осуществляется с помощью направленных линий (см. рис. 2). В связи с этим, обе системы (Г. Генцеля и В. Финке) следует рассматривать как взаимодополняющие. Так же как и в случае с Polygonfläche, к системе Финке на рис. 3 добавлены неизвестные на момент 1943 г. элементы, т. е. расширены круги *O* и *Q*, а также добавлен круг *R* с гипотетическими элементами.

³ Следует отметить, что 3-мерность Polygonfläche уже подразумевалась Г. Генцелем, исходя из строения многослойной поверхности, показанной на рис. 1.

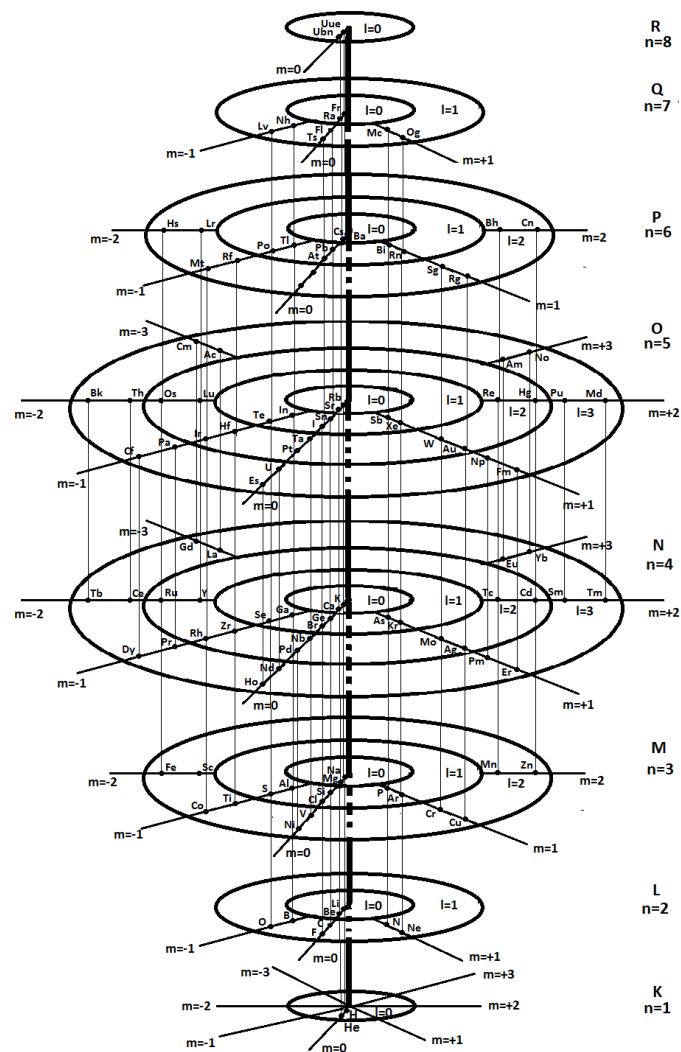


Рис. 3. Трёхмерная система Финке

3. Общее замечание к системам Генцеля и Финке

В обеих системах первые три квантовые числа n , l и m имеют ясное геометрическое представление, первоначально заимствованное Н. Бором в его планетарной модели атома из небесной механики (радиальные и азимутальные движения). В отличие от них четвертое квантовое число s (спин) на плоскости (Polygonfläche) или в пространстве (система Финке) имеет явно искусственное представление в виде двух точек на трансверсалиях. Всё это говорит о том, что понятие спина не вмещается в 3-мерное представление. Поэтому все попытки дать механическую интерпретацию спина в рамках 3-мерного пространства не имели успеха (например, первоначальное представление Уленбека – Гаудсмита о вращающемся волчке). *Спин – это объект 4-мерного мира*, или, может быть, более правильно, *эффект четвертого измерения*.

4. Группа $SO(4, 4)$

Специальная псевдоортогональная группа в восьми измерениях, $SO(4, 4)$, соответствует группе вращений 8-мерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{4,4}$, или эквивалентно множеству 8×8 ортогональных матриц, оставляющих квадратичную форму

$$Q(\mathbf{r}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r},$$

где $\mathbf{r} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T$, инвариантной.

Структура соответствующей алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$ определяется коммутационными свойствами её генераторов $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$. $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ образуют базис алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$. Число независимых генераторов легко найти: из 64 возможных комбинаций индексов α и β восемь комбинаций исчезают в силу $\mathbf{L}_{\alpha\alpha} = 0$, это уменьшает число генераторов до 56. Более того, в силу $\mathbf{L}_{\alpha\beta} = -\mathbf{L}_{\beta\alpha}$ остаётся только 28 независимых генераторов, число которых также может быть получено с помощью формулы $n(n-1)/2$, где $n = p + q$ – размерность пространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Таким образом,

$$\mathbf{L} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{L}_{12} & \mathbf{L}_{13} & \mathbf{L}_{14} & \mathbf{L}_{15} & \mathbf{L}_{16} & \mathbf{L}_{17} & \mathbf{L}_{18} \\ & 0 & \mathbf{L}_{23} & \mathbf{L}_{24} & \mathbf{L}_{25} & \mathbf{L}_{26} & \mathbf{L}_{27} & \mathbf{L}_{28} \\ & & 0 & \mathbf{L}_{34} & \mathbf{L}_{35} & \mathbf{L}_{36} & \mathbf{L}_{37} & \mathbf{L}_{38} \\ & & & 0 & \mathbf{L}_{45} & \mathbf{L}_{46} & \mathbf{L}_{47} & \mathbf{L}_{48} \\ & & & & 0 & \mathbf{L}_{56} & \mathbf{L}_{57} & \mathbf{L}_{58} \\ & & & & & 0 & \mathbf{L}_{67} & \mathbf{L}_{68} \\ & & & & & & 0 & \mathbf{L}_{78} \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Система 28 генераторов $\mathbf{L}_{\alpha\beta}$ алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ удовлетворяет следующим перестановочным соотношениям:

$$[\mathbf{L}_{\alpha\beta}, \mathbf{L}_{\gamma\delta}] = i (g_{\alpha\delta} \mathbf{L}_{\beta\gamma} + g_{\beta\gamma} \mathbf{L}_{\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma} \mathbf{L}_{\beta\delta} - g_{\beta\delta} \mathbf{L}_{\alpha\gamma}), \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, 8$, $\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \delta$, при этом $g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$, $g_{55} = g_{66} = g_{77} = g_{88} = -1$. Таким образом, имеем 28-мерную алгебру Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$.

Найдём максимальное подмножество коммутирующих генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$. Как известно, два генератора коммутируют, если они не имеют общих индексов. Легко видеть, что среди генераторов алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ этому условию удовлетворяют четыре генератора:

$$\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}. \quad (3)$$

Четвёрка генераторов $\{\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}\}$ образует базис максимальной абелевой подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$ (подалгебры Картана). Генераторы (3) называются генераторами Картана. Размерность подалгебры $\mathfrak{K}$ определяет ранг алгебры Ли, следовательно, $\mathfrak{so}(4, 4)$ является алгеброй Ли четвёртого ранга. Таким образом, все корневые и весовые диаграммы для $\mathfrak{so}(4, 2)$ будут 4-мерными⁴.

⁴Как следствие, это исключает явную визуализацию этих диаграмм для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$.

Составим базис алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ относительно максимальной компактной подгруппы

$$K = \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$$

группы $\mathrm{SO}(4, 4)$ посредством следующих линейных комбинаций:

$${}^1\mathbf{K}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{23} + \mathbf{L}_{14}), \quad {}^1\mathbf{K}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{31} + \mathbf{L}_{24}), \quad {}^1\mathbf{K}_3 = 1/2 (\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_{34}), \quad (4)$$

$${}^1\mathbf{J}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{23} - \mathbf{L}_{14}), \quad {}^1\mathbf{J}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{31} - \mathbf{L}_{24}), \quad {}^1\mathbf{J}_3 = 1/2 (\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{34}), \quad (5)$$

$${}^1\mathbf{T}_1 = 1/2 (-\mathbf{L}_{15} - \mathbf{L}_{26}), \quad {}^1\mathbf{T}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}), \quad {}^1\mathbf{T}_0 = 1/2 (-\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}), \quad (6)$$

$${}^1\mathbf{S}_1 = 1/2 (-\mathbf{L}_{15} + \mathbf{L}_{26}), \quad {}^1\mathbf{S}_2 = 1/2 (-\mathbf{L}_{25} - \mathbf{L}_{16}), \quad {}^1\mathbf{S}_0 = 1/2 (\mathbf{L}_{12} - \mathbf{L}_{56}), \quad (7)$$

$${}^1\mathbf{P}_1 = 1/2 (-\mathbf{L}_{35} - \mathbf{L}_{46}), \quad {}^1\mathbf{P}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{45} - \mathbf{L}_{36}), \quad {}^1\mathbf{P}_0 = 1/2 (-\mathbf{L}_{34} - \mathbf{L}_{56}), \quad (8)$$

$${}^1\mathbf{Q}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{35} - \mathbf{L}_{46}), \quad {}^1\mathbf{Q}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{45} + \mathbf{L}_{36}), \quad {}^1\mathbf{Q}_0 = 1/2 (\mathbf{L}_{34} - \mathbf{L}_{56}), \quad (9)$$

$${}^2\mathbf{K}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{67} + \mathbf{L}_{58}), \quad {}^2\mathbf{K}_2 = 1/2 (-\mathbf{L}_{57} + \mathbf{L}_{68}), \quad {}^2\mathbf{K}_3 = 1/2 (\mathbf{L}_{56} + \mathbf{L}_{78}), \quad (10)$$

$${}^2\mathbf{J}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{67} - \mathbf{L}_{58}), \quad {}^2\mathbf{J}_2 = 1/2 (-\mathbf{L}_{57} - \mathbf{L}_{68}), \quad {}^2\mathbf{J}_3 = 1/2 (\mathbf{L}_{56} - \mathbf{L}_{78}), \quad (11)$$

$${}^2\mathbf{T}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{17} + \mathbf{L}_{28}), \quad {}^2\mathbf{T}_2 = 1/2 (-\mathbf{L}_{27} + \mathbf{L}_{18}), \quad {}^2\mathbf{T}_0 = 1/2 (\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_{78}), \quad (12)$$

$${}^2\mathbf{S}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{17} - \mathbf{L}_{28}), \quad {}^2\mathbf{S}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{27} + \mathbf{L}_{18}), \quad {}^2\mathbf{S}_0 = 1/2 (-\mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_{78}), \quad (13)$$

$${}^2\mathbf{P}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{37} + \mathbf{L}_{48}), \quad {}^2\mathbf{P}_2 = 1/2 (-\mathbf{L}_{47} + \mathbf{L}_{38}), \quad {}^2\mathbf{P}_0 = 1/2 (\mathbf{L}_{34} + \mathbf{L}_{78}), \quad (14)$$

$${}^2\mathbf{Q}_1 = 1/2 (\mathbf{L}_{37} - \mathbf{L}_{48}), \quad {}^2\mathbf{Q}_2 = 1/2 (\mathbf{L}_{47} + \mathbf{L}_{38}), \quad {}^2\mathbf{Q}_0 = 1/2 (-\mathbf{L}_{34} + \mathbf{L}_{78}). \quad (15)$$

Базис (4)–(15) содержит 36 генераторов, что создаёт избыточную систему для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$, поскольку последняя состоит из 28 независимых генераторов. Базис алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ можно получить из (4)–(15), исключив восемь генераторов с помощью соотношений

$${}^1\mathbf{J}_3 + {}^1\mathbf{K}_3 = {}^1\mathbf{S}_0 - {}^1\mathbf{T}_0 = {}^2\mathbf{T}_0 - {}^2\mathbf{S}_0 = \mathbf{L}_{12}, \quad (16)$$

$${}^1\mathbf{J}_3 - {}^1\mathbf{K}_3 = {}^1\mathbf{P}_0 - {}^1\mathbf{Q}_0 = {}^2\mathbf{Q}_0 - {}^2\mathbf{P}_0 = -\mathbf{L}_{34}, \quad (17)$$

$${}^1\mathbf{P}_0 + {}^1\mathbf{Q}_0 = {}^1\mathbf{S}_0 + {}^1\mathbf{T}_0 = -{}^2\mathbf{K}_3 - {}^2\mathbf{J}_3 = -\mathbf{L}_{56}, \quad (18)$$

$${}^2\mathbf{K}_3 - {}^2\mathbf{J}_3 = {}^2\mathbf{T}_0 + {}^2\mathbf{S}_0 = {}^2\mathbf{P}_0 + {}^2\mathbf{Q}_0 = \mathbf{L}_{78}. \quad (19)$$

Это сводит число генераторов до 28, как и должно быть для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$. Таким образом, множество из двенадцати генераторов ${}^1\mathbf{K}_3, {}^1\mathbf{J}_3, {}^1\mathbf{T}_0, {}^1\mathbf{S}_0, {}^1\mathbf{P}_0, {}^1\mathbf{Q}_0, {}^2\mathbf{K}_3, {}^2\mathbf{J}_3, {}^2\mathbf{T}_0, {}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{P}_0, {}^2\mathbf{Q}_0$ в силу соотношений (16)–(19) эмулирует подалгебру Картана $\mathfrak{K} = \{\mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 4)$.

Из оставшихся 24 генераторов базиса (4)–(15) образуем генераторы Вейля посредством следующих линейных комбинаций:

$${}^1\mathbf{J}_\pm = {}^1\mathbf{J}_1 \pm i {}^1\mathbf{J}_2, \quad {}^1\mathbf{P}_\pm = {}^1\mathbf{P}_1 \pm i {}^1\mathbf{P}_2, \quad {}^1\mathbf{S}_\pm = {}^1\mathbf{S}_1 \pm i {}^1\mathbf{S}_2, \quad (20)$$

$${}^1\mathbf{K}_\pm = {}^1\mathbf{K}_1 \pm i {}^1\mathbf{K}_2, \quad {}^1\mathbf{Q}_\pm = {}^1\mathbf{Q}_1 \pm i {}^1\mathbf{Q}_2, \quad {}^1\mathbf{T}_\pm = {}^1\mathbf{T}_1 \pm i {}^1\mathbf{T}_2, \quad (21)$$

$${}^2\mathbf{J}_\pm = {}^2\mathbf{J}_1 \pm i {}^2\mathbf{J}_2, \quad {}^2\mathbf{P}_\pm = {}^2\mathbf{P}_1 \pm i {}^2\mathbf{P}_2, \quad {}^2\mathbf{S}_\pm = {}^2\mathbf{S}_1 \pm i {}^2\mathbf{S}_2, \quad (22)$$

$${}^2\mathbf{K}_{\pm} = {}^2\mathbf{K}_1 \pm i^2\mathbf{K}_2, \quad {}^2\mathbf{Q}_{\pm} = {}^2\mathbf{Q}_1 \pm i^2\mathbf{Q}_2, \quad {}^2\mathbf{T}_{\pm} = {}^2\mathbf{T}_1 \pm i^2\mathbf{T}_2. \quad (23)$$

12 генераторов (20)–(21) являются генераторами Вейля подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ (алгебры Ли конформной группы $SO(4, 2)$). Подробное исследование структуры генераторов Вейля (20)–(21) в зависимости от различных подалгебр алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ содержится в [10].

Как уже отмечалось выше, четыре генератора (3) являются *генераторами Картана* подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4, 4)$. Они образуют базис 4-мерной ортогональной системы координат и располагаются в начале координат корневой диаграммы. Наряду с оставшимися 24 *генераторами Вейля* (20)–(23) они образуют *базис Картана – Вейля* для алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$:

$$\{ \mathbf{L}_{12}, \mathbf{L}_{34}, \mathbf{L}_{56}, \mathbf{L}_{78}, {}^1\mathbf{K}_+, {}^1\mathbf{K}_-, {}^1\mathbf{J}_+, {}^1\mathbf{J}_-, {}^1\mathbf{T}_+, {}^1\mathbf{T}_-, {}^1\mathbf{S}_+, {}^1\mathbf{S}_-, {}^1\mathbf{P}_+, {}^1\mathbf{P}_-, {}^1\mathbf{Q}_+, {}^1\mathbf{Q}_-, {}^2\mathbf{K}_+, {}^2\mathbf{K}_-, {}^2\mathbf{J}_+, {}^2\mathbf{J}_-, {}^2\mathbf{T}_+, {}^2\mathbf{T}_-, {}^2\mathbf{S}_+, {}^2\mathbf{S}_-, {}^2\mathbf{P}_+, {}^2\mathbf{P}_-, {}^2\mathbf{Q}_+, {}^2\mathbf{Q}_- \}. \quad (24)$$

Структура базиса (4)–(15) определяется следующими коммутационными соотношениями:

$$[{}^1\mathbf{K}_1, {}^1\mathbf{K}_2] = -i^1\mathbf{K}_2, \quad [{}^1\mathbf{K}_2, {}^1\mathbf{K}_3] = -i^1\mathbf{K}_1, \quad [{}^1\mathbf{K}_3, {}^1\mathbf{K}_1] = -i^1\mathbf{K}_2, \quad (25)$$

$$[{}^1\mathbf{J}_1, {}^1\mathbf{J}_2] = -i^1\mathbf{J}_2, \quad [{}^1\mathbf{J}_2, {}^1\mathbf{J}_3] = -i^1\mathbf{J}_1, \quad [{}^1\mathbf{J}_3, {}^1\mathbf{J}_1] = -i^1\mathbf{J}_2, \quad (26)$$

$$[{}^1\mathbf{K}_i, {}^1\mathbf{J}_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (27)$$

$$[{}^1\mathbf{T}_1, {}^1\mathbf{T}_2] = i^1\mathbf{T}_2, \quad [{}^1\mathbf{T}_2, {}^1\mathbf{T}_0] = -i^1\mathbf{T}_1, \quad [{}^1\mathbf{T}_0, {}^1\mathbf{T}_1] = -i^1\mathbf{T}_2, \quad (28)$$

$$[{}^1\mathbf{S}_1, {}^1\mathbf{S}_2] = i^1\mathbf{S}_2, \quad [{}^1\mathbf{S}_2, {}^1\mathbf{S}_0] = -i^1\mathbf{S}_1, \quad [{}^1\mathbf{S}_0, {}^1\mathbf{S}_1] = -i^1\mathbf{S}_2, \quad (29)$$

$$[{}^1\mathbf{T}_i, {}^1\mathbf{S}_j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad (30)$$

$$[{}^1\mathbf{P}_1, {}^1\mathbf{P}_2] = i^1\mathbf{P}_2, \quad [{}^1\mathbf{P}_2, {}^1\mathbf{P}_0] = -i^1\mathbf{P}_1, \quad [{}^1\mathbf{P}_0, {}^1\mathbf{P}_1] = -i^1\mathbf{P}_2, \quad (31)$$

$$[{}^1\mathbf{Q}_1, {}^1\mathbf{Q}_2] = i^1\mathbf{Q}_2, \quad [{}^1\mathbf{Q}_2, {}^1\mathbf{Q}_0] = -i^1\mathbf{Q}_1, \quad [{}^1\mathbf{Q}_0, {}^1\mathbf{Q}_1] = -i^1\mathbf{Q}_2, \quad (32)$$

$$[{}^1\mathbf{P}_i, {}^1\mathbf{Q}_j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad (33)$$

$$[{}^2\mathbf{K}_1, {}^2\mathbf{K}_2] = i^2\mathbf{K}_2, \quad [{}^2\mathbf{K}_2, {}^2\mathbf{K}_3] = i^2\mathbf{K}_1, \quad [{}^2\mathbf{K}_3, {}^2\mathbf{K}_1] = i^2\mathbf{K}_2, \quad (34)$$

$$[{}^2\mathbf{J}_1, {}^2\mathbf{J}_2] = i^2\mathbf{J}_2, \quad [{}^2\mathbf{J}_2, {}^2\mathbf{J}_3] = i^2\mathbf{J}_1, \quad [{}^2\mathbf{J}_3, {}^2\mathbf{J}_1] = i^2\mathbf{J}_2, \quad (35)$$

$$[{}^2\mathbf{K}_i, {}^2\mathbf{J}_j] = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (36)$$

$$[{}^2\mathbf{T}_1, {}^2\mathbf{T}_2] = -i^2\mathbf{T}_2, \quad [{}^2\mathbf{T}_2, {}^2\mathbf{T}_0] = i^2\mathbf{T}_1, \quad [{}^2\mathbf{T}_0, {}^2\mathbf{T}_1] = i^2\mathbf{T}_2, \quad (37)$$

$$[{}^2\mathbf{S}_1, {}^2\mathbf{S}_2] = -i^2\mathbf{S}_2, \quad [{}^2\mathbf{S}_2, {}^2\mathbf{S}_0] = i^2\mathbf{S}_1, \quad [{}^2\mathbf{S}_0, {}^2\mathbf{S}_1] = i^2\mathbf{S}_2, \quad (38)$$

$$[{}^2\mathbf{T}_i, {}^2\mathbf{S}_j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2), \quad (39)$$

$$[{}^2\mathbf{P}_1, {}^2\mathbf{P}_2] = -i^2\mathbf{P}_2, \quad [{}^2\mathbf{P}_2, {}^2\mathbf{P}_0] = i^2\mathbf{P}_1, \quad [{}^2\mathbf{P}_0, {}^2\mathbf{P}_1] = i^2\mathbf{P}_2, \quad (40)$$

$$[{}^2\mathbf{Q}_1, {}^2\mathbf{Q}_2] = -i^2\mathbf{Q}_2, \quad [{}^2\mathbf{Q}_2, {}^2\mathbf{Q}_0] = i^2\mathbf{Q}_1, \quad [{}^2\mathbf{Q}_0, {}^2\mathbf{Q}_1] = i^2\mathbf{Q}_2, \quad (41)$$

$$[{}^2\mathbf{P}_i, {}^2\mathbf{Q}_j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2). \quad (42)$$

В силу соотношений (25)–(27) генераторы ${}^1\mathbf{K}$ и ${}^1\mathbf{J}$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(4)$ подгруппы $SO(4)$, при этом в силу (27) ${}^1\mathbf{K}$ и ${}^1\mathbf{J}$ образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ подгруппы $SO(4)$ изоморфна прямой сумме

$$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \quad (43)$$

Далее, в силу соотношений (28)–(30) и (31)–(33) генераторы ${}^1\mathbf{T}$, ${}^1\mathbf{S}$ и ${}^1\mathbf{P}$, ${}^1\mathbf{Q}$ образуют алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 2)$ подгрупп $SO(2, 2)$, при этом в силу (30) (соотв. 33) генераторы ${}^1\mathbf{T}$, ${}^1\mathbf{S}$ (соотв. ${}^1\mathbf{P}$, ${}^1\mathbf{Q}$) образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(2, 1)$. Следовательно, по аналогии с алгеброй $\mathfrak{so}(4)$ получим алгебру Ли $\mathfrak{so}(2, 2)$, которая локально изоморфна прямой сумме двух алгебр $\mathfrak{so}(2, 1)$:

$$\mathfrak{so}(2, 2) \simeq \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathfrak{so}(2, 1). \quad (44)$$

Совокупность генераторов (4)–(9) и соответствующие коммутационные соотношения (25)–(33) описывают базис Яо [?] алгебры Ли $\mathfrak{su}(2, 2) \simeq \mathfrak{so}(4, 2)$ группы псевдоунитарных унимодулярных матриц,

$$SU(2, 2) \simeq \mathbf{Spin}_+(2, 4) = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_4 : \det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = 1 \right\}$$

являющейся двулистным накрытием конформной группы. $SU(2, 2)$ является группой преобразований 4-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^4$ (твисторного пространства), оставляющей инвариантной квадратичную форму $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 - |Z_3|^2 - |Z_4|^2$. При этом *твисторы* (векторы пространства $\mathbb{C}^4$) определяются как редуцированные спиноры для конформной группы (см. Приложение Б в [12]).

Легко видеть, что генераторы (10)–(15) второй половины базиса (4)–(15) в силу коммутационных соотношений (34)–(42) описывают базис, структурно идентичный (с обратным знаком) базису Яо. Таким образом, *базис (4)–(15) алгебры Ли спинорной группы*

$$\mathbf{Spin}_+(4, 4) = \{s \in \text{Mat}_8(\mathbb{R}) \oplus \text{Mat}_8(\mathbb{R}) \mid N(s) = 1\}.$$

имеет структуру, расщеплённую на две половины.

5. Спин как четвёртый генератор подалгебры Картана

Как уже отмечалось выше в п. 4, в системах Генцеля и Финке четвёртое квантовое число s , обозначаемое в обеих системах двумя точками на трансверсалиях, не имеет ясного геометрического представления. Как следствие, никакая 3-мерная система не является полным представлением периодического закона. Спин s есть четвёртая степень свободы, поэтому для его адекватного представления требуется 4-мерная система. Ниже мы покажем, что такой системой является весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$.

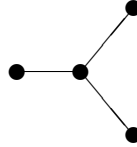
Четыре генератора (3) образуют базис подалгебры Картана $\mathfrak{K}$ алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$, среди которых первые три генератора составляют базис подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ (алгебра Ли конформной группы $SO(4, 2)$). Согласно *водородной реализации* алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ (представление Барута [13, 14], см. также [10]) первый генератор $\mathbf{L}_{12}$ соответствует третьей компоненте углового момента, $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_3$, второй

генератор $\mathbf{L}_{34}$ соответствует третьей компоненте вектора Лапласа – Рунге – Ленца, $\mathbf{L}_{34} = \mathbf{A}_3$. Наконец, третий генератор $\mathbf{L}_{56}$ задаёт третью компоненту радиальной части волновой функции водородоподобной системы, $\mathbf{L}_{56} = \Delta_3$. В свою очередь, генераторы $\mathbf{L}_3$ и $\mathbf{A}_3$ образуют базис подалгебры Картана алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$ группы $SO(4)$, в рамках которой В. Паули [15] объяснил полное вырождение спектра водорода. Три генератора $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{34}$ и $\mathbf{L}_{56}$ образуют базис 3-мерной системы координат, в которой строится весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$ в виде двойной опрокинутой пирамиды ($SO(4, 2)$ -башня) (см. рис. 6 в [11]). Собственные значения генераторов $\mathbf{L}_{56}$, $\mathbf{L}_{12}$, $\mathbf{L}_{34}$ соответствуют квантовым числам n, l, m . Включение четвёртого генератора $\mathbf{L}_{78}$ приводит к 8-мерному обобщению $\mathfrak{so}(4, 4)$, что позволяет отождествить собственные значения генератора $\mathbf{L}_{78}$ с четвёртым квантовым числом s . Таким образом,

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{56} &\longrightarrow n, \\ \mathbf{L}_{12} &\longrightarrow l, \\ \mathbf{L}_{34} &\longrightarrow m, \\ \mathbf{L}_{78} &\longrightarrow s.\end{aligned}$$

6. Весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$

В отличие от весовой диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, 2)$, допускающей визуализацию в 3-мерном пространстве [11], весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ определена в 4-мерном пространстве, что, естественно, существенным образом затрудняет её непосредственную визуализацию. Диаграмма Дынкина алгебры $\mathfrak{so}(4, 4) \simeq D_4$ имеет вид



Однако, используя свойства базиса (4)–(15) алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$, заключающееся в расщеплении на два структурно идентичных (изоморфных) базиса Яо подалгебры $\mathfrak{so}(4, 2)$, мы можем частично визуализировать весовую диаграмму алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ посредством *двух 3-мерных проекций*.

Весовое пространство определяется четырьмя генераторами Картана $\mathbf{L}_{56} = \Delta_3$, $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_{34} = \mathbf{A}_3$ и $\mathbf{L}_{78}$, которые служат базисом 4-мерной ортогональной системы координат. Определим кет-вектор

$$\left| \nu, \dot{\nu}; \lambda, \dot{\lambda}; \mu, \dot{\mu}; \sigma, \dot{\sigma} \right\rangle, \quad (45)$$

где $\nu, \dot{\nu} \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$, $\lambda \in \{-\nu, -\nu + 1, \dots, \nu - 1, \nu\}$, $\dot{\lambda} \in \{-\dot{\nu}, -\dot{\nu} + 1, \dots, \dot{\nu} - 1, \dot{\nu}\}$, $\mu \in \{-\lambda, -\lambda + 1, \dots, \lambda - 1, \lambda\}$, $\dot{\mu} \in \{-\dot{\lambda}, -\dot{\lambda} + 1, \dots, \dot{\lambda} - 1, \dot{\lambda}\}$, $\sigma, \dot{\sigma} \in \{-1/2, +1/2\}$.

Связь чисел, входящих в кет-вектор (45), с квантовыми числами n, l, m и s кет-вектора

$$|n, l, m, s\rangle \quad (46)$$

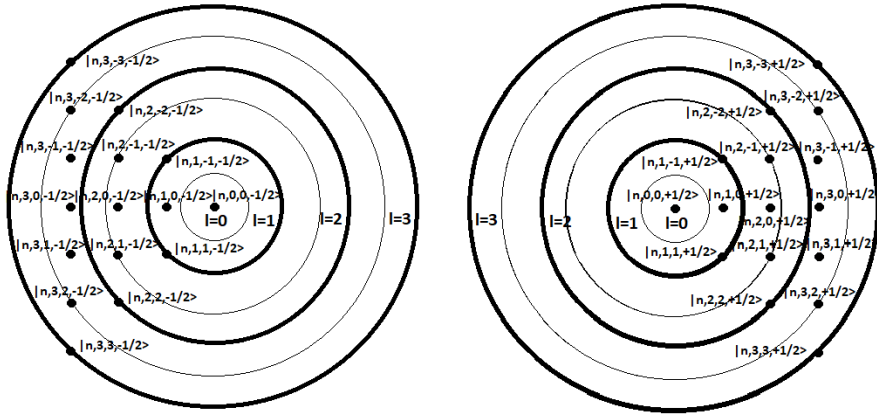


Рис. 4. Двумерные сечения 3-мерных проекций весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$ с кет-векторами $|n, l, m, -1/2\rangle$ и $|n, l, m, +1/2\rangle$

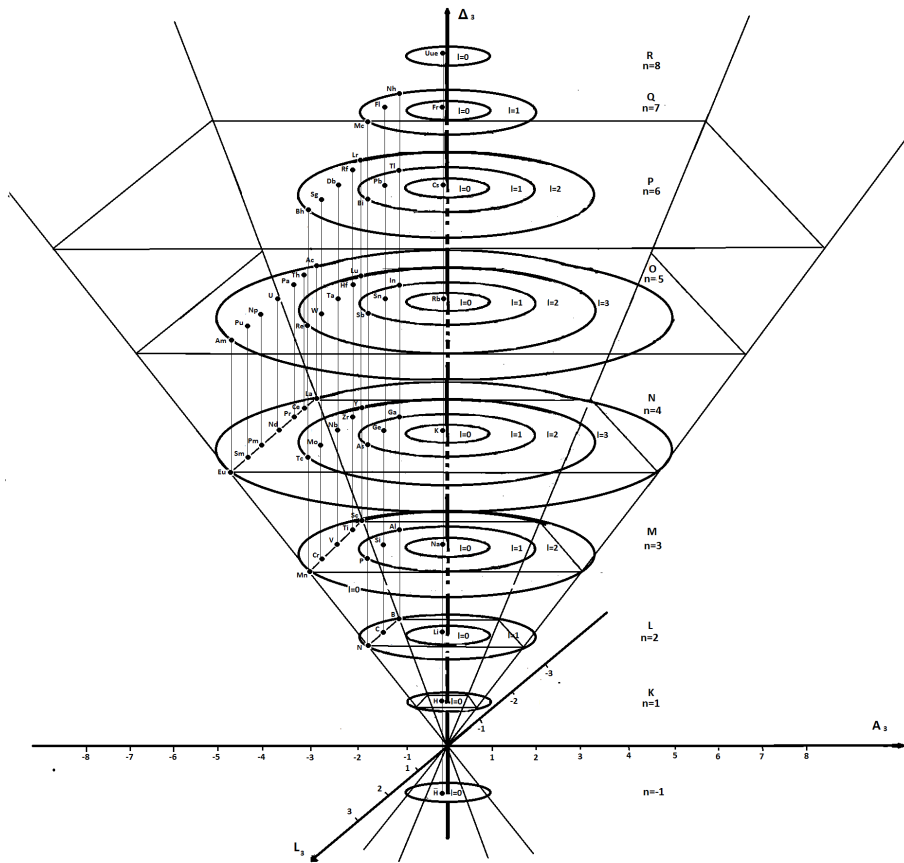


Рис. 5. $SO(4, 2)$ -башня для $s = -1/2$ с элементами $\mathbf{H} = |1, 0, 0, -1/2\rangle, \dots, \mathbf{Uue} = |8, 0, 0, -1/2\rangle$

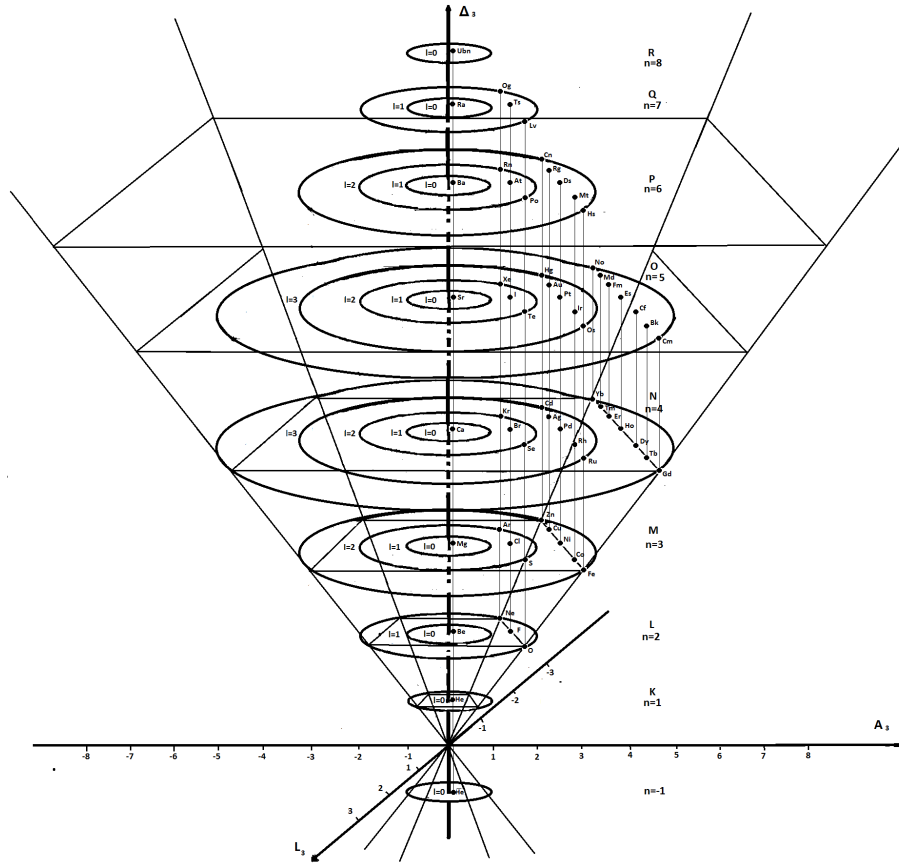


Рис. 6. $SO(4, 2)$ -башня для $s = +1/2$ с элементами $\mathbf{He} = |1, 0, 0, +1/2\rangle, \dots, \mathbf{Ubn} = |8, 0, 0, +1/2\rangle$

базиса Маделунга задаётся следующими соотношениями:

$$n = |\nu - \dot{\nu}|, \quad l = |\lambda - \dot{\lambda}|, \quad m = |\mu - \dot{\mu}|, \quad s = |\sigma - \dot{\sigma}|.$$

При этом главное квантовое число n изменяется в пределах

$$-|\nu - \dot{\nu}|, -|\nu - \dot{\nu}| + 1, -|\nu - \dot{\nu}| + 2, \dots, |\nu - \dot{\nu}|. \quad (47)$$

На рис. 4 представлены 2-мерные сечения двух 3-мерных проекций весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$.

Первая 3-мерная проекция, соответствующая элементам с $s = -1/2$, показана на рис. 5. Верхняя пирамида $SO(4, 2)$ -башни, начиная с водорода $\mathbf{H} = |1, 0, 0, -1/2\rangle$ до гипотетического элемента $\mathbf{Uue} = |8, 0, 0, -1/2\rangle$, образует *пирамиду материи*. Отражённая от плоскости (L_3, A_3) нижняя пирамида начинается с антиводорода $\bar{\mathbf{H}} = |-1, 0, 0, -1/2\rangle$ и образует *пирамиду антиматерии*⁵.

Вторая 3-мерная проекция весовой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4, 4)$, соответствующая элементам с $s = +1/2$, показана на рис. 6. В этом случае пирамида материи

⁵Первые свидетельства существования антиводорода были получены на ускорителях в 1990-х гг. Впервые захват атомов антиводорода в ловушку продемонстрировала группа Antihydrogen Laser Physics Apparatus (ALPHA) в ЦЕРН в 2010 г.

содержит элементы от гелия $\mathbf{He} = |1, 0, 0, +1/2\rangle$ до оганессона $\mathbf{Og} = |7, 1, 1, +1/2\rangle$, включая гипотетический элемент $\mathbf{Ubn} = |8, 0, 0, +1/2\rangle$. Пирамида антиматерии начинается с антигелия $\overline{\mathbf{He}} = |-1, 0, 0, +1/2\rangle$.

Гомологичные элементы на диаграммах (рис. 5 и 6) соединяются вертикальными линиями (линии Бэйли – Томсена – Бора). На диаграммах видно, что, начиная с листа $n = 5$ (5-го этажа $SO(4, 2)$ -башни), остаются незаполненными следующие круговые кольца (кольца Генцеля): кольцо $l = 4$ для листа $n = 5$, кольца $l = 3, l = 4, l = 5$ для листа $n = 6$, а также $l = 2, l = 3, l = 4, l = 5$ для листа $n = 7$. На этих уровнях располагаются гипотетические элементы таблицы Сиборга и таблицы 10-периодического расширения (см. [7, 8]), которые на диаграммах рис. 5 и 6 опущены с целью не загромождать построение. Так, для элементов **Ac, Th, Pa, U, Np, Pu, Am** уровня ($n = 5, l = 3$) гомологичными элементами являются **Ute, Uqn, Uqu, Uqb, Uqt, Uqq, Uqp** уровня ($n = 6, l = 3$) таблицы Сиборга и т. д. Из построения видно, что полностью «заселёнными» (экспериментально открытыми элементами) являются только первые четыре этажа $SO(4, 2)$ -башни. Кроме того, начиная с четвёртого этажа (круга Генцеля) $n = 4$, стабильность элементов возрастает по мере приближения к радиальной оси Δ_3 .

Литература

1. Spronsen J.W. van. The Periodic System of Chemical Elements. Amsterdam. New York: Elsevier, 1969.
2. Mazurs E.G. Graphic Representations of the Periodic System During One Hundred Years. Tuscaloosa: University of Alabama Press, 1974.
3. Scerri E. Periodic Table: its story and its significance. New York: Oxford University Press, 2019.
4. Haenzel G. Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente // Zeitschrift für Physik. 1943. Vol. 120. P. 283–300.
5. Finke W. Bemerkungen zu G. Haenzel „Die Polygonfläche und das Periodische System der Elemente“ // Zeitschrift für Physik. 1943. Vol. 121. P. 586–587.
6. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 5–23.
7. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов II.: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1 (49). С. 5–21.
8. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов III.: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3 (51). С. 5–20.
9. Varlamov V.V., Pavlova L.D, Babushkina O.S. Group Theoretical Description of the Periodic System // Symmetry. 2022. Vol. 14. P. 137.
10. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов IV.: Групповая алгебра // Математические структуры и моделирование. 2024. № 1 (69). С. 18–31.
11. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов V.: Весовая диаграмма // Математические структуры и моделирование. 2024. № 3 (71). С. 4–18.

12. Варламов В.В. О системе аксиом нелокальной квантовой теории // Математические структуры и моделирование. 2017. № 4 (44). С. 5–25.
13. Barut A.O. Group Structure of the Periodic System / The Structure of Matter: Rutherford Centennial Symposium. Christchurch, New Zeland: University of Canterbury Press, 1972. P. 126–136.
14. Adams B.G., Čížek, Paldus J. Representation Theory of $SO(4,2)$ for the Perturbation Treatment of Hydrogenic-Type Hamiltonians by Algebraic Methods // Int. J. Quant. Chem. 1982. Vol. 21. P. 153–171.
15. Pauli W. Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik // Zeitschrift für Physik. 1926. Vol. 36. P. 336–363.

**GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS:
VI. AN EIGHT-DIMENSIONAL GENERALIZATION**

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The periodic system of chemical elements is represented within the framework of the weight diagram of the Lie algebra of the fourth rank of the rotation group of an eight-dimensional pseudo-Euclidean space. Spin is interpreted as the fourth generator of the Cartan subalgebra, whose two eigenvalues correspond to two three-dimensional projections of the weight diagram containing elements of the periodic system from hydrogen to moscovium (the first projection) and from helium to oganesson (the second projection). One of the main advantages of the proposed group-theoretic construction of the periodic system is the natural inclusion of antimatter in the general scheme.

Keywords: periodic system, Lie algebra, weight diagram, Cartan subalgebra, spin, antimatter.

Дата поступления в редакцию: 01.12.2024