

## ЗАДАЧА О РАЗРУШЕНИИ ДАМБЫ В МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

**С.Л. Дерябин**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

**А.П. Садов**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: alsadov@yandex.ru

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия

**Аннотация.** Рассматриваются одномерные течения воды, возникающие после разрушения дамбы. Предполагается, что в начальный момент времени справа от дамбы – покоящаяся жидкость, слева – сухой берег. В качестве математической модели используется система уравнений мелкой воды. В системе уравнений мелкой воды в переменную  $x$  вводится автомодельная особенность, и для полученной системы ставится задача Коши с данными на звуковой характеристике. Решение начально-краевой задачи строится в виде степенного ряда. Коэффициенты ряда находятся при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее для доказательства сходимости этого ряда ставится начально-краевая задача в пространстве других независимых переменных. Решение этой начально-краевой задачи строится в виде своего сходящегося степенного ряда, и доказываем эквивалентность решений первой и второй начально-краевых задач.

**Ключевые слова:** распад специального разрыва, система уравнений мелкой воды, начально-краевая задача, нестационарные автомодельные переменные, степенные ряды.

### Введение

Для описания распространения длинных волн используются классические уравнения теории мелкой воды [1, 2]. Среди всех рассматриваемых задач для численного моделирования наиболее сложной оказалась задача о выходе волны на берег, когда на некоторой линии (линии уреза) глубина жидкости обращается в нуль. Заметим, что в модели мелкой воды система уравнений фактически совпадает с системой уравнений газовой динамики для изэнтропических течений политропного газа с показателем политропы  $\gamma = 2$ . Разница только в том, что вместо плотности  $\rho$  в системе уравнений теории мелкой воды неизвестной функцией является глубина  $H$ . В газовой динамике свободная поверхность, выделяемая с помощью соотношения  $\rho = 0$ , соответствует границе «газ-вакуум», а в модели мелкой воды равенство  $H = 0$  задаёт границу уреза. Поэтому для решения поставленной задачи используется методология исследования задач об истечении газа в вакуум [3]. В случае гладкой границы уреза с использованием этой методики была решена задача о выходе волны на берег

в 1-мерном [4] и 2-мерном [5] случаях в пространстве специальным образом введённых новых независимых переменных. Вместе с тем восстановление этих решений в физическом пространстве вызывает большие трудности. В данной работе введение автомодельной особенности в независимую переменную позволило решить краевую задачу с данными на звуковой характеристике в физическом пространстве.

## 1. Постановка задачи

В момент  $t = 0$  дамба  $\Gamma$  с уравнением  $x = x_{00}$  отделяет покоящуюся жидкость от сухого берега. В задаче предполагается, что жидкость находится справа от дамбы, а сухой берег – слева от неё, и на жидкость действует сила тяжести. Будет предполагаться, что в начальный момент времени  $t = 0$  высота дамбы  $H(x_{00}) = H_{00}$ , скорость жидкости  $u(x_{00}) = u_{00}$  (см. рис. 1).

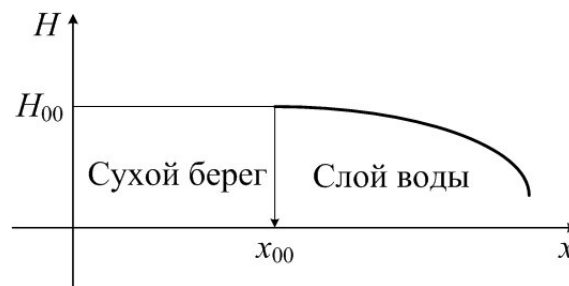


Рис. 1. Конфигурация течения в начальный момент времени

В рассматриваемой задаче в момент  $t = 0$  начинается движение жидкости, определяемое заданными аналитическими функциями  $u_0(x)$ ,  $H_0(x)$ , которое в дальнейшем называется невозмущённой волной.

Также в момент  $t = 0$  происходит разрушение дамбы, и возникает течение, граничащее с невозмущённой волной и называемое далее возмущённой волной. Это другое течение – возмущённая волна – отделено от невозмущённой волны линией  $\Gamma_1$ , являющейся звуковой характеристикой, на которой имеет место слабый разрыв. С другой стороны, возмущённая волна ограничена линией  $\Gamma_0$ :

$$H(t, x)|_{\Gamma_0} = 0.$$

Такая задача называется задачей о распаде специального разрыва. Требуется построить возмущённую волну, а также найти закон движения  $\Gamma_0$ .

Схематично конфигурация течения, возникшего после момента времени  $t = 0$ , изображена на рис. 2.

В предположении, что дно горизонтально, система уравнений мелкой воды для одномерных течений записывается в виде [4]:

$$H_t + H_x u + H u_x = 0, \tag{1}$$

$$u_t + u_x u + g H_x = 0.$$

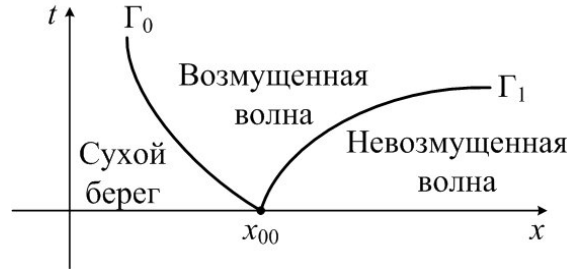


Рис. 2. Конфигурация течения после распада специального разрыва

Здесь  $H$  – полная глубина жидкости от непроницаемого дна до свободной поверхности,  $u$  – скорость жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения.

Линия  $x = x_0(t)$ , для которой

$$H(t, x_0(t)) = 0, \quad (2)$$

называется границей уреза. В каждый момент времени она отделяет слой жидкости от сухого берега. Будет предполагаться, что волна набегаёт на берег справа налево.

Поскольку рассматриваемая система (1) является системой типа Ковалевской, а начальные данные – это аналитические функции, то задача Коши для системы (1) имеет [6] аналитическое решение:

$$u = u^0(t, x), \quad H = H^0(t, x).$$

В системе (1) сделаем замену переменных: вместо функции  $H(t, x)$  введём функцию  $C(t, x)$  по следующей формуле:  $H = C^2$ . После преобразований получим

$$C_t + uC_x + \frac{1}{2}Cu_x = 0, \quad (3)$$

$$u_t + uu_x + 2gCC_x = 0.$$

В этих переменных фоновое течение имеет вид

$$u = u^0(t, x), \quad C = C^0(t, x) = \sqrt{H^0(t, x)}, \quad C_{00} = \sqrt{H_{00}}. \quad (4)$$

Закон движения характеристики  $\Gamma_1 : x = x_1(t)$  определяется из решения дифференциальной задачи [7]

$$x_{1t} = u^0(t, x_1) + \sqrt{g}C^0(t, x_1), \quad x_1(0) = x_{00}. \quad (5)$$

По теореме Ковалевской задача (5) имеет единственное аналитическое решение. Представим его в виде ряда по степеням  $t$ :

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{1k} \frac{t^k}{k!}. \quad (6)$$

Из уравнения (5) имеем  $x_{10} = x_{00}$ ,  $x_{11} = u_{00} + \sqrt{g}C_{00}$ .

Продифференцируем по  $t$  уравнение (5), получим

$$x_{1tt} = u_t^0 + \sqrt{g}C_t^0.$$

Отсюда

$$x_{12} = u_t^0(0, x_{00}) + \sqrt{g}C_t^0(0, x_{00}).$$

При помощи решения (6) однозначно строится закон движения  $\Gamma_1$  :

$$x = x_1(t) = x_{00} + tx_2(t),$$

где  $x_2(t)$  – аналитическая функция.

Условия на характеристике  $\Gamma_1$  будут иметь вид

$$u(t, x)|_{x=x_1(t)} = u^0(t, x_1(t)), \quad C(t, x)|_{x=x_1(t)} = C^0(t, x_1(t)). \quad (7)$$

Для построения возмущённой волны в системе (1) введём нестационарные автомодельные переменные по следующим формулам:

$$t = t', \quad y = \frac{x - x_{00}}{t}.$$

В результате этой замены получим систему:

$$tC_t + (u - y)C_y + \frac{1}{2}Cu_y = 0, \quad (8)$$

$$tu_t + (u - y)u_y + 2gCC_y = 0$$

с условиями на характеристике  $\Gamma_1$

$$u(t, y)|_{y=x_2(t)} = u^0(t, x_1(t)), \quad C(t, y)|_{y=x_2(t)} = C^0(t, x_1(t)). \quad (9)$$

## 2. Построение возмущённой волны в пространстве независимых переменных $t, y$

Построим формальное решение задачи (8)–(9) в виде ряда по степеням  $t$ :

$$f(t, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) \frac{t^n}{n!}, \quad f = \{C, u\}. \quad (10)$$

В системе (8) положим  $t = 0$ . Получим уравнения для определения нулевых коэффициентов ряда (10)

$$(u_0 - y)C_{0y} + \frac{1}{2}C_0u_{0y} = 0, \quad (11)$$

$$(u_0 - y)u_{0y} + 2gC_0C_{0y} = 0.$$

Ненулевое решение системы (11) получается, если определитель системы равен нулю, т. е.

$$(u_0 - y)^2 = gC_0^2$$

или

$$u_0 - y = \pm\sqrt{g}C_0.$$

Поскольку при  $t = 0$  на характеристике  $\Gamma_1$   $y = u_{00} + \sqrt{g}C_{00}$ , то окончательно имеем

$$u_0 - y = -\sqrt{g}C_0. \quad (12)$$

Подставляя  $u_0 - y$  во второе уравнение системы (11), получим

$$u_{0y} = 2\sqrt{g}C_{0y}.$$

Интегрируя, имеем

$$u_0 = 2\sqrt{g}C_0 + D.$$

Из условий (9) определяем произвольную постоянную  $D$  и получаем

$$u_0 = 2\sqrt{g}C_0 + u_{00} - 2\sqrt{g}C_{00}.$$

Подставляя  $u_0$  в уравнение (12), после преобразований будем иметь

$$C_0 = \frac{1}{3\sqrt{g}}(y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00}), \quad u_0 = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{g}C_{00} + \frac{1}{3}u_{00}. \quad (13)$$

Также справедливы соотношения

$$C_{0y} = \frac{1}{3\sqrt{g}}, \quad u_{0y} = \frac{2}{3}y. \quad (14)$$

Систему (8) продифференцируем по  $t$ , положим  $t = 0$  и с учётом (12), (14) имеем

$$\begin{aligned} C_0 u_{1y} - 2\sqrt{g}C_0 C_{1y} + \frac{2}{3\sqrt{g}}u_1 + \frac{8}{3}C_1 &= 0, \\ -C_0 u_{1y} + 2\sqrt{g}C_0 C_{1y} + \frac{5}{3\sqrt{g}}u_1 + \frac{2}{3}C_1 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

При сложении уравнений системы (15) получаем

$$\frac{7}{3\sqrt{g}}u_1 + \frac{10}{3}C_1 = 0$$

или

$$u_1 = -\frac{10}{7}\sqrt{g}C_1, \quad u_{1y} = -\frac{10}{7}\sqrt{g}C_{1y}.$$

Подставляя  $u_1$  и  $u_{1y}$  во второе уравнение (15), после преобразований имеем

$$\sqrt{g}C_0 C_{1y} - \frac{1}{2}C_1 = 0.$$

Подставляя  $C_0$  в уравнение, после преобразований получим

$$(y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00}) C_{1y} - \frac{3}{2}C_1 = 0.$$

Интегрируя уравнение, имеем

$$C_1 = C_{10} (y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00})^{\frac{3}{2}},$$

$$u_1 = -\frac{10}{7}\sqrt{g}C_{10} (y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00})^{\frac{3}{2}}.$$

(16)

Произвольная постоянная  $C_{10}$  определится из условий (9).

**Замечание 1.** В частном случае, когда в начальный момент времени слой жидкости имеет постоянную глубину и покоится  $H = H_0(x) = H_{00}$ ,  $u = u_0(x) = 0$ , произвольная постоянная  $C_{10} = 0$ . В этом случае ряд (10) обрывается, коэффициенты  $C_n = u_n = 0$ ,  $n \geq 1$ , и задача (8)–(9) имеет точное решение.

$$H = C^2 = \frac{1}{9g} \left( \frac{x - x_{00}}{t} + 2\sqrt{gH_{00}} \right)^2,$$

$$u = \frac{2}{3} \left( \frac{x - x_{00}}{t} - \sqrt{gH_{00}} \right).$$

Систему (8) продифференцируем  $n$  раз по  $t$ , положим  $t = 0$  и с учётом (12), (14) будем иметь

$$C_0 u_{ny} - 2\sqrt{g}C_0 C_{ny} + \frac{2}{3\sqrt{g}}u_n + \left(2n + \frac{2}{3}\right) C_n = F_{1n}(y),$$

(17)

$$-C_0 u_{ny} + 2\sqrt{g}C_0 C_{ny} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left(n + \frac{2}{3}\right) u_n + \frac{2}{3}C_n = F_{2n}(y).$$

Здесь  $F_{1n}(y)$ ,  $F_{2n}(y)$  – функции, известным образом зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (10).

При сложении уравнений системы (17) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(n + \frac{4}{3}\right) u_n + \left(2n + \frac{4}{3}\right) C_n = F_{1n}(y) + F_{2n}(y) = F_n^+(y).$$

Или

$$u_n = -\frac{6n + 4}{3n + 4}\sqrt{g}C_n + \frac{3}{3n + 4}\sqrt{g}F_n^+(y),$$

$$u_{ny} = -\frac{6n + 4}{3n + 4}\sqrt{g}C_{ny} + \frac{3}{3n + 4}\sqrt{g}F_{ny}^+(y).$$

Подставляя  $u_n, u_{ny}$  во второе уравнение (17), после преобразований имеем

$$\sqrt{g} \left( 2 + \frac{6n+4}{3n+4} \right) C_0 C_{ny} + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{(3n+2)^2}{3n+4} \right) C_n = F_n(y).$$

Здесь функция  $F_n(y) = F_{2n}(y) + \frac{3\sqrt{g}}{3n+4} C_0 F_{ny}^+(y) - \frac{3n+2}{3n+4} F_n^+(y)$ .

Подставляя  $C_0$  в уравнение, после преобразований получим

$$(y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00}) C_{ny} - \frac{3}{2} n C_n = \frac{3n+4}{4n+4} F_n(y). \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (18), имеем

$$\begin{aligned} C_n &= (y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00})^{\frac{3}{2}n} (C_{n0} + \\ &+ \frac{3n+4}{4n+4} \int_{x_2(0)}^y F_n(y) (y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00})^{-\frac{3}{2}n-1} dy), \\ u_n &= -\frac{6n+4}{3n+4} \sqrt{g} (y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00})^{\frac{3}{2}n} (C_{n0} + \\ &+ \frac{3n+4}{4n+4} \int_{x_2(0)}^y F_n(y) (y - u_{00} + 2\sqrt{g}C_{00})^{-\frac{3}{2}n-1} dy) + \\ &+ \frac{3}{3n+4} \sqrt{g} F_n^+(y). \end{aligned} \quad (19)$$

Произвольные постоянные  $C_{n0}$  определяются из условий (9).

Таким образом, построенное в виде ряда (10) формальное решение задачи (8)–(9) является единственным.

**Теорема 1.** *Задача (8)–(9) имеет единственное аналитическое решение, которое представляется в виде сходящегося ряда (10).*

Доказательство теоремы проводится методом мажорант, применение которого изложено в [8].

С помощью простейших преобразований решение (10) восстанавливается в физическом пространстве переменных  $t, x$ .

$$H = C^2 \left( t, \frac{x - x_{00}}{t} \right), \quad u = u \left( t, \frac{x - x_{00}}{t} \right).$$

### 3. Построение решения в пространстве независимых переменных $t, C$

Для завершения исследования необходимо показать, что решение, построенное в [4], совпадает с (10). Для этого решение задачи о разрушении дамбы построим в пространстве, где в системе (3) за независимые переменные берутся  $t, C$ , а за неизвестные функции –  $x, u$ . То есть переменные  $x$  и  $C$  меняются ролями. Якобиан преобразования  $J = x_C$ .

В результате такой замены вместо системы (3) получается система

$$x_t = u + \frac{1}{2}Cu_C, \quad (20)$$

$$x_C u_t + (u - x_t)u_C + 2gC = 0.$$

Для системы (20) начальные данные (7) на характеристике  $\Gamma_1$  перепишутся в виде:

$$u(t, x)|_{\Gamma_1} = u(t, x_1(t)), \quad x|_{\Gamma_1} = x_1(t). \quad (21)$$

Течение в области между  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  будем строить как решение системы (20) с данными на характеристике (21). Поскольку  $\Gamma_1$  – характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [8]. Этим условием в пространстве переменных  $t, C$  служит [3] граничное условие вертикали

$$x(0, C) = x_{00}. \quad (22)$$

Разложим решение задачи (20)–(21) в ряд по степеням  $t$ :

$$\mathbf{q}(t, C) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(C) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = \{x, u\}. \quad (23)$$

В силу условия (22)  $x_0 = x_{00}$ .

В системе (20) положим  $t = 0$  и с учётом (21), (22) получим

$$x_1 = 3\sqrt{g}C - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}, \quad u_0 = 2\sqrt{g}C - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}.$$

Систему (20) продифференцируем  $k$  раз по  $t$ , положим  $t = 0$  и с учётом (22) получим уравнения для определения коэффициентов ряда (23):

$$x_{k+1} = u_k + \frac{1}{2}Cu_{kC} + G_{1k}(C), \quad (24)$$

$$Cu_{kC} - \frac{3}{2}ku_k = G_{2k}(C).$$

Здесь  $G_{1k}(C)$ ,  $G_{2k}(C)$  – функции, известным образом зависящие от уже найденных коэффициентов ряда (23).

Интегрируя второе уравнение системы (24), имеем

$$u_k = C^{\frac{3}{2}k} \left( C_{k0} + \int_{C_{00}}^C G_{2k}(C) C^{-\frac{3}{2}k-1} dy \right).$$



**Теорема 2.** Область сходимости рядов (23) покрывает всю зону течения от  $\Gamma_1$  до  $\Gamma_0$  включительно. При этом закон движения границы уреза определяется по следующей формуле:

$$x_t = x_{00} + tu_{00}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [3] и проводится по методике [8], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной.

**Теорема 3.** Краевая задача (8)–(9) эквивалентна начально-краевой задаче (20)–(22).

*Доказательство.* На основании теоремы 2 можно утверждать, что в виде сходящегося ряда (23) единственным образом построено решение начально-краевой задачи (20)–(22). Полученное решение имеет вид

$$x = x_{00} + (3\sqrt{g}C - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00})t + \dots + x_k(C)\frac{t^k}{k!} + \dots, \quad (25)$$

$$u = (2\sqrt{g}C - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}) + u_1(C)t + \dots + u_k(C)\frac{t^k}{k!} + \dots$$

В первом соотношении системы (25) вместо  $x$  введём  $y = \frac{x - x_{00}}{t}$ . Получим

$$y = (3\sqrt{g}C - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}) + \dots + x_k(C)\frac{t^{k-1}}{k!} + \dots \quad (26)$$

Продифференцируем соотношение (26) по  $C$ , положим  $t = 0$  и будем иметь

$$y_C = 3\sqrt{g} \neq 0.$$

Следовательно, по теореме о существовании обратной функции соотношение (26) задаёт локально-аналитическую функцию  $C = C(t, y)$ . Тогда решение задачи (20)–(22) можно переписать в виде

$$C = C(t, y), \quad (27)$$

$$u = (2\sqrt{g}C(t, y) - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}) + \dots + u_k(C(t, y))\frac{t^k}{k!} + \dots$$

Так как при  $t > 0$  якобиан преобразования  $J = x_c \neq 0$ , то решение (27) удовлетворяет системе (8). Также оно удовлетворяет условиям (9).

Покажем, что при  $t = 0$  нулевые коэффициенты рядов (10) и (23) совпадают.

В решении (27) положим  $t = 0$  и, учитывая (26), получим

$$y = 3\sqrt{g}C|_{t=0} - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}, \quad u|_{t=0} = 2\sqrt{g}C|_{t=0} - 2\sqrt{g}C_{00} + u_{00}. \quad (28)$$

Из первого соотношения (28) найдём  $C|_{t=0}$  и, подставляя во второе соотношение (28), будем иметь

$$C|_{t=0} = \frac{1}{3\sqrt{g}}(y + 2\sqrt{g}C_{00} - u_{00}), \quad (29)$$

$$u|_{t=0} = \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{g}C_{00} + \frac{1}{3}u_{00}.$$

Условия (29) совпадают с условиями (13). В силу единственности построенных решений задачи (8)–(9) и задачи (20)–(22) решение (10) совпадает с решением (23). Теорема доказана. ■

## Заключение

1. Таким образом, с помощью системы уравнений мелкой воды построены течения жидкости, возникающие после разрушения дамбы.
2. Введение в систему автомодельной особенности в переменную  $x$  позволило решить краевую задачу с данными на звуковой характеристике в физическом пространстве.
3. Решение краевой задачи было построено в виде сходящегося степенного ряда.
4. В частном случае покоящейся жидкости решение задачи получено в виде конечных формул.
5. Исследование задачи о разрушении дамбы в специальном функциональном пространстве позволило получить закон движения границы уреза в виде конечной формулы.

## Литература

1. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 393 с.
2. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Мезенцев А.В., Чуев Н.П. Начально-краевые задачи для моделирования движения сплошной среды с особенностями на свободной границе. Новосибирск: Наука, 2015. 191 с.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.
4. Bautin S.P., Deryabin S.L., Sommer A.F., Khakimzyanov G.S., Shokina N. Yu. Use of analytic solutions in the statement of difference boundary conditions on movable shoreline // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2011. Vol. 26, No. 4. P. 353–377.
5. Bautin S.P., Deryabin S.L. Two-dimensional solutions of the equations shallow-water theory in the neighbourhood of a shore line boundary // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. Vol. 79, Is. 4. P. 358–366.
6. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
7. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
8. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

**DAM BREAK PROBLEM IN SHALLOW WATER MODEL****S.L. Deryabin**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: SDeryabin@usurt.ru

**A.P. Sadov**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: alsadov@yandex.ru.ru

Ural State University of Railway Engineering, Yekaterinburg, Russia

**Abstract.** The paper considers one-dimensional water flows that occur after the destruction of the dam. It is assumed that at the initial moment of time there is a resting liquid to the right of the dam, and a dry shore to the left. A system of shallow water equations is used as a mathematical model. In the system of shallow water equations, a self-similar feature is introduced into the variable  $x$  and for the resulting system, the Cauchy problem is posed with data on the sound characteristic. The solution of the initial boundary value problem is constructed in the form of a power series. The coefficients of the series are found by integrating ordinary differential equations. Next, to prove the convergence of this series, an initial boundary value problem is posed in the space of other independent variables. The solution to this initial boundary value problem is constructed in the form of its own convergent power series, and the equivalence of the solutions to the first and second initial boundary value problems is proven.

**Keywords:** decay of a special gap, a system of shallow water equations, an initial boundary value problem, nonstationary self-similar variables, power series.

*Дата поступления в редакцию: 01.11.2024*