Математические структуры и моделирование
2025. № 2 (74). С. 83–89

УДК 519.854.2
DOI 10.24147/2222-8772.2025.2.83-89

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ СО СКЛАДИРУЕМЫМИ РЕСУРСАМИ ПЕРЕМЕННОЙ СТОИМОСТИ

А.А. Романова
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: RomanovaAA@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Исследуется сложность задачи календарного планирования со складируемыми ресурсами и критерием минимизации затрат на их приобретение при условии переменной стоимости ресурса и ограниченного склада. Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле. Разработан алгоритм динамического программирования, выделены псевдополиномиально разрешимые случаи.

Ключевые слова: расписание, складируемые ресурсы, динамическое программирование, полиномиальная сводимость.

Введение

В последние годы в теории и на практике возникает множество разнообразных задач календарного планирования проектов с учётом ограничений на ресурсы. В рамках проекта нужно выполнить комплекс взаимосвязанных работ. При этом каждая работа характеризуется длительностью и определёнными ресурсными потребностями и связанными с ними ограничениями. Необходимо, с учётом ограничений на ресурсы, определить расписание выполнения работ проекта, при котором значение целевой функции оптимально.

Задачи календарного планирования исследуются многими авторами. В случае складируемых ресурсов большая часть работ посвящена классическим постановкам, в которых в каждый период времени поступает определённое количество ресурса. В [1] показана полиномиальная разрешимость задачи с критерием минимизации срока завершения проекта. В [2] доказано, что для критерия максимизации чистой приведённой прибыли задача является NP-трудной в сильном смысле.

В данной работе рассматривается задача календарного планирования со складируемыми ресурсами и критерием минимизации затрат на приобретение ресурсов. Особенностью постановки является то, что стоимость ресурса меняется в течение горизонта планирования. Целью работы является анализ сложности задачи.

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача календарного планирования в следующей постановке. Имеется проект, состоящий из множества $V = \{1, \dots, n\}$ взаимосвязанных работ. Для каждой работы $j \in V$ известна длительность p_j её выполнения. Прерывания выполнения работ не допускаются. Взаимосвязь между работами определяется технологией выполнения проекта и задаётся с помощью ациклического ориентированного графа $G = (V, E)$, в котором вершины соответствуют работам, а дуги – отношениям предшествования $i \to j$, что означает, что работа j не может начаться до завершения работы i. Задан директивный срок T выполнения проекта, к которому все работы должны быть завершены.

Для выполнения работ требуются складируемые ресурсы m видов. Известна потребность q_{rj} работы j в ресурсе вида r в каждый период времени её выполнения, $r = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Ресурсы для выполнения работ проекта необходимо приобретать. В силу целочисленности длительностей работ будем считать, что покупка ресурсов производится в целочисленные моменты времени. Также предполагаем, что приобретение ресурсов происходит в начале периода t, $t = 1, \ldots, T$. Складируемые ресурсы характеризуются тем, что суммарное количество ресурса, закупленного к периоду времени t, не должно быть меньше суммарного требуемого ресурса к периоду t для всех $t = 1, \ldots, T$.

Можно рассматривать классический случай неограниченного склада, когда излишек ресурса можно хранить в любом количестве. В случае ограниченного склада излишек ресурса r, т. е. ресурс, который предполагается потратить позже, в каждый период времени не должен превышать размера склада для ресурса r – величины V_r, $r = 1, \ldots, m$.

В данной работе рассматривается случай изменяющейся во времени стоимости ресурса, что является актуальным в настоящее время и часто встречается на практике. Таким образом, известна цена c_{rt} единицы ресурса r в периоде времени t, $r = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, T$.

Решение определяется набором $\{s_j\}_{j=1}^{n}$ времён начала выполнения работ проекта и объёмом y_{rt} закупаемого ресурса r в период времени t, $t = 1, \ldots, T$. Расписание и план закупок ресурсов определяют допустимое решение, если выполняются ограничения предшествования, время завершения всего проекта не превышает T, суммарный объём потребления каждого ресурса к периоду времени t не превосходит объёма закупленного ресурса, и если рассматривается случай ограниченного склада, то объем ресурса r, хранящегося на складе, не превышает V_r в каждый период времени t, $r = 1, \ldots, m$, $t = 1, \ldots, T$. Задача заключается в нахождении допустимого решения, при котором суммарные затраты на приобретение ресурсов минимальны.

Предполагаем, что все исходные числовые данные, кроме, может быть, стоимостей ресурсов, являются целочисленными. В связи с этим можем ограничиться рассмотрением расписаний, в которых работы начинаются в целочисленные моменты времени, а объём закупаемого ресурса в каждый период времени также является целочисленной величиной. Если допустимое решение не удовлетворяет этим условиям, очевидно, можно его преобразовать в решение нужной структуры, не увеличив значение целевой функции.

Рассматриваемая задача с возобновимыми ресурсами и постоянной стоимостью ресурсов, известная как RACP (Resource Availability Cost Problem), NP-трудна [3]. Ранее автором в совместных работах [4, 5] при стоимости ресурса, зависящей от объёма его покупки, изучена сложность задачи, предложены алгоритмы решения.

В данной работе изучается задача в случае, когда цена за единицу ресурса меняется в течение периода планирования. Для неограниченного склада в [6] показана полиномиальная разрешимость задачи. Настоящая работа посвящена исследованию случая ограниченного склада. В п. 2 доказана NP-трудность в сильном смысле задачи; в п. 3 предлагается алгоритм динамического программирования и проводится анализ его трудоёмкости.

2. Сложность задачи в общем случае

В данном параграфе показана NP-трудность в сильном смысле задачи в общем случае. Доказательство проводится по аналогии с доказательством NP-трудности задачи календарного планирования с критерием максимизации чистой приведённой прибыли [2].

Теорема 1. *Задача календарного планирования со складируемыми ресурсами и критерием минимизации суммарных затрат на их приобретение в случае ограниченного склада и цен ресурсов, зависящих от времени, NP-трудна в сильном смысле даже при единичных длительностях работ.*

Доказательство. Проведём полиномиальное сведение задачи о максимальной клике к рассматриваемой. Сформулируем задачу распознавания, соответствующую задаче о максимальной клике. Даны граф $\Gamma = (V^\Gamma, E^\Gamma)$ и натуральное число $y_0 \leqslant |V^\Gamma|$. Существует ли клика в графе размера не меньше y_0? Будем считать без ограничения общности, что изолированных вершин граф не имеет, так как заведомо они не могут содержаться в клике.

Построим соответствующий класс примеров задачи календарного планирования следующим образом. Пусть число работ равно $n = |V^\Gamma| + |E^\Gamma|$, при этом будем выделять работы-вершины, соответствующие вершинам графа Γ, и работы-рёбра, соответствующие рёбрам графа Γ. Граф предшествования G двудольный: первая доля содержит работы-вершины, вторая – работы-рёбра; при этом работа-вершина предшествует работе-ребру, если и только если в графе Γ соответствующие вершина и ребро инцидентны. Кроме того, положим $m = 1$, $T = 3$. Длительности всех работ и потребности в ресурсе единичные: $p_j = 1$, $q_{1j} = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Стоимости за единицу ресурса равны $c_{11} = 2$, $c_{12} = 1$, $c_{13} = |V^\Gamma| + 1$; объём склада $V_1 = |E^\Gamma| - \frac{y_0(y_0-1)}{2}$.

Докажем, что граф Γ содержит клику размера не меньше y_0 тогда и только тогда, когда в соответствующей задаче календарного планирования существует допустимое решение с целевой функцией, не превышающей $y_0 + |V^\Gamma| + |E^\Gamma|$.

Пусть в графе Γ имеется клика размера не меньше y_0, построим требуемое допустимое расписание в соответствующей задаче календарного планирования. Выделим в графе Γ клику размера y_0 и соответствующие вершины-работы выполним в первом периоде времени. Во втором периоде времени выполним оставшиеся вершины-работы и работы-рёбра, соответствующие рёбрам клики; наконец, в третьем периоде времени выполним работы-рёбра, которым предшествуют вершины-работы, не входящие в клику. Для выполнения работ приобретём ресурс в количестве y_0 в начале первого периода. Во втором периоде купим остальные требуемые ресурсы в количестве $|V^\Gamma| + |E^\Gamma| - y_0$, при этом в этом же периоде потратим на выполнение работ $|V^\Gamma| - y_0 + \frac{y_0(y_0-1)}{2}$ единиц ресурса, а оставшиеся $|E^\Gamma| - \frac{y_0(y_0-1)}{2}$ отправим на склад, объёма которого хватает. Ресурсы для выполнения работ в третьем периоде времени берём со склада. Имеем допустимое решение со значением целевой функции $2y_0 + |V^\Gamma| + |E^\Gamma| - y_0 = y_0 + |V^\Gamma| + |E^\Gamma|$. Значит, требуемое ограничение по целевой функции выполнено.

Докажем в обратную сторону. Пусть имеется допустимое решение задачи из построенного класса примеров задачи календарного планирования. Пусть y_t, как и прежде, объём ресурса, закупленного в периоде t, $t = 1, ..., 3$. Пусть в первый период времени выполняется k работ. Исходя из структуры графа предшествования, это работы-вершины. Так как изолированных вершин по предположению в графе предшествования нет, то во второй период времени выполняются оставшиеся $|V^\Gamma| - k$ работ-вершин (иначе все работы не успеют выполниться за три периода времени), а также e работ-рёбер, связанных с работами из первого периода времени. В третий период выполняются оставшиеся $|E^\Gamma| - e$ работ-рёбер. Докажем, что работы-вершины, выполняющиеся в первый период времени, соответствуют вершинам клики в исходном графе Γ, и их количество k равно y_0. В силу допустимости решения должны быть выполнены неравенства (1)–(7):

$$2y_1 + y_2 + (|V^\Gamma| + 1)y_3 \leqslant y_0 + |V^\Gamma| + |E^\Gamma|, \tag{1}$$

$$k \leqslant y_1, \tag{2}$$

$$|V^\Gamma| + e \leqslant y_1 + y_2, \tag{3}$$

$$|V^\Gamma| + |E^\Gamma| \leqslant y_1 + y_2 + y_3, \tag{4}$$

$$y_1 - k \leqslant |E^\Gamma| - \frac{y_0(y_0-1)}{2}, \tag{5}$$

$$y_1 + y_2 - |V^\Gamma| - e \leqslant |E^\Gamma| - \frac{y_0(y_0-1)}{2}, \tag{6}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 - |V^\Gamma| - |E^\Gamma| \leqslant |E^\Gamma| - \frac{y_0(y_0-1)}{2}. \tag{7}$$

Неравенство (1) задаёт ограничение по целевой функции, ограничения (2)–(4) означают, что в каждый период времени общее количество истраченного ресурса не превышает закупленного к этому периоду ресурса; неравенства (5)–(7) задают ограничения по вместимости склада.

При сложении неравенств (1), (2) и (4) получим неравенство $k + |V^\Gamma|y_3 \leqslant y_0$, которое в силу условия $y_0 \leqslant |V^\Gamma|$ и целочисленности y_3 может быть верно только при $y_3 = 0$. Также из получившегося неравенства следует, что $k \leqslant y_0$.

При сложении неравенств (4) и (6) с учётом $y_3 = 0$ получим неравенство $e \geqslant \dfrac{y_0(y_0-1)}{2}$. С другой стороны, из структуры примеров рассматриваемого класса следует, что $e \leqslant \dfrac{k(k-1)}{2}$. Поэтому имеем неравенство

$$\frac{y_0(y_0-1)}{2} \leqslant \frac{k(k-1)}{2},$$

откуда после преобразований получаем $(y_0 - k)(y_0 + k - 1) \leqslant 0$. Заметим, что y_0 – натуральное число, а k – целое, неотрицательное число. Если $k = 0$, то и $e = 0$, в этом случае при сложении неравенств (4) и (6) получим неверное неравенство $\dfrac{y_0(y_0-1)}{2} \leqslant 0$. Значит, $k \geqslant 1$. Таким образом, $y_0 + k - 1 \geqslant 0$, значит, $y_0 - k \leqslant 0$. Вспоминая, что $k \leqslant y_0$, заключаем, что $k = y_0$. Ранее было получено, что $\dfrac{y_0(y_0-1)}{2} \leqslant e \leqslant \dfrac{k(k-1)}{2}$, значит, $e = \dfrac{y_0(y_0-1)}{2}$. Так как e – это количество работ-рёбер, связанных с y_0 работами-вершинами из первого периода времени, то вершины исходного графа Γ, соответствующие работам, выполняющимся в первом периоде времени, вместе с инцидентными рёбрами образуют клику размера y_0. Теорема доказана.

■

3. Алгоритм динамического программирования

Рассмотрим предлагаемый в работе алгоритм динамического программирования. Для снижения громоздкости описания приведём алгоритм для случая одного ресурса (при этом опустим в обозначениях индекс $r = 1$). Используем идею алгоритма динамического программирования для классической задачи календарного планирования с возобновимыми ресурсами [7]. Для этого разобьём частичный порядок на минимальное количество цепей. В работе [7] эта задача сводится к построению максимального паросочетания в двудольном ориентированном графе (V_1, V_2, E), в котором множества вершин V_1 и V_2 каждой доли содержат по n вершин, а дуга (i, j) ($i \in V_1$, $j \in V_2$) принадлежит множеству E, если работа i предшествует работе j. После нахождения в этом графе максимального паросочетания, что является полиномиально разрешимой задачей [8], совмещаем соответствующие вершины двух долей. В получившемся графе с n вершинами имеется дуга (i, j), если соответствующая дуга входит в паросочетание двудольного графа. Построенный граф состоит из $k = n - U$ цепей, где U – число дуг в паросочетании.

Пусть получилось k цепей. Обозначим через S_l суммарную длительность работ в цепи l. Введём состояния системы $(t, \mathbf{x}, W)$. Здесь вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_l \in \{0, 1, \ldots, S_l\}$, задаёт состояние выполнения работ проекта, достигнутое в момент t, $t = 0, 1, \ldots, T$. При этом $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ – начальное состояние, когда ни одна работа не начала выполняться, а $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_k)$ – конечное состояние, когда все работы завершены. Величина $W \in \{0, 1, \ldots, V\}$ задаёт остаток ресурса на складе в момент t. Работы каждой цепи выполняются последовательно. Отметим, что в отношении предшествования могут находиться работы разных цепей. Пусть, например, работа j_1 цепи S_1 предшествует работе j_2 цепи S_2. Если состояние $\mathbf{x}$ определяет, что первая из этих работ ещё не завершена, а вторая уже начала своё выполнение, то в силу заданного на множестве работ частичного порядка состояние $\mathbf{x}$ недопустимо. Чтобы проверить соблюдение таких условий, нужно перебрать все пары работ, находящихся в стадии выполнения, например, используя матрицу смежности графа предшествования. Обозначим через $F(t, \mathbf{x}, W)$ наименьшие суммарные затраты на приобретение ресурсов от начала проекта до состояния $(t, \mathbf{x}, W)$.

Пара (δ, y) задаёт управление. Булевы векторы $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ определяют переход из состояния $\mathbf{x} - \delta$ в состояние $\mathbf{x}$; y – объем ресурса, приобретённого в периоде t. Процесс перехода соответствует одновременному выполнению в периоде t работ тех цепей l, для которых $\delta_l = 1$, а также приобретению ресурса в количестве y. Вектор δ является допустимым, если соблюдаются условия непрерывности выполнения работ и ограничения предшествования между работами разных цепей. Пусть N_δ – множество работ всех цепей, выполняющихся при управлении δ, тогда управление y является допустимым в состоянии $(t, \mathbf{x}, W)$, если

$$\max\{0, W + \sum_{j \in N_\delta} q_j - V\} \leqslant y \leqslant W + \sum_{j \in N_\delta} q_j. \tag{8}$$

Пусть $\Delta_{(\mathbf{x},W)}$ – множество допустимых управлений для состояния $(t, \mathbf{x}, W)$. Выпишем рекуррентное соотношение:

$$F(t, \mathbf{x}, W) = \min_{(\delta,y) \in \Delta_{(\mathbf{x},W)}} \left(c_t y + F(t-1, \mathbf{x} - \delta, W - y + \sum_{j \in N_\delta} q_j) \right).$$

Полагаем $F(0, \mathbf{0}, 0) = 0$ для начального состояния. В лексикографическом порядке перебирая все состояния, находим оптимальное значение целевой функции $F(T, \mathbf{S}, 0)$. При этом для недопустимых состояний $(0, \mathbf{x}, W)$, где $\mathbf{x}$ отлично от нулевого вектора и/или W не равно нулю, и других недопустимых состояний, вызванных ограничениями предшествования и вместимостью склада, полагаем значение функционала равным $+\infty$. Обратный ход по восстановлению расписания и плана закупок ресурса производится стандартным образом.

Алгоритм обобщается на случай m ресурсов, в этом случае W будет задавать вектор остатков ресурсов на складе по видам. Оценим трудоёмкость алгоритма. Трудоёмкость формирования цепей равна $O(n^{2,5})$ [8]. Количество состояний не превышает $O(T(S_1+1)(S_2+1) \cdot \ldots \cdot (S_k+1)(V_1+1)(V_2+1) \cdot \ldots \cdot (V_m+1))$. Для каждого из этих состояний происходит перебор не более чем 2^k булевых векторов δ. Для каждого из этих булевых векторов необходимо проверить согласованность с частичным порядком, выполнение работ без прерываний, что требует не более $O(k^2)$ операций. Кроме того, для каждого из оставшихся после предыдущих проверок δ нужно перебрать все y, удовлетворяющие неравенству (8). Это с учётом m ресурсов требует $(V_1+1)(V_2+1) \cdot \ldots \cdot (V_m+1)$ операций. Итого, трудоёмкость алгоритма составляет $O(n^{2,5} + 2^k k^2 T (S_1+1)(S_2+1) \cdot \ldots \cdot (S_k+1)(V_1+1)^2(V_2+1)^2 \cdot \ldots \cdot (V_m+1)^2)$. Так как $\sum\limits_{l=1}^{k} S_l = P$, где P – сумма длительностей всех работ, то произведение $(S_1+1)(S_2+1) \cdot \ldots \cdot (S_k+1)$ можно оценить сверху величиной $\left(\dfrac{P+k}{k}\right)^k$. Таким образом, предложенный алгоритм динамического программирования для задачи календарного планирования при фиксированных k и m является псевдополиномиальным. Представляется целесообразным его практическое использование для небольших k, т. е. в случае так называемых «узких» графов предшествования. Для решения задач большой размерности перспективной является разработка алгоритмов приближенного решения.

Литература

1. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В. Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретный анализ и исследование операций. Междунар. конф. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. Сер. 2. Т. 7, № 1. С. 9–34.
2. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О сложности одной задачи календарного планирования со складируемыми ресурсами // Вестик НГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 105–112.
3. Möhring R.H. Minimizing Costs of Resource Requirements in Project Networks Subject to a Fixed Completion Time // Operations Research. 1984. Vol. 32. P. 89–120.
4. Пирогов А.Ю., Романова А.А. О сложности одной задачи построения расписания с минимальными затратами на приобретение используемых ресурсов // Россия молодая: передовые технологии в промышленность. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. С. 69–73.
5. Romanova A.A. Minimizing resource cost in project scheduling problem with accumulative resources // Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1260. P. 082005.
6. Полшкова В.В. Минимизация затрат в задаче календарного планирования с переменной стоимостью ресурсов // Молодёжь третьего тысячелетия: сб. науч. ст. XLVIII регион. студенч. науч.-практ. конф.: в 2 ч. Омск : Издательство ОмГУ, 2024. Ч. 2. С. 401–404.
7. Сервах В.В. Эффективно разрешимый случай задачи календарного планирования с возобновимыми ресурсами // Дискретный анализ и исследование операций. 2000. Серия 2. Т. 7, № 1. С. 75–82.
8. Papadimitriou C.H., Kenneth S. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. New Jersey: Engkewood Cliffs, 1982.

THE COMPLEXITY OF PROJECT SCHEDULING PROBLEM WITH ACCUMULATIVE RESOURCES OF TIME-DEPENDENT COST

A.A. Romanova
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: RomanovaAA@omsu.ru

Abstract. We consider the Project Scheduling Problem with accumulative resources of time-dependent cost and the case of limited storage. We prove its NP-hardness in a strong sense. Also a dynamic programming algorithm has been developed and pseudopolynomially solvable cases have been identified.

Keywords: schedule, accumulative resource, dynamic programming, polynomial-time reduction.

Дата поступления в редакцию: 01.10.2024