ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА ПРИ УЧЁТЕ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ КОРИОЛИСА

А.А. Бугаенко^{1,2}

ведущий инженер, e-mail: bugaenkoaa@vniitf.ru

И.Ю. Крутова¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

¹Снежинский физико-технический институт Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Снежинск, Россия

²РФЯЦ-ВНИИТФ имени академика Е.И. Забабахина, Снежинск, Россия

Аннотация. Рассматривается полная система уравнений Навье – Стокса, в которой учтены сжимаемость газа и диссипативные эффекты вязкости и теплопроводности так, что общие законы сохранения массы, импульса и энергии выполняются. В силу нелинейности данной системы построение её решений является достаточно трудоёмким. Как следствие, применяется процедура линеаризации на точном решении (однородном покое) полной системы уравнений Навье – Стокса при учёте сил тяжести и Кориолиса.

Ключевые слова: полная система уравнений Навье – Стокса (ПСУНС), сила Кориолиса, линеаризация.

Введение

Природные восходящие закрученные потоки (ВЗП): торнадо, тропические циклоны, огненные вихри – представляют собой сложные и ещё достаточно мало изученные явления с точки зрения их возникновения и продолжительного функционирования. Надёжное теоретическое изучение этих потоков возможно только с использованием системы уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса.

В монографиях [1–5] (более подробную библиографию см. в [3, 4]) с использованием этой математической модели – система уравнений газовой динамики при учёте действия сил тяжести и Кориолиса – и с применением методологии характеристической задачи Коши [6–8] проведены аналитические и численные исследования течений воздуха в природных ВЗП.

В силу нелинейности системы уравнений газовой динамики построение её решений является достаточно трудоёмким. Это и послужило причиной линеаризации системы уравнений газовой динамики на её точных решениях [9].

Численное моделирование на основе линеаризованной системы уравнений газовой динамики ВЗП с учётом силы Кориолиса [9] показало, что процессы изменения газодинамических параметров, включая скоростные характеристики 3-мерных

нестационарных ВЗП для среднего по интенсивности циклона, вызванных вертикальным продувом, при увеличении времени счёта не выходят на стационарный режим.

При численном построении сложных нестационарных течений газа для увеличения устойчивости счёта часто применяют различные алгоритмы, сглаживающие решения. Для того чтобы подобная процедура имела обоснованный физический смысл, в работе рассматривается полная система уравнений Навье – Стокса (ПСУНС), в которой учтены сжимаемость газа и диссипативные эффекты вязкости и теплопроводности так, что общие законы сохранения массы, импульса и энергии выполняются. А также выполняются законы термодинамики благодаря учёту уравнений состояния.

Далее в работе приведена линеаризация PSUНС на точном решении, описывающем однородный покой.

Линеаризация PSUНС

PSUНС в изэнтропическом случае для идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma / \gamma$ при учёте действия силы Кориолиса и силы тяжести имеет следующий вид [2, 3, 10]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0, \\ \\ u_t + uu_x + vv_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_x + \frac{1}{\gamma}T_x = av - bw + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left(u_{xx} + \frac{3}{4}u_{yy} + \frac{3}{4}u_{zz} + \frac{1}{4}v_{xy} + \frac{1}{4}w_{xz} \right), \\ \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_y + \frac{1}{\gamma}T_y = -au + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{3}{4}v_{xx} + v_{yy} + \frac{3}{4}v_{zz} + \frac{1}{4}u_{xy} + \frac{1}{4}w_{yz} \right), \\ \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{T}{\gamma\rho}\rho_z + \frac{1}{\gamma}T_z = bu - g + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{3}{4}w_{xx} + \frac{3}{4}w_{yy} + w_{zz} + \frac{1}{4}u_{xz} + \frac{1}{4}v_{yz} \right), \\ \\ T_t + uT_x + vT_y + wT_z + (\gamma - 1)T(u_x + v_y + w_z) = \frac{\kappa_0}{\rho} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \\ + \frac{\mu_0\gamma(\gamma - 1)}{2\rho} [(u_x - v_y)^2 + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2 + \\ + \frac{3}{2}((u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2)] \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность газа; $\gamma = const > 1$ – показатель политропы идеального газа, $\mathbf{V} = (u, v, w)$ – вектор скорости газа с его проекциями на декартовы оси Ox , Oy , Oz ; $\mathbf{\Omega} = (0; \Omega_2; \Omega_3)$ – вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси, где $\Omega_2 = \Omega \cos \psi$, $\Omega_3 = \Omega \sin \psi$, ψ – широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат (x, y, z) , вращающейся вместе с Землёй; $a = 2\Omega_3$;

$b = 2\Omega_2$; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$, $g = \text{const} > 0$ – ускорение свободного падения; T – температура газа; μ_0 , κ_0 – постоянные коэффициенты вязкости и теплопроводности. Индексами t, x, y, z обозначаются соответствующие частные производные.

Благодаря наличию в правых частях уравнений движения – второго, третьего и четвёртого уравнений системы (1) – слагаемых, отвечающих за присутствие ускорения Кориолиса, в поток газа вносится дополнительный внешний импульс. Именно он и приводит к закрутке вязкого теплопроводного газа в придонной части вертикального теплового восходящего потока.

В системе (1) при введении безразмерных переменных масштабные значения связаны следующими соотношениями [1–5]:

$$u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}} = c_{00}; \quad t_{00} = \frac{r_{00}}{u_{00}}; \quad p_{00} = R\rho_{00}T_{00}; \quad e_{00} = c_{v0}T_{00},$$

где $\gamma = 1 + R/c_{v0}$, R – универсальная газовая постоянная, c_{v0} – удельная теплоёмкость. Следовательно, за масштабные значения скорости, давления и внутренней энергии выбраны соответственно скорость звука, давление и внутренняя энергия газа с параметрами ρ_{00}, T_{00} . В качестве масштабного значения скорости берётся значение $u_{00} = c_{00} = \frac{1}{3}10^3$ м/с, близкое к значению скорости распространения звука в воздухе при стандартных условиях, т. е. при $\rho_{00} = 1,29\text{кг/м}^3$, $T_{00} = 288$ К.

Безразмерные значения констант Ω и g задаются следующим образом:

$$\Omega = \frac{2\pi}{24 * 3600c} * t_{00}, \quad g = g_* \frac{T_{00}}{c_{00}}.$$

Постоянные безразмерные значения коэффициентов вязкости μ_0 и теплопроводности κ_0 определяются следующими соотношениями:

$$\mu_0 = \frac{4\mu_*}{3\rho_{00}u_{00}r_{00}}, \quad \kappa_0 = \frac{\kappa_*}{c_{v0}\rho_{00}u_{00}r_{00}},$$

где μ_* , κ_* – размерные значения постоянных коэффициентов вязкости и теплопроводности. Для воздуха обычно полагают $\gamma = 1,4$, и тогда $\kappa_0 \approx 1,46\mu_0$.

Система (1) имеет смешанный тип: первое уравнение – уравнение неразрывности – образует гиперболическую часть системы, так как определяет в течениях сжимаемого теплопроводного вязкого газа наличие слабого разрыва на контактной поверхности [1]; второе и третье уравнения – уравнения движения и энергии – составляют параболическую часть системы, так как содержат вторые производные компонент скорости и температуры по пространственной переменной. Заметим, что $\mu_0 = \kappa_0 = 0$, т. е. при отсутствии вязкости и теплопроводности ПСУНС (1) переходит в систему уравнений газовой динамики, рассмотренной в статье [11].

У системы (1) в случае $g = 0$ имеется точное решение:

$$\rho = 1; \quad T = 1; \quad u = v = w = 0. \tag{2}$$

Линеаризация ПСУНС (1) на точном решении (2) состоит в том, что решение этой системы представляется в виде

$$\rho = 1 + \tilde{\rho}; \quad T = 1 + \tilde{T}; \quad \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}},$$

и эти выражения подставляются в систему (1), предварительно умножив все уравнения, кроме первого, на ρ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 + \tilde{\rho})(1 + \tilde{\rho})_t + (1 + \tilde{\rho})\tilde{u}(1 + \tilde{\rho})_x + (1 + \tilde{\rho})\tilde{v}(1 + \tilde{\rho})_y + (1 + \tilde{\rho})\tilde{w}(1 + \tilde{\rho})_z + \\ + (1 + \tilde{\rho})(1 + \tilde{\rho})(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z) = 0, \\ (1 + \tilde{\rho})\tilde{u}_t + (1 + \tilde{\rho})\tilde{u}\tilde{u}_x + (1 + \tilde{\rho})\tilde{v}\tilde{u}_y + (1 + \tilde{\rho})\tilde{w}\tilde{u}_z + \frac{(1 + \tilde{T})}{\gamma}(1 + \tilde{\rho})_x + \\ + (1 + \tilde{\rho})\frac{1}{\gamma}(1 + \tilde{T})_x = (1 + \tilde{\rho})a\tilde{v} - (1 + \tilde{\rho})b\tilde{w} + \\ + \mu_0(\tilde{u}_{xx} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{yy} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{v}_{xy} + \frac{1}{4}\tilde{w}_{xz}), \\ (1 + \tilde{\rho})\tilde{v}_t + (1 + \tilde{\rho})\tilde{u}\tilde{v}_x + (1 + \tilde{\rho})\tilde{v}\tilde{v}_y + (1 + \tilde{\rho})\tilde{w}\tilde{v}_z + \frac{(1 + \tilde{T})}{\gamma}(1 + \tilde{\rho})_y + \\ + (1 + \tilde{\rho})\frac{1}{\gamma}(1 + \tilde{T})_y = -(1 + \tilde{\rho})a\tilde{u} + \mu_0(\frac{3}{4}\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy} + \frac{3}{4}\tilde{v}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{u}_{xy} + \frac{1}{4}\tilde{w}_{yz}), \\ (1 + \tilde{\rho})\tilde{w}_t + (1 + \tilde{\rho})\tilde{u}\tilde{w}_x + (1 + \tilde{\rho})\tilde{v}\tilde{w}_y + (1 + \tilde{\rho})\tilde{w}\tilde{w}_z + \frac{(1 + \tilde{T})}{\gamma}(1 + \tilde{\rho})_z + \\ + (1 + \tilde{\rho})\frac{1}{\gamma}(1 + \tilde{T})_z = (1 + \tilde{\rho})b\tilde{u} + \mu_0(\frac{3}{4}\tilde{w}_{xx} + \frac{3}{4}\tilde{w}_{yy} + \tilde{w}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{u}_{xz} + \frac{1}{4}\tilde{v}_{yz}), \\ (1 + \tilde{\rho})(1 + \tilde{T})_t + (1 + \tilde{\rho})\tilde{u}(1 + \tilde{T})_x + (1 + \tilde{\rho})\tilde{v}(1 + \tilde{T})_y + (1 + \tilde{\rho})\tilde{w}(1 + \tilde{T})_z + \\ (1 + \tilde{\rho})(\gamma - 1)(1 + \tilde{T})(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z) = \\ = \kappa_0 \left((1 + \tilde{T})_{xx} + (1 + \tilde{T})_{yy} + (1 + \tilde{T})_{zz} \right) + \\ + \frac{\mu_0\gamma(\gamma - 1)}{2} [(\tilde{u}_x - \tilde{v}_y)^2 + (\tilde{u}_x - \tilde{w}_z)^2 + (\tilde{v}_y - \tilde{w}_z)^2 + \\ + \frac{3}{2}((\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)^2 + (\tilde{u}_z + \tilde{w}_x)^2 + (\tilde{v}_z + \tilde{w}_y)^2)]. \end{array} \right. \quad (3)$$

Слагаемые, не содержащие функций и производных с тильдой, взаимно уничтожаются, поскольку выражения (2) задают точное решение системы (1).

Затем нелинейные выражения с функциями и производными с тильдой отбрасываются. В результате получается следующая линейная система уравнения с частными производными, где для простоты знак тильды опущен [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + (\tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z) = 0, \\ \tilde{u}_t + \frac{\tilde{\rho}_x}{\gamma} + \frac{\tilde{T}_x}{\gamma} = a\tilde{v} - b\tilde{w} + \mu_0(\tilde{u}_{xx} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{yy} + \frac{3}{4}\tilde{u}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{v}_{xy} + \frac{1}{4}\tilde{w}_{xz}), \\ \tilde{v}_t + \frac{\tilde{\rho}_y}{\gamma} + \frac{\tilde{T}_y}{\gamma} = -a\tilde{u} + \mu_0(\frac{3}{4}\tilde{v}_{xx} + \tilde{v}_{yy} + \frac{3}{4}\tilde{v}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{u}_{xy} + \frac{1}{4}\tilde{w}_{yz}), \\ \tilde{w}_t + \frac{\tilde{\rho}_z}{\gamma} + \frac{\tilde{T}_z}{\gamma} = b\tilde{u} + \mu_0(\frac{3}{4}\tilde{w}_{xx} + \frac{3}{4}\tilde{w}_{yy} + \tilde{w}_{zz} + \frac{1}{4}\tilde{u}_{xz} + \frac{1}{4}\tilde{v}_{yz}), \\ \tilde{T}_t + (\gamma - 1)(\tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z) = \kappa_0(\tilde{T}_{xx} + \tilde{T}_{yy} + \tilde{T}_{zz}). \end{array} \right. \quad (4)$$

Заключение

В работе проведена линеаризация линейной системы уравнений с частными производными на точном решении, описывающем однородный покой. Присутствие силы тяжести в ПСУНС приводит к достаточно затруднительной процедуре линеаризации. Поэтому полагается нулём. И потом уже явно учитывается в линеаризованной ПСУНС.

В монографии [6] показано, что процедура линеаризации квазилинейного уравнения с частными производными на его точном решении и построение решения полученного линейного уравнения фактически определяют первое слагаемое конкретного бесконечного ряда по степеням формального малого параметра ε . Этот ряд решает специальным образом поставленную характеристическую задачу Коши стандартного вида [6] и при условии аналитичности входных данных задачи сходится в окрестности рассматриваемой точки. Следовательно, решение линеаризованной задачи в сумме с точным решением, на котором проведена линеаризация, дают первые два слагаемых бесконечного сходящегося ряда, задающего новое решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

Литература

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
2. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты / С.П. Баутин [и др.]. Новосибирск: Наука ; Екатеринбург: УрГУПС. 2013. 216 с.
3. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг оси / С.П. Баутин [и др.]. Екатеринбург: УрГУПС. 2017. 216 с.
4. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Аналитическое и численное моделирование течений газа при учёте действия силы Кориолиса. Екатеринбург: УрГУПС, 2019. 181 с.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
6. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
7. Баутин С.П. Аналитические решения задачи о движении поршня // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Т. 4, № 1. С. 3–15.
8. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т 12, № 11. С. 2052–2063.
9. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Линеаризованная система уравнений газовой динамики при учёте действия силы Кориолиса: препринт. Снежинск: СФТИ НИЯУ МИФИ, 2019. 52 с.
10. Баутин С.П., Обухов А.Г. Численное моделирование трёхмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Екатеринбург: УрГУПС, 2020. 287 с.
11. Крутова И.Ю., Бугаенко А.А. Численное моделирование на основе линеаризованной системы уравнений газовой динамики восходящих закрученных потоков с учётом силы Кориолиса // ВАНТ. Серия Математическое моделирование физических процессов. 2024. Вып. 1.

**NUMERICAL MODELING OF THE SOLUTION OF PSUNS TAKING INTO ACCOUNT
THE EFFECT OF CORIOLIS FORCE****A.A. Bugaenko**^{1,2}

Lead Engineer, e-mail: bugaenkoaa@vniitf.ru

I.Yu. Krutova¹

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: IYKrutova@mephi.ru

¹Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University "MEPhI",
Snezhinsk, Russia²Federal State Unitary Enterprise "Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research
Institute of Technical Physics named after Academician E.I. Zababakhin", Snezhinsk, Russia

Abstract. The paper considers the complete system of Navier-Stokes equations, which takes into account the compressibility of the gas and the dissipative effects of viscosity and thermal conductivity so that the general laws of conservation of mass, momentum and energy are satisfied. Due to the nonlinearity of this system, constructing its solutions is quite labor-intensive. As a consequence, a linearization procedure is used on the exact solution (homogeneous rest) of the complete system of Navier-Stokes equations, taking into account the forces of gravity and Coriolis.

Keywords: full system of Navier-Stokes equations (FSNE), Coriolis force, linearization.

Дата поступления в редакцию: 19.01.2025