

ОБ ИНДУКТИВНЫХ ИСЧИСЛЕНИЯХ И ВЕРОЯТНОСТНОЙ СЕМАНТИКЕ

И.П. Бесценный

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: ibests@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Рассматриваются формальные эпистемические модальные исчисления, аксиомы которых отражают особенности определения достоверности индуктивных выводов. Так как семантика Крипке для них не подходит, то более естественной для индуктивных исчислений является вероятностная семантика.

Ключевые слова: модальная логика, эпистемические исчисления, вероятностная семантика.

Введение

В естественных науках на основании наблюдений и экспериментов выявляются закономерности, которые формулируются в виде эмпирических гипотез. Эти гипотезы впоследствии могут быть подтверждены или опровергнуты дальнейшими наблюдениями и экспериментами. Логический вывод из частных утверждений к общим называется индуктивным. Эпистемические модальные исчисления выражают степени доверия к эмпирическим гипотезам, их аксиомы основаны на осторожном отношении к достоверности индуктивных выводов.

Хорошо изучены свойства алетических и деонтических модальных исчислений, аксиоматика которых тесно связана со свойствами отношения достижимости соответствующей семантики Крипке [1]. Эпистемические модальные исчисления (в частности, рассматриваемые в данной статье индуктивные исчисления) не содержат аксиомы «сильной импликации», которая истинна в любой семантике Крипке. Так как семантика Крипке для них не подходит, то более естественной для индуктивных исчислений является вероятностная семантика.

1. Индуктивные исчисления

Рассмотрим формальные теории, основанные на исчислении высказываний генценовского типа – исчислении секвенций (ИС) [2, с. 11–17]. Будем использовать с сохранением нумерации из [2, с. 12–13] те же основные правила вывода, а также следующие допустимые правила (транзитивности и обращения):

$$\text{T. } \frac{\Gamma_1 \vdash \Phi; \Gamma_2, \Phi \vdash \Psi}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Psi}.$$

$$9a. \frac{\Gamma, \Phi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\Phi}.$$

$$9б. \frac{\Gamma \vdash \Phi}{\Gamma, \neg\Phi \vdash}.$$

Формулы индуктивных исчислений определяются как в ИС с добавлением фразы:

- Если Φ – формула, то $\Box\Phi, \Diamond\Phi$ – тоже формулы.

При этом полагаем по определению $\Diamond\Phi \equiv \neg\Box\neg\Phi$. Содержательный смысл формулы $\Box\Phi$ – «гипотеза Φ принимается». Тогда $\Box\neg\Phi$ означает «гипотеза Φ отвергается», а $\Diamond\Phi$ – «гипотеза Φ не отвергается».

Индуктивное исчисление Е получается добавлением в ИС схем аксиом:

$$E0. \vdash \Box(\Phi \rightarrow \Phi),$$

$$E1. \Box\Phi \vdash \Diamond\Phi,$$

$$E2. \Box(\Phi \rightarrow \Psi) \vdash \Box\Phi \rightarrow \Diamond\Psi,$$

и правила введения:

$$BB. \frac{\Phi \vdash \Psi}{\Box\Phi \vdash \Box\Psi}.$$

Аксиома E0 обязывает принимать как гипотезы все логические тавтологии. Из правила введения и аксиомы E0 следует допустимость правила Гёделя:

$$Г. \frac{\vdash \Phi}{\vdash \Box\Phi}.$$

Действительно,

$$\frac{\vdash \Box(\Phi \rightarrow \Phi); \frac{\frac{\vdash \Phi}{\Phi \rightarrow \Phi \vdash \Phi}^{(12)} \quad \Box(\Phi \rightarrow \Phi) \vdash \Box\Phi}{\Box(\Phi \rightarrow \Phi) \vdash \Box\Phi}^{(BB)}}{\vdash \Box\Phi}^{(T)}.$$

Используя правила 9ab и эквивалентность $\Diamond\Phi \equiv \neg\Box\neg\Phi$, нетрудно убедиться, что в Е допустимо также правило вывода:

$$BBa. \frac{\Phi \vdash \Psi}{\Diamond\Phi \vdash \Diamond\Psi}.$$

Аксиома E1 синтаксически совпадает с аксиомой D1 деонтического исчисления D ([3]). Осторожное отношение к достоверности эмпирических гипотез выражается в том, что секвенции вида $\Box\Phi \vdash \Phi$ и $\Phi \vdash \Diamond\Phi$ не доказуемы в исчислении Е. То есть принятие гипотезы не гарантирует её истинности, а истинность гипотезы не гарантирует её неотвергаемости. Однако E1 гарантирует внутреннюю непротиворечивость множества рассматриваемых гипотез: если гипотеза принимается, то она не отвергается.

Но самое существенное отличие индуктивных исчислений от алетических и деонтических содержится в схеме аксиом E2. Сравним её с аксиомой «сильной импликации» $\Box(\Phi \rightarrow \Psi) \vdash \Box\Phi \rightarrow \Box\Psi$, которая в E не доказуема.

Если мы принимаем сложную гипотезу, являющуюся импликацией, и принимаем её посылку, то, в отличие от классических дедуктивных рассуждений (правило *modus ponens*), нет достаточных оснований для принятия заключения, можно лишь утверждать, что заключение не отвергается.

Важным следствием схемы аксиом E2 является следующее утверждение:

Предложение 1. В исчислении E доказуема секвенция $\Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Diamond(\Phi \wedge \Psi)$.

Доказательство. В ИС доказуемы секвенции $\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi$; $\Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Box\Phi$; $\Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Box\Psi$. Соединяем с E2:

$$\frac{\frac{\Phi, \Psi \vdash \Phi \wedge \Psi}{\Phi \vdash \Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi} (7) \quad \frac{\Phi \vdash \Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi}{\Box\Phi \vdash \Box(\Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi)} (BB) \quad \Box(\Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi) \vdash \Box\Psi \rightarrow \Diamond(\Phi \wedge \Psi) (T)}{\Box\Phi \vdash \Box\Psi \rightarrow \Diamond(\Phi \wedge \Psi)} (T).$$

Теперь:

$$\frac{\Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Box\Phi; \Box\Phi \vdash \Box\Psi \rightarrow \Diamond(\Phi \wedge \Psi) (T) \quad \Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Box\Psi; \Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Box\Psi \rightarrow \Diamond(\Phi \wedge \Psi)}{\Box\Phi \wedge \Box\Psi \vdash \Diamond(\Phi \wedge \Psi)} (8).$$

■

Это означает, что, принимая каждую из двух гипотез по отдельности, мы не имеем права принять их конъюнкцию, их конъюнкция только лишь неотвергаема.

Отметим, что, используя правила BB и BBA, легко доказываются следующие секвенции: $\Box\Phi \vee \Box\Psi \vdash \Box(\Phi \vee \Psi)$; $\Box(\Phi \wedge \Psi) \vdash \Box\Phi \wedge \Box\Psi$; $\Diamond\Phi \vee \Diamond\Psi \vdash \Diamond(\Phi \vee \Psi)$; $\Diamond(\Phi \wedge \Psi) \vdash \Diamond\Phi \wedge \Diamond\Psi$.

Теорема 1. В исчислении E доказуемы секвенции:

$$\Box(A \rightarrow B), \Box(\neg A \rightarrow B) \vdash \Diamond B.$$

$$\Box(A \rightarrow B), \Box(A \rightarrow \neg B) \vdash \neg\Box A.$$

Доказательство. Из предложения 1 следует доказуемость секвенции

$$\Box\Phi, \Box\Psi \vdash \Diamond(\Phi \wedge \Psi).$$

Подставляем: $\Phi = A \rightarrow B$, $\Psi = \neg A \rightarrow B$. Тогда

$$\Phi \wedge \Psi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge A) \vee B \equiv B.$$

Первая секвенция доказана.

Если взять $\Psi = A \rightarrow \neg B$, то

$$\Phi \wedge \Psi \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg A \vee (B \wedge \neg B) \equiv \neg A.$$

Но $\Diamond\neg A \equiv \neg\Box A$. И вторая секвенция доказана.

■

Выводы будут сделаны после сравнения с теоремой 2 в следующем пункте.

Также как и для алетических и деонтических модальностей, с целью редукции идущих подряд модальных знаков, добавим к исчислению E две схемы аксиом:

$$A3. \Box\Phi \vdash \Box\Box\Phi.$$

$$A4. \neg\Box\Phi \vdash \Box\neg\Box\Phi.$$

Получим исчисление ES5, в котором (как и в S5) выполнено следующее правило редукции модальностей: любая цепочка идущих подряд модальных знаков эквивалентна последнему из них.

Предложение 2. В исчислении ES5 доказуемы секвенции:

$$\vdash \Box(\Box\Phi \rightarrow \Phi).$$

$$\vdash \Box(\Psi \rightarrow \Diamond\Psi).$$

Доказательство. В E доказуемы секвенции $\Box\neg\Box\Phi \vee \Box\Phi \vdash \Box(\neg\Box\Phi \vee \Phi)$; $\Box\neg\Psi \vee \Box\Diamond\Psi \vdash \Box(\neg\Psi \vee \Diamond\Psi)$. Они эквивалентны $\Diamond\Box\Phi \rightarrow \Box\Phi \vdash \Box(\Box\Phi \rightarrow \Phi)$ и $\Diamond\Psi \rightarrow \Box\Diamond\Psi \vdash \Box(\Psi \rightarrow \Diamond\Psi)$ соответственно.

Обращение A4 по правилам 9ab приводит к $\Diamond\Box\Phi \vdash \Box\Phi$, а подстановка в неё $\neg\Psi$ даёт $\Diamond\Psi \vdash \Box\Diamond\Psi$, т. е. доказуемы $\vdash \Diamond\Box\Phi \rightarrow \Box\Phi$ и $\vdash \Diamond\Psi \rightarrow \Box\Diamond\Psi$.

По правилу вывода T (транзитивность импликации) получаем требуемое. ■

Доказанные секвенции имеют следующие смыслы: «приемлемо считать, что если гипотеза принимается, то она истинна» и «приемлемо считать, что если гипотеза истинна, то она не отвергается» соответственно. Однако ни $\vdash \Box\Phi \rightarrow \Phi$, ни $\vdash \Psi \rightarrow \Diamond\Psi$ не доказуемы в индуктивных исчислениях.

2. Вероятностная семантика

Каждой формуле Φ сопоставляется некоторая вероятность $P(\Phi)$, которую можно интерпретировать как вероятность того, что данная гипотеза истинна. Способов сопоставления бесконечно много, но все они обязаны удовлетворять следующим свойствам:

$$B1. 0 \leq P(\Phi) \leq 1.$$

$$B2. P(\neg\Phi) = 1 - P(\Phi).$$

$$B3. \text{ если } \Phi \vdash \Psi, \text{ то } P(\Phi) \leq P(\Psi).$$

$$B4. P(\Phi \vee \Psi) = P(\Phi) + P(\Psi) - P(\Phi \wedge \Psi).$$

Из свойства B3 следует, что вероятность конъюнкции двух формул меньше, чем вероятность каждой из её компонент. Вероятность истинности тавтологий исчисления высказываний всегда равна 1. Если же $P(\Phi) = 1$, то этого недостаточно для истинности формулы Φ , нужно, чтобы $P(\Phi) = 1$ выполнялось для каждого вероятностного отображения. Кроме того, отметим, что вероятности истинности для эквивалентных формул равны между собой.

Вероятностная семантика – это пара отображений $\langle v, P \rangle$, заданных на множестве формул, где v может принимать только два значения (0 – «ложь», 1 – «истина») и согласовано с логическими связками (как в исчислении высказываний), а P – вероятностное отображение, удовлетворяющее свойствам В1–В4. Связь между этими отображениями для исчисления Е задаётся свойством

$$\text{ВЕ. } v(\Box\Phi) = 1 \Leftrightarrow P(\Phi) \geq 1 - \varepsilon,$$

где ε – некоторая заданная величина из интервала $[0, \frac{1}{3}]$. Тогда

$$P(\Phi) > \varepsilon \Leftrightarrow P(\neg\Phi) < 1 - \varepsilon \Leftrightarrow v(\Box\neg\Phi) = 0 \Leftrightarrow v(\neg\Box\neg\Phi) = v(\Diamond\Phi) = 1.$$

Получается, что утверждение «гипотеза принимается» истинно, если вероятность истинности гипотезы не менее $1 - \varepsilon \geq 66,67\%$, а утверждение «гипотеза отвергается» истинно, если вероятность истинности гипотезы не более $\varepsilon \leq 33,33\%$. Можно назвать ε неким «порогом недоверия».

Как обычно, формулы и секвенции будем называть тождественно истинными, если они истинны в любой вероятностной семантике. В [4] (метатеоремы 50 и 51) приведены доказательства непротиворечивости и полноты исчисления Е для такой семантики.

Теорема 2. В исчислении Е не доказуемы секвенции:

$$\Box(A \rightarrow B), \Box(\neg A \rightarrow B) \vdash \Box B;$$

$$\Box(A \rightarrow B), \Box(A \rightarrow \neg B) \vdash \Box\neg A.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon = 0,3 < 1/3$. Положим $P(A) = P(B) = 0,5$, тогда и $P(\neg A) = P(\neg B) = 1 - 0,5 = 0,5$. Если $P(A \wedge B) = 0,25$, то по симметрии $P(A \wedge \neg B) = P(\neg A \wedge B) = P(\neg A \wedge \neg B) = 0,25$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P(A \rightarrow B) &= P(\neg A \vee B) = P(\neg A) + P(B) - P(\neg A \wedge B) = \\ &= 0,5 + 0,5 - 0,25 = 0,75 \geq 1 - \varepsilon = 0,7. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $P(\neg A \rightarrow B) \geq 1 - \varepsilon$ и $P(A \rightarrow \neg B) \geq 1 - \varepsilon$. По свойству ВЕ посылки обеих секвенций истинны, а заключения ложны. Значит, они не доказуемы ввиду непротиворечивости исчисления Е. ■

Сравнивая результаты теоремы 1 и теоремы 2, ещё раз убеждаемся в осторожности индуктивных выводов: если мы принимаем две гипотезы о том, что В следует из обеих противоположных посылок, то В всего лишь не отвергаема. И наоборот, если из А следуют два противоречивых следствия, то А не отвергается, а только не принимается (до получения дополнительной информации).

В заключение заметим, что вероятностная семантика может применяться и для алетических модальных исчислений.

Например, вероятностная семантика $\langle v, P \rangle$ для исчисления Т (см. [3]) удовлетворяет свойствам В1–В4 и следующему условию

$$\text{ВТ. } v(\Box\Phi) = 1 \Leftrightarrow P(\Phi) = 1.$$

Из него, в частности, следует, что $v(\Diamond\Phi) = 1 \Leftrightarrow P(\Phi) \neq 0$. Получается, что «небходимость» означает равенство вероятности 1. Формальное сравнение с условием ВЕ говорит о том, что вероятностная семантика для Т является частным случаем индуктивной вероятностной семантики, когда «порог недоверия» $\varepsilon = 0$. Это согласуется с тем, что исчисление Т является расширением исчисления Е.

Литература

1. Goldblatt R. Logics of time and computation. Standford: CSLI Lecture Notes, Vol. 7. 1992. 131 p.
2. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов. М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. 224 с.
3. Бесценный И.П. О редукции модальностей в деонтических исчислениях // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2 (42). С. 5–10.
4. Костюк В.Н. Элементы модальной логики. Киев: Наукова думка, 1978. 180 с.

ON INDUCTIVE CALCULI AND PROBABILISTIC SEMANTICS

I.P. Bestsennyi

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: ibests@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Formal epistemic modal calculi are considered, whose axioms reflect the features of determining the reliability of inductive inferences. Since Kripke semantics is not suitable for them, probabilistic semantics is more natural for inductive calculi.

Keywords: modal logic, epistemic calculi, probabilistic semantic.

Дата поступления в редакцию: 20.02.2025