

ФОРМУЛЫ ТИПА ГАУССА–БОННЕ–ЧЖЭНЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Сочинский государственный университет, Сочи, Россия

Аннотация. В статье даётся обзор формул типа Гаусса–Бонне–Чжэня, часть которых была включена в обзор автора 2009 г., часть отсутствовала в упомянутом обзоре, а часть была получена позже. Отдельно уделяется внимание применению этих формул в общей теории относительности. Установлена положительность энергии, необходимой для порождения 4-мерной кротовой норы, по которой летит варп-корабль. Даны выводы формулы в суперсимметричной евклидовой теории поля и из теоремы об индексе Атьи–Зингера.

Ключевые слова: теорема Гаусса–Бонне–Чжэня, кривизна, характеристика Эйлера–Пуанкаре, кинк векторного поля, лоренцевы многообразия, теоремы об индексе Атьи–Зингера.

Введение

Общая теория относительности (ОТО) создавалась Эйнштейном как обобщение специальной теории относительности на неинерциальные, ускоренные системы отсчёта, и тем самым, опираясь на принцип эквивалентности, теория относительности включала бы гравитацию. Как видно из этого утверждения, в поле внимания Эйнштейна было окружающее исследователя пространство, которое самым естественным образом предполагалось областью евклидоваго 3-мерного пространства. Никакая другая форма, или, как сейчас говорят, топология пространства и пространства-времени, и не рассматривалась. Иначе говоря, ОТО – это теория, никак не учитывающая топологию пространства и пространства-времени.

О форме (топологии) пространства Эйнштейн заговорил лишь тогда, когда обратился к космологии. Ему пришлось задуматься о конечности или о бесконечности пространства, а следовательно, о том, какой выбор метрики однозначно задаёт топологию пространства. Как известно, он пришёл к выводу, что пространство – это 3-мерная сфера S^3 , а пространство-время – 4-мерный цилиндр $S^3 \times \mathbb{R}$.

Есть ли связь между метрикой, т. е. геометрией, кривизной пространства-времени и его формой (топологией)? В наше время этот вопрос связан не только с космологией, но и с проблемой сверхбыстрых межзвёздных перелётов, которые, как оказалось, однозначно связаны с изменением формы (топологии) и пространства, и пространства-времени [1].

Математики благодаря работам Гаусса, Бонне, Пуанкаре, Чжэня и др., установили формулы, связывающие метрику g , кривизну R , т. е. геометрию, и топологию изучаемого пространства M^n . Этот так называемые формулы типа Гаусса–Бонне–Чжэня, которые имеют следующий формальный вид:

$$\int_{M^n} f(R) dv_g = \phi(b_0, \dots, b_n),$$

где $b_i = b_i(M^n)$ – числа Бетти, характеризующие специфику формы пространства M^n .

Как правило, в качестве функции ϕ рассматривается функция

$$\chi(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M^n), \quad b_i(M^n) = \text{rank } H_i(M^n),$$

известная как характеристика Эйлера–Пуанкаре.

Напомним, что **характеристика Эйлера–Пуанкаре $\chi(M^n)$ любого компактно-го многообразия нечётной размерности $n = 2k+1$ равна нулю**, поэтому, казалось бы, интерес представляет только чётномерный случай. Однако увязать топологию с кривизной более чем важно и для нечётномерных многообразий, например для M^3 . Дело в том, что образование 3- и 4-мерных кротовых нор в 3-мерном пространстве – это межзвёздные полёты на варп-кораблях, и исследования на предмет потребляемой такими кораблями энергии можно делать, опираясь на аналоги формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для римановых многообразий M^3 [1–3].

Существует [4] аналог характеристики Эйлера–Пуанкаре

$$\rho(M^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i i b_i(M^n),$$

который не равен нулю для нечётного $n = 2k + 1$. Нетривиальным обобщением теоремы Гаусса–Бонне–Чжэня является теорема Атьи–Зингера об индексе. Она для чётных размерностей. Тем не менее проводятся исследования по «свёртыванию» теоремы об индексе в К-теории или в других теориях с целью получения нетривиальных результатов и для нечётных размерностей. Один из таких результатов мы приводим в § 7.2.2.

Напомним, что **для компактного многообразия, допускающего лоренцеву метрику, т. е. сигнатуры $(+ - \dots -)$, также $\chi(M^{2k}) = 0$** [5, р. 149]. А это как раз те многообразия, которые изучаются в ОТО как модели пространства-времени. Поэтому хотелось бы иметь формулы, связывающие кривизну и топологию для чётномерных лоренцевых многообразий, действующие не характеристику Эйлера–Пуанкаре, а некоторый её аналог, построенный из чисел Бетти.

В статье, говоря о компактных многообразиях, имеются в виду замкнутые многообразия, т. е. компактные многообразия без края.

1. Индекс векторного поля и характеристика Эйлера–Пуанкаре

Форма многообразия во многом характеризуется числами Бетти и их комбинациями, одна из которых – это характеристика Эйлера–Пуанкаре. В случае многообразия с краем рассматривается на многообразии векторное поле v , с помощью которого увязывается геометрия внутренней части многообразия и геометрия края, при интегрировании которых определяют топологическую характеристику (форму) многообразия. Нам нужно познакомиться с числовыми особенностями используемого векторного поля. Это индекс поля $ind_{z_i}(v)$ и его кинк $kink(\partial M, v)$.

1.1. Определение индекса векторного поля

Пусть дано гладкое отображение многообразий $f : M^n \rightarrow N^n$. Рассмотрим точку $y_0 \in N^n$ общего положения. Это означает конечность прообраза $f^{-1}(y_0)$ и якобианы J_f в окрестностях всех точек прообраза $f^{-1}(y_0) = \{x_{01}, \dots, x_{0m}\}$ отличны от нуля.

Степень отображения f есть число

$$deg(f) := \sum_{i=1}^m sgn J_f(x_i) = \sum_{i=1}^m sgn \det \left[\frac{\partial f_k}{\partial x^j}(x_{0i}) \right].$$

Оно не зависит от выбора точки y_0 .

Рассмотрим векторное поле $v : M^n \rightarrow TM^n$, $v(x) \in T_x(M^n)$ с изолированными особыми точками x_i , в которых $v(x_i) = 0$. Если взять малую сферу $S_\varepsilon^{n-1} = \{x \in M^n : \|x - x_i\| = \varepsilon\}$, которую берём в локальной карте многообразия¹, то имеем ненулевое векторное поле – гладкое отображение

$$f(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|} : S_\varepsilon^{n-1} \rightarrow S^{n-1},$$

т. е. точке $x \in S_\varepsilon^{n-1}$ ставим в соответствие единичное направление $f(x) \in S^{n-1}$. Степень $deg(f)$ отображения f называется *индексом поля v в особой точке x_i* и обозначается как $ind_{x_i}(v)$, а *индекс поля v* определяем как

$$ind(v) = \sum_{i=1}^m ind_{x_i}(v).$$

Теорема 1. (Пуанкаре–Хопф [6, 7, р. 35]) Пусть (M^n, g) – компактное (ориентированное) многообразие без края, а v – гладкое векторное поле на M^n с конечным числом изолированных нулей $x_1, \dots, x_m$. Тогда

$$\chi(M^n) = \sum_{i=1}^m ind_{x_i}(v),$$

где $\chi(M^n)$ – характеристика Эйлера–Пуанкаре. ■

¹Что допустимо считать, поскольку можно отождествлять окрестность вокруг x_i с локальной картой при малом ε .

Следствие 4. Если на M^n существует касательное векторное поле без нулей, то $\chi(M^n) = 0$. ■

Теорема 2. (Пуанкаре–Хопф [7, р. 35]) Пусть (M^n, g) – компактное (ориентированное) многообразие с краем и v – гладкое векторное поле на M^n с изолированными нулями $x_1, \dots, x_m$, и на краю v указывает наружу во всех краевых точках. Тогда

$$\chi(M^n) = \sum ind_{x_i}(v),$$

где $\chi(M^n)$ – характеристика Эйлера–Пуанкаре. ■

В частности, этот индекс поля является топологически инвариантным на M^n : он не зависит от конкретного выбора векторного поля.

2. Компактные псевдоримановы многообразия без края

Пусть $n = 2k$ чётное число. Определим *пфафффиан*:

$$Pf_n(R) = \frac{1}{(8\pi)^k k!} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} \dots R_{i_{2k-1} i_{2k} j_{2k-1} j_{2k}} \eta^{i_1 \dots i_{2k}} \eta^{j_1 \dots j_{2k}}.$$

Для нечётной размерности *пфафффиан* равен нулю по определению.

Пусть (M, g) компактное псевдориманово многообразие без края сигнатуры (p, q) . Элемент объёма зададим как

$$dv_g = |\det(g_{ij})|^{1/2} dx^1 \dots dx^n.$$

Имеет место теорема:

Теорема 3. (Avez [8], Chern [9]) Пусть (M^n, g) компактное ориентированное псевдориманово многообразие без края сигнатуры (p, q) размерности $(n \equiv 0) \bmod 2$. Если $(p \equiv 1) \bmod 2$, то $\chi(M^n)$ исчезает. Если $(p \equiv 0) \bmod 2$, то

$$\chi(M^n) = (-1)^{p/2} \int_{M^n} Pf_n(R) dv_g.$$

Теорема 4. (Law [10]) В компактном ориентированном $2k$ -мерном псевдоримановом многообразии M^{2k} с метрикой g с сигнатурой типа (p, q) , для чётных p и q , $k = p/2 + q/2$, имеем

$$\chi(M^{2k}) = \frac{(-1)^{p/2}}{(8\pi)^k k!} \int_{M^{2k}} \eta_{i_1 \dots i_{2k}} \eta_{j_1 \dots j_{2k}} R^{i_1 i_2 j_1 j_2} \dots R^{i_{2k-1} i_{2k} j_{2k-1} j_{2k}} dv_g.$$

Когда p нечётно, можно всё ещё считать эту формулу верной, поскольку под-интегральное выражение исчезает. Ради формальности можно заменить в ней $p/2$ на $[p/2]$. ■

Теорема 5. (Avez, [11]) Пусть M^4 4-мерное компактное ориентированное псевдориманово многообразие без края сигнатуры $(\underbrace{+\dots+}_p \underbrace{-\dots-}_{4-p})$. Тогда характеристика Эйлера–Пуанкаре $\text{ch}(M^4)$ представляется в виде

$$\int_{M^4} W_{ijkl} W^{ijkl} dv_g = 2 \int_{M^4} \left(R_j^j R_i^i - \frac{1}{3} R^2 \right) dv_g + (-1)^{p+[p/2]} \cdot 8\pi^2 \chi(M^4)$$

и

$$\int_{M^4} R_{ijkl} R^{ijkl} dv_g = 4 \int_{M^4} \left(R_j^j R_i^i - \frac{1}{4} R^2 \right) dv_g + (-1)^{p+[p/2]} \cdot 8\pi^2 \chi(M^4).$$

Для M^4 $\cup$ -произведение на группе когомологий $H^2(M^4, \mathbb{R})$ определяет квадратичную форму с $p(M^4)$ положительными квадратами и $n(M^4)$ отрицательными квадратами.

Сигнатурой Хирценбруха многообразия M^4 называется число

$$sg(M^4) = p(M^4) - n(M^4).$$

Теорема 6. ([12], теорема 1; [10]) Если M^4 компактное ориентированное псевдориманово многообразие с метрикой сигнатуры $(\underbrace{+\dots+}_p \underbrace{-\dots-}_{4-p})$, то

$$sg(M^4) = \frac{p_1}{3} = \frac{(-1)^p}{96\pi^2} \int_{M^4} R_{i_1 j_1 j_2}^{i_1} R_{i_1 j_3 j_4}^{i_1 \dots} \eta^{j_1 j_2 j_3 j_4} dv_g.$$

где p_1 – 1-е число Понтрягина. ■

2.1. Интегранты компактных 4-мерных псевдоримановых многообразий

Предложение 1. Не существует компактных гладких многообразий M , допускающих гладкую метрику типа (p, q) , p, q нечётны, $p + q = n$, так что интегрант Гаусса–Бонне всюду ≥ 0 или ≤ 0 , если только он не есть 0 [13, p. 45]. ■

Называют многообразие M , снабжённое метрикой, локально однородным, если для заданных $x, y \in M$ существует изометрия окрестности x на окрестность y , переносящая x в y .

Очевидно, связное гладкое многообразие, локально однородное относительно гладкой метрики, имеет постоянный интегрант Гаусса–Бонне. Поэтому

Предложение 2. *Не существует компактного гладкого локально однородного множества M с метрикой типа (p, q) , p, q нечётны, такого, что интегрант Гаусса–Бонне отличен от нуля [13, p. 45].* ■

Псевдориманова пространственная форма – это полная псевдориманова метрика g с постоянной секционной кривизной. Существуют ли такие формы в случае размерности 4?

Предложение 3. *Не существует четырёхмерных компактных псевдоримановых пространственных форм [13, p. 44], [14].* ■

3. Псевдоримановы пространства с краем

3.1. Компактные псевдоримановы многообразия с краем

Рассматриваем псевдориманово многообразие M^n с краем ∂M^n .

Пусть ν – направленное внутрь нормальное векторное поле вблизи края ∂M^n , а $\{\nu, e_2, \dots, e_n\}$ – локальное поле репера для касательного расслоения TM^n , где $\{e_2, \dots, e_n\}$ – произвольное локальное поле репера для касательного расслоения.

Предположим, что нормальный вектор ν является либо времениподобным, либо пространственноподобным на каждой компоненте связности края, или, что эквивалентно, что ограничение метрики на краю невырожденно².

Компоненты второй фундаментальной формы тогда задаются как

$$L_{ab} = |g(\nu, \nu)|^{-1/2} g(\nabla_{e_a} e_b, \nu).$$

Определяем *трансгрессию* пфаффиана

$$TPf_n(g) := \sum_{m=2}^n \left\{ \frac{R_{a_1 a_2 b_2 b_1} \dots R_{a_{2m-1} a_{2m} b_{2m} b_{2m-1}} L_{a_{2m+1} b_{2m+1}} \dots L_{a_{m-1} b_{m-1}}}{(8\pi)^m m! \text{Vol}(S^{n-1-2m}) (n-1-2m)!} \times \right. \\ \left. \times g(e^{a_1} \wedge \dots \wedge e^{a_{n-1}}, e^{b_1} \wedge \dots \wedge e^{b_{n-1}}) \right\},$$

где ведём суммирование по индексу $m = 2, \dots, n$ и суммирование по соответствующим выражениям со второй фундаментальной формой.

Заметим, что если n нечётно, то $\chi(M^n) = (1/2)\chi(\partial M^n)$, поэтому мы можем применить теорему 1 для вычисления $\chi(\partial M^n)$ и, таким образом, выразить $\chi(M^n)$ в терминах кривизны. Поэтому мы предполагаем, что $(n \equiv 0) \bmod 2$.

Тогда справедлива

²Случай изотропного вектора ν опускаем (см. [15]).

Теорема 7. (Alty, [15]) Пусть (M^n, g) – компактное гладкое псевдориманово многообразие размерности $(n \equiv 0) \bmod 2$ и сигнатуры (p, q) , имеющее гладкий край ∂M^n . Предположим, что $g|_{\partial M^n}$ невырожденно. Если p нечётно, то $\chi(M^n) = 0$. В противном случае

$$\chi(M^n) = (-1)^{p/2} \left(\int_{M^n} Pf_n(R) dv_g + \int_{\partial M^n} TPf_n(g) dv_{g|_{\partial M^n}} \right).$$

■

Рассмотрим отдельно случай $n = 4$.

Теорема 8. (Alty [15], теорема 3) Дано компактное ориентированное четырёх-мерное многообразие M^4 с гладким краем ∂M^4 . Предположим, что M^4 наделён метрикой g , которая имеет p положительных собственных значения и $(4 - p)$ отрицательные собственные значения. Пусть v – любое гладкое единичное (или изотропное) векторное поле на M^4 такое, что на каждой связной компоненте границы поля v везде либо пространственноподобное, либо времениподобное, либо изотропное, тогда сумма индексов векторного поля v определяется как

$$\sum ind(v) = (-1)^{[p/2]} \left(\int_{M^4} \Delta dv_g + \int_{M^4} [\Theta_1(v) - \Theta_2(v)] dv_{g|_{\partial M^4}} \right),$$

где

$$\Delta = \frac{1}{128\pi^2} \eta_{abcd} \eta^{a'b'c'd'} R^{ab..}_{..a'b'} R^{cd..}_{..c'd'}, \quad \Theta_1(v) = \frac{1}{16\pi^2} {}^{(3)}\eta_{abc} {}^{(3)}\eta^{a'b'c'} R^{ab..}_{..a'b'} v^c_{;c'},$$

$$\Theta_2(v) = \frac{1}{12\pi^2} {}^{(3)}\eta_{abc} {}^{(3)}\eta^{a'b'c'} v^a_{;a'} v^b_{;b'} v^c_{;c'}, \quad {}^{(3)}\eta_{abc} = v^d \eta^{dabc}.$$

■

4. Случай лоренцева многообразия

Лоренцево мнгообразие – это псевдориманово мнгообразие M^n с метрикой g сигнатуры $(+ - \dots -)$.

Лоренцево многообразие *ориентируемо во времени*, если оно обладает нигде не исчезающим времениподобным векторным полем v , т. е. $g(v, v) > 0$.

4.1. Определение кинка векторного поля

Итак, пусть M^4 – ориентируемое во времени пространство-время с краем ∂M^n , лоренцевой метрикой g_L и пусть на нём дано направленное в будущее времениподобное векторное поле v_g .

Пусть F – компонента края ∂M^n . В общем случае в нашем анализе F не будет пространственноподобной; в некотором смысле, кинк измеряет, насколько F далека от пространственноподобности [16].

Акцентируется внимание на крае, который частично пространственноподобный, а частично времениподобный. Каждая связная компонента F края является замкнутым связным ориентируемым 3-многообразием, и с ней связывается целочисленный инвариант $kink(F, g_L)$, который, грубо говоря, измеряет, сколько раз световой конус метрики g_L падает, опрокидывается (tips over on) на F [17].

Пусть ν – нормаль к F . Будем говорить, что F – начальный край, если ν направлена внутрь, и конечный край, если ν направлена наружу. Рассмотрим $F \times [0, 1]$ с координатами (x, t) и отождествим ν с $\partial/\partial t$. Мы можем рассмотреть векторное поле на $F \times \{0\}$, которое может быть отождествлено с v_g и, злоупотребляя обозначениями, также будем обозначать этот вектор v_g . Теперь расширим v_g до векторного поля на $F \times [0, 1]$, которое имеет только изолированные особенности и согласуется с ν на $F \times \{1\}$; обозначим это расширенное векторное поле через $\tilde{v}_g$.

Кинк поля v_g на F – это по определению число

$$kink(F, v_g) = ind(\tilde{v}_g).$$

Мы видим, что кинк определяется через индекс векторного поля на краю, а отличие индекса от нуля предполагает наличие нуля у поля $\tilde{v}$ на краю. Поскольку поле v времениподобное, это зануление означает «вырождение», «опрокидывание» светового конуса.

Если F везде пространственноподобна или везде времениподобна, то кинк исчезает.

В случае, когда M^n имеет край ∂M^n , мы можем определить кинк векторного поля v на ∂M^n . Для этого запишем $\partial M^n = F_1 \cup \dots \cup F_m$, где F_i являются связными компонентами ∂M^n . Приняв соглашение, что нормальный вектор к ∂M^n (и, следовательно, к каждому F_i) направлен наружу, мы определяем

$$kink(\partial M^n, v) = \sum_i^m kink(F_i, v).$$

Теорема 9. [6] Пусть M^{2k} – ориентированное чётномерное многообразие с краем, и пусть v – любое векторное поле на M^{2k} . Тогда характеристика Эйлера–Пуанкаре многообразия M^{2k} даётся формулой

$$\chi(M^{2k}) = \sum ind(v) + kink(\partial M^{2k}, v). \quad (\#)$$



4.2. Формула Гаусса–Бонне–Чжэня для лоренцева многообразия M^4 с краем

Пусть M – компактное ориентированное многообразие, тогда M допускает невырожденное векторное поле τ тогда и только тогда, когда M допускает метрику Лоренца. В самом деле, возьмём любую риманову метрику h на M и пусть τ – невырожденное единичное векторное поле относительно h .

Положим

$$g_L^{ik} = h^{ik} - 2\tau^i\tau^k.$$

Тогда g_L – метрика Лоренца на M , а τ – невырожденное единичное времениподобное векторное поле относительно g_L . Обратное утверждение следует из того, что метрика Лоренца g на M может быть диагонализирована относительно любой римановой метрики h , а собственный вектор с отрицательным собственным значением – это исчезающее векторное поле.

Из (§) следует, что многообразие с краем всегда допускает невырожденное векторное поле τ , хотя τ может иметь кинк на краю. Действительно, при $ind(v) = -kink(\partial M^4, v) \neq 0$ за счёт наличия кинка на краю получаем из (§), что $\chi(M^4) = 0$. Поэтому лоренцева метрика наличествует на многообразии, а как следствие этого имеется ненулевое времениподобное векторное поле $\tau = v$, для которого как раз $ind(\tau) = -kink(\partial M^4, \tau)$. Следовательно, многообразие с краем всегда допускает метрику Лоренца.

Если τ имеет ненулевой кинк на ∂M , то говорят, что метрика Лоренца g_L , заданная τ , имеет кинк на ∂M (см., например, работы [17] и [18]). (В этом случае часто используется обозначение $kink(\partial M, g_L) = kink(\partial M, \tau)$.)

Поскольку τ не обращается в нуль во внутренней части M^4 , то из теоремы 8 вытекает следующее следствие.

Теорема 10. (Alty [15, р. 3099]) Пусть M^4 – компактное ориентированное четырёхмерное многообразие с краем, тогда M^4 допускает лоренцеву метрику g_L . Пусть τ – любое соответствующее несингулярное единичное времениподобное векторное поле на M^4 . Тогда имеем

$$\int_{M^4} \Delta dv_g + \int_{\partial M^4} [\Theta_1(\tau) - \Theta_2(\tau)] dv_{g|_{\partial M^4}} = 0.$$

■

4.3. Обобщенная теорема Пуанкаре–Хопфа [16]

Рассмотрим многообразие M^n с краем ∂M^n (где ∂M^n не обязательно является связным). Пусть v – векторное поле на M^n , которое нигде не обращается в нуль, так что v , в общем случае, не будет нормальным к ∂M^n .

Если мы вычислим все кинки относительно нормали n , направленной наружу, мы получим

$$kink(\partial M^n, v) = \chi(M^n),$$

где $kink(\partial M^n, v) = \sum_i kink(F_i, v)$, т. е. сумма кинков для каждой компоненты F_i края ∂M^n .

Теперь рассмотрим случай, когда нормаль n рассматривается как направленная внутрь на F_i – начальной компоненте, а направленная наружу на F_f – конечной компоненте. Мы легко получим результат

$$kink(F_f, v) - kink(F_i, v) = \chi(M^n) - \chi(F_i),$$

где кинк (число перегибов) вычисляется относительно нормали, направленной внутрь на F_i , и нормали, направленной наружу на F_f .

Если M^n – замкнутое нечётномерное многообразие, $\chi(M^n) = 0$, и если M^n имеет четную размерность, то $2\chi(M^n) = \chi(\partial M^n)$ [7].

Таким образом, мы получаем результат

Теорема 11. (Low [16]) Пусть M^n – многообразие с краем ∂M^n , имеющим компоненту связности F_i , к которой нормаль направлена внутрь, и компоненту связности F_f , к которой нормаль направлена наружу. Пусть v – нигде не исчезающее векторное поле на M^n . Тогда, если M^n является чётномерным, то

$$kink(F_f, v) - kink(F_i, v) = \chi(M^n),$$

а если M^n является нечётномерным, то

$$kink(F_f, v) - kink(F_i, v) = \frac{1}{2}[\chi(F_f) - \chi(F_i)].$$

■

Таким образом, теорема говорит, что для чётномерного многообразия M^n разница между кинками на конечном крае и начальным краем всегда равна $\chi(M^n)$, тогда как для нечётномерного M^n изменение кинком равно половине изменения эйлеровой характеристики на краях.

Таким образом, в нечётном случае мы имеем

$$kink(F_f, v) = kink(F_i, v) + \frac{1}{2}\chi(\partial M^n).$$

5. Римановы многообразия

Мы живём в 3-мерном римановом пространстве M^3 и наши материальные или энергетические воздействия происходят в этом пространстве. Важно знать, могут ли наши действия изменять форму (топологию) нашего физического пространства или пространства-времени? Для расчёта таких воздействий можно использовать либо формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для чётномерных лоренцевых пространств M^{2k} , связывающих кривизну и характеристику Эйлера–Пуанкаре, если речь идёт о пространстве-времени, либо их аналоги для нечётномерных римановых пространств M^{2k+1} , если нас интересуют изменения в физическом пространстве.

Рассмотрим такие формулы, относящиеся к собственно римановой геометрии. Начнём с нечётномерных пространств M^{2k+1} , затем изучим случай чётномерных

римановых многообразий M^{2k} . Последние, казалось бы, не имеют отношения к пространству-времени. Какой смысл обращаться к ним?

Ведь формул типа Гаусса–Бонне–Чжэня для псевдоримановых многообразий предостаточно. Однако не стоит пренебрегать для достижения наших целей и формулами типа Гаусса–Бонне–Чжэня, полученными и для собственно римановых многообразий. Тем более, что поиск таких формул для случая римановых многообразий ведётся более активно, чем для лоренцевых многообразий, и делают это весьма квалифицированные математики. Другими словами, шанс, что на этом направлении будут получены самые разнообразные и изощрённые варианты формул типа Гаусса–Бонне–Чжэня, учитывающие сложнейшие пространственные построения реальности, как явные, так и скрытые, относящиеся к самым разнообразным сферам физической науки, гораздо большие, чем в лоренцевом случае.

Отчасти, наше обращение к римановым формулам подогревается гипотезой Хокинга о евклидовой природе пространства-времени [19]. Хокинг ратовал за сигнатуру $(+ + \dots +)$, отводя сигнатуре $(+ - \dots -)$ ту же судьбу, что и Кант природе пространства и времени. И то и другое всего лишь формы восприятия реальности человеком.

Гипотеза Хокинга была высказана им, когда он занимался проблемами квантовой теории поля и квантовой гравитации, и тогда многие физики часто для улучшения сходимости континуальных интегралов использовали поворот Вика $x^0 \rightarrow ix^0$. Благодаря этому повороту вместо многообразия с лоренцевой сигнатурой мы оказывались уже в римановом многообразии с сигнатурой $(+\dots+)$.

Успешное применение Хокингом приёма перехода к сигнатуре $(+ + \dots +)$ и породило гипотезу, что лоренцева метрика – это всего лишь результат нашего восприятия Мира, а реальный мир имеет евклидову сигнатуру $(+ + \dots +)$. Однако всё это относилось к квантовой картине Мира. В нашем же случае мы применяем формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для решения интересующих нас задач по искусственному изменению топологии в рамках классической общей теории относительности и поэтому должны ответить на вопрос о правомерности обращения к повороту Вика конкретно в классической теории.

Положительный ответ мы находим в статье М.Ю. Константинова [20], в которой утверждается, что «соответствие между псевдоримановыми и римановыми пространствами может быть установлено и без перехода к комплексному времени». Покажем, как это делается [21].

5.1. Гипотеза Хокинга и римановы многообразия

Суть в том, что соответствие между римановой h_{ij} и лоренцевой g_{ij} метриками устанавливается равенствами:

$$g_{ij} = u_i u_j - h_{ij} \text{ и } h_{ij} = u_i u_j - g_{ij},$$

которые в общем случае являются локальными. А чтобы такое соответствие было справедливо на всём пространстве-времени, необходимо существование на M^4 нигде не обращающегося в нуль векторного поля u^i , что эквивалентно, как известно, условию равенства нулю характеристики Эйлера–Пуанкаре.

Тензоры кривизны Римана–Кристоффеля, Риччи и скалярная кривизна метрик h_{ik} и g_{ik} связаны хорошо известными формулами биметрического формализма. Например, для тензора кривизны Риччи имеем:

$$R_{(h)ik} = R_{(g)ik} + \Pi_{ik;m}^m - \Pi_{im;k}^m + \Pi_{ik}^m \Pi_{ms}^s - \Pi_{is}^m \Pi_{mk}^s,$$

$$\Pi_{jk}^i = \Gamma_{(h)jk}^i - \Gamma_{(g)jk}^i.$$

Здесь точка с запятой обозначают ковариантную производную в соответствии с метрикой g_{ik} , а взятые в скобки индексы h и g – величины, вычисленные по соответствующим метрикам.

При этом соответствии действия имеют вид

$$S = \int (kR_h + L_m) \sqrt{h} d^4x$$

– для римановой метрики на M^4 ,

$$S = \int (-kR_g + L_m + F(u_i, u_{i,j})) \sqrt{g} d^4x \quad (b)$$

– для лоренцевой метрики на M^4 , где

$$F(u_i, u_{i,j}) = 2R_g^{ik} u_i u_k + (2u^i u^k - g^{ik})(\Pi_{ik;m}^m - \Pi_{im;k}^m + \Pi_{ik}^m \Pi_{ms}^s - \Pi_{is}^m \Pi_{mk}^s),$$

$$(-kR_g + F(u_i, u_{i,j})) \sqrt{-g} = kR_h \sqrt{h}.$$

Формально функционал действия (b) описывает представляемое людьми по мысли Хокинга пространство-время, порождаемое полями обычной материи (слагаемое L_m) и векторным полем u_i с минимальной связью. Однако, в отличие от обычных моделей с минимальной связью, связь между обычной материей и векторным полем u^i отсутствует [20].

Поэтому слагаемое $F(u_i, u_{i,j})$ в интеграле (b) следует рассматривать как лагранжиан тёмной материи (тёмной энергии) [20]. Поэтому принятие классического варианта гипотезы Хокинга о евклидовой природе пространства-времени влечёт неизбежное существование тёмной материи или тёмной энергии [20].

В случае наших интересов мы, принимая в расчёт распространённое признание существования тёмной материи или тёмной энергии, можем использовать римановы варианты формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для расчёта энергии, необходимой для порождения кротовых нор, основываясь при этом на уравнениях Эйнштейна (при этом, конечно, надо предварительно из получаемой плотности энергии T_{00} вычитать долю тёмной материи и тёмной энергии).

Но пока мы не учли то, что поскольку поле везде ненулевое, то характеристика Эйлера–Пуанкаре $\chi(M^4) = 0$. Это разрушает искомую нами функциональную связь между кривизной в левой части формулы Гаусса–Бонне–Чжэня, а значит, и с плотностью энергии рассматриваемой в пространстве материи и нашего энергетического воздействия с целью образования кротовой норы, с числами Бетти в правой части равенства формулы Гаусса–Бонне–Чжэня [2, 3].

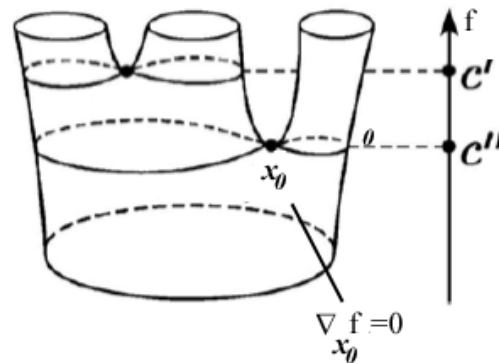


Рис. 1. Рождение кротовой норы, появление критической точки у функции f

Выход из неприятной ситуации прост – поле u_i не везде ненулевое, оно обладает сингулярностями. Точнее, до начала нашего энергетического воздействия поле u_i не имело сингулярностей, и поэтому $\chi(M_{\text{до}}^4) = 0$, а после, т. е. в пространстве времени-времени $\chi(M_{\text{после}}^4) = 0$, уже приобретшем кротовую нору, они появляются.

С одной стороны, скорее всего, так и есть, поскольку в моделях [2,3], которые мы строили для описания процесса образования кротовой норы, метрика пространства претерпевала разрывы производных, а это сингулярности метрики.

С другой стороны, выходит, что, «прорывая» кротовые норы, мы воздействуем на поле u^i , или на тёмную материю, а это как-то противоречит тому, что она, как считается, не взаимодействует с обычной материей. Правда, мы воздействуем не на неё, а меняем топологию пространства-времени, и, как следствие, тёмная материя «приспосабливается» к новым условиям. О таком влиянии на тёмную материю в литературе ничего не говорится.

Наконец, при рождении кротовой норы от пространства-времени отходит «ручка» и происходит появление нуля у векторного поля $u = \nabla f$ (см. рис. 1). Функция f – это функция Морса, которая определяет ненулевую правую часть в формуле Гаусса–Бонне–Чжэня из теоремы 12 или 13 из § 5.2.1.

5.2. Формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для замкнутого риманова многообразия M^{2k}

Изучим теоремы об интересующих нас формулах для замкнутых римановых чётномерных многообразий.

5.2.1. Формула Гаусса–Бонне–Чжэня для замкнутого риманова многообразия M^{2k} и функции Морса

Пусть M^n гладкое компактное многообразие без края, т. е. замкнутое. Точка $x \in M^n$ является *критической точкой* гладкой функции $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, если $d_x f = 0$, или $\nabla_x f = 0$.

Функцией Морса на гладком многообразии M^n называется гладкая функция $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, все критические точки которой невырождены, т. е. в этих точках $\det d_x^2 f \neq 0$.

Функция $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, определённая на компактном многообразии M^n с краем ∂M^n , называется функцией Морса, если

1) все её критические точки невырождены и содержатся во внутренности многообразия M^n ;

2) ограничение $f|_{\partial M^n}$ является функцией Морса на замкнутом многообразии ∂M^n .

Согласно лемме Морса, мы можем расположить координаты вблизи невырожденной критической точки x таким образом, что матрица Гессе $d_x^2 f$ примет стандартный вид $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. Число отрицательных записей равно индексу Морса $\gamma(x)$ критической точки x . Обозначим множество критических точек с индексом Морса $\gamma(x) = m$ через $\text{Crit}_m(f)$.

Имеет место равенство [22]

$$\chi(M^{2k}) = \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m |\text{Crit}_m(f)|.$$

Теорема 12. (Gauss–Bonnet–Chern [22]) Пусть M^{2k} – замкнутое риманово многообразие. Тогда

$$\int_{M^{2k}} e(\mathcal{R}) = \chi(M^{2k}),$$

где

$$\mathcal{R}_{ik} = \frac{1}{2} R_{iklm} dx^l \wedge dx^m$$

– 2-форма кривизны относительно тензора кривизны от любой³ метрической связности⁴ на касательном расслоении,

$$e(\mathcal{R}) = \frac{1}{(2\pi)^k} P(\mathcal{R})$$

– класс Эйлера,

$$Pf(\mathcal{R}) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \varepsilon^{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_k j_k} \mathcal{R}_{i_1 j_1} \dots \mathcal{R}_{i_k j_k}$$

– пфаффиан. ■

³Благодаря хорошо известному гомоморфизму Черна–Вейля [23], доказано, что класс Эйлера зависит от связности.

⁴Метрическая связность – линейная связность в векторном расслоении $\eta : E \rightarrow B$, снабжённом билинейной метрикой в слоях, при которой параллельное перенесение вдоль произвольно кусочно гладкой кривой в B сохраняет метрику, т. е. скалярное произведение векторов остаётся постоянным при их параллельном перенесении.

Возможна иная формулировка этой теоремы.

Теорема 13. (Gauss–Bonnet–Chern [24]). Пусть R обозначает тензор кривизны Римана, связанный со связностью Леви-Чивиты на замкнутом римановом многообразии M^{2k} , а $Pf(R)$ обозначает плотность кривизны Пфаффа. Тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{M^{2k}} Pf(R) = ind(\nabla f),$$

где f – любая функция Морса на M^{2k} . ■

Мы видим, что в правой части имеем число, отличное от нуля, если векторное поле $u = \nabla f$ имеет особые точки. Данная теорема может непосредственно использоваться в оценке плотности энергии, требуемой для изменения топологии пространства-времени посредством приёма, предложенного М.Ю. Константиновым и изложенным в § 5.1.

5.2.2. Формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для риманова многообразия M^{2k} без края

Теорема 14. (Chern [25]). Пусть (M^4, g) – компактное ориентированное 4-мерное риманово многообразие, тогда

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_{M^4} (|Riem|^2 - 4|Ric|^2 + R^2) dv_g = \chi(M^4),$$

где:

$$|Riem|^2 = R_{ijkl}R^{ijkl}, \quad |Ric|^2 = R_{ik}R^{ik},$$

R – скалярная кривизна.

а для M^6 ([25], Sakai [26]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{48(2\pi)^3} \int_{M^6} (R^3 - 12R|Ric|^2 + 3R|Riem|^2 + 16R_j^i R_i^k R_{jk} + 24R^{ij} R^{kl} R_{ijkl} - \\ - 24R^{st} R_{s...}^{ijk} R_{tijk} - 8R^{ijkl} R_{s..k}^{ti} R_{jtls} + 2R^{ijkl} R_{ij..}^{st} R_{klst}) dv_g = \chi(M^6). \end{aligned}$$

Подобных формул для M^n ($n \geq 8$) в литературе нет [25]. ■

Теорема 15. [25] Для компактного ориентированного 4-мерного эйнштейнового многообразия (M^4, g) , т. е. $Ric = \lambda g$, справедлива формула:

$$\chi(M^4) = \frac{1}{32\pi} \int_{M^4} |Riem|^2 dv_g.$$

■

Теорема 16. [27] Пусть M^{2k} – замкнутое риманово многообразие, g_{ml} метрика, R_{ijml} – тензор кривизны относительно связности Леви-Чевиты, $\varepsilon^{(i)} = \varepsilon^{(i_1 \dots i_{2k})} = 0$ или -1 , тогда

$$\frac{1}{(2\pi)^k 2^{2k} k!} \int_{M^{2k}} \frac{1}{\det(g_{ml})} \sum_{i,j} \varepsilon^{(i)} \varepsilon^{(j)} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} R_{i_3 i_4 j_3 j_4} R_{i_{2k-1} i_{2k} j_{2k-1} j_{2k}} dv_g = \chi(M^{2k}).$$

■

5.3. Формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для риманова многообразия M^{2k} с краем

Теорема 17. (Chern, Alty [15], теорема 3) Пусть M^{2k} – компактное ориентированное чётномерное риманово многообразие с краем и пусть v – единичное векторное поле, нормальное к краю. Тогда характеристика Эйлера–Пуанкаре многообразия M^{2k} даётся формулой

$$\chi(M^{2k}) = \int_{M^{2k}} \Delta dv_g + \int_{\partial M^{2k}} [\Theta_1(v) - \Theta_2(v)] dv_g|_{\partial M^{2k}},$$

где

$$\Delta = \frac{1}{128\pi^2} \eta_{abcd} \eta^{a'b'c'd'} R_{..a'b'}^{ab..} R_{..c'd'}^{cd..}, \quad \Theta_1(v) = \frac{1}{16\pi^2} {}^{(3)}\eta_{abc} {}^{(3)}\eta^{a'b'c'} R_{..a'b'}^{ab..} v_{;c'}^c,$$

$$\Theta_2(v) = \frac{1}{12\pi^2} {}^{(3)}\eta_{abc} {}^{(3)}\eta^{a'b'c'} v_{;a'}^a v_{;b'}^b v_{;c'}^c. \quad {}^{(3)}\eta_{abc} = v^d \eta^{dabc}.$$

■

Теорема 18. (Alty [15], теорема 2) Пусть M^{2k} – компактное ориентированное чётномерное риманово многообразие с краем и пусть v – единичное векторное поле на M^{2k} , сингулярное только в конечном числе точек в $\text{int}(M^{2k})$, тогда

$$\sum \text{ind}(v) = \int_{M^{2k}} \Delta dv_g + \int_{\partial M^{2k}} [\Theta_1(v) - \Theta_2(v)] dv_g|_{\partial M^{2k}}. \quad (*)$$

Сумма индексов векторного поля v на M^{2k} является топологическим инвариантом только тогда, когда v может непрерывно деформироваться, так что $v|_{\partial M^{2k}}$ – единичная нормаль к ∂M^{2k} . Однако эйлерова характеристика всё ещё может быть включена в уравнение (*), если заметить, что

$$\sum \text{ind}(v) = \chi(M^{2k}) - \text{link}(\partial M, v). \quad (**)$$

■

Теорема 19. (см. [27]) Пусть M^{2k} – компактное ориентированное риманово многообразие с краем ∂M^{2k} , чётной размерности $n = 2k$, с касательным расслоением $\pi : TM^{2k} \rightarrow M^{2k}$ и ассоциированным сферическим расслоением $\pi_0 = \pi|_S : S \rightarrow M^{2k}$. Пусть D – связность на главном расслоении $p : SO(TM^{2k}) \rightarrow M^{2k}$ с формой кривизны K , пусть Ω – единственная $2k$ -форма на M^{2k} с $p^*\Omega = \pi^{-k}Pf(K)$ и пусть Φ – $(2k - 1)$ -форма на S с

$$\pi_0^*\Omega = d\Phi.$$

Наконец, пусть $\nu : \partial M^{2k} \rightarrow S$ – внешняя единичная нормаль на ∂M^{2k} . Тогда

$$\int_{M^{2k}} \Omega = \chi(M^{2k}) + \int_{\partial M^{2k}} \nu^*\Phi.$$

■

5.4. Аналоги формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для риманова многообразия M^{2k+1} без края

Переходим к теоремам об интересующих нас формулах для замкнутых римановых нечётномерных многообразий. Напомним, что для них характеристика Эйлера–Пуанкаре равна нулю. Тем не менее возможна связь кривизны и топологии через числа Бетти.

Теорема 20. (Танно, [28]) Пусть (M^3, g) – компактное трёхмерное риманово многообразие, допускающее единичный вектор Киллинга ξ такой, что $R(X, \xi)\xi = g(X, \xi)\xi - X$. Если каждая траектория ξ имеет постоянную длину $l(\xi)$, то

$$\frac{1}{2\pi l(\xi)} \left(\int_{M^3} K(\xi^\perp) dv_g + 3 \text{Vol}(M^3) \right) = 2 - b_1(M^3),$$

где $K(\xi^\perp)$ означает секционную кривизну сечения 2 плоскостей, ортогональных ξ , а $\text{Vol}(M^3)$ обозначает общий объём (M^3, g) . ■

Теорема 21. (Reventos, [29]) Пусть (M^3, g) – компактное связное ориентируемое риманово многообразие размерности 3. Пусть ξ – регулярное единичное векторное поле Киллинга на M^3 . В этом случае

$$\frac{l}{2\pi l(\xi)} \int_{M^3} (K(\xi^\perp) + 3K(\xi)) dv_g = 2 - b_1(M^3)$$

тогда и только тогда, когда $b_1(M^3)$ чётно, и

$$\frac{l}{2\pi l(\xi)} \int_{M^3} (K(\xi^\perp) + 3K(\xi)) dv_g = 3 - b_1(M^3)$$

тогда и только тогда, когда $b_1(M^3)$ нечётно, где $K(\xi^\perp)$ означает секционную кривизну плоскости, ортогональной ξ , а $K(\xi)$ означает кривизну сечения любой плоскости, содержащей ξ (это не зависит от выбора плоскости). ■

Теорема 22. (Reventos, [29]) Пусть (M^3, g) – компактное связное ориентируемое риманово многообразие размерности 3. Пусть ξ – регулярное единичное векторное поле Киллинга на M^3 . Тогда

$$\frac{1}{2\pi l(\xi)} \int_{M^3} \{K(\xi^\perp) + 3K(\xi)\} dv = 2b_0(M^3) - b_1(M^3) + d_0,$$

где $d_0 = 0$ или 1 в зависимости от чётности или нечётности одномерного числа Бетти $\beta_1(M^3)$; $K(\xi^\perp)$ – значение римановой кривизны в плоскости, ортогональной ξ ; $K(\xi)$ – значение римановой кривизны для любой плоскости, содержащей ξ (отметим, что $K(\xi)$ не зависит от выбора плоскости); dv – форма объёма; $l(\xi)$ – длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна). ■

Формулы Ревентоса и Танно увязывают секционные кривизны K числами Бетти, причём в теореме 22 помимо числа $b_1(M^3)$, считающего нестягиваемые петли в M^3 , а значит обнаруживающего 3-мерные кротовые норы, по которым можно перемещаться в пространстве, присутствует также число $b_0(M^3)$, изменения которого говорят об отрыве от M^3 областей, содержащих, например, межзвёздный корабль [1]. Более того, формулы этого раздела позволяют делать оценки энергии, необходимой для совершения такого рода действий. Для этого используются уравнения Эйнштейна, увязывающие кривизны и энергию [2, 3].

5.5. Энергия, необходимая для порождения варп-двигателем Алькубьерре кротовых нор

Как известно [30], при выходе на сверхсветовой (сверхбыстрый) режим полёта варп-корабль Алькубьерре использует энергию порядка $1/4M_\odot$. Поскольку это значительно больше, чем энергия $1/100M_\odot$, требуемая для образования кротовой норы [3], то образуется кротовая нора и варп-пузырь D_0 , содержащий варп-корабль, уходит в неё [31].

Создание кротовой норы в 3-мерном (замкнутом) физическом пространстве M^3 приводит к тому, что пространство M^3 становится либо несвязным в случае 4-мерной кротовой норы, или неодносвязным при порождении 3-мерной кротовой норы. В результате получаем новое 3-мерное пространство $\widetilde{M}^3$ с другими числами Бетти b_i . Расчёт необходимой энергии без учёта её знака был сделан в [3] с помощью формулы Ревентоса, относящейся к формулам типа Гаусса–Бонне–Черна. Последние связывают кривизну геометрии многообразия M^3 с её топологической характеристикой, например с характеристикой Эйлера–Пуанкаре, или с комбинацией чисел Бетти $b_i(M^3)$.

Тем не менее странность с оценкой знака энергии, необходимой для порождения 3-мерной кротовой норы, вынуждает нас найти иной способ оценки энергии. Странность заключается в том, что должны появляться как минимум две 3-мерные кротовые норы. Впрочем, одна из них вполне может быть естественной кротовой норой в 3-пространстве.

Для этого воспользуемся другой формулой типа Гаусса–Бонне–Черна для 4-мерного риманова пространства $\langle M^4, h \rangle$ с сигнатурой $(+++)$, следуя гипотезе Хокинга и соответствию между римановой метрикой h и лоренцевой g , описанной М.Ю. Константинов [20], о чём мы писали выше в § 5.1.

Итак, принимаем, что пространство-время является замкнутым ориентируемым многообразием $\langle M^4, h \rangle$ сигнатуры $(+++)$.

Воспользуемся формулой Авеца [8], представленной в теореме 5:

$$\int_{M^4} W_{iklm} W^{iklm} dv = 2 \int_{M^4} \left(R_j^i R_i^j - \frac{1}{3} R^2 \right) dv + 8\pi^2 \chi(M^4),$$

где W_{ijkl} – тензор Вейля,

$$\chi(M^4) = \sum_{k=0}^4 (-1)^k \beta_k(M^4) = 2\beta_0(M^4) - 2\beta_1(M^4) + \beta_2(M^4)$$

– характеристика Эйлера–Пуанкаре многообразия M^4 , а $\beta_k(M^4)$ – k -мерное число Бетти.

При рождении кротовых нор многообразие M^4 превращается в многообразие $\widetilde{M}^4$ и меняются соответствующие числа Бетти. Иначе говоря,

$$\delta\chi = \chi(\widetilde{M}^4) - \chi(M^4) \neq 0.$$

Можем написать, что

$$\begin{aligned} \int_{\widetilde{M}^4} \widetilde{W}_{iklm} \widetilde{W}^{iklm} dv - 2 \int_{\widetilde{M}^4} \left(\widetilde{R}_j^i \widetilde{R}_i^j - \frac{1}{3} \widetilde{R}^2 \right) dv - \\ - \int_{M^4} W_{iklm} W^{iklm} dv + 2 \int_{M^4} \left(R_j^i R_i^j - \frac{1}{3} R^2 \right) dv = 8\pi^2 \delta\chi. \end{aligned}$$

В случае, например, конформно плоских метрик тензор Вейля обнуляется и

$$-2 \int_{\widetilde{M}^4} \left(\widetilde{R}_j^i \widetilde{R}_i^j - \frac{1}{3} \widetilde{R}^2 \right) dv + 2 \int_{M^4} \left(R_j^i R_i^j - \frac{1}{3} R^2 \right) dv = 8\pi^2 \delta\chi. \quad (1)$$

Поскольку тензор Риччи выражается с помощью уравнений Эйнштейна через тензор энергии-импульса

$$R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right), \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4},$$

или для $T_{ik} = \varepsilon u_i u_k$, $g^{ik} u_i u_k = 1$, $R_k^i R_i^k = \kappa^2 \varepsilon^2$, $R = -\kappa \varepsilon$. Поэтому формулу (1) можно переписать как

$$\begin{aligned} -2 \int_{B^4} [\kappa^2 \widetilde{\varepsilon}^2 - \frac{1}{3} \kappa^2 \widetilde{\varepsilon}^2] dv + 2 \int_{B^4} [\kappa^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \kappa^2 \varepsilon^2] dv = 8\pi^2 \delta\chi, \\ -\frac{4}{3} \kappa^2 \int_{B^4} [\widetilde{\varepsilon}^2 - \varepsilon^2] dv = 8\pi^2 \delta\chi, \\ \langle (\delta\varepsilon^2) \rangle v(B) = -\frac{3c^8}{32G^2} \delta\chi. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем для среднего значения скачка плотности энергии ε , влекущего образование кротовой норы:

$$\sqrt{\langle (\delta\varepsilon)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{32} \frac{c^4}{G \sqrt{v(B^4)}}} \sqrt{-\delta\chi}. \quad (2)$$

Здесь B^4 – множество-носитель топологической, гладкой и метрической структур пространств-времени M^4 и $\widetilde{M}^4$:

$$M^4 = \langle B^4, \mathcal{T}, \mathcal{H}, h \rangle, \quad \widetilde{M}^4 = \langle B^4, \widetilde{\mathcal{T}}, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{h} \rangle,$$

из которых мы в данной статье сконцентрировали внимание только на метаморфозе топологической структуры, предложив конструкцию возникновения кротовых нор.

В случае 4-мерной ручки нарушается односвязность, т. е. меняется $b_1(M^4)$. Поэтому

$$\delta\chi = 2\beta_0(\widetilde{M}^4) - 2\beta_1(\widetilde{M}^4) + \beta_2(\widetilde{M}^4) - [2\beta_0(M^4) - 2\beta_1(M^4) + \beta_2(M^4)] = -1 < 0. \quad (3)$$

Примером [32] может служить 4-многообразие $\widetilde{M}^4$, гомотопное связной сумме $(S^1 \times S^3) \# (S^1 \times S^3)$ или с большим числом 4-мерных кротовых нор $\#_k(S^1 \times S^3)$, для которых $H_2(\widetilde{M}^4, \mathbb{Z}) \cong 0$ и $\pi_2 \cong 0$.

Полезно здесь иметь в виду теорему [32]: если M^4 – замкнутое ориентированное топологическое 4-многообразие с $\pi_1 \cong *_k \mathbb{Z}$ (свободная группа с k свободными генераторами), и $H_2 \cong 0$, то M^4 гомотопически эквивалентна (соотв.: s -кобордантно) $\#_k(S^1 \times S^3)$. В частности, замкнутое ориентированное топологическое 4-многообразие M^4 ТОР гомеоморфно $S^1 \times S^3$ тогда и только тогда, когда $\pi_1(M^4) \cong \mathbb{Z}$ и $H_2(M^4) \cong 0$ (или эквивалентно равенству $\chi(M^4) = 0$).

В случае 3-мерной кротовой норы, если $M^4, \widetilde{M}^4$ – односвязны, то $\pi_1(M^4) = 0$, и, следовательно, гомологии $H_1(M^4, \mathbb{Z}) = H_3(M^4, \mathbb{Z}) = 0$ (различные свойства таких многообразий описаны в [33]). Значит, в случае появления 3-мерной кротовой норы меняется только $b_2(M^4)$. Поэтому

$$\delta\chi = 2\beta_0(\widetilde{M}^4) + \beta_2(\widetilde{M}^4) - [2\beta_0(M^4) + \beta_2(M^4)] \geq 1 > 0. \quad (4)$$

С учётом равенства (2) и соотношения (3) видим, что при образовании 4-мерной кротовой норы

$$\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle} = \sqrt{\frac{3}{32} \frac{c^4}{G\sqrt{v(B^4)}}} > 0.$$

Как видим, 4-мерные кротовые норы образуются для полёта варп-корабля, двигатель которого работает на **положительной энергии**.

В то же время для 3-мерной кротовой норы в силу (2) и (4) имеем

$$\sqrt{\langle(\delta\varepsilon)^2\rangle} = \sqrt{\frac{3}{32} \frac{c^4}{G\sqrt{v(B^4)}}} i,$$

где мы, естественно, имели в виду арифметический корень⁵.

Для 3-мерной кротовой норы получили мнимую плотность энергии – это какая-то *сильно* экзотическая материя.

Видим, что для порождения 3-мерной кротовой норы требуется экзотическая материя. Автор, оценив в 1983 г. в статье [3] энергию образования кротовых нор, не стал обращать внимания на её знак – для топологических перемещений в пространстве, как видно из предыдущего, достаточно использовать 4-мерные кротовые норы и обычную энергию. Об отрицательной же энергии стали говорить после

⁵Алгебраический корень даёт как положительную, так и отрицательную энергию, порождающую 4-мерную кротовую нору. Возможно, это всего лишь следствие избыточности данной математической модели (лишнее решение при возведении уравнения в квадрат).

того, как Торн, изначально акцентировав внимание на 3-мерных кротовых норах, которые были нестабильны, для поддержания их стабильности вынужденно ввёл в рассмотрение отрицательную (экзотическую) материю, втянув в её поиски практически всех, кто в той или иной мере исследовал сверхбыстрые перемещения в пространстве или интересовался созданием машины времени.

Мы делали оценки энергии, полагая, что пространство-время является замкнутым многообразием. Конечно, это явное упрощение, означающее определённую конечность (цикличность) времени. В следующем параграфе мы приводим теоремы, где формула Гаусса–Бонне–Чжэня выписывается для некомпактного риманова многообразия M^{2k} . Нетрудно увидеть, что численная оценка энергии, если её производить, останется практически такой же, что мы получили для замкнутого многообразия. Выявление же знака энергии по-прежнему остаётся нетривиальной задачей.

5.6. Формула Гаусса–Бонне–Чжэня в некомпактном римановом многообразии M^{2k}

Выяснению возможных видов формулы Гаусса–Бонне–Чжэня в некомпактном римановом многообразии M^{2k} была посвящена статья Чигера и Громова [34], опубликованная в 1985 г. Она представляет собой некоторую программу по установлению аналогов формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для некомпактных многообразий. Хотя с 1985 г. заметного прогресса в получении желанных формул не наблюдается, тем не менее было найдено много их аналогов в случае конформно плоских метрик (§ 5.6.2).

5.6.1. Случай ограниченного многообразия

Пусть M^n – некомпактное полное риманово многообразие, секционная кривизна сечения которого K и объём $Vol(M^n)$ удовлетворяют условиям:

$$|K| \leq 1, \quad Vol(M^n) < \infty$$

(иногда предполагалось, что $\widetilde{M}^n$ диффеоморфно внутренности компактного многообразия M^n с краем ∂M^{n-1}).

Пусть P обозначает инвариантный многочлен степени k ($n = 2k$), а $P(\mathcal{R})$ – соответствующую характеристическую форму кривизны $\mathcal{R}$ в M^n . Рассматриваются два случая: $P(\mathcal{R})$ – это либо форма Эйлера $P_\chi(\mathcal{R})$ (см. теорему 12), либо некоторая форма Понтрягина (см. теорему 6), и по большей части мы ограничимся рассмотрением формы Понтрягина $P_L(\mathcal{R})$, соответствующей L -многочлену теоремы о сигнатуре Хирцебруха. Поскольку $|K| \leq 1$ и $Vol(M^n) < \infty$, то интеграл

$$\int_{M^n} P(\mathcal{R}) = P(M^n, g),$$

определяющий число геометрической характеристики $P(M^n, g)$, является абсолютно сходящимся (для случая форм Понтрягина мы предполагаем, что M^{4l} ориентированно). Числа $P_\chi(M^n, g)$ и $P_L(M^n, g)$ будут просто обозначаться через $\chi(M, g)$ и $\sigma(M, g)$ соответственно.

Авторы статьи [34] – Чигер и Громов – решают следующие задачи:

- А) Какие значения может принимать $P(M, g)$?
- Б) В какой степени $P(M, g)$ не зависит от конкретной метрики g , удовлетворяющей условию $|K| \leq 1$ и $Vol(n) < \infty$?
- В) Каков чисто топологический смысл величины $P(M^n, g)$?

Статья [34] содержит полезные теоремы и множество интересных примеров. Мы их не приводим, поскольку наша цель связана с применением формул Гаусса–Бонне–Чжэня в общей теории относительности. Тем не менее эту статью следует иметь в виду.

5.6.2. Случай конформно плоских многообразий

Для конформно плоской метрики на $\mathbb{R}^4$ аналоги формулы Гаусса–Бонне–Чжэня в $\mathbb{R}^4$ были получены в статьях [35–38]. Их характер можно представить себе по следующим теоремам.

Теорема 23. [35] Пусть функция w является радиальной на $\mathbb{R}^4$ и $g = e^{2w}|dx|^2$ полная метрика с

$$\int_{\mathbb{R}^4} |Q_g| e^{4w} dx < \infty,$$

$$Q = \frac{1}{12} \left(\Delta R + \frac{1}{4} R^2 - 3|E| \right),$$

где E_{ik} – бесследовый тензор Риччи, и предположим, что скалярная кривизна неотрицательна на бесконечности.

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^4} Q_g e^{4w} dx \leq 4\pi^2 \chi(\mathbb{R}^4) = 4\pi^2,$$

и

$$1 - \int_{\mathbb{R}^4} Q_g e^{4w} dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{vol(\partial B_r(0))^{4/3}}{4(2\pi^2)^{1/3} vol(\partial B_r(0))}.$$

■

Теорема 24. [38] Пусть $g = e^{2w}|dx|^2$ – метрика на $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, которая полна на бесконечности и имеет конечную площадь над началом координат. Если g имеет конечную кривизну Q_g ,

$$\int_{\mathbb{R}^4} |Q_g| dv_g = \int_{\mathbb{R}^4} |Q_g| e^{4w} dx < \infty,$$

$$Q_g = -\frac{1}{12} (\Delta_g R - R_g^2 + 3|Ric_g|^2), \quad Ric_g - \text{кривизна Риччи},$$

и неотрицательную скалярную кривизну на бесконечности и у начала координат $\{0\}$, т. е.

$$\inf_{\mathbb{R}^4 \setminus B_{r_2}(0)} R_g(x) \geq 0, \quad \inf_{B_{r_1}(0)} R_g(x) \geq 0,$$

для некоторых $0 < r_1 \leq r_2 < \infty$, тогда

$$\chi(\mathbb{R}^4) - \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} Q_g e^{4w} dx = \nu - \mu,$$

где

$$\nu := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{vol_g(\partial B_r(0))^{4/3}}{4(2\pi^2)^{1/3} vol_g(B_r(0))}, \quad \mu := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{vol_g(\partial B_r(0))^{4/3}}{4(2\pi^2)^{1/3} vol_g(B_r(0))} - 1.$$

■

6. Формула Гаусса–Бонне–Чжэня в конформной геометрии

В конформной геометрии задаётся в каждой точке многообразия M не просто метрика g , класс метрик. Если g метрика входит в тот же класс, что и метрика g_0 , то они связаны равенством $\tilde{g} = e^{2w(x)}g_0$. Класс эквивалентных метрик называется конформной метрикой.

Особенностью конформной геометрии является отсутствие связности Леви-Чивиты, поскольку если g_0 и $e^{2w}g_0$ являются двумя представителями конформной структуры, то символы Кристоффеля для g_0 и для $e^{2w}g_0$ не будут совпадать. Символы, связанные с $e^{2w}g_0$, будут содержать производные функции w , а символы, связанные с g_0 , – нет.

Связность Леви-Чивиты и тензор кривизны, хотя и определяются только после выбора конкретного представителя конформной структуры, удовлетворяют при выборе другого представителя конформной метрики, тензор Вейля W (в размерности выше 3) не зависит от w и является *конформным инвариантом*.

6.1. Случай конформного многообразия без края

Панейц построил [35] конформный инвариант кривизны

$$Q = \frac{1}{12} \left(\Delta R + \frac{1}{4} R^2 - 3|E| \right),$$

где $E_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{4}g_{ik}R$ – бесследовый тензор Риччи. Тогда

Теорема 25. [35] Если M^4 замкнутое риманово 4-многообразие, то

$$\chi(M^4) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{M^4} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dv.$$

■

6.2. Случай конформного многообразия с краем

Теорема 26. [36] Если M^4 компактное замкнутое риманово 4-многообразие с краем, то

$$\chi(M^4) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{M^4} \left(Q + \frac{1}{8} |W|^2 \right) dv + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial M^4} (L + T) d\sigma,$$

где

$$T = -\frac{1}{12} \left(\frac{\partial}{\partial n} R + \frac{1}{6} RH - R_{anbn} L_{ab} + \frac{1}{9} H^3 + \frac{1}{3} \text{tr} L^3 + \frac{1}{3} \tilde{\Delta} H \right)$$

– граничный инвариант кривизны, H – средняя кривизна края, L_{ab} – вторая фундаментальная форма края, n – единичная внутренняя нормаль к краю, $\tilde{\Delta}$ – граничный лапласиан

$$L = L_4 + L_5 \text{ – конформный инвариант,}$$

$$L_4 = -\frac{1}{3} R_{ijij} L_{aa} + R_{anan} L_{bb} - R_{anbn} L_{ab} + R_{acbc} L_{ab},$$

$$L_5 = -\frac{2}{9} L_{aa} L_{bb} L_{cc} + L_{aa} L_{bc} L_{bc} - L_{ab} L_{bc} L_{ca},$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4 \quad a, b = 1, 2, 3.$$

■

7. Вывод теоремы Гаусса–Бонне–Чжэня замкнутого риманова многообразия M^{2k} в различных теориях

В этом разделе мы приводим выводы аналогов формулы Гаусса–Бонне–Чжэня в суперсимметричных теориях (§ 7.1) и в теории эллиптических операторов на римановых многообразиях из теоремы об индексе Атьи–Зингера (§ 7.2).

7.1. Теорема Гаусса–Бонне–Чжэня для замкнутого риманова многообразия M^{2k} через суперсимметричные евклидовы теории поля

Формулу Гаусса–Бонне–Чжэня можно вывести, используя идеи суперсимметричных сигма-моделей. Для замкнутого риманова многообразия M^{2k} пусть $\underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})$ обозначает супермногообразие отображений из нечётной плоскости $\mathbb{R}^{0|2}$ в M^{2k} . Строится функция, которая связывает с отображением $\phi \in \underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})$ суперпространственный аналог энергии

$$S_0(\phi) = \int_{\underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})} \|T(\phi)\|^2,$$

где $T(\phi)$ обозначает дифференциал отображения ϕ , квадрат нормы использует метрику на M^{2k} , а интеграл является интегралом Березина.

Теорема 27. (Berwick-Evans [24]) *Интеграл Березина от $\exp(-S_0(\phi))$ по $\underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})$ вычисляет характеристику Эйлера–Пуанкаре:*

$$(2\pi)^{-k} \int_{\underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})} \exp(-S_0(\phi)) = \chi(M^{2k}).$$

■

Более того, левая часть может быть локально идентифицирована с интегралом от пфаффиана кривизны относительно связности Леви–Чивиты на M^{2k} .

Действительно, пусть

$$Z_{M^{2k}}(g, h) := (2\pi)^{-k} \int_{\underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})} \exp(-S_h(\phi)),$$

где

$$S_h(\phi) = \int_{\underline{\mathbf{SM}}(\mathbb{R}^{0|2}, M^{2k})} (\|T(\phi)\|^2 - \phi^*h), \quad h \in C^\infty(M^{2k}),$$

и g – метрика на M^{2k} . Оказывается [24, р. 27],

$$Z_{M^{2k}}(g, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{-n/2}} \int_{M^{2k}} Pf(R),$$

и, более того, число $Z_{M^{2k}}(g, h)$ не зависит от метрики g и функции h [24, р. 3, 4] и имеет место следующая форма теоремы Гаусса–Бонне–Чжэня:

$$\frac{1}{(2\pi)^k} \int_{M^{2k}} Pf(R) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Z_{M^{2k}}(g, \lambda h) = Z_{M^{2k}}(g, 0) = \text{Ind}(\nabla h) = \chi(M^{2k}),$$

где $h \in C^\infty(M^{2k})$ – функция Морса, а $\lambda \in \mathbb{R} > 0$ – параметр.

7.2. Теорема Гаусса–Бонне–Чжэня и теорема об индексе Атьи–Зингера

Наш интерес к формулам Гаусса–Бонне–Чжэня вызван желанием с помощью этих формул решать задачи по изменению топологии пространства-времени за счёт порождения локальных источников энергии, влияющих на геометрию, а значит, и на топологию.

Межзвёздные сверхбыстрые перелёты – это изменения топологии 3-мерного пространства M^3 . Поэтому интересны в первую очередь формулы типа Гаусса–Бонне–Чжэня для нечётномерных пространств. Но как раз в этом случае таких формул, как говорят, «кот заплакал». Для классической римановой геометрии они перечислены выше, и для 3-мерного пространства – это формулы Ревентоса. Однако обнадёживает, что успех вывода теоремы Гаусса–Бонне–Чжэня из теоремы об индексе Атьи–Зингера для чётномерных многообразий стимулировал поиск подобных теорем и для нечётномерных многообразий. В этом разделе мы приводим одну из таких работ [39], которая, в принципе, даёт нам желанную формулу, применимую для задач общей теории относительности.

7.2.1. Вывод формулы Гаусса–Бонне–Чжэня из теоремы об индексе Атьи–Зингера для чётномерного компактного риманова многообразия M^{2k}

Пусть D – слабо эллиптический дифференциальный оператор между векторными расслоениями.

Пусть D^* – сопряжённый оператор. Тогда *аналитический индекс* определяется как

$$\text{ind}_a(D) = \dim(\ker(D)) - \dim(\ker(D^*)).$$

В силу эллиптичности аналитический индекс всегда конечное число. Аналитический индекс определяется топологией многообразия и связанных с ним структур.

Теорема Атьи–Зингера об индексе говорит, что аналитический индекс постоянен, если эллиптический оператор плавно изменяется. Он равен *топологическому индексу*, который выражается через характеристические классы, такие как класс Эйлера.

Пусть M^{2k} – компактное риманово многообразие чётной размерности с внутренним произведением $g(X, Y)$ в каждом касательном пространстве (т. е. метрика на M^{2k}), что эквивалентно эрмитовости касательного расслоения.

Пусть $V \rightarrow M^{2k}$ – комплексное векторное расслоение на M^{2k} ранга r . Выбирая связность на V , получаем (coupled) оператор Дирака

$$D : \Gamma(S^+ \otimes V) \rightarrow \Gamma(S^- \otimes V).$$

Это эллиптический оператор, поэтому он имеет аналитический индекс.

Полагаем также, что $x \in M^{2k}$ является *Spin*-многообразием. Последнее означает, что имеется расслоение Клиффорда $S = S^+ \oplus S^-$ такое, что $S^+ \otimes S^- = \Omega(M^{2k})$, $\Omega(M^{2k})$ – пространство всех $\Omega^p(M^{2k})$.

Оператор Дирака D на S является самосопряжённым и переводит $S^\pm$ в $S^\mp$. Когда M спинорное, все расслоения Клиффорда имеют форму $S \otimes V$, где V – эрмитовое

векторное расслоение. Соответствующий оператор Дирака D_V называется оператором Дирака с коэффициентами в V .

Справедлива теорема Атьи–Зингера об индексе, имеющая в рассматриваемом случае следующий вид:

Теорема 28. (Atiyah–Singer Index Theorem [40, 41]) *Имеет место равенство*

$$\boxed{ind_a(D_V) = ind_t(D_V),} \quad (!)$$

где

$$ind_t(D_V) = \int_{M^{2k}} det \left[\hat{a} \left(\frac{R}{2\pi} \right) \right] ch(V),$$

где

$$\hat{a}(z) = \sqrt{\frac{\frac{z}{2}}{sh(\frac{z}{2})}}, \quad ch(V) = Tr \exp \left(\frac{iF_V}{2\pi} \right) - \text{характер Чжэня},$$

R – риманова кривизна на M^{2k} и F_V – кривизна на V .

■

Возможен иной вид формулы (!):

$$\boxed{ind_a(D_V) = ind_t(D_V) \equiv \int_{M^{2k}} \hat{A}(M^{2k}) ch(V),}$$

где

$$\hat{A}(M^{2k}) = 1 - \frac{1}{24} p_1(M^{2k}) + \left(\frac{-4p_2(M^{2k}) + 7p_1(M^{2k})}{5760} \right) + \dots,$$

$$ch(V) = r + c_1(M^{2k}) + \left(\frac{1}{2} c_1^2(M^{2k}) - c_2(M^{2k}) \right) + \dots$$

и $p_i(M^{2k})$ – классы Понтрягина, а $c_i(M^{2k})$ – классы Чжэня.

Здесь выражения определяются путём рассмотрения F_V и R как 2-форм со значениями в эндоморфизмах V и TM^{2k} соответственно [40].

Полученные формулы увязывают риманову геометрию и топологию, поскольку теория Черна–Вейля представляет классы Чжэня и Понтрягина дифференциальными формами, полученными из римановой кривизны R в M^{2k} и кривизны F_V связности на V .

7.2.2. Теорема типа Атьи–Зингера и аналог формулы Гаусса–Бонне–Чжэня для нечётномерного компактного риманова многообразия M^{2k+1}

Для нечётномерных многообразий M^{2k+1} или, в более общем смысле, для многообразий с исчезающей характеристикой Эйлера–Пуанкаре с целью получения ана-

лога формулы Гаусса–Бонне–Чжэня воспользуемся [39] результатом Хопфа, который утверждает, что всегда на них существует нигде не нулевые векторные поля, а значит – лоренцева метрика (см., например, [5, р. 149]).

Таким образом, пусть M^{2k+1} будет нечётномерным ориентированным замкнутым многообразием, а v будет нигде не нулевым векторным полем на M^{2k+1} . Пусть γ будет одномерным ориентированным векторным расслоением над M^{2k+1} , порождённым v . Тогда TM^{2k+1}/γ несёт канонически индуцированную ориентацию. Пусть $e(TM^{2k+1}/\gamma)$ – класс Эйлера для TM^{2k+1}/γ .

Для любого интегрального элемента $\omega \in H^1(M^{2k+1}, Q)$ мы определим

$$\alpha_v(\omega) = \langle \omega e(TM^{2k+1}/\gamma), [M^{2k+1}] \rangle = \int_{M^{2k+1}} \omega e(TM^{2k+1}/\gamma)$$

в качестве аналога характеристики Эйлера–Пуанкаре и замены для класса Эйлера, появляющегося в теореме Гаусса–Бонне–Чжэня.

Пусть M^{2k+1} – компактное ориентированное риманово многообразие и v – единичное векторное поле, нигде не равное нулю.

Возьмём E – подрасслоение касательного расслоения TM^{2k+1} , ортогональное к γ . Тогда E оснащено канонической индуцированной ориентацией такой, что $o(\gamma, E) = o(TM^{2k+1})$. Возьмём метрику на E и рассмотрим ∇ – евклидову (аффинную) связность для этой метрики на E . Пусть R – кривизна относительно связности ∇ :

Пусть $\omega \in H^1(M^{2k+1}, Z)$, не являющийся классом кручения, и $\tilde{\omega} \in \Lambda^1(T^*M^{2k+1})$ – любое представление де Рама формы ω .

Фиксируем точку $p \in M^{2k+1}$ и для любой $x \in M^{2k+1}$ и берём путь γ_{px} из p в x .

Рассматриваем функцию на $\rho_{\tilde{\omega}}(x) : M^{2k+1} \rightarrow U(1)$ M^{2k+1} , определённую как

$$\rho_{\tilde{\omega}}(x) = \exp \left(2\pi\sqrt{-1} \int_p^x \tilde{\omega} \right),$$

где интеграл берётся по пути γ_{px} .

Индекс оператора Теплица⁶ для функции $\rho_{\tilde{\omega}}$ задаётся формулой

$$\text{ind}(T_{v, \rho_{\tilde{\omega}}}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{M^{2k+1}} \text{Tr}[(\rho_{\tilde{\omega}})^{-1} d\rho_{\tilde{\omega}}] Pf \left(\frac{R}{2\pi} \right).$$

Мы видим, что он отражает геометрию многообразия M^{2k+1} , или геометрию подрасслоения E касательного расслоения TM^{2k+1} .

Теорема 29. [39, р. 396–397] *Справедлива формула для индекса некоторых эллиптических операторов Теплица, которая является аналогом формулы Гаусса–*

⁶Рассматриваются некоторые операторы Теплица (см. [39])

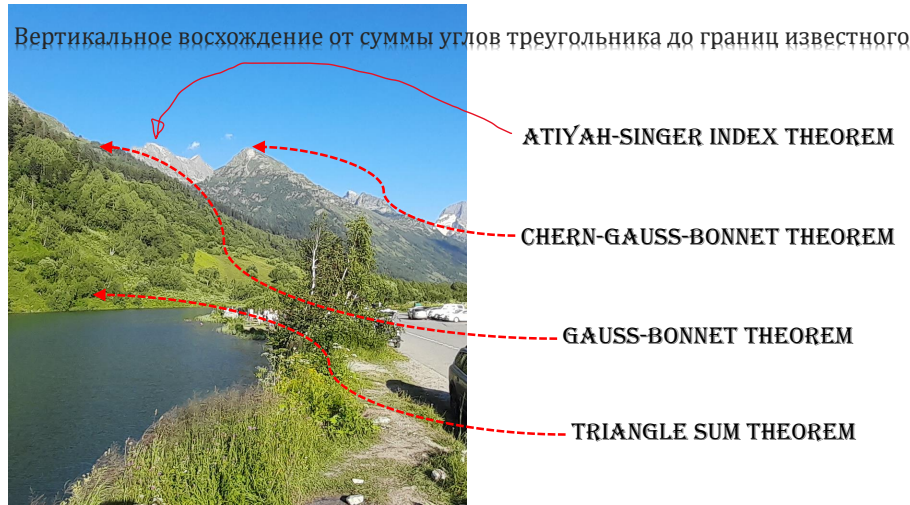


Рис. 2. От теоремы Гаусса–Бонне к теореме Атьи–Зингера. Рисунок Анны Сидоровой-Бирюковой

Бонне–Чжэня для нечётномерного риманова многообразия M^{2k+1} :

$$\boxed{ind(T_{v,\rho\tilde{\omega}}) = \alpha_v(\omega),} \quad (\#\#)$$

где

$$\alpha_v(\omega) = \langle \omega e(TM^{2k+1}/\gamma), [M^{2k+1}] \rangle,$$

$$\alpha_v : H^1(M^{2k+1}, Z) \rightarrow Z - \text{гомоморфизм.}$$

■

Топологический смысл гомоморфизма α_v виден из следующего примера.

Пример 1. Пусть $M^{2k+1} = S^1 \times X^{2k}$, где X^{2k} – компактное связное ориентированное многообразие. Берём v – каноническое векторное поле, лифтированное с S^1 , и канонический генератор $\omega \in H^1(S^1, Z)$. Тогда $\alpha_v(\omega) = \chi(X^{2k})$.

Формула $(\#\#)$ может быть использована для оценки энергии, необходимой для образования кротовых нор в 3-мерном физическом пространстве. Действительно, допустим, что физическое пространство имеет топологию $S^1 \times X^2$. Образование кротовых нор в такой топологии означает и изменение чисел Бетти у многообразия X^2 . Поэтому правая часть равенства $(\#\#)$ меняется на некоторое целое число. В правую часть входит тензор кривизны R , который находится как тензор Риччи в левой части уравнений Эйнштейна или уравнений гравитации Гаусса–Бонне–Эйнштейна. Изменение правой части уравнения $(\#\#)$ – это изменения его левой части, т. е. кривизны, что меняет и левую часть уравнений гравитации. Следовательно, меняется правая часть уравнений гравитации. А это уже скачки энергии, подсчёт которых становится возможным, и, более того, становится возможным установление знака

скачка энергии. Знак скажет нам о классическом источнике энергии или о необходимости прибегнуть к экзотической материи.

Благодарности

Автор благодарят Анну Сидорову-Бирюкову за то, что она привлекла его внимание к теореме Атьи–Зингера, и это способствовало поиску формул типа Гаусса–Бонне–Чжэня, полученных с опорой на эту теорему, и их нечётномерному аналогу. Отчасти этому способствовал рисунок (см. рис. 2), присланный ею, глядя на который захотелось подняться не только на вершину «Гаусса–Бонне–Чжэня», но и на вершину «Атьи–Зингера».

Литература

1. Гуц А.К. Топологический характер работы варп-двигателя Алькубьерре при выходе на сверхсветовую скорость // Эффективное обеспечение научно-технического прогресса: исследование задач и поиск решений: сборник статей Международной научно-практической конференции. Уфа: Аэтерна, 2024. С. 6–9.
2. Гуц А.К. Изменение топологии физического пространства в замкнутой вселенной // Известия вузов. Физика. 1982. № 5. С. 23–26.
3. Гуц А.К. Нарушение связности физического пространства // Известия вузов. Физика. 1983. № 8. С. 3–6.
4. Borstena L., Duffbc M.J., Nagy S. Odd dimensional analogue of the Euler characteristic. URL: <https://arxiv.org/pdf/2105.13268v1> (дата обращения: 10.12.2024).
5. O’Neill B. Semi-Riemannian Geometry with application to Relativity. NY: Academic Press, 1983.
6. Alty L.J. The generalized Gauss-Bonnet-Chern theorem / SCAN-9410314, DAMPT R94/39. Geneva: CERN Libraries, 1973.
7. Milnor W. Topology from the differentiable viewpoint. Charlottesville: University Press of Virginia, 1965.
8. Avez A. Formule de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. 1962. Vol. 255. P. 2049–2051.
9. Chern S. Pseudo-Riemannian geometry and the Gauss-Bonnet formula // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1963. Vol. 35. P. 17–26.
10. Law P.R. Neutral Einstein metrics in four dimensions // Journal of Mathematical Physics. 1991. V. 32, No. 11. P. 3039–3042.
11. Avez A. Characteristic classes and Weyl tensor: Applications to general relativity // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1970. Vol. 66. P. 265–268.
12. Avez A. Index des variétés de dimension 4 // Comptes Rendus de l’Académie des Sciences. 1964. Vol. 259. P. 1934–1937.
13. Kulkarni R.S. Proper Actions and Pseudo-Riemannian Space Forms // Advances in Mathematics. 1981. V. 40. P. 10–51.
14. Wolf J.A. The Clifford-Klein space forms of indefinite metric // Annals of Mathematics 1962. Vol. 75. P. 77–80.
15. Alty L.J. The generalized Gauss-Bonnet-Chern theorem // Journal of Mathematical Physics. 1995. Vol. 36. P. 3094–3105.

16. Low R.J. Kinking number and the Hopf index theorem // *Journal of Mathematical Physics*. 1993. Vol. 34. P. 4840–4842.
17. Gibbons G.W., Hawking S.W. Selection rules for topology change // *Communications in Mathematical Physics*. 1992. Vol. 148. P. 345–352.
18. Chamblin A. Some applications of differential topology in general relativity // *Journal of Geometry and Physics*. 1994. Vol. 13. P. 357–377.
19. Hawking S., *Euclidian Quantum Gravity*, in *Recent Developments in Gravitation* / ed. S. Deser. Plenum Press, 1978.
20. Константинов М.Ю. Гипотеза Хокинга о евклидовой природе пространства-времени в классической физике // *Международный научно-исследовательский журнал*. 2016. № 12 (54). Ч. 5. С. 8–12. URL: https://research-journal.org/media/PDF/irj_issues/12-5-54.pdf#page=8 (дата обращения: 10.12.2024).
21. Гуц А.К., Подоксёнов М.Н. О возможности приложения в общей теории относительности формул типа Гаусса–Бонне–Чжэня из собственно римановой геометрии // *Математические структуры и моделирование*. 2024. № 4 (72). С. 15–22.
22. Lysov V. Chern-Gauss-Bonnet theorem via BV localization. URL: <https://arxiv.org/abs/2402.09162> (дата обращения: 10.12.2024).
23. Nash S., Sen S. *Topological and Geometry of Physicists*. London: Academic Pre. INC, 1983.
24. Berwick-Evans D. The Chern-Gauss-Bonnet Theorem via supersymmetric Euclidean field theories. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.5383> (дата обращения: 10.12.2024).
25. Marigliano L. The Weyl Tensor of Riemannian Manifolds and some Topological Invariants in Dimension Four // *Tesi di LauRea MagistRale*. Anno Accademico 2021–2022. 96 p.
26. Sakai T. On eigenvalues of Laplacian and curvature of Riemannian manifold // *Tohoku Mathematical Journal*. 1971. Vol. (2) 23. P. 589–603.
27. Chenchang Zhu. The Gauss-Bonnet Theorem and its applications. URL: <https://math.berkeley.edu/~alanw/240papers00/zhu.pdf> (дата обращения: 10.12.2024).
28. Tanno S. A formula on some odd-dimensional Riemannian manifolds related to the Gauss-Bonnet formula // *Journal of the Mathematical Society of Japan*. 1972. Vol. 24, No. 2. P. 204–212.
29. Reventos, A. On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds // *Tohoku Mathematical Journal*. 1979. Vol. 31, No. 2. P. 165–178.
30. Pfenning M.J., Ford L.H. Quantum Inequality Restrictions on Negative Energy Densities in Curved Spacetimes. URL: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9805037> (дата обращения: 10.12.2024).
31. Гуц А.К. Топологический характер работы варп-двигателя Алькубьерре при выходе на сверхсветовую скорость // *Эффективное обеспечение научно-технического прогресса: исследование задач и поиск решений: сборник статей Международной научно-практической конференции*. Уфа: Аэтерна, 2024. С. 6–9.
32. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Repovš D. Special Classes of Closed Four-Manifolds // *Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste*. 2001. Vol. XXXII. P. 77–103. Suppl. 1.
33. Basu Sam., Basu Som. Homotopy groups and periodic geodesics of closed 4-manifolds. URL: <https://arxiv.org/abs/1303.3328> (дата обращения: 10.12.2024).

34. Cheeger J., Gromov M. On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded curvature and finite volume // *Differential Geometry and Complex Analysis*. Berlin: Springer, 1985. P. 115–154.
35. Chang S.-Y.A., Qing J., Yang P.C. The Chern-Gauss-Bonnet integral for conformal metrics on R^4 // *Duke Mathematical Journal*. 2000. Vol. 103, No. 3. P. 523–544.
36. Chang S.-Y A., Qing J., Yang P.C. Compactification of a class of conformally flat 4-manifold // *Inventiones mathematicae*. 2000. Vol. 142 (1). P. 65–93.
37. Chang S.-Y.A., Yang P.C. Partial differential equations related to the Gauss-Bonnet-Chern integrand on 4-manifolds // *Conformal, Riemannian and Lagrangian Geometry. The 2000 Barrett Lectures. University Lecture Series*. 2002. Vol. 27. 86 p.
38. Buzano R., Nguyen H.T . The Chern-Gauss-Bonnet formula for singular non-compact four-dimensional manifolds. URL: <https://arxiv.org/abs/1503.06602> (дата обращения: 10.12.2024).
39. Weiping Zhang. Analytic and topological invariants associated to nowhere zero vector fields // *Pacific journal of mathematics*. 1999. Vol. 187, No. 2. P. 379–398.
40. Donaldson S. The Atiyah-Singer Index Theorem: Notes and Exercises. URL: <https://www.homepages.ucl.ac.uk/~ucaheps/topics/indextheorem.pdf> (дата обращения: 10.12.2024).
41. Wassermann A. The Atiyah–Singer index theorem. URL: <http://www.dpmms.cam.ac.uk/~ajw/AS10.pdf> (дата обращения: 10.12.2024).

THE GAUSS–BONNET–CHERN TYPE FORMULAS AND THEIR APPLICATION IN GENERAL RELATIVITY

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

Sochi State University, Sochi, Russia

Abstract. In the article an overview of Gauss-Bonnet-Zhen type formulas, some of which were included in the 2009 thr author’s review, some of which were missing from the mentioned review, and some were obtained later is given. Special attention is paid to the application of these formulas in the general theory of relativity. The positive energy required to create a 4-dimensional wormhole through which a warp ship flies has been established. The conclusions of the formula in supersymmetric Euclidean field theory and from the Atiyah–Singer index theorem are given.

Keywords: Gauss–Bonnet–Zhen theorem, curvature, Euler–Poincare characteristic, kink of vector field, Lorentzian manifolds, the Atiyah–Singer index theorem.

Дата поступления в редакцию: 15.12.2024