

## О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ОБОБЩЁННЫХ СИСТЕМ КОШИ–РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Байзаев

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: sattor\_bayzoev@rambler.ru

М.М. Шокирова

старший преподаватель, e-mail: shokirova2002\_1977@mail.ru

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд,  
Таджикистан

**Аннотация.** Статья посвящена исследованию одного класса многомерных обобщённых систем Коши–Римана с сингулярными при сопряжении искомой вектор-функции коэффициентами вида  $z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A$ , здесь  $\alpha, \beta$  – вещественные числа, такие что  $\alpha + \beta > 0$  и  $\alpha - \beta$  – целое,  $A$  – комплексная матрица порядка  $m$ . Переходом в полярные координаты решения системы ищутся в виде тригонометрического ряда по  $\varphi = \arg z$  с неизвестными коэффициентами  $w_n(r)$ , зависящими от  $r = |z|$ . Для этих неизвестных коэффициентов получаются родственные уравнения Бесселя, в которых коэффициент при искомой вектор-функции имеет вид:  $n(2\alpha + n)E_m + 4r^{2(1-\alpha-\beta)}A\bar{A}$ ,  $E_m$  – единичная матрица порядка  $m$ . В зависимости от  $\alpha, \beta$  и собственных значений  $\lambda_j$  матрицы  $A\bar{A}$  найдены общие решения последних уравнений, затем выписано общее решение исходной системы. Следует отметить, что в случае, когда у матрицы  $A\bar{A}$  есть собственные значения, не являющиеся полупростыми, т. е. имеющие неодинаковые алгебраические и геометрические кратности, приходится решать неоднородные родственные уравнения Бесселя методом вариации произвольных постоянных. Из найденного общего решения системы можно выделить регулярные, т. е. не имеющие в конечной части плоскости особенностей, а также решения граничных задач.

**Ключевые слова:** многомерная обобщённая система Коши–Римана, сингулярные коэффициенты, общее решение, собственные значения.

### Введение

Теория обобщённых систем Коши–Римана

$$w_{\bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = 0, \quad (1)$$

где  $z = x + iy$ ,  $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$ , в регулярном случае, т. е. когда коэффициенты  $a(z)$  и  $b(z)$  принадлежат пространству  $L_{p,2}(C)$ ,  $p > 2$ , разработана И.Н. Векуа [1], Л. Берсом [2] и их последователями. Системы вида (1) с сингулярными коэффициентами

исследованы в работах И.Н. Векуа [3], Л.Г. Михайлова [4], З.Д. Усманова [5] и др. (см., например, [6]). Случай коэффициентов, определённых и ограниченных во всей плоскости  $C$ , рассмотрен в ряде работ С. Байзаева и Э. Мухамадиева (см., например, [7–9]).

## Построение общего решения

В настоящей статье излагается схема построения общего решения для многомерной обобщённой системы Коши–Римана вида

$$w_{\bar{z}} + \frac{1}{z^\alpha \bar{z}^\beta} A \bar{w} = 0, \quad (2)$$

где  $w \in \mathbb{C}^m$  – комплексное  $m$ -мерное пространство,  $\alpha, \beta$  – вещественные числа, такие что  $\alpha + \beta > 0$  и  $\alpha - \beta$  – целое,  $A$  – комплексная матрица порядка  $m$ .

В полярных координатах система (2) имеет вид:

$$w_r + \frac{i}{r} w_\varphi + \frac{2}{r^{\alpha+\beta}} e^{i(\beta-\alpha-1)\varphi} A \bar{w} = 0. \quad (3)$$

Решения системы (3) будем искать в виде ряда

$$w(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(r) e^{in\varphi}, \quad (4)$$

где  $w_n(r)$  – неизвестные вектор-функции. Подставляя в систему (3), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left( w'_n - \frac{n}{r} w_n \right) e^{in\varphi} + \frac{2}{r^\gamma} e^{i(s-n)\varphi} A \bar{w}_n \right] = 0,$$

здесь  $\gamma = \alpha + \beta$ ,  $s = \beta - \alpha - 1$ . Заменяя в ряде  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A \bar{w}_n e^{i(s-n)\varphi}$  индекс  $n$  на  $s - n$ , для коэффициентов  $w_n(r)$  получим систему уравнений вида

$$w'_n - \frac{n}{r} w_n + \frac{2}{r^\gamma} A \bar{w}_{s-n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Отсюда получаем ещё одну систему уравнений

$$\bar{w}'_{s-n} + \frac{2}{r^\gamma} \bar{A} w_n - \frac{s-n}{r} \bar{w}_{s-n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

В начале рассмотрим случай, когда  $s$  – нечётное. Тогда  $n \neq s - n$  для всех  $n \in \mathbb{Z}$  и соотношения (5) и (6) образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными вектор-функциями  $w_n(r)$  и  $\omega_n(r) = \bar{w}_{s-n}(r)$ . Так как при изменении  $n$  от  $p = \frac{s+1}{2}$  до  $+\infty$  выражение  $s - n$  меняется от  $p - 1$  до  $-\infty$ , то достаточно считать, что  $n \geq p$ . Поэтому из (5) и (6) получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} w'_n - \frac{n}{r} w_n + \frac{2}{r^\gamma} A \omega_n = 0, \\ \omega'_n + \frac{2}{r^\gamma} \bar{A} w_n - \frac{s-n}{r} \omega_n = 0, \end{cases} \quad n \geq p. \quad (7)$$

Стандартным образом из системы (7) переходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$w_n'' + \frac{\gamma - s}{r} w_n' - \left( \frac{n(n - s + \gamma - 1)}{r^2} E_m + \frac{4}{r^{2\gamma}} A\bar{A} \right) w_n = 0,$$

здесь  $E_m$  — единичная матрица порядка  $m$ . Это уравнение перепишем в виде

$$r^2 w_n'' + (2\alpha + 1) r w_n' - (n(2\alpha + n) E_m + 4r^{2(1-\gamma)} A\bar{A}) w_n = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) определим  $w_n(r)$  для индексов  $n \geq p$ , а остальные  $w_{s-n}(r)$  находим из системы

$$\bar{A} w_{s-n}(r) = \frac{r^\gamma}{2} \left[ -\bar{w}_n'(r) + \frac{n}{r} \bar{w}_n(r) \right], \quad (9)$$

которая следует из первого уравнения системы (7).

Пусть  $S$  — матрица, приводящая матрицу  $A\bar{A}$  к квазидиагональному жордановому виду [10]

$$\Lambda = \text{diag} [\Lambda_1, \dots, \Lambda_q],$$

где  $\Lambda_j$  — клетки Жордана порядка  $\mu_j$  :

$$\Lambda_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_j \end{bmatrix},$$

$\lambda_j$  — собственные значения матрицы  $A\bar{A}$ ,  $\mu_1 + \dots + \mu_q = m$ . Тогда  $A\bar{A} = S\Lambda S^{-1}$  и систему уравнений (8) можно записать в виде

$$r^2 (S^{-1} w_n)'' + (2\alpha + 1) r (S^{-1} w_n)' - (n(2\alpha + n) E_m + 4r^{2(1-\gamma)} A\bar{A}) S^{-1} w_n = 0. \quad (10)$$

В начале рассмотрим случай, когда все собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $A\bar{A}$  полупростые [10], т. е. все клетки Жордана  $\Lambda_j$  диагональные. В таком случае система (10) разбивается на  $q$  системы меньшего размера:

$$r^2 u_{jn}'' + (2\alpha + 1) r u_{jn}' - (n(2\alpha + n) E_{\mu_j} + 4r^{2(1-\gamma)} \Lambda_j) u_{jn} = 0, \quad j = \overline{1, q}, \quad (11)$$

здесь  $E_{\mu_j}$  — единичная матрица порядка  $\mu_j$ ,  $[u_{1n}, \dots, u_{qn}] = S^{-1} w_n$ ,  $u_{jn}$  — вектор размера  $\mu_j$ . Так как  $\Lambda_j$  диагональные, то все координаты вектора  $u_{jn}$  удовлетворяют одному и тому же уравнению вида

$$r^2 v'' + (2\alpha + 1) r v' - (n(2\alpha + n) + 4r^{2(1-\gamma)} \lambda_j) v = 0, \quad (12)$$

$v$  — скалярная функция.

Уравнение (12) является родственным уравнению Бесселя и частным случаем уравнения

$$r^2 v'' + arv' + (br^m + c)v = 0, \quad m \neq 0 \quad (13)$$

из [11, с. 401]. Общее решение уравнения (13) определяется так:

$$\text{при } b \neq 0: \quad v(r) = r^{\frac{1-a}{2}} Z_\nu \left( \frac{2}{m} \sqrt{b} r^{\frac{m}{2}} \right), \quad \nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c},$$

$$\text{при } b = 0: \quad v(r) = \begin{cases} C_1 r^{\frac{1-a+\mu}{2}} + C_2 r^{\frac{1-a-\mu}{2}}, & \text{если } \mu = \sqrt{(1-a)^2 - 4c} \neq 0, \\ r^{\frac{1-a}{2}} (C_1 + C_2 \ln r), & \text{если } (1-a)^2 - 4c = 0. \end{cases}$$

$Z_\nu$  – цилиндрические функции,  $C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные.

В случае уравнения (12) имеем:

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = -4\lambda_j, \quad c = -n(2\alpha + n), \quad m = 2(1 - \gamma).$$

При  $\gamma \neq 1$  находим  $\nu = \frac{|\alpha+n|}{1-\gamma}$ , и если  $\lambda_j \neq 0$ , то общее решение уравнения (12) имеет вид

$$v(r) = r^{-\alpha} Z_\nu \left( \frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma} \right). \quad (14)$$

При  $\gamma = 1$  (соответственно,  $\lambda_j = 0$ ) в уравнении (12) коэффициент при  $v$  будет постоянным, и нужно взять  $b = 0$ ,  $c = -[n(2\alpha + n) + 4\lambda_j]$  (соответственно,  $c = -n(2\alpha + n)$ ) и найти  $\mu$ :

$$\mu = \sqrt{4\alpha^2 + 4[n(2\alpha + n) + 4\lambda_j]} = 2\sqrt{(\alpha + n)^2 + 4\lambda_j}$$

(соответственно,  $\mu = 2|\alpha + n|$ ). Тогда общее решение уравнения (12) записывается в виде

$$v(r) = \begin{cases} C_1 r^{-\alpha+\frac{\mu}{2}} + C_2 r^{-\alpha-\frac{\mu}{2}} & \text{при } \mu \neq 0, \\ r^{-\alpha} (C_1 + C_2 \ln r) & \text{при } \mu = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$C_1, C_2$  – произвольные комплексные постоянные.

Итак, справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть число  $s = \beta - \alpha - 1$  нечётное и все собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $A\bar{A}$  полупростые. Тогда общее решение системы (2) имеет вид

$$w = \sum_{n \geq p}^{\infty} \left\{ w_n(r) e^{in\varphi} + w_{s-n} e^{i(s-n)\varphi} \right\}, \quad (16)$$

здесь  $p = \frac{s+1}{2}$ ,  $w_n(r) = S[u_{1n}, \dots, u_{qn}]$ ,  $S$  – матрица, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы  $A\bar{A}$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_j$ , координаты вектор-функций  $u_{jn}$  в зависимости от значений  $\alpha, \beta$  и  $\lambda_j$  определяются по формулам (14) или (15), а вектор-функции  $w_{s-n}$  определяются из системы (9).

**Замечание 1.** Для  $m = 2, 3$  в работах [12, 13] исследованы вопросы о собственных значениях матрицы  $A\bar{A}$  и их расположении на плоскости.

Теперь рассмотрим общий случай матрицы  $A\bar{A}$ . Тогда среди жордановых клеток  $\Lambda_j$  есть недиагональные и система (10) распадается на диагональные и недиагональные подсистемы. Достаточно рассмотреть случай одной недиагональной клетки  $\Lambda_s$  размера  $\mu_s \geq 2$ . Для  $j = s$ , обозначая координаты вектор-функции  $u_{sn}$  через  $v_{s1}, \dots, v_{s\mu_s}$ , систему (11) запишем в развёрнутом виде

$$\begin{cases} r^2 v_{s1}'' + \varepsilon r v_{s1}' - \delta v_{s1} + v_{s2} = 0, \\ \dots \\ r^2 v_{s,\mu_s-1}'' + \varepsilon r v_{s,\mu_s-1}' - \delta v_{s,\mu_s-1} + v_{s\mu_s} = 0, \\ r^2 v_{s,\mu_s}'' + \varepsilon r v_{s,\mu_s}' - \delta v_{s,\mu_s} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\varepsilon = 2\alpha + 1$ ,  $\delta = n(2\alpha + n) + 4r^{2(1-\gamma)}\lambda_s$ . Последнее уравнение этой системы имеет вид (12) и его общее решение запишется формулой вида (14) или (15). Предпоследнее уравнение системы (17) является неоднородным, которое можно решить методом вариации произвольных постоянных (см. лемму). Далее, двигаясь вверх по системе (17), можно найти общее решение этой системы.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Lv \equiv r^2 v'' + (2\alpha + 1) r v' - (n(2\alpha + n) + 4r^{2(1-\gamma)}\lambda_j) v = f(r). \quad (18)$$

Цилиндрическую функцию  $Z_\nu$  представим в виде

$$Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu,$$

$J_\nu, Y_\nu$  — бесселевы функции первого и второго рода,  $C_1, C_2$  — комплексные постоянные.

Справедлива следующая лемма об общем решении уравнения (18).

**Лемма 1.** Пусть  $\gamma \neq 1$  и  $\lambda_j \neq 0$ . Тогда общее решение неоднородного уравнения (18) имеет вид

$$v(r) = \frac{r^{-\alpha}}{2i\sqrt{\lambda_j}} \left\{ J_\nu \left[ C_1 + \int r^{3+\alpha} Y_\nu f(r) dr \right] - Y_\nu \left[ C_2 + \int r^{3+\alpha} J_\nu f(r) dr \right] \right\},$$

здесь всюду бесселевы функции зависят от аргумента  $\frac{2i\sqrt{\lambda_j}}{1-\gamma} r^{1-\gamma}$ ,  $C_1, C_2$  — произвольные комплексные постоянные.

Доказательство проводится методом вариации произвольных постоянных с использованием формулы (14). Привлекая формулу (15), можно получить формулу общего решения неоднородного уравнения (18) и при других  $\gamma$  и  $\lambda_j$ .

Таким образом, мы получили схему построения общего решения системы (2), когда число  $s = \beta - \alpha - 1$  является нечётным.

Теперь рассмотрим случай  $s$  – чётное. Тогда  $n = s - n$  при  $n = \frac{s}{2}$ . При этом значении  $n$  в систему (5) входит одна неизвестная вектор-функция  $w_{s/2}$ :

$$w'_{s/2} - \frac{s}{2r} w_{s/2} + \frac{2}{r^2} A \bar{w}_{s/2} = 0.$$

Отсюда для  $w_{s/2}$  получаем уравнение вида (8) с  $n = \frac{s}{2}$ , из которого определяем  $w_{s/2}$ .

Далее будем считать, что  $n > \frac{s}{2}$ , и повторяем схему, изложенную для случая нечётного  $s$ .

**Пример 1.** Пусть в системе (2) матрица коэффициентов  $A$  антидиагональная, т. е. все элементы, расположенные вне второй (неглавной) диагонали, равны нулю. Для удобства элементы, расположенные на второй диагонали, обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Тогда матрица  $A\bar{A}$  будет диагональной, а именно:

$$A\bar{A} = \text{diag} [a_1 \bar{a}_m, a_2 \bar{a}_{m-1}, \dots, a_m \bar{a}_1].$$

Поэтому собственные значения матрицы  $A\bar{A}$  будут полупростыми и равны  $\lambda_j = a_j \bar{a}_{m-j+1}$ . Следовательно, в этом случае справедливо утверждение типа предложенной теоремы 1.

При  $a_j \neq 0 \ \forall j = 1, \dots, m$  все  $\lambda_j$  будут ненулевыми и все вектор-функции  $u_{jn}$  определяются по формуле (14). Если среди чисел  $a_j$  есть нулевое, например  $a_k = 0$ , то  $\lambda_k = \lambda_{m-k+1} = 0$  и вектор-функции  $u_{kn}$  и  $u_{m-k+1, n}$  определяются по формуле (15).

**Пример 2.** Рассмотрим случай, когда матрица  $A$  является треугольной с элементами  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm}$  на главной диагонали. Тогда матрица  $A\bar{A}$  будет треугольной и её собственные значения равны  $\lambda_j = |a_{jj}|^2$ . Если эти собственные значения являются полупростыми, то в этом случае верны аналогичные заключения из примера 1.

## Литература

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1986. 509 с.
2. Bers L. Theory of pseudo-analytic function. N.Y., 1953. 187 p.
3. Векуа И.Н. Неподвижные особые точки обобщённых аналитических функций // ДАН СССР. 1962. Т. 145, № 1. С. 24–26.
4. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963. 183 с.
5. Усманов З.Д. Об одном классе обобщённых систем Коши–Римана с сингулярной точкой // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14, № 5. С. 1076–1087.
6. Усманов З.Д. Обобщённые системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе, 1983. 245 с.
7. Мухамадиев Э., Байзаев С. К теории ограниченных решений обобщённой системы Коши–Римана // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 2. С. 280–283.
8. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.

9. Байзаев С., Мухамадиев Э. О нормальной разрешимости эллиптических уравнений на плоскости в пространстве Гёльдера // Вестник Новосибирского государственного университета. 2006. Т. 6, Вып. 1. С. 3–13.
10. Гантмахер Ф. Теория матриц. М.: Наука, 1989. 576 с.
11. Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
12. Байзаев С. О решениях полиномиального роста многомерной обобщённой системы Коши–Римана // Уфимский математический журнал. 2015. Т. 7, № 3. С. 3–8.
13. Байзаев С., Баротов Р.Н. О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 22–35.

## ON THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS TO A CLASS OF MULTIDIMENSIONAL GENERALIZED CAUCHY-RIEMANN SYSTEMS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

**S. Baizaev**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: sattor\_bayzoev@rambler.ru

**M.M. Shokirova**

Assistant Professor, e-mail: shokirova2002\_1977@mail.ru

Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, Tajikistan

**Abstract.** The article is devoted to the study of one class of multidimensional generalized Cauchy–Riemann systems with singular coefficients of the form  $z^{-\alpha}\bar{z}^{-\beta}A$ , here  $\alpha, \beta$  – real numbers such that  $\alpha + \beta > 0$  and  $\alpha - \beta$  – an integer,  $A$  – a complex matrix of the order  $m$ . By moving to the polar coordinates, the solutions of the system are searched for in the form of a trigonometric series of  $\varphi = \arg z$  with unknown coefficients  $w_n(r)$ , depending on from  $r = |z|$ . For these unknown coefficients, the related Bessel equations are obtained, in which the coefficient for the desired vector function has the form:  $n(2\alpha + n)E_m + 4r^{2(1-\alpha-\beta)}A\bar{A}$ ,  $E_m$  is a unit matrix of the order of  $m$ . Depending on  $\alpha, \beta$  and the eigenvalues of  $\lambda_j$  of the matrix  $A\bar{A}$ , general solutions of the last equations are found, then the general solution of the original system is written out. It should be noted that in the case when the matrix  $A\bar{A}$  has eigenvalues that are not semisimple, i.e. having unequal algebraic and geometric multiplicities, it is necessary to solve inhomogeneous related Bessel equations by the method of variation of arbitrary constants. From the found general solution of the system, it is possible to distinguish regular, i.e. having no singularities in the finite part of the plane, as well as solutions to boundary value problems.

**Keywords:** multidimensional generalized Cauchy–Riemann system, singular coefficients, general solution, eigenvalues.

*Дата поступления в редакцию: 28.08.2024*