

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИЙ СИСТЕМЫ $x'(t) = A \cdot x(t)$ В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ПРОИЗВОДНЫХ ОДНОЙ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ ВИДА $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$

Р.Н. Баротов¹

докторант, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

Д.Н. Баротов²

старший преподаватель, e-mail: DNBarotov@fa.ru

¹Худжандский государственный университет им. академика Б. Гафурова,
Худжанд, Таджикистан

²Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

Аннотация. В работе для системы линейных дифференциальных уравнений вида $x'(t) = A \cdot x(t)$ изучается задача существования скалярной функции вида $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ такой, что $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – все компоненты вектора решения системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ принадлежат линейной оболочке $Sp(\langle c, x(t) \rangle, \langle c, x(t) \rangle', \langle c, x(t) \rangle'', \dots, \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)})$. Сформулирован и доказан критерий существования, дополняющий ранее опубликованные результаты о представимости всех компонентов системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ в виде линейных комбинаций производных одной скалярной функции. Также аргументировано, что при выполнении критерия представимости периодичность, почти периодичность и ограниченность вектора решения $x(t)$ системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ следуют лишь из периодичности, почти периодичности и ограниченности одной функции $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ соответственно.

Ключевые слова: однородная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, метод приведения системы дифференциальных уравнений к одному уравнению высокого порядка, динамическая система.

Введение

Задача решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами является одной из основных задач как теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и линейной алгебры [1, 2]. К наиболее известным методам решения системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно отнести следующие: метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка [3, 4], метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы [5, 6], метод неопределённых коэффициентов и метод матрично-алгебраических преобразований [7–9]. В работах [10–15] рассмотре-

ны ещё некоторые аналогичные подходы решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В данной работе рассматривается задача, аналогичная задачам, приведённым в работах [2, 4, 10–16], а именно изучается проблема существования скалярной функции вида $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ такой, что $x_k(t) \in \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ – любой компонент вектора решения системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ представляет собой линейную комбинацию производных только функции $y(t)$. Доказывается, что существует скалярный вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что все компоненты вектора решения системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ принадлежат линейной оболочке $Sp(\langle c, x(t) \rangle, \langle c, x(t) \rangle', \langle c, x(t) \rangle'', \dots, \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)})$ тогда и только тогда, когда для любого собственного значения λ матрицы A выполнено равенство $\text{rang}(A - \lambda E) = n - 1$. Аргументируется также, что если существует скалярный вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x_k(t) \in \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ – любой компонент вектора решения системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ представляет собой линейную комбинацию производных лишь функции $\langle c, x(t) \rangle$, то $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ вектор $\alpha \cdot c$ также обладает таким свойством, т. е. что $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – все компоненты вектора решения системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ являются линейными комбинациями производных лишь функции $\langle \alpha \cdot c, x(t) \rangle$.

1. Используемые обозначения

Пусть

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

– единичная матрица n -го порядка.

Пусть

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

– скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Пусть

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

и

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$$

– вещественная квадратная матрица n -го порядка.

Пусть $\det(A - \lambda \cdot E) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m} = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0)$ такой, что $|\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}| = m$ и $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$.

$$\text{Пусть } \Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \text{ и } B(\lambda) = A - \lambda E = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$Sp(f_1, f_2, \dots, f_n) = \{\alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \dots + \alpha_n \cdot f_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

– линейная оболочка функций $f_1, f_2, \dots, f_n$.

2. Формулировка результатов

Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t), \\ x'_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t), \\ \dots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t). \end{cases} \quad (1)$$

В силу введённых обозначений систему (1) можно записать в матричной форме $x'(t) = A \cdot x(t)$.

В этой статье исследуем такую задачу: для какой матрицы A существует скалярный вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что систему (1) относительно одной скалярной функции $\langle c, x(t) \rangle$ можно привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} x_1(t) = d_{11}\langle c, x(t) \rangle + d_{12}\langle c, x(t) \rangle' + \dots + d_{1n}\langle c, x(t) \rangle^{(n-1)}, \\ x_2(t) = d_{21}\langle c, x(t) \rangle + d_{22}\langle c, x(t) \rangle' + \dots + d_{2n}\langle c, x(t) \rangle^{(n-1)}, \\ \dots \\ x_n(t) = d_{n1}\langle c, x(t) \rangle + d_{n2}\langle c, x(t) \rangle' + \dots + d_{nn}\langle c, x(t) \rangle^{(n-1)}, \end{cases} \quad (2)$$

т. е. для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ можно выразить значения всех функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, входящих в заданную систему (1) в виде линейных комбинаций производных только одной функции $\langle c, x(t) \rangle$.

Систему (2) запишем в матричной форме

$$x(t) = D \cdot x_c(t),$$

где

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & & & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

и

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} \langle c, x(t) \rangle \\ \langle c, x(t) \rangle' \\ \langle c, x(t) \rangle'' \\ \dots \\ \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. Существует скалярный вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что систему (1) относительно $\langle c, x(t) \rangle$ можно привести к эквивалентной системе (2) тогда и только тогда, когда $\text{rang}(B(\lambda)) = n - 1 \forall \lambda \in \Lambda$.

Доказательство. В одну сторону: пусть $\text{rang}(B(\lambda)) = n - 1 \forall \lambda \in \Lambda$. Из $\text{rang}(B(\lambda)) = n - 1 \forall \lambda \in \Lambda$ следует, что геометрическая кратность всех собственных значений равна 1, следовательно, для любого собственного значения λ_i существует ровно один соответствующий линейно независимый собственный вектор v_i [7].

В этом случае мы конструктивно докажем, что существует скалярный вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что система (1) относительно $\langle c, x(t) \rangle$ может сводиться к эквивалентной системе (2), и в качестве такого искомого вектора можно взять произвольное решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \langle c, v_1 \rangle = 1, \\ \langle c, v_2 \rangle = 1, \\ \dots \\ \langle c, v_m \rangle = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно теореме Кронекера–Капелли [7] система (3) совместна. Из системы (1) и теоремы Гамильтона–Кэли [7] следует, что

$$\begin{cases} \langle c, x(t) \rangle^{(n)} + a_{n-1} \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)} + \dots + a_1 \langle c, x(t) \rangle' + a_0 \langle c, x(t) \rangle = 0, \\ \begin{bmatrix} \langle c, x(t) \rangle \\ \langle c, x(t) \rangle' \\ \langle c, x(t) \rangle'' \\ \dots \\ \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot E \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \dots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

Докажем, что $\det(\mathcal{O}) \neq 0$, где

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} c \cdot E \\ c \cdot A \\ c \cdot A^2 \\ \dots \\ c \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Пусть $v_i(j)$ – это присоединённый вектор высоты j , соответствующий собственному значению λ_i . Собственные векторы – это присоединённые векторы высоты 1, т. е. $v_i(1) = v_i$. Другими словами, векторы $v_i(j)$ определяются из следующих равенств:

$$A \cdot v_1(1) = \lambda_1 \cdot v_1(1), A \cdot v_1(2) = \lambda_1 \cdot v_1(2) + v_1(1), \dots, A \cdot v_1(k_1) = \lambda_1 \cdot v_1(k_1) + v_1(k_1 - 1),$$

$$A \cdot v_2(1) = \lambda_2 \cdot v_2(1), A \cdot v_2(2) = \lambda_2 \cdot v_2(2) + v_2(1), \dots, A \cdot v_2(k_2) = \lambda_2 \cdot v_2(k_2) + v_2(k_2 - 1),$$

...

$$A \cdot v_m(1) = \lambda_m \cdot v_m(1), A \cdot v_m(2) = \lambda_m \cdot v_m(2) + v_m(1), \dots,$$

$$A \cdot v_m(k_m) = \lambda_m \cdot v_m(k_m) + v_m(k_m - 1).$$

Пусть

$$V = [v_1(1), v_1(2), \dots, v_1(k_1), v_2(1), v_2(2), \dots, v_2(k_2), \dots, v_m(1), v_m(2), \dots, v_m(k_m)]$$

– матрица, составленная из координат присоединённых векторов-столбцов матрицы A .

Для доказательства $\det(\mathcal{O}) \neq 0$ достаточно и удобно показать, что $\det(\mathcal{O} \cdot V) \neq 0$. Прямым перемножением матриц и с учётом присоединённости векторов показываем, что $\mathcal{O} \cdot V = W$, где $W = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_n]$ такая, что

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot c_{11} \\ \lambda_1 \cdot c_{11} \\ \lambda_1^2 \cdot c_{11} \\ \lambda_1^3 \cdot c_{11} \\ \dots \\ \lambda_1^{n-3} \cdot c_{11} \\ \lambda_1^{n-2} \cdot c_{11} \\ \lambda_1^{n-1} \cdot c_{11} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{12}\lambda_1 + 1 \cdot c_{11} \\ c_{12}\lambda_1^2 + 2\lambda_1 \cdot c_{11} \\ c_{12}\lambda_1^3 + 3\lambda_1^2 \cdot c_{11} \\ \dots \\ c_{12}\lambda_1^{n-3} + C_{n-3}^1 \lambda_1^{n-4} \cdot c_{11} \\ c_{12}\lambda_1^{n-2} + C_{n-2}^1 \lambda_1^{n-3} \cdot c_{11} \\ c_{12}\lambda_1^{n-1} + C_{n-1}^1 \lambda_1^{n-2} \cdot c_{11} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 w_3 &= \begin{bmatrix} c_{13} \\ c_{13}\lambda_1 + c_{12} \\ c_{13}\lambda_1^2 + c_{12}2\lambda_1 + 1 \cdot c_{11} \\ c_{13}\lambda_1^3 + c_{12}3\lambda_1^2 + 3\lambda_1 \cdot c_{11} \\ \dots \\ c_{13}\lambda_1^{n-3} + c_{12}C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} + C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} \cdot c_{11} \\ c_{13}\lambda_1^{n-2} + c_{12}C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} + C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} \cdot c_{11} \\ c_{13}\lambda_1^{n-1} + c_{12}C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} + C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} \cdot c_{11} \end{bmatrix}, \\
 w_4 &= \begin{bmatrix} c_{14} \\ c_{14}\lambda_1 + c_{13} \\ c_{14}\lambda_1^2 + c_{13}2\lambda_1 + c_{12} \\ c_{14}\lambda_1^3 + c_{13}3\lambda_1^2 + c_{12}3\lambda_1 + 1 \cdot c_{11} \\ \dots \\ c_{14}\lambda_1^{n-3} + c_{13}C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} + c_{12}C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} + C_{n-3}^3\lambda_1^{n-6} \cdot c_{11} \\ c_{14}\lambda_1^{n-2} + c_{13}C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} + c_{12}C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} + C_{n-2}^3\lambda_1^{n-5} \cdot c_{11} \\ c_{14}\lambda_1^{n-1} + c_{13}C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} + c_{12}C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} + C_{n-1}^3\lambda_1^{n-4} \cdot c_{11} \end{bmatrix}, \\
 &\vdots \\
 w_{k_1} &= \begin{bmatrix} c_{1k_1} \\ c_{1k_1}\lambda_1 + c_{1k_1-1} \\ c_{1k_1}\lambda_1^2 + c_{1k_1-1}2\lambda_1 + c_{1k_1-2} \\ c_{1k_1}\lambda_1^3 + c_{1k_1-1}3\lambda_1^2 + c_{1k_1-2}3\lambda_1 + c_{1k_1-3} \\ \dots \\ c_{1k_1}\lambda_1^{n-3} + c_{1k_1-1}C_{n-3}^1\lambda_1^{n-4} + c_{1k_1-2}C_{n-3}^2\lambda_1^{n-5} + \dots + C_{n-3}^{k_1-1}\lambda_1^{n-2-k_1} \cdot c_{11} \\ c_{1k_1}\lambda_1^{n-2} + c_{1k_1-1}C_{n-2}^1\lambda_1^{n-3} + c_{1k_1-2}C_{n-2}^2\lambda_1^{n-4} + \dots + C_{n-2}^{k_1-1}\lambda_1^{n-1-k_1} \cdot c_{11} \\ c_{1k_1}\lambda_1^{n-1} + c_{1k_1-1}C_{n-1}^1\lambda_1^{n-2} + c_{1k_1-2}C_{n-1}^2\lambda_1^{n-3} + \dots + C_{n-1}^{k_1-1}\lambda_1^{n-k_1} \cdot c_{11} \end{bmatrix}, \\
 w_{k_1+1} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot c_{21} \\ \lambda_2 \cdot c_{21} \\ \lambda_2^2 \cdot c_{21} \\ \lambda_2^3 \cdot c_{21} \\ \dots \\ \lambda_2^{n-3} \cdot c_{21} \\ \lambda_2^{n-2} \cdot c_{21} \\ \lambda_2^{n-1} \cdot c_{21} \end{bmatrix}, \quad w_{k_1+2} = \begin{bmatrix} c_{22} \\ c_{22}\lambda_2 + 1 \cdot c_{21} \\ c_{22}\lambda_2^2 + 2\lambda_2 \cdot c_{21} \\ c_{22}\lambda_2^3 + 3\lambda_2^2 \cdot c_{21} \\ \dots \\ c_{22}\lambda_2^{n-3} + C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} \cdot c_{21} \\ c_{22}\lambda_2^{n-2} + C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} \cdot c_{21} \\ c_{22}\lambda_2^{n-1} + C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} \cdot c_{21} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$w_{k_1+3} = \begin{bmatrix} c_{23} \\ c_{23}\lambda_2 + c_{22} \\ c_{23}\lambda_2^2 + c_{22}2\lambda_2 + 1 \cdot c_{21} \\ c_{23}\lambda_2^3 + c_{22}3\lambda_2^2 + 3\lambda_2 \cdot c_{21} \\ \dots \\ c_{23}\lambda_2^{n-3} + c_{22}C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} + C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} \cdot c_{21} \\ c_{23}\lambda_2^{n-2} + c_{22}C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} + C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} \cdot c_{21} \\ c_{23}\lambda_2^{n-1} + c_{22}C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} + C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} \cdot c_{21} \end{bmatrix},$$

$$w_{k_1+4} = \begin{bmatrix} c_{24} \\ c_{24}\lambda_2 + c_{23} \\ c_{24}\lambda_2^2 + c_{23}2\lambda_2 + c_{22} \\ c_{24}\lambda_2^3 + c_{23}3\lambda_2^2 + c_{22}3\lambda_2 + 1 \cdot c_{21} \\ \dots \\ c_{24}\lambda_2^{n-3} + c_{23}C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} + c_{22}C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} + C_{n-3}^3\lambda_2^{n-6} \cdot c_{21} \\ c_{24}\lambda_2^{n-2} + c_{23}C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} + c_{22}C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} + C_{n-2}^3\lambda_2^{n-5} \cdot c_{21} \\ c_{24}\lambda_2^{n-1} + c_{23}C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} + c_{22}C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} + C_{n-1}^3\lambda_2^{n-4} \cdot c_{21} \end{bmatrix},$$

⋮

$$w_{k_1+k_2} = \begin{bmatrix} c_{2k_2} \\ c_{2k_2}\lambda_2 + c_{2k_2-1} \\ c_{2k_2}\lambda_2^2 + c_{2k_2-1}2\lambda_2 + c_{2k_2-2} \\ c_{2k_2}\lambda_2^3 + c_{2k_2-1}3\lambda_2^2 + c_{2k_2-2}3\lambda_2 + c_{2k_2-3} \\ \dots \\ c_{2k_2}\lambda_2^{n-3} + c_{2k_2-1}C_{n-3}^1\lambda_2^{n-4} + c_{2k_2-2}C_{n-3}^2\lambda_2^{n-5} + \dots + C_{n-3}^{k_2-1}\lambda_2^{n-2-k_2} \cdot c_{21} \\ c_{2k_2}\lambda_2^{n-2} + c_{2k_2-1}C_{n-2}^1\lambda_2^{n-3} + c_{2k_2-2}C_{n-2}^2\lambda_2^{n-4} + \dots + C_{n-2}^{k_2-1}\lambda_2^{n-1-k_2} \cdot c_{21} \\ c_{2k_2}\lambda_2^{n-1} + c_{2k_2-1}C_{n-1}^1\lambda_2^{n-2} + c_{2k_2-2}C_{n-1}^2\lambda_2^{n-3} + \dots + C_{n-1}^{k_2-1}\lambda_2^{n-k_2} \cdot c_{21} \end{bmatrix},$$

⋮

$$\begin{aligned}
 w_{k_1+k_1+\dots+k_{m-1}+1} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot c_{m1} \\ \lambda_m \cdot c_{m1} \\ \lambda_m^2 \cdot c_{m1} \\ \lambda_m^3 \cdot c_{m1} \\ \dots \\ \lambda_m^{n-3} \cdot c_{m1} \\ \lambda_m^{n-2} \cdot c_{m1} \\ \lambda_m^{n-1} \cdot c_{m1} \end{bmatrix}, \quad w_{k_1+k_1+\dots+k_{m-1}+2} = \begin{bmatrix} c_{m2} \\ c_{m2}\lambda_m + 1 \cdot c_{m1} \\ c_{m2}\lambda_m^2 + 2\lambda_m \cdot c_{m1} \\ c_{m2}\lambda_m^3 + 3\lambda_m^2 \cdot c_{m1} \\ \dots \\ c_{m2}\lambda_m^{n-3} + C_{n-3}^1 \lambda_m^{n-4} \cdot c_{m1} \\ c_{m2}\lambda_m^{n-2} + C_{n-2}^1 \lambda_m^{n-3} \cdot c_{m1} \\ c_{m2}\lambda_m^{n-1} + C_{n-1}^1 \lambda_m^{n-2} \cdot c_{m1} \end{bmatrix}, \\
 w_{k_1+k_1+\dots+k_{m-1}+3} &= \begin{bmatrix} c_{m3} \\ c_{m3}\lambda_m + c_{m2} \\ c_{m3}\lambda_m^2 + c_{m2}2\lambda_m + 1 \cdot c_{m1} \\ c_{m3}\lambda_m^3 + c_{m2}3\lambda_m^2 + 3\lambda_m \cdot c_{m1} \\ \dots \\ c_{m3}\lambda_m^{n-3} + c_{m2}C_{n-3}^1 \lambda_m^{n-4} + C_{n-3}^2 \lambda_m^{n-5} \cdot c_{m1} \\ c_{m3}\lambda_m^{n-2} + c_{m2}C_{n-2}^1 \lambda_m^{n-3} + C_{n-2}^2 \lambda_m^{n-4} \cdot c_{m1} \\ c_{m3}\lambda_m^{n-1} + c_{m2}C_{n-1}^1 \lambda_m^{n-2} + C_{n-1}^2 \lambda_m^{n-3} \cdot c_{m1} \end{bmatrix}, \\
 w_{k_1+k_1+\dots+k_{m-1}+4} &= \begin{bmatrix} c_{m4} \\ c_{m4}\lambda_m + c_{m3} \\ c_{m4}\lambda_m^2 + c_{m3}2\lambda_m + c_{m2} \\ c_{m4}\lambda_m^3 + c_{m3}3\lambda_m^2 + c_{m2}3\lambda_m + 1 \cdot c_{m1} \\ \dots \\ c_{m4}\lambda_m^{n-3} + c_{m3}C_{n-3}^1 \lambda_m^{n-4} + c_{m2}C_{n-3}^2 \lambda_m^{n-5} + C_{n-3}^3 \lambda_m^{n-6} \cdot c_{m1} \\ c_{m4}\lambda_m^{n-2} + c_{m3}C_{n-2}^1 \lambda_m^{n-3} + c_{m2}C_{n-2}^2 \lambda_m^{n-4} + C_{n-2}^3 \lambda_m^{n-5} \cdot c_{m1} \\ c_{m4}\lambda_m^{n-1} + c_{m3}C_{n-1}^1 \lambda_m^{n-2} + c_{m2}C_{n-1}^2 \lambda_m^{n-3} + C_{n-1}^3 \lambda_m^{n-4} \cdot c_{m1} \end{bmatrix}, \\
 &\vdots \\
 w_n &= \begin{bmatrix} c_{mk_m} \\ c_{mk_m}\lambda_m + c_{mk_m-1} \\ c_{mk_m}\lambda_m^2 + c_{mk_m-1}2\lambda_m + c_{mk_m-2} \\ c_{mk_m}\lambda_m^3 + c_{mk_m-1}3\lambda_m^2 + c_{mk_m-2}3\lambda_m + c_{mk_m-3} \\ \dots \\ c_{mk_m}\lambda_m^{n-3} + c_{mk_m-1}C_{n-3}^1 \lambda_m^{n-4} + c_{mk_m-2}C_{n-3}^2 \lambda_m^{n-5} + \dots + C_{n-3}^{k_m-1} \lambda_m^{n-2-k_m} \cdot c_{m1} \\ c_{mk_m}\lambda_m^{n-2} + c_{mk_m-1}C_{n-2}^1 \lambda_m^{n-3} + c_{mk_m-2}C_{n-2}^2 \lambda_m^{n-4} + \dots + C_{n-2}^{k_m-1} \lambda_m^{n-1-k_m} \cdot c_{m1} \\ c_{mk_m}\lambda_m^{n-1} + c_{mk_m-1}C_{n-1}^1 \lambda_m^{n-2} + c_{mk_m-2}C_{n-1}^2 \lambda_m^{n-3} + \dots + C_{n-1}^{k_m-1} \lambda_m^{n-k_m} \cdot c_{m1} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

где $c_{ij} = \langle c, v_i(j) \rangle$ – скалярное произведение векторов c и $v_i(j)$. Действительно, для этого методом математической индукции достаточно доказать, что

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ и } \forall j \in \{1, 2, \dots, k_i\}$$

верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} A^p \cdot v_i(j) &= \lambda_i^p \cdot v_i(j) + C_p^1 \lambda_i^{p-1} \cdot v_i(j-1) + C_p^2 \lambda_i^{p-2} \cdot v_i(j-2) + \dots \\ &\dots + C_p^{j-2} \lambda_i^{p-j+2} \cdot v_i(2) + C_p^{j-1} \lambda_i^{p-j+1} \cdot v_i(1) = \sum_{q=0}^{j-1} C_p^q \lambda_i^{p-q} \cdot v_i(j-q). \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $p = 1$. Тогда

$$A \cdot v_i(j) = \lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1) = \sum_{q=0}^{j-1} C_1^q \lambda_i^{1-q} \cdot v_i(j-q).$$

Пусть $p = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} A^2 \cdot v_i(j) &= A \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1)) = \lambda_i \cdot A \cdot v_i(j) + A \cdot v_i(j-1) = \\ &= \lambda_i(\lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1)) + \lambda_i \cdot v_i(j-1) + v_i(j-2) = \sum_{q=0}^{j-1} C_2^q \lambda_i^{2-q} \cdot v_i(j-q). \end{aligned}$$

Пусть $p = s$. Тогда предположим, что

$$A^s \cdot v_i(j) = \sum_{q=0}^{j-1} C_s^q \lambda_i^{s-q} \cdot v_i(j-q).$$

Умножим это последнее равенство слева на A :

$$\begin{aligned} A \cdot (A^s \cdot v_i(j)) &= A^{s+1} \cdot v_i(j) = A \cdot \left[\sum_{q=0}^{j-1} C_s^q \lambda_i^{s-q} \cdot v_i(j-q) \right] = \sum_{q=0}^{j-1} C_s^q \lambda_i^{s-q} \cdot A \cdot v_i(j-q) = \\ &= C_s^0 \lambda_i^{s-0} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j) + v_i(j-1)) + C_s^1 \lambda_i^{s-1} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j-1) + v_i(j-2)) + \\ &\quad + C_s^2 \lambda_i^{s-2} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(j-2) + v_i(j-3)) + \dots + C_s^{j-1} \lambda_i^{s-j+1} \cdot (\lambda_i \cdot v_i(1)) = \\ &= \lambda_i^{s+1} v_i(j) + (C_s^0 + C_s^1) \cdot \lambda_i^s v_i(j-1) + (C_s^1 + C_s^2) \cdot \lambda_i^{s-1} v_i(j-2) + (C_s^2 + C_s^3) \cdot \lambda_i^{s-2} v_i(j-3) + \\ &\quad + \dots + (C_s^{j-2} + C_s^{j-1}) \cdot \lambda_i^{s-j+2} v_i(1) = \sum_{q=0}^{j-1} C_{s+1}^q \lambda_i^{s+1-q} \cdot v_i(j-q) \implies \\ A^p \cdot v_i(j) &= \sum_{q=0}^{j-1} C_p^q \lambda_i^{p-q} \cdot v_i(j-q), \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ и } \forall j \in \{1, 2, \dots, k_i\}. \end{aligned}$$

Используя предложенный в [2] подход упрощения коэффициентов лямбд в определителе $\det(\mathcal{O} \cdot V)$, имеем $\det(\mathcal{O} \cdot V) = c_{11}^{k_1} \cdot c_{21}^{k_2} \cdot \dots \cdot c_{m1}^{k_m} \cdot \det(V_c)$, где

$$V_c = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \dots & \lambda_1^{n-3} & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 \lambda_1 & C_3^1 \lambda_1^2 & \dots & C_{n-3}^1 \lambda_1^{n-4} & C_{n-2}^1 \lambda_1^{n-3} & C_{n-1}^1 \lambda_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_3^2 \lambda_1 & \dots & C_{n-3}^2 \lambda_1^{n-5} & C_{n-2}^2 \lambda_1^{n-4} & C_{n-1}^2 \lambda_1^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-3}^3 \lambda_1^{n-6} & C_{n-2}^3 \lambda_1^{n-5} & C_{n-1}^3 \lambda_1^{n-4} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}^{k_1-1} \lambda_1^{n-2-k_1} & C_{n-2}^{k_1-1} \lambda_1^{n-1-k_1} & C_{n-1}^{k_1-1} \lambda_1^{n-k_1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \dots & \lambda_2^{n-3} & \lambda_2^{n-2} & \lambda_2^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 \lambda_2 & C_3^1 \lambda_2^2 & \dots & C_{n-3}^1 \lambda_2^{n-4} & C_{n-2}^1 \lambda_2^{n-3} & C_{n-1}^1 \lambda_2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_3^2 \lambda_2 & \dots & C_{n-3}^2 \lambda_2^{n-5} & C_{n-2}^2 \lambda_2^{n-4} & C_{n-1}^2 \lambda_2^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-3}^3 \lambda_2^{n-6} & C_{n-2}^3 \lambda_2^{n-5} & C_{n-1}^3 \lambda_2^{n-4} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}^{k_2-1} \lambda_2^{n-2-k_2} & C_{n-2}^{k_2-1} \lambda_2^{n-1-k_2} & C_{n-1}^{k_2-1} \lambda_2^{n-k_2} \\ \vdots & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 & \lambda_m^3 & \dots & \lambda_m^{n-3} & \lambda_m^{n-2} & \lambda_m^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1 \lambda_m & C_3^1 \lambda_m^2 & \dots & C_{n-3}^1 \lambda_m^{n-4} & C_{n-2}^1 \lambda_m^{n-3} & C_{n-1}^1 \lambda_m^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_3^2 \lambda_m & \dots & C_{n-3}^2 \lambda_m^{n-5} & C_{n-2}^2 \lambda_m^{n-4} & C_{n-1}^2 \lambda_m^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-3}^3 \lambda_m^{n-6} & C_{n-2}^3 \lambda_m^{n-5} & C_{n-1}^3 \lambda_m^{n-4} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-3}^{k_m-1} \lambda_m^{n-2-k_m} & C_{n-2}^{k_m-1} \lambda_m^{n-1-k_m} & C_{n-1}^{k_m-1} \lambda_m^{n-k_m} \end{bmatrix}.$$

В работе [17] доказано, что

$$\det(V_c) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i)^{p_i \cdot p_j}. \quad (6)$$

Из (3) и (6) следует, что $\det(\mathcal{O}) \neq 0$. Теперь из (4) следует, что

$$x(t) = \mathcal{O}^{-1} \cdot x_c(t). \quad (7)$$

Равенство (7) означает, что $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – все компоненты вектора решения системы (1) для любого начального условия $x(t_0) = x_0$ принадлежат линейной оболочке $Sp(\langle c, x(t) \rangle, \langle c, x(t) \rangle', \langle c, x(t) \rangle'', \dots, \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)})$. В одну сторону теорема доказана.

В обратную сторону: пусть неверно, что $\text{rang}(B(\lambda)) = n - 1, \forall \lambda \in \Lambda$. Тогда $\exists r \in \{1, 2, \dots, m\} : \text{rang}(B(\lambda_r)) < n - 1$.

Пусть

$$V' = [v_{\lambda_1}(1), \dots, v_{\lambda_1}(l_1), v_{\lambda_1}(l_1 + 1), \dots, \\ \dots, v_{\lambda_1}(k_1), \dots, v_{\lambda_m}(1), \dots, v_{\lambda_m}(l_m), v_{\lambda_m}(l_m + 1), \dots, v_{\lambda_m}(k_m)]$$

– матрица, составленная из координат собственных и присоединённых векторов-столбцов матрицы A , такая, что

$$v_{\lambda_i}(j) = \begin{cases} \text{собственный вектор, соответствующий } \lambda_i, \text{ если } j \in \{1, 2, \dots, l_i\} \\ \text{присоединённый вектор, соответствующий } \lambda_i, \text{ если } j \in \{l_i + 1, \dots, k_i\} \end{cases}.$$

Известно [7], что $\det(V') \neq 0$. Если $\text{rang}(B(\lambda_r)) < n - 1$, то $l_r \geq 2$, т. е. количество линейно независимых собственных векторов-столбцов матрицы A , соответствующих собственному значению λ_r , больше или равно 2. В этом случае $(k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1} + 1)$ -й и $(k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1} + 2)$ -й столбцы матрицы $\mathcal{O} \cdot V'$ пропорциональны друг другу и, следовательно, $\det(\mathcal{O}) = 0$. ■

Замечание 1. Если существует скалярный вектор $c \in \mathbb{R}^n$ такой, что систему (1) относительно $\langle c, x(t) \rangle$ можно привести к эквивалентной системе вида (2), то $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ вектор $\alpha \cdot c$ также обладает таким свойством, т. е. систему (1) относительно $\langle \alpha \cdot c, x(t) \rangle$ можно привести к эквивалентной системе вида (2).

Далее уместно отметить и аргументировать три следствия из теоремы 1 о выявлении периодических, почти периодических и ограниченных решений динамических систем вида (1), поскольку периодические и ограниченные решения динамической системы очень важны как в теории дифференциальных уравнений, так и в теории управления.

Следствие 1. Пусть система (1) относительно $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ приводится к эквивалентной системе (2). Тогда T -периодичность вектора решения системы (1) следует лишь из T -периодичности одной скалярной функции $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$.

Действительно, непосредственно дифференцируя тождество $y(t + T) \equiv y(t)$, можно заметить, что

$$\begin{bmatrix} y(t + T) \\ y'(t + T) \\ y''(t + T) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Отсюда в силу (7) имеем

$$\begin{bmatrix} x_1(t + T) \\ x_2(t + T) \\ x_3(t + T) \\ \dots \\ x_n(t + T) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y(t + T) \\ y'(t + T) \\ y''(t + T) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t + T) \end{bmatrix} = \mathcal{O}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. Пусть система (1) относительно $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ приводится к эквивалентной системе (2). Тогда почти периодичность вектора решения системы (1) следует лишь из почти периодичности одной скалярной функции $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$.

Данный факт можно обосновать, используя схему, приведённую в примере 4 [18].

Следствие 3. Пусть система (1) относительно $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ приводится к эквивалентной системе (2). Тогда ограниченность вектора решения системы (1) следует лишь из ограниченности одной скалярной функции $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$.

Действительно, во-первых, в силу (4) функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(t)^{(n)} + a_{n-1} \cdot y(t)^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y(t)^{(n-2)} + \dots + a_1 \cdot y(t)' + a_0 \cdot y(t) = 0. \quad (8)$$

Во-вторых, в предложении 6 [18] доказано, что если функция $y(t)$ – ограниченное решение уравнения (8), то функции $y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)$ также ограничены.

Следовательно, норма вектора $(y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))^T$ ограничена, т. е.

$$\left\| \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \right\| \leq R_0.$$

Отсюда в силу (7) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \right\| &= \left\| \mathcal{O}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \|\mathcal{O}^{-1}\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \right\| \leq \\ &\leq \|\mathcal{O}^{-1}\| \cdot R_0 = R_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Следствие 3 доказано.

3. Заключение

Критерий, сформулированный и доказанный в теореме 1, является аналогом результатов, приведённых, в том числе в [2, 16], с таким отличием, что в [2, 16] исследовано более сильное (уточнённое) условие существования вектора $c \in \mathbb{R}^n$, у которого только одна k -я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. Полученный результат может быть использован при построении решений систем вида

(1) и исследовании их на периодичность, почти периодичность и ограниченность, поскольку при выполнении критерия представимости периодичность, почти периодичность и ограниченность вектора решения $x(t)$ системы $x'(t) = A \cdot x(t)$ следуют лишь из периодичности, почти периодичности и ограниченности одной функции $\langle c, x(t) \rangle$ соответственно.

Литература

1. Олейник О.А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и её приложениях // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 4. С. 114–121.
2. Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. Об одном критерии выразимости функций системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему // Вычислительные методы и программирование. 2023. Т. 24, вып. 3. С. 260–274.
3. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения: практикум. М.: Инфра-М, 2016.
4. Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. Об уточнении метода сведения системы линейных дифференциальных уравнений к одному уравнению высшего порядка, позволяющего найти общее решение исходной // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2023. Т. 43, № 2. С. 20–30.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Физматгиз, 1961.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
8. Мухамеджанова У.М. Жорданова форма матрицы и решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Учёные записки Худжандского государственного университета им. академика Б. Гафурова. Серия: Естественные и экономические науки. 2017. № 1. С. 20–26.
9. Балоев А.А. Матрично-алгебраическая форма решения системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Сибирский журнал промышленной математики. 2014. Т. 17, № 3. С. 3–12.
10. Щитов И.Н., Бегун Е.Н. Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Актуальные проблемы радио и киботехнологий: материалы VI Междунар. науч.-техн. конф. СПб.: С.-Петербург. гос. ин-т кино и телевидения, 2022. С. 172–176.
11. Малышев Ю.В., Атаманов П.С. О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом // Вестник Чувашского университета. 2011. № 3. С. 155–159.
12. Ивлев В.В., Кривошей Е.А. Системы линейных дифференциальных уравнений. Интегрируемые комбинации (продолжение) // Математическое образование. 2018. № 1. С. 47–51.
13. Рыбаков М.А. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью преобразования Лапласа // Вестник Тамбовского университета. 2009. Т. 14, № 4. С. 791–792.
14. Назимов А.Б., Очилова М.А. О приведении системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами к одному дифференциальному уравнению высокого порядка // Современные проблемы и перспективы обучения математике, фи-

- зике, информатике в школе и вузе: межвуз. сб. науч.-метод. тр. Вологда: Волог. гос. ун-т, 2021. С. 41–47.
15. Подгаев А.Г., Син А.З. Простой способ обоснования метода исключения при решении нормальной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Учёные заметки ТОГУ. 2014. Т. 5, № 4. С. 1357–1363.
 16. Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. О выразимости функций системы $x'(t) = A \cdot x(t)$, собственные значения матрицы которой являются некратными в виде линейных комбинаций производных одной функции, входящей в эту систему // Прикладная математика и вопросы управления. 2023. № 2. С. 8–16.
 17. На Т.Т., Gibson J.A. A note on the determinant of a functional confluent Vandermonde matrix and controllability // Linear Algebra and its Applications. 1980. Vol. 30. P. 69–75.
 18. Жиков В.В., Левитан Б.М. Теория Фавара // Успехи математических наук. 1977. Т. 32, № 2. С. 123–171.

**ON THE REPRESENTABILITY OF FUNCTIONS OF THE SYSTEM $x'(t) = A \cdot x(t)$
IN THE FORM OF LINEAR COMBINATIONS OF DERIVATIVES OF ONE SCALAR
FUNCTION OF THE FORM $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$**

R.N. Barotov¹

Doctoral Student, e-mail: ruzmet.tj@mail.ru

D.N. Barotov²

Assistant Professor, e-mail: DNBarotov@fa.ru

¹Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov, Khujand, Tajikistan

²Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, for a system of linear differential equations of the form $x'(t) = A \cdot x(t)$, we study the problem of the existence of a scalar function of the form $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$ such that $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ – all components of the solution vector of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$ for any initial condition $x(t_0) = x_0$ belong to the linear hull $Sp(\langle c, x(t) \rangle, \langle c, x(t) \rangle', \langle c, x(t) \rangle'', \dots, \langle c, x(t) \rangle^{(n-1)})$. An existence criterion was formulated and proved, complementing previously published results on the representability of all components of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$ in the form of linear combinations of derivatives of one scalar function. It is also argued that when the representability criterion is met, the periodicity, almost periodicity, and boundedness of the solution vector $x(t)$ of the system $x'(t) = A \cdot x(t)$ follow only from the periodicity, almost periodicity, and boundedness of one function $y(t) = \langle c, x(t) \rangle$, respectively.

Keywords: homogeneous system of linear differential equations with constant coefficients, method of reducing a system of differential equations to one high-order equation, dynamic system.

Дата поступления в редакцию: 26.05.2024