Математические структуры и моделирование
2024. № 3 (71). С. 4–18

УДК 512.815.8
DOI 10.24147/2222-8772.2024.3.4-18

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ. V: ВЕСОВАЯ ДИАГРАММА

В.В. Варламов
д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Анализируется корневая структура подалгебр групповой алгебры конформной группы в рамках двулистного накрытия. На основе проведённого анализа определяется базис Картана–Вейля групповой алгебры. Строятся корневая и весовая диаграммы. Вводится массовая формула, ассоциированная с каждым узлом весовой диаграммы.

Ключевые слова: конформная группа, групповая алгебра, группа Лоренца, подалгебра Картана, генераторы Вейля, корневая структура, весовая диаграмма, массовая формула.

1. Введение

В настоящей статье, являющейся продолжением серии работ [1–5], завершается изучение структуры групповой алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$, начатое в статье [5].

Несмотря на то, что структура алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$, соответствующей типу A_3 по классификации Киллинга–Картана, хорошо изучена (см. [6, 7]), в настоящем исследовании делается акцент на физическом приложении общих алгебраических методов к изучению периодической системы химических элементов. В связи с этим, исходным пунктом исследования является водородная реализация алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$, т. е. представление Барута [8], рассмотренное в [5]. Далее представление Барута формулируется в базисе Яо [9] для группы $\mathrm{SU}(2,2)$, являющейся двулистным накрытием конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$. В п. 2 рассматривается подалгебра $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, соответствующая физически важной подгруппе (группа Лоренца) $\mathrm{SO}(3,1) \subset \mathrm{SO}(4,2)$. Для алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ определяется подалгебра Картана, базис Картана–Вейля, а также строятся корневая и весовая диаграммы. Приводится массовая формула, непосредственно связанная с каждым узлом весовой диаграммы. Аналогичное рассмотрение для подалгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ проводится в п. 3 и 4. По результатам проведённого анализа корневой структуры подалгебр ($\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$) в п. 5 строится корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$. Весовая диаграмма ($\mathrm{SO}(4,2)$-башня) алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ определяется в п. 6. Показывается, что весовые диаграммы алгебр Ли второго ранга $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ являются проекциями $\mathrm{SO}(4,2)$-башни на координатные плоскости, образованные генераторами Картана алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Приводится массовая формула, непосредственно связанная с каждым узлом $\mathrm{SO}(4,2)$-башни.

2. Подалгебра $\mathfrak{so}(3,1)$

Подгруппа Лоренца $\mathrm{SO}(3,1)$ в рамках конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$ в представлении Барута (см. пп. 3.1 в [5]) может быть образована двумя группами генераторов: L_1, L_2, L_3, B_1, B_2, B_3 или L_1, L_2, L_3, Γ_1, Γ_2, Γ_3. Возьмём первую группу. Коммутационные соотношения имеют вид

$$\left.\begin{array}{lll}
[\mathsf{L}_1,\mathsf{L}_2]=-i\mathsf{L}_3, & [\mathsf{L}_2,\mathsf{L}_3]=-i\mathsf{L}_1, & [\mathsf{L}_3,\mathsf{L}_1]=-i\mathsf{L}_2,\\
[\mathsf{B}_1,\mathsf{B}_2]=i\mathsf{L}_3, & [\mathsf{B}_2,\mathsf{B}_3]=i\mathsf{L}_1, & [\mathsf{B}_3,\mathsf{B}_1]=i\mathsf{L}_2,\\
[\mathsf{L}_1,\mathsf{B}_1]=0, & [\mathsf{L}_2,\mathsf{B}_2]=0, & [\mathsf{L}_3,\mathsf{B}_3]=0,\\
[\mathsf{L}_1,\mathsf{B}_2]=-i\mathsf{B}_3, & [\mathsf{L}_1,\mathsf{B}_3]=i\mathsf{B}_2, & \\
[\mathsf{L}_2,\mathsf{B}_3]=-i\mathsf{B}_1, & [\mathsf{L}_2,\mathsf{B}_1]=i\mathsf{B}_3, & \\
[\mathsf{L}_3,\mathsf{B}_1]=-i\mathsf{B}_2, & [\mathsf{L}_3,\mathsf{B}_2]=i\mathsf{B}_1. &
\end{array}\right\} \tag{1}$$

Генераторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{B}$ образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(3,1)\simeq\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Введём следующие линейные комбинации:

$$\mathbf{X}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}+i\mathbf{B}\right),\quad \mathbf{Y}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{L}-i\mathbf{B}\right). \tag{2}$$

Тогда

$$\begin{array}{lll}
[\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2]=-i\mathsf{X}_3, & [\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3]=-i\mathsf{X}_1, & [\mathsf{X}_3,\mathsf{X}_1]=-i\mathsf{X}_2,\\
[\mathsf{Y}_1,\mathsf{Y}_2]=-i\mathsf{Y}_3, & [\mathsf{Y}_2,\mathsf{Y}_3]=-i\mathsf{Y}_1, & [\mathsf{Y}_3,\mathsf{Y}_1]=-i\mathsf{Y}_2,
\end{array}$$
$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=0.$$

Отсюда следует, что генераторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ изоморфна прямой сумме (так называемый «унитарный трюк» Вейля, см. [10, p. 28])

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\simeq\mathfrak{su}(2)\oplus i\mathfrak{su}(2). \tag{3}$$

Определим теперь *подалгебру Картана* $\mathfrak{K}$ и соответствующую *диаграмму Вейля* для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. С этой целью необходимо перейти от базиса комплексной оболочки $\{\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2,\mathsf{X}_3,\mathsf{Y}_1,\mathsf{Y}_2,\mathsf{Y}_3\}$ к *базису Картана–Вейля*. Первым шагом является определение максимального подмножества взаимно коммутирующих генераторов алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Поскольку в прямой сумме (3) каждая подалгебра $\mathfrak{su}(2)$ является алгеброй Ли ранга 1, то естественно ожидать, что алгебра $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ содержит не более двух коммутирующих генераторов. Из девяти возможных пар коммутирующих генераторов $\{\mathsf{X}_i,\mathsf{Y}_j\}$ $(i,j=1,2,3)$ выберем пару $\{\mathsf{X}_3,\mathsf{Y}_3\}$, удовлетворяющую условию $[\mathbf{H}_i,\mathbf{H}_j]=0$ (см. формулу (1) в [5]), т. е.

$$[\mathsf{X}_3,\mathsf{Y}_3]=0. \tag{4}$$

Множество $\{\mathsf{X}_3,\mathsf{Y}_3\}$ образует подалгебру Картана $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. X_3 и Y_3 – *генераторы Картана*, а размерность подалгебры $\mathfrak{K}$, равная 2, определяет *ранг* алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Далее, с целью определить *генераторы Вейля* из оставшихся генераторов $\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2$, Y_1, Y_2 образуем следующие линейные комбинации (*повышающие* и *понижающие* операторы):

$$\left.\begin{array}{l}\mathsf{X}_+ = \mathsf{X}_1 + i\mathsf{X}_2, \quad \mathsf{X}_- = \mathsf{X}_1 - i\mathsf{X}_2, \\ \mathsf{Y}_+ = \mathsf{Y}_1 + i\mathsf{Y}_2, \quad \mathsf{Y}_- = \mathsf{Y}_1 - i\mathsf{Y}_2.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Четыре генератора Вейля (5), наряду с двумя генераторами Картана X_3 и Y_3, составляют *базис Картана–Вейля* алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:

$$\{\mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_3, \mathsf{X}_+, \mathsf{X}_-, \mathsf{Y}_+, \mathsf{Y}_-\}.$$

Генераторы Вейля $\mathbf{E}_\alpha = \{\mathsf{X}_\pm, \mathsf{Y}_\pm\}$ и генераторы $\mathbf{H}_i = \{\mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_3\}$ подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (2) и (3) в [5], где $\forall i, j = 1, 2;\ \alpha = 1 \rightarrow 4$:

$$[\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_+] = -\mathsf{X}_+, \quad [\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_-] = \mathsf{X}_-, \quad [\mathsf{X}_+, \mathsf{X}_-] = -2\mathsf{X}_3, \tag{6}$$

$$[\mathsf{Y}_3, \mathsf{Y}_+] = -\mathsf{Y}_+, \quad [\mathsf{Y}_3, \mathsf{Y}_-] = \mathsf{Y}_-, \quad [\mathsf{Y}_+, \mathsf{Y}_-] = -2\mathsf{Y}_3. \tag{7}$$

В этом случае коммутатор $[\mathbf{E}_\alpha, \mathbf{E}_{-\alpha}] = [\mathsf{X}_+, \mathsf{X}_-]$ даёт корни ± 2. Таким образом, в согласии с формулой (4) в [5] имеем четыре различных корня: $\alpha = \pm 1,\ \pm 2$.

Поскольку $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ является алгеброй Ли ранга 2, то из теоремы Рака́ (см. [5]) следует, что существуют два независимых *инварианта Казимира* $\mathbf{C}_\mu$, которые коммутируют со всеми генераторами алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, включая два элемента Картана $\mathbf{H}_i$:

$$[\mathbf{C}_\mu, \mathbf{H}_i] = 0, \quad \forall \mu = 1 \rightarrow 2;\ i = 1 \rightarrow 2. \tag{8}$$

Инварианты Казимира для алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_1 &\equiv \mathbf{X}^2 = \mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2 + \mathsf{X}_3^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + 2i\mathbf{AB}\right), \\ \mathbf{C}_2 &\equiv \mathbf{Y}^2 = \mathsf{Y}_1^2 + \mathsf{Y}_2^2 + \mathsf{Y}_3^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 - 2i\mathbf{AB}\right).\end{aligned}$$

В рамках комплексной оболочки алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ эти инварианты, более известные как *операторы Лапласа–Бельтрами*, приводят к дифференциальным уравнениям класса Фукса для гиперсферических функций (см. [11]). Операторы Лапласа–Бельтрами содержат операторы Казимира $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ и $\mathbf{AB}$ группы Лоренца как части комплекснозначной функции.

В силу (4) и (8) в собственном подпространстве H_E оператора энергии H определено полное множество состояний, которые одновременно являются собственными состояниями операторов $\mathbf{X}^2$, $\mathbf{Y}^2$, X_3 и Y_3. Составим кет-вектор $\left|l, \dot{l}; m, \dot{m}\right\rangle$. Следует отметить, что l и $\dot{l}$ не являются квантовыми числами, а только *задают* их, настоящими квантовыми числами, т. е. собственными значениями операторов Казимира $\mathbf{X}^2$ и $\mathbf{Y}^2$, являются $l(l+1)$ и $\dot{l}(\dot{l}+1)$ согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^2 \left|l, \dot{l}; m, \dot{m}\right\rangle &= l(l+1)\left|l, \dot{l}; m, \dot{m}\right\rangle, \\ \mathbf{Y}^2 \left|l, \dot{l}; m, \dot{m}\right\rangle &= \dot{l}(\dot{l}+1)\left|l, \dot{l}; m, \dot{m}\right\rangle,\end{aligned}$$

где $l, \dot{l} \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$. Каждое подпространство H_E имеет размерность $(2l+1)(2\dot{l}+1)$, откуда следует, что

$$\mathsf{X}_3 \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle = m \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle, \tag{9}$$

$$\mathsf{Y}_3 \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle = \dot{m} \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \tag{10}$$

с $m \in \{-l, -l+1, \ldots, l-1, l\}$ и $\dot{m} \in \left\{-\dot{l}, -\dot{l}+1, \ldots, \dot{l}-1, \dot{l}\right\}$. Собственные значения m и $\dot{m}$ являются *весами* генераторов Картана X_3 и Y_3.

В основе построения *диаграммы Вейля* группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ лежит подалгебра Картана $\mathfrak{K} = \{\mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_3\}$, где генераторы X_3 и Y_3 образуют базис двумерной ортогональной системы координат. На этих диаграммах веса m и $\dot{m}$ используются в качестве координат для построения каждого состояния $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-мультиплета в плоскости $(\mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_3)$, т. е. они образуют компоненты двумерного *весового вектора* $\boldsymbol{h} = (m, \dot{m})$, который выходит из начала системы координат до состояния $\left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle$. Генераторы Вейля $\mathbf{E}_\alpha = \{\mathsf{X}_\pm, \mathsf{Y}_\pm\}$ позволяют нам перемещаться между состояниями $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$-мультиплета, сдвигая собственные значения m и $\dot{m}$ любого кет-вектора $\left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle$ на величину, которая задаётся корнями α_1 и α_2 этого генератора Вейля относительно генераторов Картана X_3 и Y_3:

$$\mathbf{E}_\alpha \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m+\alpha_1, \dot{m}+\alpha_2 \right\rangle.$$

В качестве примера рассмотрим действие генератора X_+ на состояние $\left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle$. В силу $[\mathbf{H}_i, \mathbf{E}_\alpha] = \alpha_i \mathbf{E}_\alpha$, (6) и (9) получим

$$\begin{aligned} \mathsf{X}_3\mathsf{X}_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle &= ([\mathsf{X}_3, \mathsf{X}_+] + \mathsf{X}_+\mathsf{X}_3) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= (\mathsf{X}_+ + m\mathsf{X}_+) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= (m+1)\, \mathsf{X}_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, X_+ повышает собственное значение m на величину $+1$, которая равна корню генератора X_+ относительно генератора Картана X_3 согласно (6). Аналогично, используя (10), получим

$$\begin{aligned} \mathsf{Y}_3\mathsf{X}_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle &= ([\mathsf{Y}_3, \mathsf{X}_+] + \mathsf{X}_+\mathsf{Y}_3) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= (0 + \dot{m}\mathsf{X}_+) \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \\ &= \dot{m}\mathsf{X}_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle, \end{aligned}$$

где генератор X_+ оставляет собственное значение $\dot{m}$ неизменным. Следовательно,

$$\mathsf{X}_+ \left| l, \dot{l}; m, \dot{m} \right\rangle \longrightarrow \left| l, \dot{l}; m+1, \dot{m} \right\rangle.$$

Действия остальных трёх генераторов Вейля определяются аналогично:

$$\mathsf{X}_- \left|l,\dot{l};m,\dot{m}\right\rangle \longrightarrow \left|l,\dot{l};m-1,\dot{m}\right\rangle,$$

$$\mathsf{Y}_+ \left|l,\dot{l};m,\dot{m}\right\rangle \longrightarrow \left|l,\dot{l};m,\dot{m}+1\right\rangle,$$

$$\mathsf{Y}_- \left|l,\dot{l};m,\dot{m}\right\rangle \longrightarrow \left|l,\dot{l};m,\dot{m}-1\right\rangle.$$

Покажем графически действия генераторов E_α на *корневой диаграмме*. С этой целью возьмём корни α_1 и α_2 каждого элемента Вейля E_α в качестве компонент двумерного *корневого вектора* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ и поместим их в двумерное *весовое пространство*, образованное плоскостью $(\mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_3)$. Это даёт корневую диаграмму алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, как показано на рис. 1, где для простоты мы обозначили различные корневые векторы $\boldsymbol{\alpha}$ соответствующим символом генератора Вейля E_α.

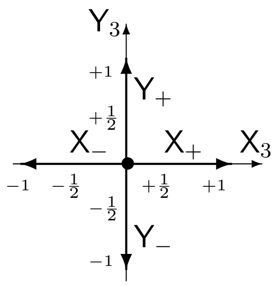

Рис. 1. Корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Действие каждого генератора Вейля показано в $(\mathsf{X}_3, \mathsf{Y}_3)$-плоскости

Очевидно, что генераторы X_- и X_+ (корни $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = +1$) позволяют перемещаться на один шаг *влево* и *вправо* соответственно, в то время как перемещения *вверх* и *вниз* задаются генераторами Y_+ и Y_-. Таким образом, состояния $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-мультиплета переводятся друг в друга посредством повторного действия этих лестничных операторов. С генераторами алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, расположенными на рис. 1, сразу становится очевидным, что они соответствуют двум разным многообразиям: генераторы X_3, X_+ и X_- (образующие первую подалгебру $\mathfrak{su}(2)$ в (3)) соответствуют многообразию $(1,0)$, тогда как генераторы Y_3, Y_+ и Y_- (вторая подалгебра $i\mathfrak{su}(2)$), как видно, образуют многообразие $(0,1)$ на весовой диаграмме. Диаграммы Вейля для первых трёх $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-мультиплетов показаны на рис. 2.

Расширенная диаграмма Вейля для $(l,\dot{l})$-многообразия представлена на рис. 3. С каждым узлом весовой диаграммы ассоциирована массовая формула [12]

$$m = 2m_e \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(\dot{l} + \frac{1}{2}\right), \tag{11}$$

где m_e – масса покоя электрона. Формула (11) описывает спектр масс элементарных частиц с точностью до 0,41 % (см. [13–16]). Решения релятивистских волновых уравнений [17–19] для произвольных спиновых цепочек ($(l,\dot{l})$-многообразий весовой диаграммы на рис. 3) определяются в виде рядов по гиперсферическим функциям на группе Лоренца [11].

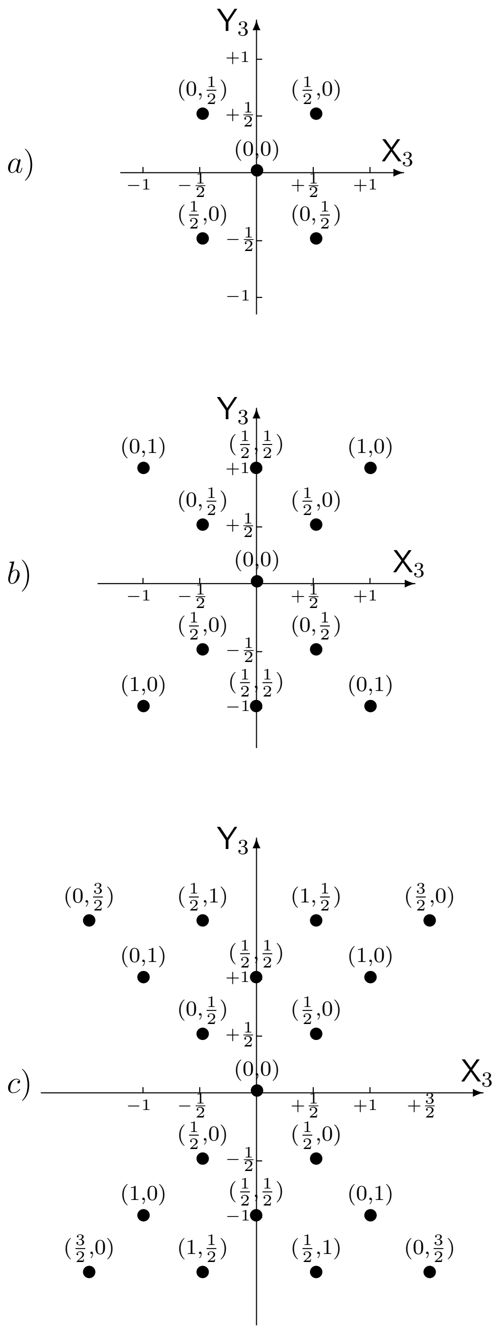

Рис. 2. Первые три весовые диаграммы (диаграммы Вейля) алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$:
a) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-мультиплет; b) $(1,1)$-мульиплет; c) $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$-мультиплет

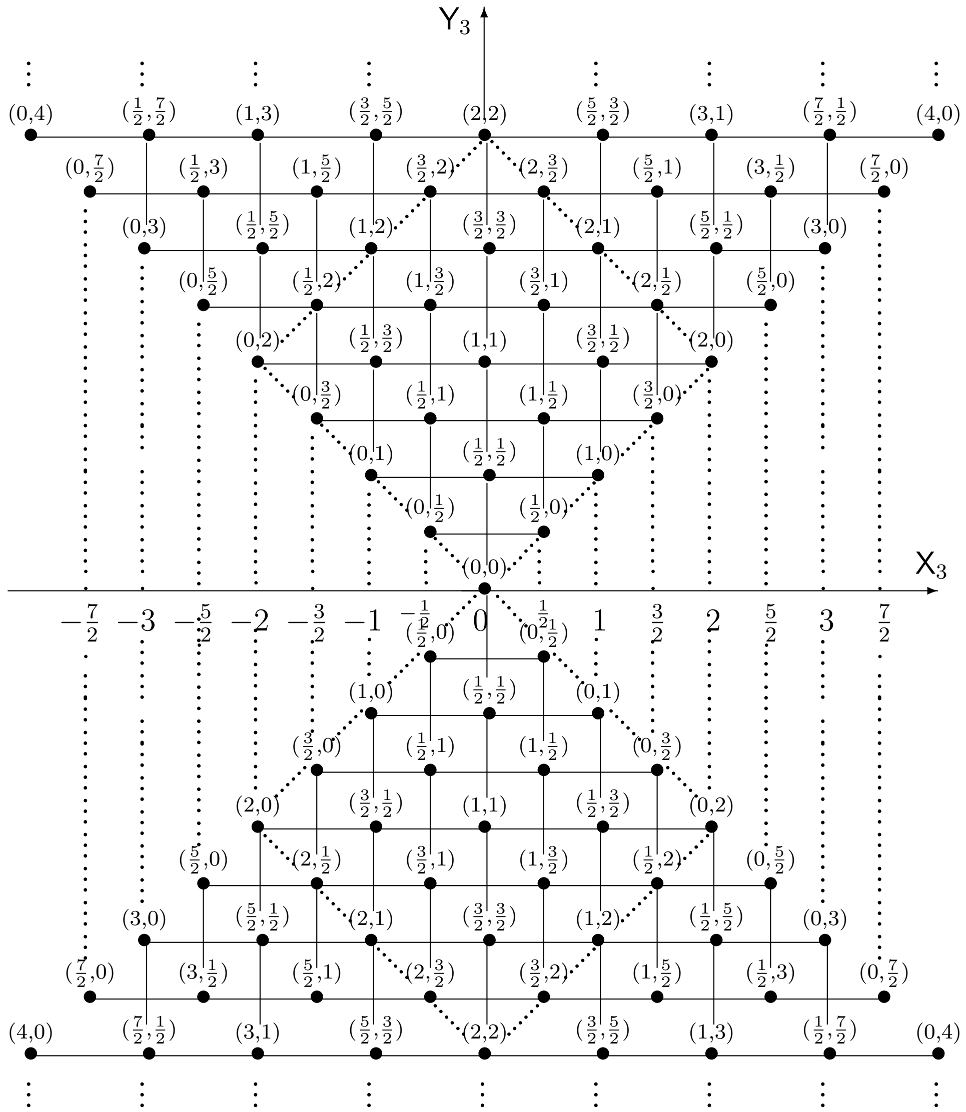

Рис. 3. Расширенная диаграмма Вейля алгебры $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. С каждым узлом $(l,\dot{l})$ диаграммы ассоциировано состояние, масса которого определяется формулой (11)

3. Подалгебра $\mathfrak{so}(4)$

Для каждого генератора подалгебры $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{so}(4,2)$ существуют шесть генераторов, которые не имеют с ним общих индексов. Например, для L_{56} ($\boldsymbol{\Delta}_3$) этими генераторами являются L_{12}, L_{23}, L_{31}, L_{14}, L_{24} и L_{34}. В силу перестановочных соотношений для алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$ (см. формулу (6) в [5]) все эти генераторы коммутируют с L_{56} и, следовательно, могут быть позиционированы в горизонтальной плоскости корневой диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Они соответствуют компонентам L_i и A_i вектора углового момента $\mathbf{L}$ и вектора Лапласа–Рунге–Ленца $\mathbf{A}$.

Вводя линейные комбинации

$$\mathsf{K}_1=1/2\left(\mathsf{L}_{23}+\mathsf{L}_{14}\right),\quad \mathsf{K}_2=1/2\left(\mathsf{L}_{31}+\mathsf{L}_{24}\right),\quad \mathsf{K}_3=1/2\left(\mathsf{L}_{12}+\mathsf{L}_{34}\right),\tag{12}$$

$$\mathsf{J}_1=1/2\left(\mathsf{L}_{23}-\mathsf{L}_{14}\right),\quad \mathsf{J}_2=1/2\left(\mathsf{L}_{31}-\mathsf{L}_{24}\right),\quad \mathsf{J}_3=1/2\left(\mathsf{L}_{12}-\mathsf{L}_{34}\right)\tag{13}$$

(см. генераторы (8) и (9) базиса Яо в [5]), получим

$$[\mathsf{K}, \mathsf{J}] = 0,$$

а также

$$[\mathsf{K}_i, \mathsf{K}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathsf{K}_k, \quad [\mathsf{J}_i, \mathsf{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\mathsf{J}_k.$$

Откуда следует, что генераторы K и J образуют базисы двух независимых алгебр $\mathfrak{so}(3)$. Таким образом, алгебра Ли $\mathfrak{so}(4)$ группы $\mathrm{SO}(4)$ изоморфна прямой сумме

$$\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \tag{14}$$

Соответственно, это значит, что группа $\mathrm{SO}(4)$ изоморфна прямому произведению $\mathrm{SO}(3) \otimes \mathrm{SO}(3)$.

Легко видеть, что генераторы K_3 и J_3 образуют подалгебру Картана алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{so}(4)} = \{\mathsf{K}_3, \mathsf{J}_3\}$. Из оставшихся генераторов в (12), (13) составим четыре генератора Вейля

$$\mathsf{K}_+ = \mathsf{K}_1 + i\mathsf{K}_2, \quad \mathsf{K}_- = \mathsf{K}_1 - i\mathsf{K}_2,$$

$$\mathsf{J}_+ = \mathsf{J}_1 + i\mathsf{J}_2, \quad \mathsf{J}_- = \mathsf{J}_1 - i\mathsf{J}_2,$$

Тогда базис Картана–Вейля подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ примет вид

$$\{\mathsf{K}_3, \mathsf{J}_3, \mathsf{K}_+, \mathsf{K}_-, \mathsf{J}_+, \mathsf{J}_-\}. \tag{15}$$

Генераторы базиса (15) удовлетворяют соотношениям

$$[\mathsf{K}_3, \mathsf{K}_+] = \mathsf{K}_+, \quad [\mathsf{K}_3, \mathsf{K}_-] = -\mathsf{K}_-, \quad [\mathsf{K}_+, \mathsf{K}_-] = 2\mathsf{K}_3,$$

$$[\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_+] = \mathsf{J}_+, \quad [\mathsf{J}_3, \mathsf{J}_-] = -\mathsf{J}_-, \quad [\mathsf{J}_+, \mathsf{J}_-] = 2\mathsf{J}_3,$$

$$[\mathsf{K}_i, \mathsf{J}_j] = 0 \quad (i, j = +, -, 3). \tag{16}$$

Из соотношений (16) следует, что корневая структура генераторов $\mathsf{K}_\pm$ и $\mathsf{J}_\pm$ аналогична корневой структуре генераторов Вейля $\mathsf{X}_\pm$ и $\mathsf{Y}_\pm$ подалгебры $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Корневая диаграмма подалгебры $\mathfrak{so}(4)$ представлена на рис. 4. Соответствующая весовая

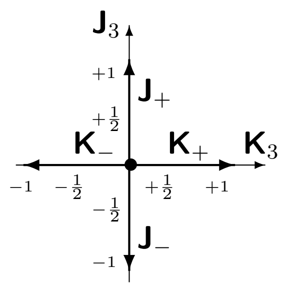

Рис. 4. Корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$. Действие каждого генератора Вейля показано в $(\mathsf{K}_3, \mathsf{J}_3)$-плоскости

диаграмма аналогична диаграмме на рис. 3 с заменой генераторов Картана X_3 и Y_3 на K_3 и J_3.

4. Подалгебра $\mathfrak{so}(2,2)$

Для следующего генератора L_{34} (A_3), входящего в подалгебру $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4,2)$, имеем шесть генераторов $\mathsf{L}_{12}, \mathsf{L}_{15}, \mathsf{L}_{25}, \mathsf{L}_{16}, \mathsf{L}_{26}, \mathsf{L}_{56}$, у которых нет с L_{34} общих индексов. Эти генераторы соответствуют «водородным операторам» $\mathsf{L}_3, \mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_3$ и тем самым могут быть позиционированы в плоскости (L_3,Δ_3). Эти шесть генераторов образуют линейные комбинации базиса Яо:

$$\mathsf{T}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{15} - \mathsf{L}_{26}\right), \quad \mathsf{T}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{25} - \mathsf{L}_{16}\right), \quad \mathsf{T}_0 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{56}\right), \tag{17}$$

$$\mathsf{S}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{15} + \mathsf{L}_{26}\right), \quad \mathsf{S}_2 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{25} - \mathsf{L}_{16}\right), \quad \mathsf{S}_0 = 1/2\left(\mathsf{L}_{12} - \mathsf{L}_{56}\right) \tag{18}$$

(см. формулы (10) и (11) в [5]). Легко видеть, что компоненты генераторов T и S взаимно коммутируют,

$$[\mathsf{T}, \mathsf{S}] = 0. \tag{19}$$

При этом компоненты T образуют алгебру Ли $\mathfrak{so}(2,1)$:

$$[\mathsf{T}_1, \mathsf{T}_2] = i\mathsf{T}_0, \quad [\mathsf{T}_2, \mathsf{T}_0] = -i\mathsf{T}_1, \quad [\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_1] = -i\mathsf{T}_2.$$

Аналогично для S:

$$[\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2] = i\mathsf{S}_0, \quad [\mathsf{S}_2, \mathsf{S}_0] = -i\mathsf{S}_1, \quad [\mathsf{S}_0, \mathsf{S}_1] = -i\mathsf{S}_2.$$

В силу (19) обе алгебры полностью разделены. По аналогии с алгеброй $\mathfrak{so}(4)$ (плоскость (L_3,A_3)), которая допускает разложение в прямую сумму двух алгебр $\mathfrak{su}(2)$, в данном случае получим алгебру Ли $\mathfrak{so}(2,2)$, которая локально изоморфна прямой сумме двух алгебр $\mathfrak{so}(2,1)$:

$$\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{so}(2,1).$$

В силу этой аналогии корневая диаграмма для алгебры $\mathfrak{so}(2,2)$ будет подобна диаграмме для $\mathfrak{so}(4)$ на рис. 4. Далее, два коммутирующих генератора T_0 и S_0 могут быть взяты в качестве базиса $\{\mathsf{T}_0, \mathsf{S}_0\}$ для подалгебры Картана $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(2,2)$. Из оставшихся генераторов T_1, T_2, S_1 и S_2 сформируем следующие линейные комбинации:

$$\mathsf{T}_+ = \mathsf{T}_1 + i\mathsf{T}_2, \quad \mathsf{T}_- = \mathsf{T}_1 - i\mathsf{T}_2,$$

$$\mathsf{S}_+ = \mathsf{S}_1 + i\mathsf{S}_2, \quad \mathsf{S}_- = \mathsf{S}_1 - i\mathsf{S}_2,$$

которые образуют линейно независимое множество *генераторов Вейля* алгебры $\mathfrak{so}(2,2)$. Таким образом, базис Картана–Вейля подалгебры $\mathfrak{so}(2,2)$ имеет вид

$$\left\{\mathsf{T}_0, \mathsf{S}_0, \mathsf{T}_+, \mathsf{T}_-, \mathsf{S}_+, \mathsf{S}_-\right\}. \tag{20}$$

Генераторы базиса (20) удовлетворяют соотношениям

$$[\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_+] = -\mathsf{T}_+, \quad [\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_-] = \mathsf{T}_-, \quad [\mathsf{T}_+, \mathsf{T}_-] = -2\mathsf{T}_0,$$

$$[\mathsf{S}_0, \mathsf{S}_+] = -\mathsf{S}_+, \quad [\mathsf{S}_0, \mathsf{S}_-] = \mathsf{S}_-, \quad [\mathsf{S}_+, \mathsf{S}_-] = -2\mathsf{S}_0,$$

$$[\mathsf{T}_i, \mathsf{S}_j] = 0 \quad (i, j = +, -, 0).$$

Корни генераторов Вейля $\mathsf{T}_\pm$, $\mathsf{S}_\pm$ образуют компоненты 2-мерного корневого вектора $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, который может быть позиционирован в 2-мерном весовом пространстве, образованным плоскостью $(\mathsf{T}_0, \mathsf{S}_0)$. Для данной реализации подалгебры $\mathfrak{so}(2,2)$ корневые векторы имеют вид

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{T}_+) = (1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{T}_-) = (-1, 0),$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{S}_+) = (0, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{S}_-) = (0, -1).$$

Легко видеть, что корневая и весовая диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(2,2)$ аналогичны соответствующим диаграммам алгебр $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{so}(4)$ (см. рис. 1–4).

В свою очередь, с L_{12} (L_3) не имеют общих индексов следующие элементы: L_{34}, L_{35}, L_{36}, L_{45}, L_{46} и L_{56}, соответствующие генераторам A_3, B_3, Γ_3, Δ_2, Δ_1 и Δ_3. Поскольку все эти генераторы коммутируют с L_3, все они могут быть позиционированы в (A_3, Δ_3)-плоскости. Эти генераторы образуют линейные комбинации

$$\mathsf{P}_1 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{35} - \mathsf{L}_{46}\right), \quad \mathsf{P}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{45} - \mathsf{L}_{36}\right), \quad \mathsf{P}_0 = 1/2\left(-\mathsf{L}_{34} - \mathsf{L}_{56}\right), \tag{21}$$

$$\mathsf{Q}_1 = 1/2\left(\mathsf{L}_{35} - \mathsf{L}_{46}\right), \quad \mathsf{Q}_2 = 1/2\left(\mathsf{L}_{45} + \mathsf{L}_{36}\right), \quad \mathsf{Q}_0 = 1/2\left(\mathsf{L}_{34} - \mathsf{L}_{56}\right) \tag{22}$$

(см. генераторы (12) и (13) базиса Яо в [5]). Легко проверить, что

$$[\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2] = i\mathsf{P}_0, \quad [\mathsf{P}_2, \mathsf{P}_0] = -i\mathsf{P}_1, \quad [\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1] = -i\mathsf{P}_2,$$

$$[\mathsf{Q}_1, \mathsf{Q}_2] = i\mathsf{Q}_0, \quad [\mathsf{Q}_2, \mathsf{Q}_0] = -i\mathsf{Q}_1, \quad [\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_1] = -i\mathsf{Q}_2,$$
$$[\mathsf{P}_i, \mathsf{Q}_j] = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2).$$

Отсюда следует, что генераторы P_i и Q_i взаимно коммутируют и образуют две независимые алгебры Ли $\mathfrak{so}(2,1)$. Как и в предыдущем случае (плоскость (L_3, Δ_3)), имеем изоморфизм $\mathfrak{so}(2,2) \simeq \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{so}(2,1)$. В свою очередь, для плоскости (A_3, Δ_3) имеем два генератора Картана P_0 и Q_0, образующих базис $\{\mathsf{P}_0, \mathsf{Q}_0\}$ подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(2,2)$.

Далее, из оставшихся генераторов P_1, P_2, Q_1 и Q_2 образуем следующие линейные комбинации:

$$\mathsf{P}_+ = \mathsf{P}_1 + i\mathsf{P}_2, \quad \mathsf{P}_- = \mathsf{P}_1 - i\mathsf{P}_2,$$

$$\mathsf{Q}_+ = \mathsf{Q}_1 + i\mathsf{Q}_2, \quad \mathsf{Q}_- = \mathsf{Q}_1 - i\mathsf{Q}_2,$$

определяющие генераторы Вейля для данной реализации алгебры $\mathfrak{so}(2,2)$ (плоскость (A_3, Δ_3)). Базис Картана–Вейля в этом случае имеет вид

$$\left\{\mathsf{P}_0, \mathsf{Q}_0, \mathsf{P}_+, \mathsf{P}_-, \mathsf{Q}_+, \mathsf{Q}_-\right\}. \tag{23}$$

Как и в предыдущем случае, генераторы базиса (23) удовлетворяют соотношениям

$$[\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_+] = -\mathsf{P}_+, \quad [\mathsf{P}_0, \mathsf{P}_-] = \mathsf{P}_-, \quad [\mathsf{P}_+, \mathsf{T}_-] = -2\mathsf{P}_0,$$

$$[\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_+] = -\mathsf{Q}_+, \quad [\mathsf{Q}_0, \mathsf{Q}_-] = \mathsf{Q}_-, \quad [\mathsf{Q}_+, \mathsf{Q}_-] = -2\mathsf{Q}_0,$$

$$[\mathsf{P}_i, \mathsf{Q}_j] = 0 \quad (i, j = +, -, 0).$$

Откуда для корневых векторов в плоскости $(\mathsf{P}_0, \mathsf{Q}_0)$ получим

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{P}_+) = (1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{P}_-) = (-1, 0),$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{Q}_+) = (0, 1), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{Q}_-) = (0, -1).$$

Соответствующая корневая структура тождественна предыдущей реализации алгебры $\mathfrak{so}(2,2)$ с заменой генераторов T_0, S_0, $\mathsf{T}_\pm$, $\mathsf{S}_\pm$ на P_0, Q_0, $\mathsf{P}_\pm$, $\mathsf{Q}_\pm$.

5. Корневая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$

Проведённый выше анализ корневой структуры подалгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ в каждой из ортогональных плоскостей $(\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3)$, (L_3, Δ_3) и (A_3, Δ_3) позволяет теперь собрать вместе все результаты и построить *корневую диаграмму* для алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$.

Полное число генераторов подалгебр $\mathfrak{so}(4)$ и $\mathfrak{so}(2,2)$ равно 18. Однако генераторы K_3, J_3, T_0, S_0, P_0 и Q_0 не являются линейно независимыми, поскольку удовлетворяют соотношениям

$$\mathsf{J}_3 - \mathsf{K}_3 = \mathsf{P}_0 - \mathsf{Q}_0, \quad \mathsf{J}_3 + \mathsf{K}_3 = \mathsf{S}_0 - \mathsf{T}_0, \quad \mathsf{P}_0 + \mathsf{Q}_0 = \mathsf{S}_0 + \mathsf{T}_0. \tag{24}$$

Следовательно, совокупность 18 генераторов задаёт избыточную систему, из которой можно получить базис алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$, исключив три генератора L_3, A_3, Δ_3 с помощью (24). Это сводит число генераторов до 15, как и должно быть для алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$.

Как уже отмечалось выше, три коммутирующих генератора L_3, A_3 и Δ_3 являются *генераторами Картана* подалгебры $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{so}(4,2)$, $\mathfrak{K} = \{\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3, \Delta_3\}$. Они образуют базис трёхмерной ортогональной системы и располагаются в начале координат корневой диаграммы. Наряду с оставшимися 12 *генераторами Вейля* $\mathsf{K}_\pm$, $\mathsf{J}_\pm$, $\mathsf{T}_\pm$, $\mathsf{S}_\pm$, $\mathsf{P}_\pm$, $\mathsf{Q}_\pm$ они образуют *базис Картана–Вейля* для алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$:

$$\{\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3, \Delta_3, \mathsf{K}_+, \mathsf{K}_-, \mathsf{J}_+, \mathsf{J}_-, \mathsf{T}_+, \mathsf{T}_-, \mathsf{S}_+, \mathsf{S}_-, \mathsf{P}_+, \mathsf{P}_-, \mathsf{Q}_+, \mathsf{Q}_-\}.$$

Пусть общими символами H_i $(i = 1 \rightarrow 3)$ и E_α $(\alpha = 1 \rightarrow 12)$ обозначены различные генераторы Картана и Вейля алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. В порядке расположения различных генераторов E_α на корневой диаграмме *корни* α_i каждого E_i должны определяться относительно трёх генераторов Картана согласно общему определению

$$[\mathsf{H}_i, \mathsf{E}_\alpha] = \alpha_i \mathsf{E}_\alpha, \quad \forall i = 1, 2;\ \alpha = 1 \rightarrow 4.$$

В предыдущих параграфах корни определялись относительно K_3, J_3, T_0, S_0 и P_0, Q_0, а не относительно L_3, A_3 и Δ_3. Следовательно, новые *корневые векторы* имеют вид

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{K}_+) = (+1, +1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{S}_+) = (+1, 0, +1), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{P}_+) = (0, +1, +1),$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{K}_-) = (-1, -1, 0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{S}_-) = (-1, 0, -1), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{P}_-) = (0, -1, -1),$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha}(\mathsf{J}_+) = (+1,-1,0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{T}_+) = (+1,0,-1), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{Q}_+) = (0,+1,-1),\\ \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{J}_-) = (-1,+1,0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{T}_-) = (-1,0,+1), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{Q}_-) = (0,-1,+1),\\ \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{L}_3) = (0,0,0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\mathsf{A}_3) = (0,0,0), \quad \boldsymbol{\alpha}(\Delta_3) = (0,0,0).\end{gathered}$$

Очевидно, что четыре генератора K_+, K_-, J_+, J_- приводят к корневой диаграмме алгебры $\mathfrak{so}(4)$ с вершинными точками $(\pm1,\pm1)$ в $(\mathsf{L}_3,\mathsf{A}_3)$-плоскости (соответственно $(\mathsf{K}_3,\mathsf{J}_3)$-плоскости). Аналогично генераторы T_+, T_-, S_+, S_- и P_+, P_-, Q_+, Q_- приводят к подобным корневым диаграммам алгебр $\mathfrak{so}(2,2)$ в плоскостях (L_3,Δ_3) (соответственно $(\mathsf{T}_0,\mathsf{S}_0)$) и (A_3,Δ_3) (соответственно $(\mathsf{P}_0,\mathsf{Q}_0)$).

Таким образом, представление 15 генераторов на корневой диаграмме алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$ состоит из трёх генераторов Картана и трёх квадратов в трёх перпендикулярных плоскостях, образованных генераторами Вейля. На Рис. 5 для наглядности вершины этих трёх квадратов совмещены с осями $\mathsf{X} = \mathsf{K}_3 - \mathsf{T}_0 + \mathsf{P}_0 \to \mathsf{L}_3$, $\mathsf{Y} = -\mathsf{J}_3 - \mathsf{P}_0 + \mathsf{S}_0 \to \mathsf{A}_3$, $\mathsf{Z} = -\mathsf{S}_0 - \mathsf{Q}_0 + \mathsf{K}_3 \to \Delta_3$. При повороте на 45° относительно друг друга эти вершины (генераторы Вейля) образуют *кубоктаэдр* (см. [7, 20]).

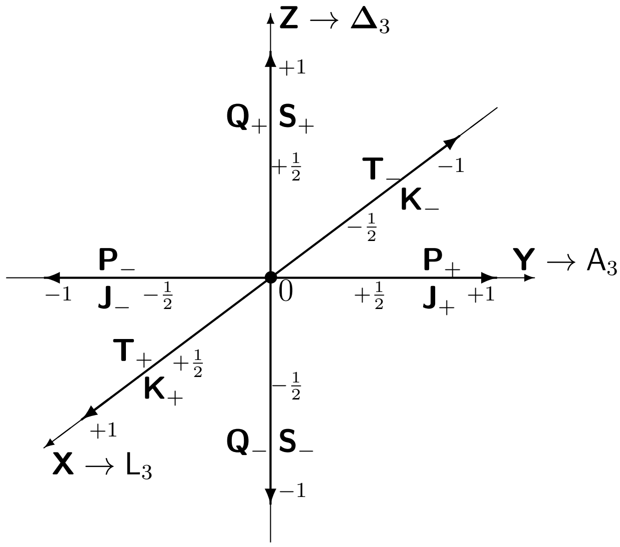

Рис. 5. Корневая диаграмма алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$

6. Весовая диаграмма алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$

Перейдём к построению *весовой диаграммы* алгебры $\mathfrak{so}(4,2)$. Весовое пространство определяется тремя генераторами Картана L_3, A_3 и Δ_3, которые служат базисом трёхмерной ортогональной системы координат. Горизонтальная плоскость, образованная генераторами L_3 и A_3, включает различные $\mathrm{SO}(4)$-многообразия. В п. 3 эти многообразия определяются относительно генераторов K_3 и J_3, которые в настоящей диаграмме соответствуют диагональным направлениям в силу их определения, следующего из (12), (13):

$$\mathsf{K}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathsf{L}_3 + \mathsf{A}_3\right), \quad \mathsf{J}_3 = \frac{1}{2}\left(\mathsf{L}_3 - \mathsf{A}_3\right).$$

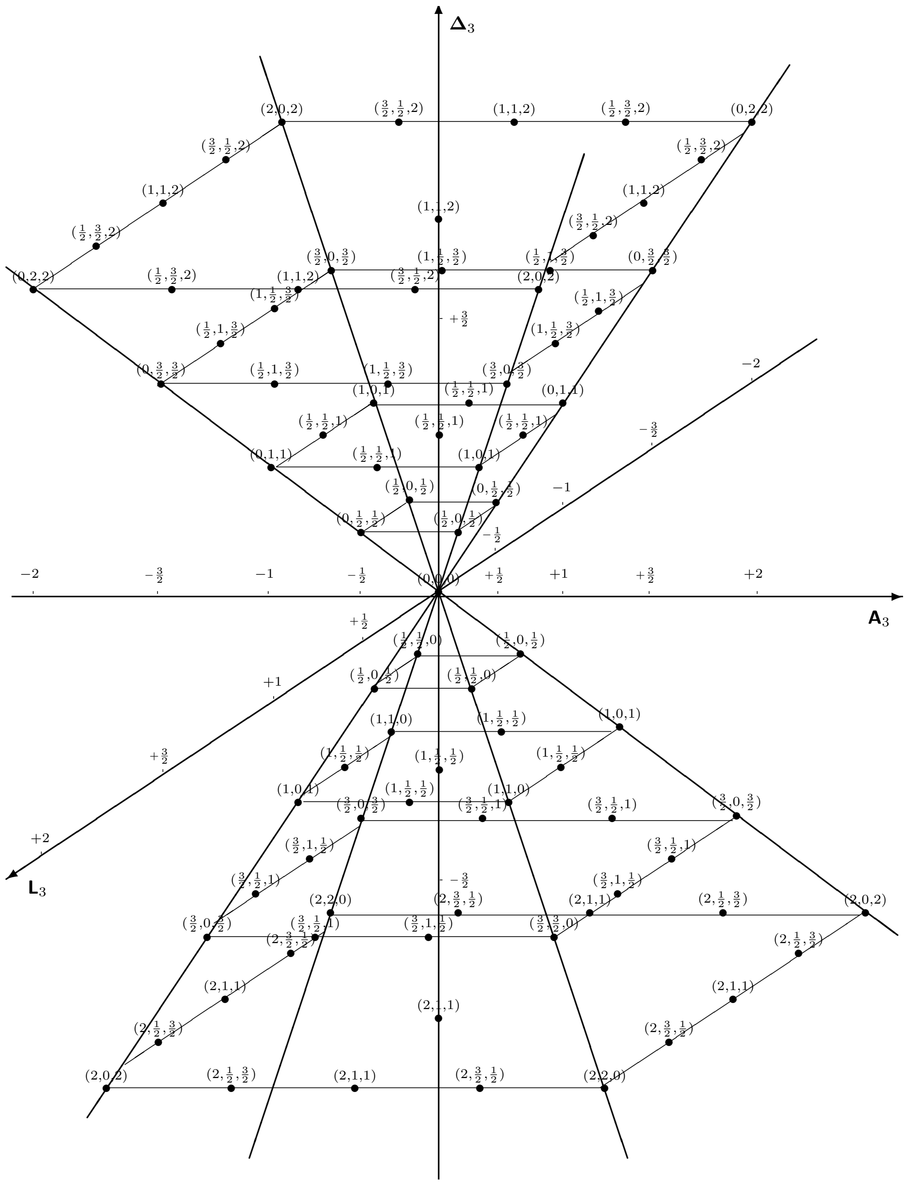

Рис. 6. Весовая диаграммы алгебры Ли $\mathfrak{so}(4,2)$

Вертикальное направление, образованное собственными значениями оператора Δ_3, добавляет к многообразию радиальный лестничный оператор.

Графическое изображение весовой диаграммы, показанное на рис. 6, напоминает четырёхгранную пирамиду, перевёрнутую вверх ногами и отражённую от плоскости $(\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3)$. Эту конструкцию будем называть $\mathrm{SO}(4,2)$-*башней*. Каждый заданный этаж $\mathrm{SO}(4,2)$-башни характеризуется главным квантовым числом n. Горизонтальные полосы (этажи) соответствуют различным l-подоболочкам, а точки являются индивидуальными m-компонентами (конечномерными представлениями группы $\mathrm{SO}(4,2)$). Проекцией четырёхгранной пирамиды, изображённой на рис. 6, на плоскость $(\mathsf{L}_3, \mathsf{A}_3)$ является конус представлений группы $\mathrm{SO}(4)$ (весовая диаграммы алгебры $\mathfrak{so}(4)$). В свою очередь, проекции $\mathrm{SO}(4,2)$-башни на плоскости (L_3, Δ_3) и (A_3, Δ_3) приводят к весовым диаграммам для подалгебр $\mathfrak{so}(2,2)$. Конечномерные представления $\boldsymbol{\tau}_{l,\dot{l},n}$ группы $\mathrm{SO}(4,2)$ реализуются в симметрических пространствах $\mathrm{Sym}_{(k,r,p)}$ размерности

$$\dim \mathrm{Sym}_{(k,r,p)} = (k+1)(r+1)(p+1).$$

С каждым узлом весовой диаграммы на рис. 6 ассоциирована следующая массовая формула:

$$m = 2m_{\mathrm{H}} \left(l + \frac{1}{2}\right) \left(\dot{l} + \frac{1}{2}\right) \left(\nu + \frac{1}{2}\right), \tag{25}$$

где m_{H} – относительная атомная масса водорода. Вывод формулы (25) аналогичен выводу массовой формулы (11), см. [15,16], которая является частным случаем (25) при $\nu = 0$ и $m_{\mathrm{H}} \to m_e$, т. е. при редукции конформной группы $\mathrm{SO}(4,2)$ к её подгруппе Лоренца $\mathrm{SO}(3,1)$.

Литература

1. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 5–23.
2. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. II: Таблица Сиборга // Математические структуры и моделирование. 2019. № 1 (49). С. 5–21.
3. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. III: 10-периодическое расширение // Математические структуры и моделирование. 2019. № 3 (51). С. 5–20.
4. Varlamov V.V., Pavlova L.D, Babushkina O.S. Group Theoretical Description of the Periodic System // Symmetry. 2022. Vol. 14. Art. 137.
5. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов. IV: Групповая алгебра // Математические структуры и моделирование. 2024. № 1 (69). С. 18–31.
6. Humphreys J. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. New York; Berlin: Springer, 1978.
7. Hall B. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. New York; Berlin: Springer, 2015.
8. Barut A.O. Group Structure of the Periodic System // The Structure of Matter: Rutherford Centennial Symposium / Ed. by B.G. Wybourne. Christchurch, New Zeland: University of Canterbury Press, 1972. P. 126–136.
9. Yao T. Unitary Irreducible Representations of SU(2,2). I // Journal of Mathematical Physics. 1967. Vol. 8. P. 1931–1954.
10. Knapp A.W. Representation Theory of Semisimple Groups. Princeton: Princeton University Press, 1986.
11. Varlamov V.V. Relativistic spherical functions on the Lorentz group // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2006. Vol. 39. P. 805–822.
12. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. Vol. 54. P. 3533–3576.
13. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2 (42). С. 11–28.

14. Varlamov V.V. Lorentz Group and Mass Spectrum of Elementary Particles // arXiv. 2017. arXiv:1705.02227.
15. Варламов В.В. О квантовании массы // Метафизика. 2023. № 1 (47). С. 115–134.
16. Varlamov V.V. Group Theory and Mass Quantization // arXiv. 2023. arXiv:2311.16175.
17. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations // International Journal of Theoretical Physics. 2003. Vol. 42. P. 583–633.
18. Varlamov V.V. General Solutions of Relativistic Wave Equations II: Arbitrary Spin Chains // International Journal of Theoretical Physics. 2007. Vol. 46. P. 741–805.
19. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // International Journal of Theoretical Physics. 2016. Vol. 55. P. 5008–5045.
20. Thyssen P., Ceulemans A. Shattered Symmetry: Group Theory from the Eightfold Way to the Periodic Table. New York: Oxford University Press, 2017.

GROUP THEORETICAL DESCRIPTION OF PERIODIC SYSTEM OF ELEMENTS. V: WEIGHT DIAGRAM

V.V. Varlamov
Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The root structure of the subalgebras of the group algebra of a conformal group in the framework of a twofold covering is analyzed. Based on the analysis, the Cartan–Weyl basis of the group algebra is determined. The root and weight diagrams are constructed. A mass formula associated with each node of the weight diagram is introduced.

Keywords: conformal group, group algebra, Lorentz group, Cartan subalgebra, Weyl generators, root structure, weight diagram, mass formula.

Дата поступления в редакцию: 10.04.2024