Математические структуры и моделирование
2024. № 3 (71). С. 44–59

УДК 930.1+510.2
DOI 10.24147/2222-8772.2024.3.44-59

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ИНЖЕНЕРНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТРИСЕКЦИИ УГЛА: ИСТОРИЯ И НОВЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

А.В. Сказочкин
к.ф.-м.н., к.т.н., e-mail: avskaz@rambler.ru

ООО «Криокон», Калуга, Россия

Аннотация. Статья посвящена истории формулирования и решения задачи о трисекции угла: разделении угла на три равные части при помощи циркуля и линейки, – имеющей более чем 2,5-тысячелетнюю историю. Традиционно истоки задачи связывали с практической деятельностью мастеров и ремесленников Древней Греции, однако известно, что при помощи простых практических приёмов или небольших допущений в исходной формулировке задача вполне разрешима. Показано, что в основе задачи о трисекции угла лежит не практический интерес, а более глубокие основания, связанные с мировоззрением философов и математиков Эллады и историческим ходом развития математики, в частности с методологической работой представителей школы Пифагора, создавших геометрическую алгебру с объектами в виде прямых, окружностей и инструментами для их построения – циркулем и линейкой. С другой стороны, инженерный подход, истоки которого находятся тоже в Древней Греции, допускающий в процессе решения использовать, помимо циркуля и линейки, засечки, шкалу, дополнительные кривые и любой чертёжный инструмент, создающий конечную толщину проводимых линий, позволяет решить задачу о трисекции угла. В качестве примера инженерного подхода к задаче о трисекции угла приведено оригинальное решение автора статьи, используя циркуль, линейку и предмет для черчения, имеющий конечную толщину. Предложенный алгоритм позволяет математически решить задачу о трисекции угла с любой точностью. В историческом плане удивительным является то, что традиция формулировать поиск решения задачи о трисекции угла только при помощи циркуля и линейки, отклоняя при этом многочисленные возможности инженерного подхода, осталась и была поддержана всеми последующими поколениями математиков на протяжении 2,5 тысячелетий вплоть до сегодняшнего дня.

Ключевые слова: трисекция угла, математика в Древней Греции, школа Пифагора, геометрическая алгебра, мировоззрение, история математики, инженерный подход, механический способ, циркуль, линейка, биссектриса, алгоритм, решение задачи о трисекции угла.

Введение

Несмотря на то, что хорошо известно о неразрешимости исторической задачи о делении заданного угла на три равные части при помощи циркуля и линейки – так называемой задачи о трисекции угла, – попытки решить её в классической формулировке до сих пор не оставляют самых разных людей: от пенсионеров и студентов[1] до профессиональных учёных[2]. Если о первых из упомянутых с удовольствием пишут газеты и научно-популярные журналы, то статьи о различных аспектах задачи о трисекции угла – математиков [1], инженеров [2] и учёных различных научных направлений [3, 4], публикуют профессиональные журналы и издания, индексируемые в национальных и глобальных базах данных. Более того, обосновывая практической необходимостью, попытки поиска приближенного решения этой задачи в настоящее время даже финансируют из государственных научных фондов [5]. Не исключено, что эти поиски отчасти стимулирует кажущаяся простота задачи – ведь как делить угол на две равные части знает каждый школьник, а инструмент для решения находится в любой готовальне. Однако можно отметить и то, что заниматься поиском решения задачи, над которой трудились не только философы-математики Древней Греции, но и Ньютон, Гаусс и многие другие выдающиеся учёные, предлагать новые варианты решения наверняка доставляет особое удовольствие.

С другой стороны, огромную роль в популяризации нескольких «великих задач древности» и стимулировании интереса к математике, геометрии, истории науки, сделало в своё время государство, создав в 1950–1980-е гг. условия для публикации ряда хорошо известных книг для школьников и студентов, посвящённых этой теме [6, 7]. Широкое информирование будущих исследователей и инженеров о существовании «неразрешимых задач» [8], стимулирование поиска их решений, играет особую роль в развитии науки и образования, так как обозначение проблемных тем ориентирует пассионарных молодых людей и зачастую даёт направление в науке и жизни. Учитывая, что для поиска решения задачи о трисекции угла необходима комбинация пространственного воображения, способности к аналитике, знание некоторых разделов математики и простой набор для черчения – такая задача является отличным объектом для творческого развития любой категорий людей.

Попытки решений задачи о трисекции угла математическими методами хорошо известны. Быть может, это одна из наиболее известных исторических задач, о которых рассказывают на лекциях по математике и в популярной литературе по геометрии. Историки математики называют задачу о трисекции угла «второй древнейшей знаменитой задачей» [7, с. 225–231]. История возникновения задачи и различные

[1]Бывшая учительница математики предложила решение нерешаемой задачи // Российская газета. 29 апр. 2020. URL: https://rg.ru/2020/04/29/reg-urfo/byvshaia-uchitelnica-matematiki-predlozhila-reshenie-nereshaemoj-zadachi.html (дата обращения: 25.10.2023); Задача Евклида // Газета Труд. 25 апр. 2002. URL: https://www.trud.ru/article/25-04-2002/39911_zadacha_evklida.html (дата обращения: 25.12.2023); Трисекция угла // Юный техник. 1994. № 12. URL: http://nanoworld2003.narod.ru/01/DATA/TEXTS.RUS/9960228.htm (дата обращения: 25.12.2023).

[2]Доллежаль А.Н. Трисекция угла // Наука и жизнь. 1998. № 33. URL: https://www.nkj.ru/archive/articles/10478/ (дата обращения: 25.12.2023).

варианты её решения, собранные воедино, представлены, помимо указанных выше, в нескольких монографиях [9, 10], брошюрах [11] и статьях [12, 13]. Отметим, что большинство авторов публикаций на тему трисекции угла напрямую связывают возникновение задачи с потребностями архитектуры и строительной техники [6, 14]. Декларировалось и до сих пор считается, что составление рабочих чертежей орнаментов, симметричных украшений, строительных деталей, имеющих много граней или красивых геометрических фигур, потребовало геометрического решения задачи деления угла на три равные части именно при помощи циркуля и линейки [14, с. 79–80]. Однако есть вполне обоснованное сомнение в таком историческом подходе к этой задаче, поскольку при помощи простых практических приёмов или небольших допущений к исходной формулировке, задача о трисекции угла вполне разрешима. Поэтому можно предположить, что в основе формулировки задачи лежит не практический или хозяйственный интерес, а более глубокие основания, в частности, связанные с мировоззрением философов и математиков Древней Греции и историческим ходом развития математики. Отчасти поэтому настоящая статья посвящена как истории задачи, так и некоторым другим аспектам инженерного подхода при решении задачи о трисекции угла, в том числе описанию предложенного автором алгоритма для решения задачи о трисекции угла с любой точностью.

1. Краткая история задачи и её решений

Считается, что формулирование задачи произошло в Древней Греции, примерно в V в. до н. э. В исторических хрониках зафиксировано, что греки Эллады выяснили как при помощи циркуля и линейки можно легко разделить прямой угол на три равные части – решение сводится к построению внутри угла двух равносторонних треугольников [6, с. 35–36]. Аналогичным образом и теми же средствами можно разделить на три равные части угол в 45°. Однако разделить на три части произвольный угол при помощи циркуля и линейки им не удавалось. Поэтому греческие философы-математики для решения задачи трисекции угла добавили к циркулю и линейке другие вспомогательные средства. Это не были инструменты для строительства, и, судя по её описанию и предложенной процедуре, трисекция угла не осуществлялась для иных хозяйственных целей. Считается, что первым из греков, давшим строгое решение задачи о трисекции любого острого угла, был Гиппий из Элиды (V в. до н. э.). Он изобрёл и использовал квадратрису – кривую, получаемую при движении точки по сложной дуге [8, с. 95–97]. Оказалось, что абсциссы точек квадратрисы пропорциональны соответствующим углам и простыми построениями при помощи линейки и квадратрисы можно разделить угол на три равные части. Отметим, что одновременно Гиппием был построен простой механизм для черчения этой кривой, позволявший легко делить угол на три части на практике. Продолжателем тенденции применения вспомогательных кривых для решения задачи о трисекции угла был Папп Александрийский (II в. н. э.), который в процессе решения использовал другую замечательную кривую – конхоиду Никомеда [10, с. 123–126].

Архимед, живший в III в. до н. э., предложил решить задачу при помощи подвижной линейки, на которой нужно сделать две засечки, расстояние между которыми равно радиусу проводимой окружности [11, с. 34–35]. Основная проблема решения

Архимеда не только в том, что делаются две отметки на линейке, но и в том, на что по какой-то причине до сих пор не обращали внимание – в результате Архимедом был построен угол, величиной равный трети от данного, но вне исходного угла. То есть, строго говоря, задача трисекции угла таким способом решена не была – ведь надо разделить именно исходный угол, а не строить угол, равный трети от величины исходного, вне угла. Однако, вполне вероятно, что предложенное решение послужило основой для метода вставки, автор которого остался истории неизвестным (вполне возможно, что это был Архимед), но сам метод стал известен из описания в «Началах» Евклида (кн. 1, постулаты 1, 2) [15, с. 332–333]. В методе вставки деление угла на три равные части осуществлено при помощи одной линейки без циркуля и делится искомый угол. Процедуры построения довольно просты, однако в процессе решения, как и в методе Архимеда, на линейку наносятся две метки. Учитывая, что в процессе решения линейку необходимо вращать до совмещения одной из меток с прямой, не исключено, что метод вставки дал импульс Паппу для создании своего способа, и в дальнейшем мог стимулировать многих учёных Нового времени искать решение задачи в этом направлении.

Попытки решить задачу трисекции угла другими способами продолжил в XV в. Джамшид ибн Масуд аль-Каши, персидский учёный, один из руководителей Самаркандской обсерватории. Аль-Каши предложил решение алгебраического уравнения трисекции угла в виде последовательной итерации [16]. Однако решение при помощи классического набора для черчения в виде циркуля и линейки Аль-Каши своим последователям не оставил [17, с. 301–304].

В Новое время свои решения задачи о трисекции угла предложили Декарт, Ньютон, Паскаль, Клеро и Шаль [10]. В какой-то степени эти решения можно считать продолжением идей Гиппия, Архимеда и Паппа, так как они основаны на поиске точек пересечения конического сечения с окружностью. Также отметим, что одна из используемых при построении кривых – «улитка Паскаля» – является универсальной кривой, позволяющей делить на три равные части любой произвольный угол [3, с. 33–34].

Можно отметить, что в различные исторические времена поиски решений задачи о трисекции угла стимулировала связанная с этой задачей проблема построения правильных многоугольников. Правильные многоугольники, у которых число сторон равняется 3, 4, 6, 8, 10, 16, при помощи линейки и циркуля древние греки строить умели. Но у них ничего не получалось при построении только этими инструментами правильных семи-, девяти- и одиннадцатиугольников [6, с. 41–44]. Вероятно, красота и привлекательность задачи в определённый исторический период была такой силы, что правильный семнадцатиугольник, после доказательства возможности его построения (теорема Гаусса–Ванцеля), начертил сам «король математиков» Иоганн Карл Фридрих Гаусс, который даже завещал высечь эту фигуру, вписанную в круг, на своей могиле[3].

В определённой степени финальную точку в череде исторических попыток решить задачу о трисекции угла в её классической формулировке поставил французский математик Пьер Лоран Ванцель в 1837 г. Доказательство невозможности три-

[3]Великие немецкие учёные. Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855). URL: `https://www.lgroutes.com/Famous/Scientific/Gauss.html` (дата обращения: 25.12.2023).

секции произвольного угла сводилось к анализу алгебраического уравнения и его корней [6, с. 24–26]. Ванцель также доказал, что при помощи циркуля и линейки трисекция угла возможна для бесконечного множества углов определённого вида $\frac{\pi}{2^n}$, где n – целое положительное число (теорема Гаусса–Ванцеля).

2. О практическом подходе к решению задачи

Обратимся теперь к практическому подходу при решении задачи о трисекции произвольного угла. Даже обыденный опыт нам показывает, что на практике особой проблемы деление угла на три равные части сложности не представляет – любой желающий может взять транспортир, угломер и даже гониометр, и спокойно построить нужный угол, который, с учётом погрешности измерения исходного угла и погрешности при построении угла величиной 1/3 от данного, вполне может удовлетворить не только архитектора и конструктора, но даже исследователя. Вероятнее всего в Древней Греции подобный прибор для измерения углов был и активно использовался в различных ремёслах, прежде всего в строительстве. Один из таких инструментов был обнаружен в 1906 г. в Египте при раскопках дома архитектора – прибор представлял собой планку с диском, разделённым на одинаковые сектора[4]. Археологи оценивают возраст находки около 3400 лет. Древняя Греция, имевшая значительные культурные и торговые связи с Египтом, территория которого, выходящая к Средиземному морю, была колонизирована греками, наверняка знали о подобных устройствах, облегчавших строительство. В частности, в работе [18] даже утверждается, что транспортир был изобретён древнегреческим архитектором Феодором из Самоса в VII в. до н. э.

Как было отмечено выше, простые устройства в виде механизма Гиппия или способ Архимеда, не говоря уже об использовании транспортира, практичны и математически точно или точно в инженерном смысле (с погрешностью – используя, например, транспортир или гониометр) решают задачу трисекции произвольного угла. Поэтому можно сделать очевидный вывод, что отнюдь не профессиональные проблемы архитекторов, камнерезов, строителей и землемеров лежали в основе задачи. Дополнительным аргументом этого утверждения можно назвать и то, что решения Архимеда, Гиппия и других не были приняты греческим сообществом философов и математиков Эллады в качестве «решения классической задачи о трисекции угла», хотя решали задачу и были известны. Почему так произошло? На наш взгляд, причиной этого является то, что основа задачи о трисекции угла была, вероятно, сформулирована школой Пифагора и связана с мировоззренческими взглядами представителей этой школы.

Одним из направлений исканий и созидательной работы пифагорейцев было построение математики не на основе арифметики рациональных чисел, а на основе геометрии, определив для геометрических величин все операции алгебры (создание геометрической алгебры) [15, с. 332–333]. Такое направление развития математики произошло после открытия в пифагорейской школе «несоизмеримых отрезков» –

[4]Обнаружен старейший в мире транспортир // Наука 21 век. URL: `http://nauka21vek.ru/archives/16838` (дата обращения: 25.12.2023).

таких, которые не могут быть выражены рациональными числами. Открытие несоизмеримости означало, что целых чисел и их отношений недостаточно для выражения отношений любых двух отрезков, а значит, с помощью одних только рациональных чисел нельзя строить метрическую геометрию [19, с. 56–57]. Поэтому пифагорейцы решили, что поскольку геометрические величины имеют «более общий характер» [20, с. 49], чем числа, в основу математики надо положить не арифметику, а геометрию. Геометрическая алгебра была изложена во II и частично в I книгах «Начал» Евклида, её основными объектами были точки, прямые, окружности, отрезки и прямоугольники [15, с. 259]. В школе Пифагора рассматривали часть этих объектов как абстрактные идеальные: точки – «то, что не имеет частей», линии – «длина без ширины», поверхности – «то, что имеет только длину и ширину» и т. д. [21, с. 131]. Геометрическая алгебра основывалась на античной планиметрии, представлявшей собой геометрию циркуля и линейки, которые входили в число символов «посвящённых пифагорейцев». Оперирование именно этими объектами и средствами их построения должно было, с точки зрения пифагорейцев, «построить математику» [15, с. 258]. Поэтому, с большой вероятностью, формулирование задачи о трисекции угла и обозначение набора доступных средств для её решения напрямую связано со школой Пифагора, взглядами на математику и методологической задачей, которую Пифагор и пифагорейцы себе поставили.

В качестве подтверждения того, что отнюдь не практико-ориентированная деятельность и сопутствующие задачи являются первопричиной многих математических открытий греков Эллады, можно привести известную историю о Фалесе Милетском [22]. Рассказ повествует о том, как Фалес измерил высоту пирамиды в Египте по размеру своей тени, и измерении расстояния до корабля в море. Как подчёркивает автор статьи об измерении расстояний в Древней Греции: «Оба этих измерения на первый взгляд относятся к "прикладной математике", и в этом смысле могут быть названы "практически полезными"; однако по некотором размышлении мы можем понять, что Фалес занимался ими совсем не ради извлечения практической пользы. Их ценность – иная: они призваны показать могущество человеческого разума, способного осуществить то, что кажется невыполнимым» [22, с. 326].

Отсюда можно сделать вывод, что исключительно по методологическим причинам использование некоторых объектов (линии, окружности, точки) и способов их построения (линейка и циркуль) было допущено пифагорейцами для решения задачи о трисекции угла. Другие способы, использующие помимо циркуля и линейки какие-либо вспомогательные средства, позволяющие на практике решить задачу трисекции угла, включающие использование двух отметок (способ Архимеда), различных кривых (способы Гиппия, Декарта, Паскаля, Голикова и др.), можно отнести к «механическим» способам деления угла [3, с. 32–33].

Здесь необходимо отметить, что в случае практического выполнения трисекции угла, даже в её классическом определении, всегда неявно использовался инструмент для рисования или черчения. Это может быть карандаш/ручка или стилос для черчения на бумаге или пергаменте, штихель или чертилка – металлический заострённый стержень – для рисования на металле, дереве или мраморе, сфокусированный луч лазера – для рисования в пространстве и т. п. В любом случае, «механический» способ, часто представляющий собой устройство из реек, шарниров, отвесов и т. д. [14, с. 80–82], – это только часть, разновидность более общего инженерного подхода. Поэтому, на наш взгляд, в данном случае более точным является термин «инженерный способ» деления угла.

Таким образом, когда мы имеет дело с абстракциями при геометрических построениях – объектах математики пифагорейцев – плоскости, не имеющей кривизны, прямых линий и окружностей, не имеющих толщины, делений и меток, и проводимых при помощи линейки и циркуля – инструментов построения этих объектов, – то задача о трисекции угла не может быть решена (теорема Гаусса–Ванцеля). Однако если мы используем инженерный способ деления угла, то задача не только вполне разрешима, но имеет и математически и технически точное решение (способы Архимеда, Гиппия, Декарта, Паскаля, Голикова, Рассохина и др.).

Изменение начальных правил задачи – возможности нанесения двух меток на линейке – позволило Архимеду решить задачу. В качестве примера покажем, как использование другого фактора инженерного подхода – наличие толщины проводимой линии у любого инструмента для черчения – легко решает задачу о трисекции угла и математически, и технически (решение предложено автором настоящей статьи). Попытки решить задачу при помощи итераций предпринимались ранее в Новое время [23] и в настоящее – например, [5], – однако методологически они представляют собой довольно громоздкие конструкции из алгебраических вычислений и геометрических построений. Предложенный нами метод исключительно прост, так как при построении угла величиной 1/3 данного используется алгоритм построения последовательности, состоящей из биссектрисы исходного угла и биссектрис новых углов, имеющих пределом искомый угол. После выполнения построения обсудим гипотетическую возможность решения задачи о трисекции угла предложенным способом философами-математиками Древней Греции.

3. Простой инженерный способ решения задачи

Методологическая простота алгоритма предлагаемого решения состоит в возможности проведения биссектрисы угла, используя только циркуль и линейку, что соответствует классической формулировке задачи о трисекции угла.

Ещё раз уточним, что «инженерность» решения состоит в реальности начертания линий циркулем и по линейке любым инструментом: карандашом, ручкой, древнегреческим стилосом, тростниковой палочкой с чернилами или любым другим способом. То есть условие «инженерности» означает, что лучи, образующие углы, имеют некоторую толщину, так как они нарисованы при помощи какого-нибудь реального инструмента. Предложенный алгоритм позволяет и математически решить задачу построения угла с любой точностью – в нашем конкретном случае предел точности задаётся параметрами устройства для черчения линий.

Сначала представим геометрические построения и математическое обоснование предлагаемого метода. Итак, рассмотрим произвольный угол величиной α, с вершиной в точке O, образованный лучами OA_1 и OA_2.

Задача состоит в построении угла величиной в три раза меньше угла A_1OA_2, используя только циркуль и линейку, а также любой инструмент для черчения линий. Последнее условие, всегда неявно присутствовавшее в этой задаче, сформулированной древнегреческими геометрами, будучи актуализировано, придаёт ей инженерный, а не только геометрический смысл. Процесс построения состоит из последовательности повторяющихся шагов, представленных ниже и состоящих в проведении биссектрис углов, имеющих пределом искомый угол. Количество шагов определяется свойствами устройства для черчения – мы находим приближенное решение задачи с любой точностью.

1. Из вершины угла точки O проводим окружность произвольного радиуса R. Точки пересечения лучей OA_1 и OA_2 с окружностью обозначим B_1 и B_2. Определяем биссектрису угла A_1OA_2 простым известным способом – из точек B_1 и B_2 проводим окружности радиусом большим R (на рис. 1 обозначены фрагменты окружностей). Затем через точку пересечения этих окружностей B_3' проводим луч OB_3, являющийся биссектрисой угла $\angle A_1OA_2$, здесь точка B_3 – точка пересечения окружности радиусом R и проводимого луча. Соответственно, величины углов $\angle B_1OB_3$ и $\angle B_3OB_2$ равны, также равны величины дуг B_1B_3 и B_3B_2.

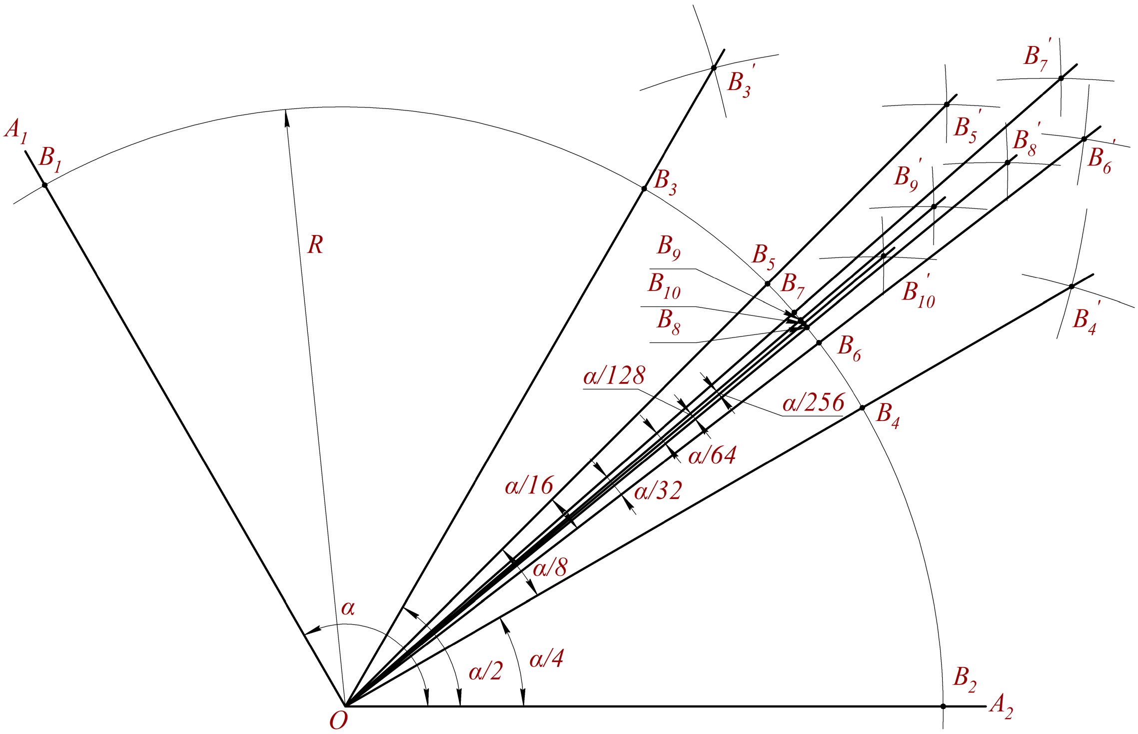

Рис. 1. Процедура построения угла в три раза меньше исходного (описание в тексте)

2. Таким же способом определяем биссектрису угла $\angle B_3OB_2$: из точек B_3 и B_2 проводим окружности (или их фрагменты), пересекающиеся в секторе B_3OB_2; через точку пересечения окружностей B_4' проводим луч OB_4, являющийся биссектрисой угла $\angle B_3OB_2$, здесь точка B_4 – точка пересечения биссектрисы этого угла с дугой B_3B_2. Соответственно, величины углов $\angle B_3OB_4$ и $\angle B_4OB_2$ равны, равны и величины дуг B_3B_4 и B_4B_2.

Далее по тексту при построении следующих биссектрис мы не будем указывать на вспомогательные точки B_4', B_5', B_6', B_7', B_8', B_9', B_{10}', полученные при пересечении вспомогательных окружностей или их фрагментов, хотя они обозначены на рис. 1.

3. Третий шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_3OB_4$ с точкой B_5 – точкой пересечения биссектрисы этого угла с дугой B_3B_4 – она делит дугу B_3B_4 пополам.

4. Четвёртый шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_5OB_4$ с точкой B_6 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_5B_4 пополам.

5. Пятый шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_5OB_6$ с точкой B_7 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_5B_6 пополам.

6. Шестой шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_7OB_6$ с точкой B_8 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_7B_6 пополам.

7. Седьмой шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_7OB_8$ с точкой B_9 – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_7B_8 пополам.

8. Восьмой шаг – построение биссектрисы угла $\angle B_9OB_8$ с точкой B_{10} – точкой пересечения биссектрисы этого угла – она делит дугу B_9B_8 пополам.

И так далее по необходимости – последовательность процесса построения биссектрис понятна и проста. Подчеркнём ключевую особенность при построении, состоящую в том, что после проведения очередной биссектрисы выбирается левый или правый угол через один шаг, что в итоге влияет на предел последовательности, см. ниже.

Очевидно, что возможности для дальнейшего построения биссектрис и на рис. 1, и на рис. 2, представляющем собой масштабирование зоны пересечения биссектрис с окружностью R рис. 1, остаются и в дальнейшем.

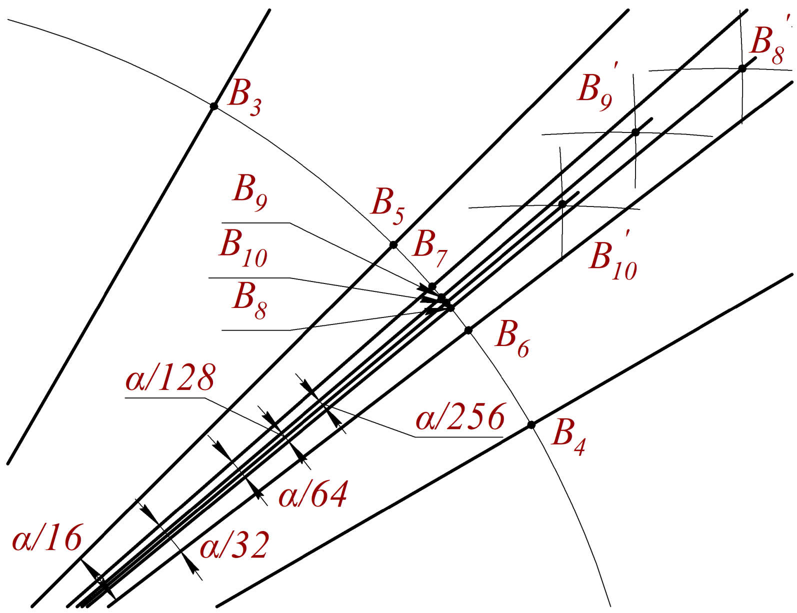

Рис. 2. Масштабирование зоны пересечения биссектрис с окружностью R рис. 1

Однако, очевидно, что все проводимые далее биссектрисы будут располагаться между точками B_9 и B_{10}, см. рис. 2 и 3. Несмотря на увеличение масштаба, видно, что на рис. 2 точки практически «соприкасаются» друг с другом. Поэтому остановимся в процессе черчения и определим величины образуемых углов и соответствующих дуг, а также предел обозначенной последовательности.

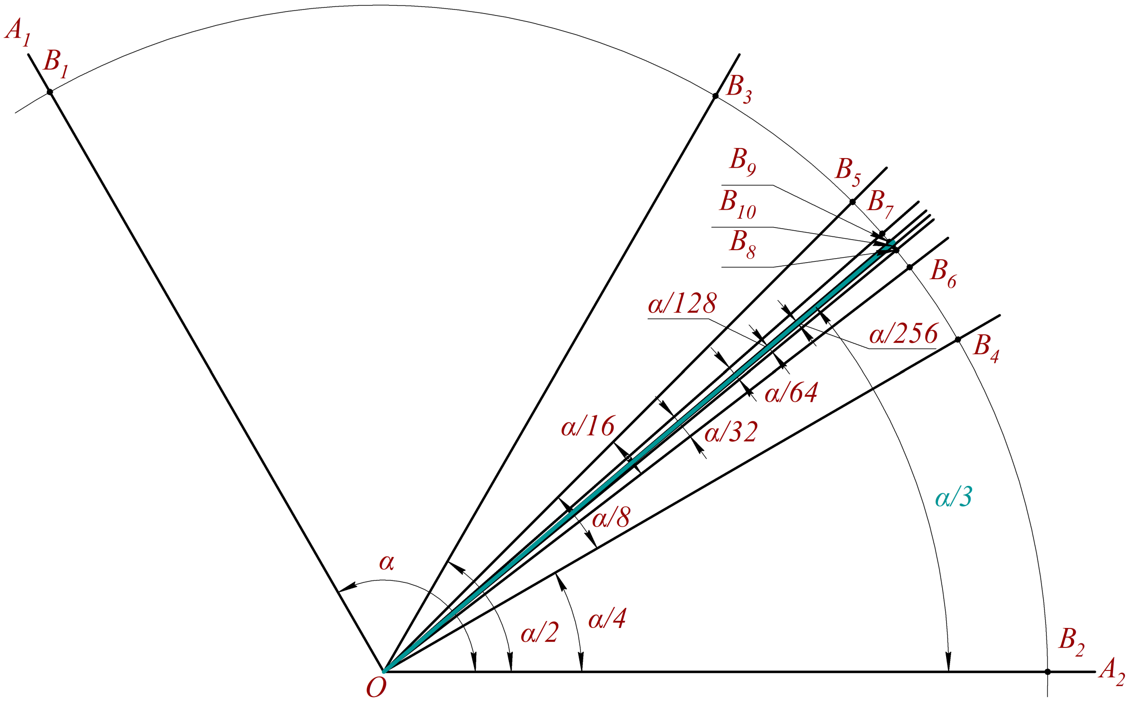

Рис. 3. Зона расположения последующих биссектрис после восьмого шага построений (расположена между точками B_9 и B_{10}, выделена зелёным цветом)

Очевидно, что исходя из процедуры построения биссектрис, делящих углы на две равные части, если принять угол $\angle B_1OB_2 = \alpha$, то угол $\angle B_3OB_2 = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle B_4OB_2 = \dfrac{\alpha}{4}$, $\angle B_5OB_4 = \dfrac{\alpha}{8}$, $\angle B_5OB_6 = \dfrac{\alpha}{16}$, $\angle B_7OB_6 = \dfrac{\alpha}{32}$, $\angle B_7OB_8 = \dfrac{\alpha}{64}$, $\angle B_9OB_8 = \dfrac{\alpha}{128}$, $\angle B_9OB_{10} = \dfrac{\alpha}{256}$ и т. д.

Определим предел суммы последовательности величин углов, складывающихся при выполнении предложенного алгоритма построения углов, см. рис. 1 и рис. 2. Здесь необходимо учесть указанную выше ключевую особенность – при построении величины некоторых углов увеличивают суммарный угол, добавляемый к углу $\angle B_4OB_2 = \dfrac{\alpha}{4}$, так как берутся углы, лежащие слева от биссектрисы, образующей два новых угла.

Другие же уменьшают суммарный угол, так как берутся углы, лежащие справа от биссектрисы, образующей два новых угла, т. е. вычитаются из общей суммы. Исходя из процедуры построения, мы имеем следующую последовательность, сумму которой мы хотим вычислить, чтобы определить величину предела построения углов:

$$\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{8} - \frac{\alpha}{16} + \frac{\alpha}{32} - \frac{\alpha}{64} + \frac{\alpha}{128} - \frac{\alpha}{256}\ldots \tag{1}$$

Если принять $\dfrac{\alpha}{8} = \alpha_1$ за первый член геометрической прогрессии, и учитывая, что знаменатель прогрессии $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, то очевидно, что n-й член этой геометрической прогрессии:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ и } \alpha_n = \alpha_1\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \quad (2)$$

Соответственно, сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии [24, с. 58]

$$S_n = \alpha_1 \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}. \quad (3)$$

Очевидно, что предел S суммы членов прогрессии S_n [24, с. 58]:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha_1 \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\alpha}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{\alpha}{12}. \quad (4)$$

Итого величина предела последовательности (1) будет равна $\dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\alpha}{12} = \dfrac{4\alpha}{12} = \dfrac{\alpha}{3}$.

Таким образом, пределом построений будет угол, величина которого будет в три раза меньше величины исходного произвольного угла α.

Аналогичные построения и вычисления можно сделать для второй половины угла $\angle A_1OA_2$ – угла $\angle B_1OB_3$. Поэтому можно построить не только угол в три раза меньше данного, но и три равные части исходного угла $\angle A_1OA_2$.

Принимая во внимание сделанные выше расчёты и рассуждения, перейдём от геометрических построений и математических расчётов к инженерным и вычислим величины дуг, образуемых в процессе этих построений. Учитывая размер листа формата А4, вычислим величины образуемых дуг для угла 120° и радиусом $R = 100$ мм (величины взяты для простоты расчётов), а также учтём, что толщина карандаша и грифеля циркуля находится в диапазоне 0,5–1 мм. Эти размеры для построения вполне адекватны и современным, и тем более тем, что были у писцов и инженеров в Древней Греции, так как, согласно описанию Плиния, папирус греческого периода был ограничен стандартными размерами: 47 см в длину (29–33 см в среднем) и 22 см в ширину[5] – фактически это размеры листа формата А4. Рисовали и писали заострённой расщеплённой тростниковой палочкой чернилами из сажи и масла. Сажа получалась при сжигании виноградных и плодовых косточек, мягкой древесины, виноградной лозы[6]. Толщина проводимых линий была в лучшем случае около 1 мм.

Итак, длина дуги B_1B_2, рис. 1, опирающейся на угол $\alpha = 120^\circ$ и являющейся частью окружности радиусом $R = 100$ мм, определяется известным выражением

[5]Бумага в Древнем Египте. URL: http://www.ktopridumal.ru/srednie-veka/bumaga/bumaga-v-drevnem-egipte/ (дата обращения: 25.12.2023).

[6]Васильев В.Г. Из истории пишущих принадлежностей. URL: http://cdokp.tstu.tver.ru/site2/site/about_books_4.htm (дата обращения: 25.12.2023).

$L = \dfrac{\pi R \alpha}{180}$ и равна после подстановки этих значений 209,33 мм.

После последовательного деления угла пополам, а затем ещё раз, в такой же пропорции уменьшается и длина дуги: длина дуги L_1, опирающейся на угол $\dfrac{\alpha}{4}$, равна 52,33 мм (вводим нумерацию дуг для подсчёта шагов), длина дуги $L_2\left(\dfrac{\alpha}{8}\right) = 26,17$ мм, и далее $L_3\left(\dfrac{\alpha}{16}\right) = 13,08$ мм, $L_4\left(\dfrac{\alpha}{32}\right) = 6,54$ мм, $L_5\left(\dfrac{\alpha}{64}\right) = 3,27$ мм, $L_6\left(\dfrac{\alpha}{128}\right) = 1,64$ мм, $L_7\left(\dfrac{\alpha}{256}\right) = 0,82$ мм, $L_8\left(\dfrac{\alpha}{512}\right) = 0,41$ мм.

Таким образом, уже на седьмом-восьмом шаге приближений, что было продемонстрировано на рис. 1 и 2, все дальнейшие начерченные линии в этом примере совпадают друг с другом, и мы получаем точное в инженерном смысле построение угла в три раза меньше исходного. При указанных выше параметрах чертёжного инструмента выполнить построение точнее невозможно.

Поэтому, возвращаясь к рис. 1, проведение линии, толщиной равной величине дуги B_9B_{10}, сделанное на рис. 3, и является построением угла в три раза меньше исходного произвольного угла, см. рис. 4.

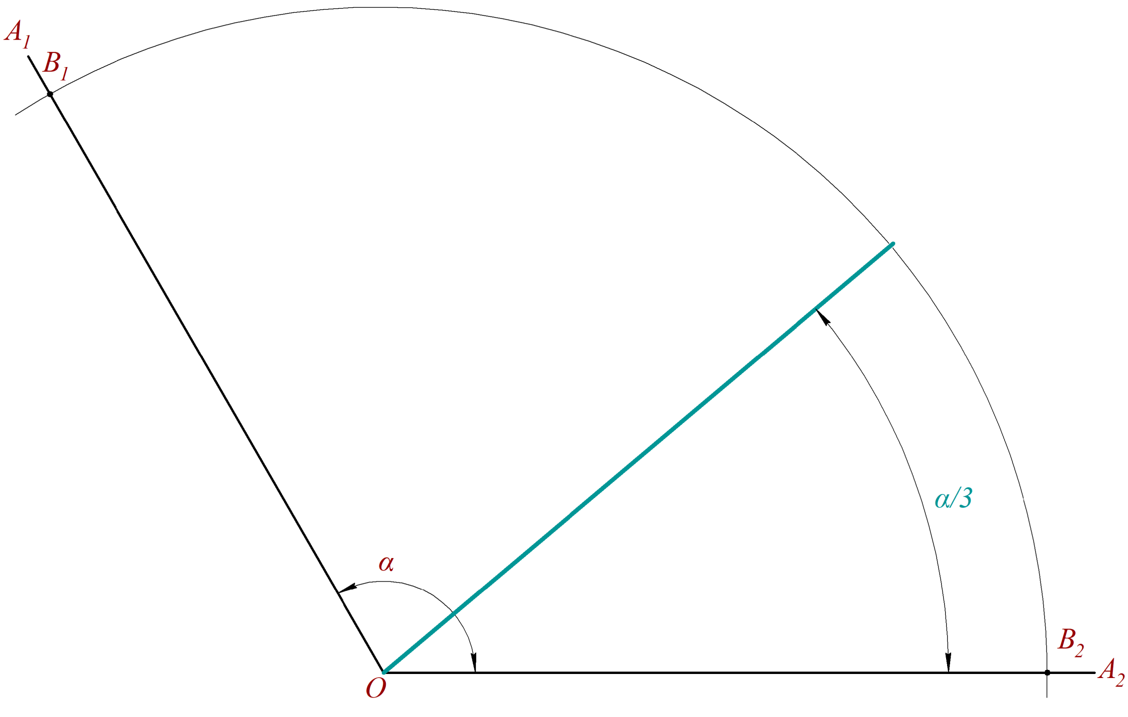

Рис. 4. Итоговый рисунок построения угла в три раза меньше данного, полученный из рис. 3 после того, как были убраны все вспомогательные построения (точки, дуги, линии)

Если же, как древнегреческие философы-математики, мы решим рисовать на песке, используя стилос, который в процессе черчения оставляет линию толщиной

1–2 мм (в реальности больше), при размерах вспомогательного радиуса 1 м и величине угла те же 120°, то начерченные линии совпадают друг с другом уже на 10-м шаге построений.

Используя современные технические средства, можно начать рисовать электронным лучом. Тогда, принимая размер классического радиуса электрона за величину $2,8 \cdot 10^{-15}$м [24, с. 340], несложно посчитать, что для угла 120° и при величине вспомогательного круга радиусом 1 м после 50-го шага приближений дальнейшее черчение становится не нужным и даже невозможным, и мы получим сверхточное построение угла в три раза меньше данного.

Предложенный алгоритм построения угла в три раза меньшего исходного использует исключительно циркуль, линейку и предмет для черчения, имеющий конечную толщину, делит на три части именно исходный угол, применим для угла любого размера, содержит конечное число процедур. Таким образом, вопрос о построении угла в три раза меньше данного, используя линейку, циркуль и любой чертёжный инструмент, можно считать закрытым. Мы получили приближенное решение задачи о трисекции угла, которое можно выполнить при помощи циркуля и линейки с любой точностью.

Обладая небольшим навыком в черчении, заключающимся в опыте проведения линий и фрагментов окружностей, описанные выше восемь шагов алгоритма построения можно выполнить в пределах нескольких минут. Учитывая, что некоторые современные программы черчения и моделирования (например, хорошо известный отечественный программный продукт «Компас 3D», при помощи которого сделаны рис. 1–4) обладают возможностью автоматически рисовать биссектрису любого угла, процесс определения угла в три раза меньше искомого, используя предложенный выше алгоритм, можно выполнить вручную меньше чем за минуту.

4. Заключение, или Ещё раз об истории задачи

В связи с относительно несложным алгоритмом, используемым в данном случае при решении задачи, возникает вопрос: могли ли греческие философы-математики Эллады решить задачу о трисекции угла подобным образом? Ведь придуманные ими для решения задачи о трисекции угла квадратрисса и другие кривые третьего и четвёртого порядка на первый взгляд сложнее и необычнее, чем приёмы, использованные при решении этой задачи, как в данном случае, так и во многих других случаях, описанных выше. Здесь необходимо отметить, что термин «последовательность» уже был в ходу у неоплатоников и подразумевал совокупность предметов (включая числа), следующих друг за другом и «связанных отношениями порождения или изливающимися из одного источника» [15, с. 732]. Также был развит метод исчерпывания, разработку которого осуществил Евдокс Книдский (V–IV вв. до н. э.), который неявно включает понятие предела (Евклид изложил теорию метода исчерпывания в X книге «Начал»). Таким образом, математическая основа для решения задачи предложенным нами способом у греков Эллады была. Однако, на наш взгляд, отрицательную роль в процессе получения положительного результата при решении задачи о трисекции угла могла играть сформулированная пифагорейцами концепция математики, ограничивающая совокупность инструментов и приёмов при решении задачи («слабость геометрической алгебры» [20, с. 49–50]), а также особенность используемых при этом терминов. Поясним ещё раз этот вывод подробнее.

Введение и распространение идеи доказательства в математике в целом традиционно связывают с Пифагором и его школой [21, с. 130–135]. Историки математики также считают, что в геометрию дедуктивный метод и методологию доказательства привнёс выдающийся греческий философ Фалес из Милета, который по воспоминаниям его современников, после поездки в Египет перенёс эту методологию в Грецию [15, с. 231]. Тем не менее, вероятнее всего, постановка проблемы деления заданного угла на три равные части была сформулирована в начале так называемого «Золотого века» Греции самим Пифагором или представителями школы Пифагора, когда только складывались основы формализованного языка математики (геометрии). Именно тогда стало возникать понимание, что математика оперирует идеальными объектами – возникающими в воображении человека, поэтому прямая линия не имеет толщины, плоскость – кривизны и т. п. В наиболее яркой форме эти идеи были сформулированы Платоном и его последователями [20, с. 50–55]. Возможно, что в исторический момент формулирования задачи о трисекции угла старые термины ещё использовались и были в ходу, иначе мы бы увидели в тексте формулировки задачи не термины «линейка» и «циркуль», а «прямая» и «окружность» или их аналоги.

Дополнительно может быть верным предположение, высказанное выше в тексте и состоящее в следующем. Формулирование пифагорейцами задачи о трисекции угла, вероятно, происходило после открытия несоизмеримых отрезков, которое привело к революции в их мировоззрении, пересмотру существовавших тогда концепций математики и заложило основы геометрической алгебры. Инструментами геометрической алгебры у пифагорейцев были циркуль и линейка, при помощи которых чертили объекты новой алгебры – прямые, окружности, прямоугольники и т. п. Предполагалось, что при помощи этих объектов может быть решена любая задача на построение. Поэтому, в соответствии с методологией пифагорейцев, при решении геометрической задачи необходимо использовать только эти объекты и инструменты, что, вероятно, повлияло на строгую формулировку задачи о трисекции угла и ограничения при построении. В связи с этим в историческом плане удивительно то, что традиция формулировать поиск решения задачи о трисекции угла только при помощи циркуля и линейки, отклоняя при этом многочисленные возможности инженерного подхода (использование засечек, шкалы, дополнительных кривых, толщины проводимых линий и т. п.) осталась в среде математиков и поддерживалась неизменной на протяжении последних 2,5 тысячелетий.

Благодарности

Автор благодарен старшему преподавателю Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана Александру Анатольевичу Корнееву, сделавшему рисунки.

Литература

1. Chang W.D., Gordon R.A. Trisecting angles in Pythagorean triangles // Amer. Math. Monthly. 2014. Vol. 121, № 7. P. 625–631.
2. Рассохин Г.Н., Кондаков С.Е. Способ построения хорды искомого угла при трисекции заданного // Известия Института инженерной физики. 2022. № 2 (64). С. 69–72.
3. Голиков В.П. Механический способ решения задачи трисекции угла // Двойные технологии. 2011. № 2 (55). С. 32–35.
4. Demaine E.D., O'Rourke J. Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedral. Cambridge Univ. Press, 2007. P. 31–33.
5. Байбеков С.Н., Алтынбек С.А., Тургинбаева А.С. Разработка методики трисекции произвольного угла с заданной точностью // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан. 2022. № 4 (86). С. 116–129.
6. Чистяков В.Д. Три знаменитые задачи древности. М.: Гос. учеб.-пед. изд-во, 1963. 94 с.
7. Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-математические исследования. М.: ГИФМЛ, 1958. Вып. XI. С. 225–438.
8. Шрейдер С.Н. Три задачи древней геометрии // Из опыта проведения внеклассной работы по математике в средней школе. М.: Учпедгиз, 1955. С. 87–100.
9. История математики. С древнейших времён до начала Нового времени / под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1970. Т. 1. 354 с.
10. Белозёров С.Е. Пять знаменитых задач древности. История и современная теория. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1975. 320 с.
11. Прасолов В.В. Три классические задачи на построение. Удвоение куба, трисекция угла, квадратура куба. М.: Наука, 1992. 80 с. (Популярные лекции по математике. Вып. 62)
12. Шрубко Л.А. Трисекция угла // Известия Академии наук Казахской ССР. 1952. № 115. Серия геологическая. Вып. 12. С. 99–103.
13. Щетников А.И. Как были найдены некоторые решения трёх классических задач древности? // Математическое образование. 2008. № 4 (48). С. 3–15.
14. Храмовских М.А. Трисекция угла как хорошо забытый инструмент в строительстве и благоустройстве зданий // Материалы XI Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный Форум 2019». Физико-математические науки. Научное обозрение. 2019. № 4. С. 79–83.
15. Ловецкий Г.И. Философия и математика: высшие идеи и числа в Древнем мире и античности. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 756 с.
16. Матвиевская Г.П., Розенфельд Б.А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII–XVII вв.). Кн. 3. М.: Восточная литература, 1983. 372 с.
17. Юшкевич А.П. История математики в Средние века. М.: Физматгиз, 1961. 448 с.
18. Каргин Д.И. Очерк истории развития чертёжных инструментов // Труды Института истории естествознания и техники. М., 1959. Т. 25. С. 270–310.
19. Яшин Б.Л. Математика в контексте философских проблем: учеб. пособие. М.: МПГУ, 2012. 110 с.
20. Яшин Б.Л. Пифагореизм и платонизм в математике: история и современность // Философская мысль. 2018. № 5. С. 47–61.
21. Еровенко В.А., Михайлова Н.В. Роль Пифагора и его школы в философском идеале нового математического знания // Математические структуры и моделирование. 2022. № 4 (64). С. 129–139.

22. Щетников А.И. Измерение астрономических расстояний в Древней Греции // Философское антиковедение и классическая традиция. 2010. Т. 4. С. 325–348.
23. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: ГИФМЛ, 1960. 468 с.
24. Аленицын А.Г., Бутиков Е.И., Кондратьев А.С. Краткий физико-математический справочник. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1990. 368 с.

ON SOME ASPECTS OF ENGINEERING SOLUTION TO THE ANGLE TRISECTION PROBLEM: HISTORY AND NEW SOLUTION ALGORITHM

A.V. Skazochkin
PhD (Phys.-Math.), PhD (Techn.), e-mail: avskaz@rambler.ru

Kryokon LLC, Kaluga, Russia

Abstract. The article is devoted to the history of the formulation and solution of the problem of trisection of an angle - dividing an angle into three equal parts using a compass and a ruler, which has a history of more than 2.5 thousand years. Traditionally, the origins of the problem were associated with the practical activities of masters and artisans of Ancient Greece, but it is known that with the help of simple practical techniques or small assumptions in the original formulation, the problem is completely solvable. It is shown that the problem of angle trisection is based not on practical interest, but on deeper grounds related to the worldview of the philosophers and mathematicians of Hellas and the historical course of development of mathematics. In particular, with the methodological work of representatives of the Pythagorean school, who created geometric algebra with objects in the form of lines, circles and tools for their construction - compasses and rulers. On the other hand, the engineering approach, the origins of which are also located in Ancient Greece, allowing in the solution process the use, in addition to compasses and rulers, notches, scales, additional curves and any drawing tool that creates a finite thickness of drawn lines, allows us to solve the problem of trisection of an angle. As an example of an engineering approach to the problem of trisection of an angle, the original solution of the author of the article is given, using a compass, a ruler and a drawing object having a finite thickness. The proposed algorithm makes it possible to mathematically solve the problem of trisection of an angle with any accuracy. From a historical perspective, it is surprising that the tradition of formulating the search for a solution to the problem of trisection of an angle only with the help of a compass and a ruler, while rejecting numerous possibilities of the engineering approach, remained and was supported by all subsequent generations of mathematicians for 2.5 thousand years until the present day.

Keywords: trisection of an angle, mathematics in Ancient Greece, Pythagorean school, geometric algebra, worldview, history of mathematics, engineering approach, mechanical method, compass, ruler, bisector, algorithm, solution to the problem of trisection of an angle.

Дата поступления в редакцию: 20.05.2024