

## **АНАЛИЗ РЕЖИМОВ ВИБРОТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ОДНОМАССНОЙ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ СЛОЯ ГРУЗА ПРИ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ГРУЗОНЕСУЩЕГО ОРГАНА**

**А.В. Архипенко**

к.т.н., e-mail: andrei-arhipenko@mail.ru

Международный инновационный университет, Сочи, Россия

**Аннотация.** Рассмотрено движение упруго-вязко-пластичной модели груза по наклонному грузонесущему органу. Показано, что эффективность вибротранспортирования тонкоизмельчённых сыпучих материалов определяется не только параметрами вибрации, но и весьма существенно зависит от свойств слоя груза и внешних сопротивлений. Выявлено, что формула для определения скорости вибротранспортирования материальной частицы с полученными численными значениями коэффициента передачи горизонтальной составляющей скорости, применяемая для зернистых материалов с хорошей воздухопроницаемостью, может быть использована и для определения скорости виброперемещения тонкоизмельчённых сыпучих материалов посредством введения поправочного коэффициента, учитывающего влияние упруго-гистерезисных свойств груза и аэродинамических сопротивлений на момент отрыва груза от грузонесущей поверхности и продолжительность этапа полёта.

**Ключевые слова:** упруго-вязко-пластичная модель, вибротранспортирование, сыпучий материал, параметры вибрации, коэффициент передачи скорости, упруго-гистерезисные свойства, аэродинамические сопротивления, массовый груз, сдвиг фаз, прямолинейные гармонические колебания, характеристическое уравнение, апериодический характер, трансцендентное уравнение, коэффициент режима работы, виброповерхность.

Экспериментальные исследования [1] показывают, что при вибротранспортировании массовых грузов значения скорости виброперемещения, полученные опытным путём, существенно отличаются от расчётных значений, вычисленных на основе представления груза в виде материальной частицы (особенно для тонкоизмельчённых сыпучих материалов). При исследованиях [2–4] было обнаружено, что при вибротранспортировании массовых грузов (большим слоем) в безотрывных режимах работы наблюдается сдвиг фаз между максимумом нормальной реакции на рабочий орган и максимумом ускорения рабочего органа. Это свидетельствует о наличии у слоя упругих и вязких свойств и, следовательно, о недопустимости исследования процессов вибротранспортирования тонкоизмельчённых сыпучих материалов, представляя груз материальной частицей.

Применение упруго-вязко-пластичной модели позволяет в качественном и количественном отношении моделировать физические процессы, происходящие при виброперемещении тонкоизмельчённых сыпучих материалов и получать при этом удовлетворительную сходимость расчётных и экспериментальных значений [5, 6].

Рассмотрим движение упруго-вязко-пластичной модели груза (рис. 1) по грузонесущему органу, наклонённому под углом  $\alpha$  к горизонту и совершающему прямолинейные гармонические колебания по закону [7]:

$$\begin{cases} y' = A \sin(\alpha + \beta) \sin \omega t; \\ x' = A \cos(\alpha + \beta) \sin \omega t, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{y}' = A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t; \\ \dot{x}' = A\omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \ddot{y}' = -A\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega t; \\ \ddot{x}' = -A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \sin \omega t, \end{cases} \quad (3)$$

где  $x', y', \dot{x}', \dot{y}', \ddot{x}', \ddot{y}'$  – перемещение, скорость и ускорение грузонесущего органа по оси  $OX$  и  $OY$  соответственно;  $A$  – амплитуда колебаний, м;  $\omega$  – частота колебаний;  $\beta$  – угол вибрации;  $t$  – текущее время, сек.

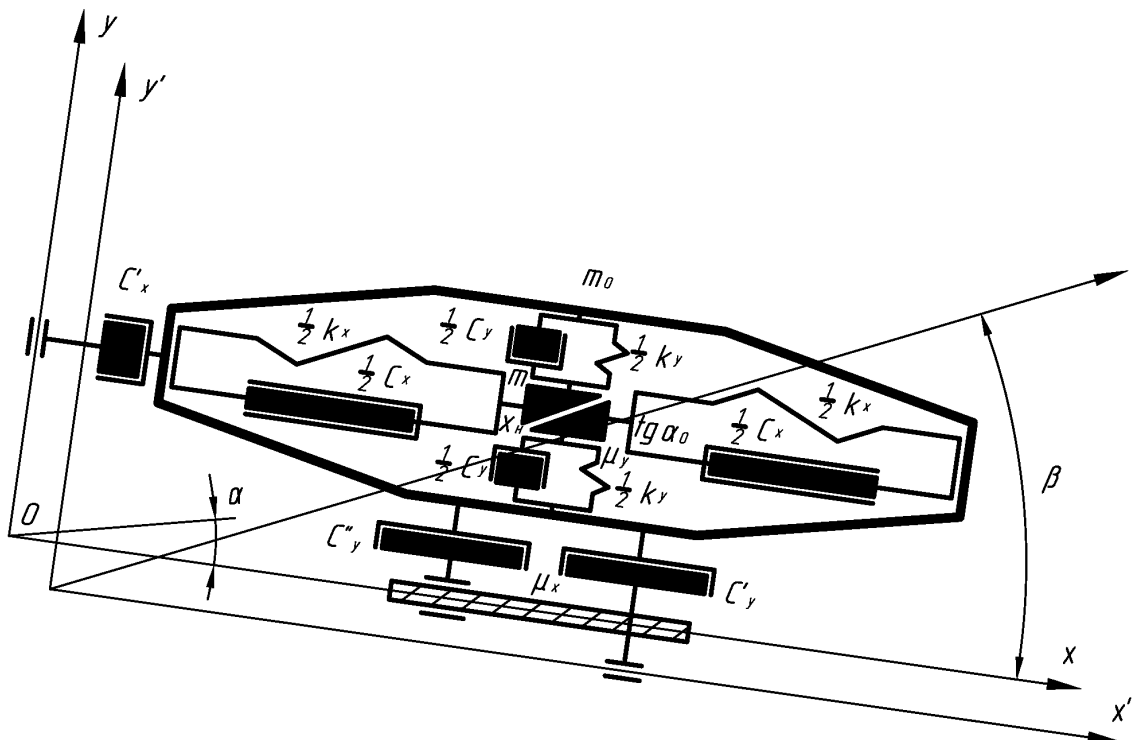


Рис. 1. Движение упруго-вязко-пластичной модели груза по грузонесущему органу:  $k_x, k_y$  – упругие элементы;  $C_x, C_y$  – внутренние вязкие элементы;  $C_x', C_y', C_x'', C_y''$  – внешние вязкие связи;  $m$  – масса ядра модели;  $m_0$  – масса рамки модели;  $X_n$  – начальная упругая деформация;  $\text{tg} \alpha_0$  – параметр пористости слоя;  $\mu_x, \mu_y$  – коэффициенты внешнего и внутреннего трения

Дифференциальные уравнения движения модели будут:

– на участке совместного движения (\*):

$$\ddot{y} + 2n_y^* \dot{y} + p_y^2 y = -g \cos \alpha + A\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_y'^* A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t; \quad (4)$$

$$\ddot{x} + 2n_x^* \dot{x} = g \sin \alpha + A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_x'^* A\omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t - \operatorname{sgn}(\dot{x}) \mu \left[ p_y^2 y + 2n_y^* \dot{y} - 2n_y'^* A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t \right]; \quad (5)$$

– на участке свободного движения:

$$\ddot{y} + 2n_y \dot{y} = -g \cos \alpha + A\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_y' A\omega \sin(\alpha + \beta) \cos \omega t; \quad (6)$$

$$\ddot{x} + 2n_x \dot{x} = g \sin \alpha + A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \sin \omega t - 2n_x' A\omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t, \quad (7)$$

где

$$2n_y^* = \frac{C_y' + C_y''}{m}; 2n_y'^* = \frac{C_y''}{m}; p_x^2 = \frac{k_x}{m}; p_y^2 = \frac{k_y}{m}; 2n_x^* = \frac{C_x' + C_x''}{m};$$

$$2n_x'^* = \frac{C_x''}{m}; 2n_y = \frac{C_y' + C_y''}{m}; 2n_y' = \frac{C_y''}{m}; 2n_x = \frac{C_x' + C_x''}{m}; 2n_x' = \frac{C_x''}{m}.$$

В зависимости от свойств груза  $n_y^*$ ,  $n_y'^*$  и  $p_y$  на участке совместного движения в направлении оси  $y$  будут устанавливаться различные режимы движения, и, соответственно, уравнение (4) будет иметь различные решения. Форма решения определяется соотношением параметров  $n_y^*$ ,  $p_y$  и видом корней характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 2n_y^* \lambda + p_y^2 = 0. \quad (8)$$

Корни уравнения:

$$\lambda_1 = -n_y^* + \sqrt{n_y^{*2} - p_y^2}; \lambda_2 = -n_y^* - \sqrt{n_y^{*2} - p_y^2}. \quad (9)$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения возможны три случая движения упруго-вязко-пластичной модели движения груза:

– если  $p_y > n_y^*$  (сопротивления малы по сравнению с упругостью), движение носит колебательный характер;

– если  $p_y < n_y^*$  (сопротивления преобладают над упругостью), устанавливается аperiodическое движение;

– если  $p_y = n_y^*$  (сопротивления равны силам упругости), будет иметь место предельное аperiodическое движение.

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования [8], в процессе вибрационного транспортирования движение насыпных грузов вследствие

больших внутренних сопротивлений носит преимущественно аperiodический характер. Речь идёт об аperiodическом характере упругих колебаний модели слоя груза в направлении оси лишь на участке совместного движения. В целом движение груза в процессе вибротранспортирования является периодическим. Решение будем искать с учётом собственных колебаний модели. При  $p_y < n_y^*$  решение уравнения (4) имеет вид:

$$y = A \sin(\alpha + \beta) \left[ K_1 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + K_2 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + C_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + D_1 \right]; \quad (10)$$

$$\dot{y} = A \omega \sin(\alpha + \beta) \left[ \frac{\aleph_{1y}^*}{z} K_1 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + \frac{\aleph_{2y}^*}{z} K_2 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega(t-t_H)} + C_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \right], \quad (11)$$

где  $z$  – коэффициент расстройки ( $z = \frac{\omega}{p_y}$ );  $\nu_y^*$  – коэффициент демпфирования ( $\nu_y^* = \frac{n_y^*}{p_y}$ );  $K'^*$  – коэффициент, характеризующий удельный вклад сопротивлений, пропорциональных абсолютной и относительной скорости движения модели слоя груза ( $K'^* = \frac{n'^*}{n^*}$ );

$$\aleph_{1y}^* = -\nu_y^* + \sqrt{\nu_y^{*2} - 1}; \aleph_{2y}^* = -\nu_y^* - \sqrt{\nu_y^{*2} - 1}; B_1 = \frac{z^2(1-z^2) - 4\nu_y^{*2}K'^*}{(1-z^2) + 4\nu_y^{*2}z^2};$$

$$C_1 = \frac{-2\nu_y^*z[K'^*(1-z^2) + z^2]}{(1-z^2)^2 + 4\nu_y^{*2}z^2}; D_1 = -\frac{z^2}{K_p}; K_p = \frac{A\omega^2 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha}.$$

Постоянные интегрирования  $K_1$  и  $K_2$  определяются исходя из начальных условий совместного движения груза.

Совместное движение груза начинается при пуске вибрационной машины, т. е. в момент времени  $t_H = 0$ . При этом груз лежит на грузонесущем органе, сформировав упругую связь  $K_y$  на величину  $y_{ст} = mg/K_y$ . Таким образом, начальными условиями для первого цикла движения груза будут:  $t_H = 0, y(t_H) = mg/K_y, \dot{y}(t_H) = 0$ .

Для начальных условий, соответствующих второму и последующим циклам движения:  $t = t_n, y(t_n) = y_n, \dot{y}(t_n) = \dot{y}_n$ .

$$K_1 = \frac{-z\dot{\xi}_{ny} - (zB_1 - \aleph_{2y}^*C_1) \cos \omega t_n - (\aleph_{2y}^*B_1 + zC_1) \sin \omega t_n - \aleph_{2y}^*D_1}{\aleph_{2y}^* - \aleph_{1y}^*};$$

$$K_2 = \frac{z\dot{\xi}_{ny} - (zB_1 - \aleph_{1y}^*C_1) \cos \omega t_n + (\aleph_{1y}^*B_1 + zC_1) \sin \omega t_n - \aleph_{1y}^*D_1}{\aleph_{2y}^* - \aleph_{1y}^*},$$

где  $\dot{\xi}_{ny}$  – безразмерная относительная скорость груза в направлении оси  $Y$  в момент падения на грузонесущий орган, равная

$$\dot{\xi}_{ny} = \frac{\dot{y}_n}{A\omega \sin(\alpha + \beta)}.$$

Нормальная реакция груза на поверхность грузонесущего органа:

$$N^* = mA\omega^2 \sin(\alpha + \beta) \left[ -\frac{1}{K_p} + u_1 \cos \omega t + u_2 \sin \omega t + u_3 e^{\frac{N_{1y}^*}{z}\omega(t-t_n)} + u_4 e^{\frac{N_{2y}^*}{z}\omega(t-t_n)} \right], \quad (12)$$

где

$$u_1 = \frac{-2\nu_y^* z [K^{1*} (1 - K^{1*}) z^2]}{(1 - z^2)^2 + 4\nu_y^{*2} z^2}; \quad u_2 = \frac{-z^2 (4\nu_y^{*2} K^{1*} - 1) + 1}{(1 - z^2)^2 + 4\nu_y^{*2} z^2};$$

$$u_3 = \frac{(2\nu_y^* N_{1y}^* + 1) \left[ \frac{z^2 N_{2y}^*}{K_p} - z\dot{\xi}_{ny} + (zB_1 + N_{2y}^* C_1) \cos \omega t_n - (N_{2y}^* B_1 + zC_1) \sin \omega t_n \right]}{z^2 (N_{2y}^* - N_{1y}^*)};$$

$$u_4 = \frac{(2\nu_y^* N_{2y}^* + 1) \left[ \frac{z^2 N_{2y}^*}{K_p} - z\dot{\xi}_{ny} + (zB_1 + N_{1y}^* C_1) \cos \omega t_n - (N_{1y}^* B_1 + zC_1) \sin \omega t_n \right]}{z^2 (N_{2y}^* - N_{1y}^*)}.$$

Момент отрыва от поверхности грузонесущего органа определяется из выражения:

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \sin \left( \omega t_0 + \operatorname{arctg} \frac{u_1}{u_2} \right) + u_3 e^{\frac{N_{1y}^*}{z}\omega(t_0-t_n)} + u_4 e^{\frac{N_{2y}^*}{z}\omega(t_0-t_n)} = \frac{1}{K_p}. \quad (13)$$

Анализ этого выражения показывает, что момент отрыва груза от грузонесущей поверхности зависит от режима колебаний грузонесущего органа свойств и момента падения слоя транспортируемого груза, т. е., по существу, от характера движения на предшествующем этапе. Анализируя уравнение (13), можно увидеть, что второй и третий члены его левой части при достаточно больших значениях коэффициентов  $N_{1y}^*$  и  $N_{2y}^*$  резко уменьшаются с увеличением периода совместного движения груза  $\omega(t_0 - t_n)$ . Уменьшение этих членов по мере роста продолжительности совместного движения происходит вследствие свойств экспоненциальной функции  $e^t$ . Физически уменьшение этих членов объясняется тем, что при больших сопротивлениях, которые действуют в процессе соударения массовых грузов с грузонесущим органом, колебания, вызванные начальными возмущениями, быстро затухают. Имея ввиду, что при транспортировании массовых грузов (особенно тонкоизмельчённых) продолжительность совместного движения достаточно велика, выражение (13) можно упростить без существенного ущерба для точности получаемых результатов. Выражение для определения угла отрыва будет иметь вид:

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{1}{K_p \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - \operatorname{arctg} \frac{u_1}{u_2}. \quad (14)$$

Используя экспериментально полученные значения углов отрыва  $\varphi_0$  для конкретных грузов, можно определять сочетания  $p$  и  $n$ , характеризующие слой данного груза.

Оторвавшись, груз совершает полёт в стеснённых условиях, обусловленных наличием слоя определённой высоты. Относительное движение груза в направлении оси  $Y$  при наличии сопротивлений описывается уравнением (6). Решив это уравнение при начальных условиях  $t = t_0, y(t_0) = y_0$  и  $\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$ , получим относительное перемещение и скорость груза в направлении оси уна участке свободного движения:

$$y = A \sin(\alpha + \beta) [K_3 + K_4 e^{-N_y^* \omega(t-t_0)} + C_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t + D_2 \omega t]; \quad (15)$$

$$\dot{y} = A \omega \sin(\alpha + \beta) [N_y K_4 e^{-N_y \omega(t-t_0)} + C_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + D_2], \quad (16)$$

где

$$N_y = \frac{n_y''}{\omega}; B_2 = \frac{1}{1 + N_y^2}; C_2 = \frac{N_y}{1 + N_y^2}; D_2 = \frac{1}{N_y K_p};$$

$$K_3 = \xi_{0y} + \frac{1}{N_y} \dot{\xi}_{0y} - \left( C_2 + \frac{1}{N_y} B_2 \right) \cos \omega t_0 + \left( \frac{1}{N_y} C_2 - B_2 \right) \sin \omega t_0 - D_2 \left( \omega t_0 + \frac{1}{N_y} \right);$$

$$K_4 = \frac{1}{N_y} \left( -\dot{\xi}_{0y} + B_2 \cos \omega t_0 - C_2 \sin \omega t_0 + D_2 \right);$$

$\xi_{0y}, \dot{\xi}_{0y}$  – безразмерное относительное перемещение и скорость груза в направлении оси  $Y$  в момент отрыва от грузонесущего органа.

$$\xi_{0y} = \frac{y}{A \sin(\alpha + \beta)}; \dot{\xi}_{0y} = \frac{\dot{y}}{A \omega \sin(\alpha + \beta)}.$$

Подставив в уравнения (10) и (11) значения коэффициентов  $K_3$  и  $K_4$ , получим выражения для определения перемещения и скорости в направлении оси  $Y$  на участке свободного движения:

$$y = A \sin(\alpha + \beta) \left[ \xi_{0y} - \frac{1}{N_y} \left( B_2 \cos \omega t_0 - C_2 \sin \omega t_0 + D_2 - \dot{\xi}_{0y} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - e^{-N_y \omega(t-t_0)} \right) + C_2 (\cos \omega t - \cos \omega t_0) + B_2 (\sin \omega t - \sin \omega t_0) + \right. \\ \left. + D_2 (\omega t - \omega t_0) \right]; \quad (17)$$

$$\dot{y} = A \omega \sin(\alpha + \beta) \left[ \dot{\xi}_{0y} e^{-N_y \omega(t-t_0)} + B_2 (\cos \omega t - \cos \omega t_0 e^{-N_y \omega(t-t_0)}) - \right. \\ \left. - C_2 (\sin \omega t - \sin \omega t_0 e^{-N_y \omega(t-t_0)}) + D_2 (1 - e^{-N_y \omega(t-t_0)}) \right]. \quad (18)$$

Момент падения груза на грузонесущий орган определим в результате решения трансцендентного уравнения, полученного приравнением к нулю относительного

перемещения груза на участке полёта в направлении оси  $Y$ , как наиболее близкий к  $\omega t_0$  корень

$$K_3 + K_4 e^{-N_y \omega (t_n - t_0)} + \sqrt{\frac{2}{2} + B_2^2} \sin \left( \omega t_n + \arctg \frac{C_2}{B_2} \right) + D_2 \omega t_n = 0. \quad (19)$$

Зная углы отрыва и падения, можно определить углы полёта и углы совместного движения груза.

Используя экспериментальные значения угла полёта, можно подобрать значения коэффициентов сопротивления движению груза на участке свободного движения.

Перемещение груза вдоль грузонесущего органа (в направлении оси  $X$ ) исследуем, воспользовавшись уравнениями (5) и (7). Подставив в уравнение (5) значения  $y$  и  $\dot{y}$  в соответствии с равенствами (10) и (11), приведём это уравнение к удобному для решения виду:

$$\ddot{x} + 2n_x^* \dot{x} = A\omega^2 \cos(\alpha + \beta) \left[ R_1 + R_2 \cos \omega t + R_3 \sin \omega t + R_4 e^{\frac{N_{1y}^*}{z} \omega t} + R_5 e^{\frac{N_{2y}^*}{z} \omega t} \right], \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{g}{A\omega^2 \cos(\alpha + \beta)} (\sin \alpha - \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \cos \alpha); \\ R_2 &= -\frac{\nu_x^* K_x'}{z} + \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \left( \frac{2\nu_y^*}{z} B_1 + \frac{1}{z^2} C_1 - \frac{2\nu_y^* K_x'}{z} \right); \\ R_3 &= 1 + \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \left( \frac{1}{z^2} B_1 - \frac{2\nu_y^*}{z} C_1 \right); \\ R_4 &= \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \frac{1 + 2\nu_y^* N_{1y}^*}{z^2} K_1; \\ R_5 &= \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \frac{1 + 2\nu_y^* N_{2y}^*}{z^2} K_2. \end{aligned}$$

Начальными условиями в момент пуска машины будут  $t_H = 0$ ,  $x(t_H) = 0$ ,  $\dot{x}(t_H) = 0$ . При определении начальных условий для анализа последующих циклов движения груза следует исходить из возможных режимов движения в направлении оси  $X$ .

Уравнение (20) описывает движение груза на участке совместного движения только в случае, если скорость его не обращается в нуль и не меняет знак. В противном случае уравнение распадается на два самостоятельных уравнения, описывающих движение на участках с положительной и отрицательной скоростями. При этом переход от одного решения к другому сопровождается обращением скорости в нуль.

В связи с изложенным, в качестве начальных условий примем  $t = (t_H)$ ,  $x(t_H) = x_H$ ,  $\dot{x}(t_H) = \dot{x}_H$ , имея в виду, что  $t_H$  может быть моментом начала движения при пуске ( $t_H = 0$ ), моментом начала движения после падения ( $t_H = t_H$ ) или моментом начала движения груза после остановки ( $t_H = t_{0\pm}$ ). Соответствующие значения будут принимать начальные перемещения  $x_H$  и начальные скорости  $\dot{x}_H$ .

Решая уравнение (20) при принятых начальных условиях, найдём относительные перемещения и скорость движения груза в направлении оси  $X$  на участке совместного движения:

$$x = A \cos(\alpha + \beta) \left( K_5 + K_6 e^{-\frac{\nu_x^*}{z} \omega(t-t_H)} + C_3 \cos \omega t + B_3 \sin \omega t + C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} + D_3 \omega t \right); \quad (21)$$

$$\dot{x} = A \omega \cos(\alpha + \beta) \left( -\frac{\nu_x^*}{z} K_6 e^{-\frac{\nu_x^*}{z} \omega(t-t_H)} - C_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t + \frac{\aleph_{1y}^*}{z} C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + \frac{\aleph_{2y}^*}{z} B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} + D_3 \right), \quad (22)$$

где

$$B_3 = \frac{z^2 - \nu_x^{*2} K_x' - \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\nu_x^{*2} + z^2} \times \left[ (1 - 2\nu_x^* \nu_y^*) B_1 - \left( -2\nu_y^* z + \frac{\nu_x^*}{z} \right) C_1 + 2\nu_x^* K_x' \right];$$

$$C_3 = \frac{z \nu_x^* (1 - K_x') - \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\nu_x^{*2} + z^2} \times \left[ \left( 2\nu_y^* z_y + \frac{\nu_x^*}{z} \right) B_1 + (1 - 2\nu_x^* \nu_y^*) C_1 + 2\nu_y^* K_x' z \right];$$

$$D_3 = \frac{gz [\sin \alpha + \operatorname{sgn}(\dot{x}) f \cos \alpha]}{A \omega^2 \cos(\alpha + \beta) \nu_x^*};$$

$$B_4 = -\operatorname{sgn}(\dot{x}) f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \frac{1 + 2\nu_y^* \aleph_{2y}^*}{\aleph_{2y}^* (\nu_x^* + \aleph_{2y}^*)} K_2;$$

$$K_5 = \xi_{Hx} + \frac{z}{\nu_x^*} \dot{\xi}_{Hx} + \left( \frac{z}{\nu_x^*} B_3 - C_3 \right) \cos \omega t_H - \left( B_3 - \frac{z}{\nu_x^*} C_3 \right) \sin \omega t_H - \left( 1 + \frac{\aleph_{1y}^*}{\nu_x^*} \right) C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} - \left( 1 + \frac{\aleph_{2y}^*}{\nu_x^*} \right) B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} - D_3 (1 + \omega t_H);$$

$$K_6 = -\frac{z}{\nu_x^*} \left( \dot{\xi}_{Hx} + C_3 \sin \omega t_H + B_3 \cos \omega t_H - \frac{\aleph_{1y}^*}{z} C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t_H} - \frac{\aleph_{2y}^*}{z} B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t_H} - D_3 \right),$$

где  $\xi_{Hx}$ ,  $\dot{\xi}_{Hx}$  – соответственно, безразмерное перемещение и скорость груза в направлении оси  $X$  в момент начала движения, равные

$$\xi_{Hx} = \frac{x_H}{A \cos(\alpha + \beta)}; \quad \dot{\xi}_{Hx} = \frac{\dot{x}_H}{A \omega \cos(\alpha + \beta)}.$$



Приравняв нулю выражение (22), получим трансцендентное уравнение, из которого можно определить момент перехода от относительного скольжения груза к относительному покою:

$$-\frac{\nu_x^*}{z} K_6 e^{-\frac{\nu_x^*}{z} \omega(t-t_H)} - C_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t + \frac{\aleph_{1y}^*}{z} C_4 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + \frac{\aleph_{2y}^*}{z} B_4 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} + D_3 = 0. \quad (23)$$

Трансцендентное уравнение для определения момента перехода от относительно покоя к движению будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) \left[ -\sin \omega t - \frac{\nu_x^*}{z} \cos \omega t - \frac{1}{K'_p} \right] = \\ & = f \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \times \left[ \begin{aligned} & \left( 2\frac{\nu_x^*}{z} B_1 + \frac{1}{z^2} C_1 + 2\frac{\nu_y^*}{z} \right) \cos \omega t + \\ & + \left( \frac{1}{z^2} B_1 - 2\frac{\nu_y^*}{z} C_1 \right) \sin \omega t + \\ & + \frac{1+2\nu_y^* \aleph_{1y}^*}{z^2} K_1 e^{\frac{\aleph_{1y}^*}{z} \omega t} + \frac{1+2\nu_y^* \aleph_{2y}^*}{z^2} K_2 e^{\frac{\aleph_{2y}^*}{z} \omega t} - \frac{1}{K'_p} \end{aligned} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где

$$K'_p = \frac{A\omega^2 \cos(\alpha + \beta)}{g \sin \alpha}.$$

Относительное перемещение и скорость груза в направлении оси X на участке свободного движения получим, решив уравнение (7) при начальных условиях  $t = t_0$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ :

$$x = A \cos(\alpha + \beta) (K_7 + K_8 e^{-\aleph_x \omega(t-t_H)} + C_5 \cos \omega t + B_5 \sin \omega t + D_4 \omega t); \quad (25)$$

$$\dot{x} = A\omega \cos(\alpha + \beta) (-\aleph_x K_8 e^{-\aleph_x \omega(t-t_H)} - C_5 \sin \omega t + B_5 \cos \omega t + D_4), \quad (26)$$

где

$$\aleph_x = \frac{n_x}{\omega}; \aleph'_x = \frac{n'_x}{\omega}; \aleph''_x = \frac{n''_x}{\omega}; B_5 = -\frac{1 + \aleph_x'^2}{1 + \aleph_x^2};$$

$$C_5 = -\frac{\aleph_x''^2}{1 + \aleph_x^2}; D_4 = \frac{g \sin \alpha}{4\aleph_x A \omega \cos(\alpha + \beta)};$$

$$K_7 = \xi_{0x} + \frac{1}{\aleph_x} \dot{\xi}_{0x} - \left( C_5 - \frac{1}{\aleph_x} B_5 \right) \cos \omega t_0 + \left( \frac{1}{\aleph_x} C_5 - B_5 \right) \sin \omega t_0 - D_4 \left( \omega t_0 + \frac{1}{\aleph_x} \right);$$

$$K_8 = \frac{1}{\aleph_x} \left( -\dot{\xi}_{0x} - C_5 \sin \omega t_0 + B_5 \cos \omega t_0 + D_4 \right),$$

где  $\xi_{0x}$ ,  $\dot{\xi}_{0x}$  – соответственно, безразмерное относительное перемещение и относительная скорость груза в направлении оси X в момент отрыва от грузонесущего органа.

Подставив в уравнения (24) и (25) значения  $K_7$  и  $K_8$ , получим выражения для определения относительного перемещения и скорости груза в направлении оси  $X$  на участке свободного движения:

$$x = A \cos(\alpha + \beta) \times \left[ \begin{aligned} &\xi_{0x} + \frac{1}{N_x} \dot{\xi}_{0x} (1 - e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + \\ &+ \frac{1}{N_x} (C_5 \sin \omega t_0 - B_5 \cos \omega t_0 - D_4) (1 - e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + \\ &+ C_5 (\cos \omega t - \cos \omega t_0) + B_5 (\sin \omega t - \sin \omega t_0) + \\ &+ D_4 (\omega t - \omega t_0) \end{aligned} \right]; \quad (27)$$

$$\dot{x} = A \omega \cos(\alpha + \beta) \times \left[ \begin{aligned} &\xi_{0x} e^{-N_x \omega(t-t_0)} - C_5 (\sin \omega t - \sin \omega t_0 e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + \\ &+ B_5 (\cos \omega t - \cos \omega t_0 e^{-N_x \omega(t-t_0)}) + D_4 (1 - e^{-N_x \omega(t-t_0)}) \end{aligned} \right]. \quad (28)$$

При помощи полученных зависимостей можно определить среднюю скорость вибрационного транспортирования, которая является одним из основных показателей вибрационной транспортирующей машины. Средняя скорость вибрационного транспортирования определяется скоростями транспортируемого груза на отдельных этапах движения, а также характером, продолжительностью и порядком чередования этих этапов.

Скорость на участке свободного движения и на участках скольжения определяется выражениями (22) и (26).

Скорость на участке относительного покоя:

$$\dot{x}(\delta_0) = A \omega \cos(\alpha + \beta) \cos \omega t. \quad (29)$$

Проинтегрировав эти выражения в соответствующих пределах, получим формулы для определения средних скоростей движения грузов на отдельных этапах. Скорость на участке полета груза:

$$V_\delta = \frac{A \omega \cos(\alpha + \beta)}{\delta} \left[ \begin{aligned} &K_8 (e^{-N_x \omega(t-t_0)} - 1) + C_5 (\cos \omega t - \cos \omega t_0) + \\ &+ (1 + B_5) (\sin \omega t - \sin \omega t_0) + D_4 (\omega t - \omega t_0) \end{aligned} \right]. \quad (30)$$

Средняя скорость движения груза на участке относительного скольжения:

$$V_{\delta\pm} = \frac{A \omega \cos(\alpha + \beta)}{\delta_\pm} \times \left[ \begin{aligned} &K_8 \left( e^{\frac{\nu_x^*}{z}(\omega t_{k\pm} - \omega t_{n\pm})} - 1 \right) + B_5 (\sin \omega t_{k\pm} - \sin \omega t_{n\pm}) + \\ &C_5 (\cos \omega t_{k\pm} - \cos \omega t_{n\pm}) + \\ &+ \frac{N_{1x}^*}{z} C_4 \left( e^{\frac{N_{1y}^*}{z} \omega t_{k\pm}} - e^{\frac{N_{1y}^*}{z} \omega t_{n\pm}} \right) + \\ &+ \frac{N_{2x}^*}{z} B_4 \left( e^{\frac{N_{2y}^*}{z} \omega t_{k\pm}} - e^{\frac{N_{2y}^*}{z} \omega t_{n\pm}} \right) + \\ &+ D_3 (\omega t_{k\pm} - \omega t_{n\pm}) \end{aligned} \right], \quad (31)$$

$\omega t_K$  и  $\omega t_H$  в зависимости от характера движения могут быть:

- 1) для  $V_{\delta+}$ :  $\omega t_K = \omega t_0, \omega t_{+0}$ ;  $\omega t_H = \omega t_{\Pi}, \omega t_{-0}$ ;
- 2) для  $V_{\delta-}$ :  $\omega t_K = \omega t_0, \omega t_{-0}$ ;  $\omega t_H = \omega t_{\Pi}, \omega t_{+0}$ .

Средняя скорость груза на участке его совместного перемещения с грузонесущим органом:

$$V_{\delta 0} = \frac{A\omega \cos(\alpha + \beta)}{\delta_0} (\sin \omega t_K - \sin \omega t_H), \quad (32)$$

$\omega t_K$  и  $\omega t_H$  в зависимости от характера движения могут быть:

- 1)  $\omega t_K = \omega t_{0\pm}, \omega t_0$ ;
- 2)  $\omega t_H = \omega t_{\pm 0}, \omega t_{\Pi}$ .

Как показывают экспериментальные и теоретические исследования, в промышленных вибрационных транспортирующих машинах независимо от начальных условий в течение непродолжительного времени начинается установившееся движение груза, которое характеризуется периодическим повторением моментов перехода от одного этапа движения груза к другому [9]. Для определения средней скорости движения груза в установившемся режиме достаточно найти среднюю скорость движения груза за цикл

$$V_{cp} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^k V_i \delta_i, \quad (33)$$

где  $V_i$  – скорость груза на  $i$ -м этапе движения;  $\delta_i$  – фазовый угол  $i$ -го этапа движения;  $k$  – число моментов перехода от одного этапа движения к другому за один цикл.

Эффективность процессов вибротранспортирования с точки зрения сообщения скорости перемещаемому грузу характеризуется коэффициентом передачи скорости. Зная среднюю скорость транспортирования груза, нетрудно определить коэффициент передачи скорости:

$$\aleph = \frac{V_{cp}}{A\omega \cos \beta}. \quad (34)$$

Коэффициент передачи скорости показывает, в какой мере грузонесущий орган сообщает скорость всей массе транспортируемого груза. Чем больше коэффициент передачи скорости, тем эффективнее, с точки зрения сообщения скорости, режим вибротранспортирования.

Если принять в качестве оптимального режим движения груза без относительного проскальзывания, то средняя скорость установившегося движения груза будет определяться величиной перемещения на этапе полёта, отнесённой к продолжительности цикла движения груза. При одном этапе полёта за один период колебаний виброповерхности (продолжительность цикла движения груза равна периоду колебаний виброповерхности) выражение для средней скорости транспортирования груза по горизонтальной ( $\alpha = 0$ ) вибрирующей поверхности будет иметь вид:

$$V = A\omega \cos \beta \frac{1}{2\pi} \left[ \begin{aligned} &K_8 (e^{-\aleph x \delta} - 1) + C_5 (\cos \varphi_{\Pi} - \cos \varphi_0) + \\ &+ (1 + B_5) (\sin \varphi_{\Pi} - \sin \varphi_0) \end{aligned} \right]. \quad (35)$$

Как и для безразмерного коэффициента передачи горизонтальной составляющей скорости, характеризующего эффективность вибротранспортирования, будем иметь:

$$\aleph = -\frac{1}{2\pi} \left[ \begin{aligned} &K_8 (e^{-\aleph_x \delta} - 1) + C_5 (\cos \varphi_{\pi} - \cos \varphi_0) + \\ &+ (1 + B_5) (\sin \varphi_{\pi} - \sin \varphi_0) \end{aligned} \right]. \quad (36)$$

Если учесть, что при значениях коэффициента режима работы  $K_p = 2,2 \dots 2,6$  можно практически пренебречь скольжением груза в прямом и обратном направлениях и для реальных грузов считать, что  $n_x = n'_x$ ,  $\xi_{ox} = 0$ ,  $\dot{\xi}_{ox} = 0$ , то при  $\alpha = 0$  выражения для средней скорости вибротранспортирования и коэффициента передачи скорости ещё более упростятся и будут иметь вид:

$$V = A\omega \cos \beta \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\aleph_x \delta}) \frac{1}{\aleph_x} \cos \varphi_0; \quad (37)$$

$$\aleph = \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-\aleph_x \delta}) \frac{1}{\aleph_x} \cos \varphi_0. \quad (38)$$

Анализ этих выражений показывает, что эффективность вибротранспортирования тонкоизмельчённых материалов зависит не только от коэффициента режима работы вибротранспортирующей установки, но и в не меньшей степени от свойств груза и внешних сопротивлений.

Скорость вибротранспортирования тонкоизмельчённого сыпучего материала существенно отличается от теоретически вычисленной скорости движения материальной частицы.

Выражение для приближенного вычисления средней скорости движения материальной частицы [10]:

$$V_{cp} = A\omega \cos \beta \frac{1}{2\pi} [(\varphi_{\pi} - \varphi_0) \cos \varphi_0 - (\sin \varphi_{\pi} - \sin \varphi_0)]. \quad (39)$$

Анализ выражений (37) и (39) показывает, что скорость вибротранспортирования тонкоизмельчённого сыпучего груза всегда меньше скорости движения, вычисленной для материальной частицы, из-за влияния свойств слоя груза, внешних сопротивлений на момент отрыва от плоскости на продолжительность этапа полёта.

Процесс транспортирования тонкоизмельчённого сыпучего материала формируется в большей степени под влиянием аэродинамических факторов, связанных с плохой воздухопроницаемостью слоя [11]. Дело в том, что при транспортировании таких материалов фазовый сдвиг между движением груза и грузонесущего органа возникает не столько вследствие упруго-гистерезисных свойств слоя, сколько под влиянием аэродинамических сопротивлений. Момент отрыва при перемещении тонкоизмельчённых материалов может запаздывать настолько, что потеря контакта происходит при положительных ускорениях грузонесущего органа, т. е. когда он находится в нижней части своей траектории. Продолжительность свободного движения (полёта) тонкоизмельчённых сыпучих грузов с плохой воздухопроницаемостью

слоя даже при весьма интенсивных колебаниях грузонесущего органа не превышает одного периода колебаний. Это объясняется весьма существенным влиянием на продолжительность полёта и характер движения груза аэродинамических сопротивлений, которые возникают вследствие того, что в пространстве между поверхностью грузонесущего органа и нижним монослоем транспортируемого материала с плохой воздухопроницаемостью слоя при подбрасывании возникает разрежение, а при падении – повышение давления. Вследствие этого за счёт уравнивания этих периодических колебаний давления в пространстве между слоем транспортируемого груза и поверхностью грузонесущего органа при оттоке избыточного и притоке недостаточного количества воздуха, проходящего через поры в слое транспортируемого материала, на частицы груза действует пульсирующий аэродинамический напор, направленный с некоторым сдвигом по фазе, в основном, в сторону, противоположную их перемещению. При этом частицы тонкоизмельчённого сыпучего материала движутся по более сложному закону, чем одиночная материальная частица, а величины аэродинамических сопротивлений являются в основном функцией удельной газопроницаемости слоя транспортируемого груза и насыпного веса, а также зависят от режима колебаний грузонесущего органа.

Учитывая это, при вибротранспортировании тонкоизмельчённых сыпучих материалов нет необходимости назначать весьма интенсивные режимы колебаний грузонесущего органа ( $K_p > 2,4 \dots 2,6$ ), а повышения эффективности вибротранспортирования следует добиваться за счёт уменьшения толщины слоя транспортируемого груза и за счёт использования рациональной формы поперечного сечения грузонесущего органа.

## Литература

1. Архипенко А.В., Лозовецкий В.В. Экспериментально-аналитическое моделирование движения сыпучей среды в транспортно-технологических вибрационных установках // Транспорт: Наука, техника, управление: науч. информ. сб. М.: ВИНТИРАН, 2021. № 3. С. 57–63.
2. Бельков Н.И. Исследование закономерностей и особенностей вибрационного перемещения тонкоизмельчённых сыпучих материалов: дисс. ... канд. техн. наук. Л., 1974. 178 с.
3. Blekhman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical system // Applied Mechanics reviews. 1995. Vol. 48, No. 11. Pt. I. P. 733–752.
4. Архипенко А.В. Скольжение частиц грунта по рабочим органам вибромашин // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1 (65). С. 4–14.
5. Гончаревич И.Ф., Фролов К.В. Теория вибрационной техники и технологии. М.: Наука, 1981. 319 с.
6. Гончаревич И.Ф., Гудушаури Э.Г., Гаврилина Л.В. Модернизация транспортно-перегрузочной техники методами вибротехнологий // Машиностроение и инженерное образование. 2014. № 2. С. 9–14.
7. Вибрация в технике: справочник: в 6 т. / под ред. И.И. Блехмана. М.: Машиностроение, 1979. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. 351 с.

8. Архипенко В.П. Механико-технологические основы создания вибрационных машин для бункеризации, выпуска и контейнерной обработки: дисс. ... д-ра техн. наук. Днепропетровск, 1996.
9. Тропман А.Г., Бельков Н.И., Макеева Ю.Н. Вибрационные конвейеры для транспортирования горячих материалов. М.: Машиностроение, 1972. 327 с.
10. Архипенко А.В., Ниров А.Д. Влияние коэффициента трения и угла вибраций на эффективность вибротранспортирования в режимах движения с подбрасыванием // Математические структуры и моделирование. 2023. № 2 (66). С. 4–14.
11. Бауман В.А., Быховский И.И. Вибрационные машины и процессы в строительстве. М.: Высшая школа, 1977. 255 с.

**ANALYSIS OF MODES OF VIBROTRANSPORTATION OF SINGLE-MASS  
ELASTIC-VISCOUS-PLASTIC MODEL OF CARGO LAYER UNDER RECTILINEAR  
HARMONIC OSCILLATIONS OF LOAD-CARRYING BODY**

**A.V. Arkhipenko**

Ph.D. (Techn.), e-mail: andrei-arhipenko@mail.ru

International Innovation University, Sochi, Russia

**Abstract.** The motion of an elastic-viscous-plastic model of a cargo on an inclined load-carrying body is considered. It is shown that the efficiency of vibrotransportation of finely ground bulk materials is determined not only by vibration parameters, but also very significantly depends on the properties of the cargo layer and external resistances. It is revealed that the formula for determining the velocity of vibrotransportation of a material particle, with the obtained numerical values of the transfer coefficient of the horizontal component of velocity, applicable for granular materials with good air permeability, can be used to determine the velocity of vibrotransportation of finely ground bulk solids by introducing a correction factor that takes into account the influence of elastic-hysteresis properties of the cargo and aerodynamic resistances at the moment of detachment of the cargo from the load-carrying body.

**Keywords:** elastic-viscous-plastic model, vibrotransportation, bulk material, vibration parameters, velocity transfer coefficient, elastic-hysteresis properties, aerodynamic resistances, mass load, phase shift, rectilinear harmonic oscillations, characteristic equation, aperiodic character, transcendental equation, mode factor, vibration surface.

*Дата поступления в редакцию: 04.05.2024*