Математические структуры и моделирование
2024. № 3 (71). С. 33–43

УДК 514.765+512.812.4
DOI 10.24147/2222-8772.2024.3.33-43

ПОЛНАЯ ГРУППА ИЗОМЕТРИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТРЁХМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксёнов
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Г. Ян
магистрант, e-mail: guoliangyang355@gmail.com

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,

Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается специальная трёхмерная алгебра Ли $\mathcal{S}_3$ V типа Бианки. Найдено матричное представление данной алгебры Ли и соответствующей связной односвязной группы Ли S_3 и введены естественные координаты, которые определяются матричным представлением. Найдены формулы экспоненциального отображения относительно естественных координат. Выписаны полные группы автоизометрий специальной алгебры Ли относительно евклидова или лоренцева скалярного произведения. Найдены левоинвариантная риманова метрика на группе Ли S_3 и полная группа изометрий получившегося однородного многообразия. Это многообразие оказалось пространством постоянной кривизны Риччи.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, левоинвариантная метрика, изометрия, кривизна Риччи.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{G}$ – алгебра Ли, снабжённая евклидовым или лоренцевым скалярным произведением. Линейное преобразование $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ называется *автоизометрией*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и изометрией относительно скалярного произведения. Это преобразование называется *автоподобием*, если оно является одновременно автоморфизмом алгебры Ли и подобием относительно скалярного произведения.

Пусть g – левоинвариантная метрика на связной группе Ли G. Любая изометрия $h : G \to G$ однородного пространства (G, g) раскладывается в композицию $L_a \circ f$, где f – изометрия, оставляющая единичный элемент $e \in G$ на месте, а L_a – левый сдвиг, $a \in G$. Поэтому для того, чтобы найти полную группу изометрий однородного пространства (G, g), мы сначала найдём изометрии, которые оставляют неподвижной единицу группы Ли. Если группа Ли G является экспоненциальной, то такие изометрии определяются автоизометриями соответствующей алгебры Ли $\mathcal{G}$.

Согласно классификации Дж. Милнора [1] существует с точностью до изоморфизма 6 унимодулярных трёхмерных алгебр Ли и бесконечное семейство неунимодулярных алгебр Ли. Все неунимодулярные трёхмерные алгебры Ли разрешимы и содержат двумерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, который является унимодулярным ядром. Если мы выберем базис (E_1, E_2, E_3) в такой алгебре Ли так, что $E_2, E_3 \in \mathcal{L}$, то операция $[\cdot,\cdot]$ будет полностью определяться матрицей преобразования $(\mathrm{ad}E_1)|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

Среди всех неунимодулярных трёхмерных алгебр Ли особое место занимает алгебра Ли, относящаяся к V типу по классификации Бианки. Для неё при подходящем выборе вектора E_1 преобразование $(\mathrm{ad}E_1)|_{\mathcal{L}}$ является тождественным. Такую алгебру Ли будем называть *специальной* и обозначать её через $\mathcal{S}_3$. Соответствующую ей связную односвязную группу Ли обозначим S_3, и тоже будем называть *специальной*.

В данной работе мы найдём матричное представление алгебры Ли $\mathcal{S}_3$ и группы Ли S_3, введём координаты в $\mathcal{S}_3$ и S_3, связанные с матричным представлением, найдём формулы, по которым действуют левый сдвиг, экспоненциальное отображение и обратное к нему отображение. После этого мы определим канонический вид матрицы Грама евклидова и лоренцева скалярного произведения в алгебре Ли $\mathcal{S}_3$ и найдём формулы, по которым действуют однопараметрические группы автоподобий алгебры Ли.

В евклидовом случае мы определим вид левоинвариантного метрического тензора в выбранной системе координат и найдём полную группу изометрий группы Ли S_3.

Две левоинвариантные метрики на одной группе Ли мы будем относить к одному классу, если соответствующие однородные многообразия изометричны.

2. Матричное представление

В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3) операция $[\cdot,\cdot]$ в алгебре Ли $\mathcal{S}_3$ задаётся формулами

$$[E_1, E_2] = E_2, [E_1, E_3] = E_3, [E_2, E_3] = \vec{0}. \tag{1}$$

В работе [2] отмечено, что этим требованиям удовлетворяют линейно независимые матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таким образом, алгебра Ли $\mathcal{S}_3$ может быть представлена как состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, u_1, u_2, u_3 \in \boldsymbol{R}.$$

В базисе (E_1, E_2, E_3) эта матрица имеет координаты (u_1, u_2, u_3). Обозначим $X = \exp U$. Тогда

$$X = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} x_1 & 0 & \mathrm{sh} x_1 & x_2 \\ 0 & e^{x_1} & 0 & x_3 \\ \mathrm{sh} x_1 & 0 & \mathrm{ch} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$x_1 = u_1, x_2 = \frac{u_2}{u_1}\left(e^{u_1} - 1\right), x_3 = \frac{u_3}{u_1}\left(e^{u_1} - 1\right). \tag{4}$$

Тем самым связная односвязная группа Ли S_3, которая соответствует алгебре Ли $\mathcal{S}_3$, может быть представлена как состоящая из матриц вида (3) с обычной операцией умножения матриц. Мы припишем матрице (3) координаты (x_1, x_2, x_3). Будем называть введённые нами координаты в S_3 и $\mathcal{S}_3$ *естественными*. Тогда (4) – это формулы, по которым действует экспоненциальное отображение $\exp : \mathcal{S}_3 \to S_3$ относительно естественных координат. Формулы обратного отображения $\exp^{-1} : S_3 \to \mathcal{S}_3$:

$$u_1 = x_1, u_2 = \frac{x_1 x_2}{(e^{x_1} - 1)}, x_3 = \frac{x_1 x_3}{(e^{x_1} - 1)}.$$

Эти формулы показывают, что группа Ли является экспоненциальной, а отображение $\exp : \mathcal{S}_3 \to S_3$ является гомеоморфизмом. Заметим, что в этих формулах имеется устранимая неопределённость при $x_1 = 0$. Необходимо определить $\exp^{-1}(0, x_2, x_3) = (0, x_2, x_3)$. Аналогично, в формулах (4) имеется устранимая неопределённость при $u_1 = 0$, и необходимо определить $\exp(0, u_2, u_3) = (0, u_2, u_3)$.

Групповая операция и обратный элемент:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3), \tag{5}$$

$$(x_1, x_2, x_3)^{-1} = (-x_1, e^{-x_1} x_2, e^{-x_1} x_3).$$

Заметим, что формулы (5) могут быть получены без использования матричного представления группы Ли S_3, как следствие результатов, полученных С.П. Гавриловым в работе [3], где рассматривался класс групп Ли произвольной размерности, содержащих коммутативную подгруппу коразмерности 1. Там же найдена каноническая форма левоинвариантного метрического тензора для групп такого класса, но в весьма общем виде.

Любой базис, в котором коммутационные соотношения имеют вид (1), будем называть *каноническим*. Полная группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathcal{S}_3$ является шестимерной, и в каноническом базисе она определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & a_{22} & a_{23} \\ \beta & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}, a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \neq 0. \tag{6}$$

В дальнейшем запись $[F]$ означает матрицу преобразования F, а запись $[g(X)]$ означает матрицу метрического тензора $g(X)$.

3. Однопараметрические группы автоизометрий и автоподобий алгебры Ли $\mathcal{S}_3$

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{S}_3$ введено скалярное произведение. Мы определим, к какому виду можно привести матрицу Грама данного скалярного произведения и выпишем однопараметрическую группу автоизометрий.

Случай 1. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{S}_3$ введено евклидово скалярное произведение. Тогда, учитывая вид (6) автоморфизмов алгебры Ли, мы можем выбрать канонический базис (E_1', E_2', E_3') так, что $E_1' \perp \mathcal{L}$, а E_2', E_3' образуют ортонормированный базис (E_2', E_3') в $\mathcal{L}$. Тогда матрица Грама примет вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $k > 0$.

Если мы хотим сделать наш базис ортонормированным (т. е. сделать матрицу Грама единичной), нам нужно дополнительно умножить E_1' на число $m = 1/\sqrt{k}$. В новом базисе, составленном из векторов $V_1 = mE_1', V_2 = E_2', V_3 = E_3'$, операция $[\cdot,\cdot]$ задаётся равенствами

$$[V_1, V_2] = mV_2, [V_1, V_3] = mV_3, [V_2, V_3] = \vec{0}, m > 0. \tag{8}$$

Относительно любого из двух базисов (V_1, V_2, V_3) или (E_1', E_2', E_3') произвольная однопараметрическая группа автоизометрий задаётся матрицей вида

$$[F_t^{(1)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos at & -\sin at \\ 0 & \sin at & \cos at \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}, a = \mathrm{const} \neq 0. \tag{9}$$

Случай 2. Пусть в $\mathcal{S}_3$ задано лоренцево скалярное произведение так, что индуцированное скалярное произведение в идеале $\mathcal{L}$ положительно определено. Единственное отличие от первого случая состоит в том, что в матрице (7) имеет место $k < 0$. Положение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 1, а.

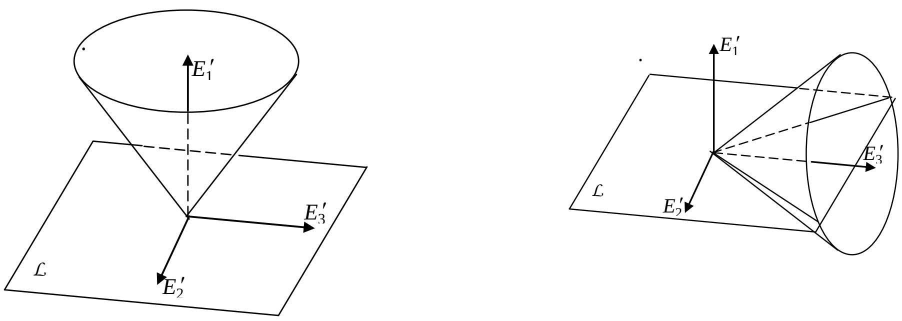
Случай 3. Пусть в $\mathcal{S}_3$ задано лоренцево скалярное произведение так, что в идеале $\mathcal{L}$ индуцируется знаконеопределённое скалярное произведение. Тогда в подходящем каноническом базисе мы имеем матрицу Грама

$$\Gamma = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, k > 0.$$

Для однопараметрической группы автоизометрий имеем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch} at & \operatorname{sh} at \\ 0 & \operatorname{sh} at & \operatorname{ch} at \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}, a = \mathrm{const} \neq 0.$$

Положение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 1, б.



а) б)

Рис. 1. Расположение базисных векторов

Случай 4. Пусть в $\mathcal{S}_3$ задано лоренцево скалярное произведение так, что индуцированное скалярное произведение в идеале $\mathcal{L}$ вырождено. Тогда мы можем привести матрицу Грама в каноническом базисе к виду

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов показано на рис. 2.

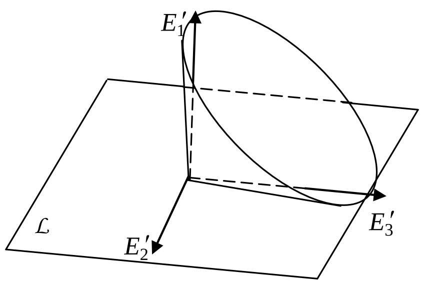


Рис. 2. Расположение базисных векторов

Следующая матрица задаёт однопараметрическую группу изометрий:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}, \mu = \mathrm{const} > 0, t \in \boldsymbol{R},$$

однако эта группа не является группой автоморфизмов. Существует ещё одна однопараметрическая группа изометрий, которая определяется в каноническом базисе матрицей

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t^2/2 & t & 1 \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R},$$

и она является группой автоморфизмов.

Алгебра Ли $\mathcal{S}_3$ допускает аналог симметрии, который сохраняет операцию $[\cdot,\cdot]$ и скалярное произведение, но только в случаях 1 и 2. Это преобразование, которое переводит канонический базис (E'_1, E'_2, E'_3) в базис (E'_1, E'_3, E'_2). Новый базис тоже будет каноническим. Композиция преобразований $F_t^{(1)}$ и симметрии задаётся матрицей

$$[F_t^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin at & \cos at \\ 0 & \cos at & -\sin at \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}, a = \mathrm{const} \neq 0. \tag{10}$$

Такие преобразования не образуют однопараметрической группы.

Отметим, что только в случае 4 алгебра Ли $\mathcal{S}_3$ допускает однопараметрическую группу автоподобий, которая задаётся в каноническом базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\nu t} \end{pmatrix}, t \in \boldsymbol{R}, a \neq 0.$$

4. Основной результат

Для построения левоинвариантного метрического тензора и однопараметрической группы изометрий, оставляющей единичный элемент группы Ли S_3 на месте, мы можем использовать любой канонический базис в алгебре Ли $\mathcal{S}_3$. При этом многообразия, которые у нас получатся, будут изометричны, и мы их относим одному классу. Поэтому будем исходить из того, что координаты в группе Ли и в алгебре Ли определяются именно базисом, составленным из матриц (2).

Теорема. 1. *Любой левоинвариантный риманов метрический тензор на группе Ли S_3 может быть приведен к следующему виду относительно естественных координат:*

$$[g(X)] = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x_1} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Однопараметрическая группа изометрий, оставляющая единичный элемент группы Ли S_3 на месте, действует по формулам:

$$f_t^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 \cos at - x_3 \sin at, x_2 \sin at + x_3 \cos at)\,, \tag{12}$$

$a = \mathrm{const} \neq 0, t \in \boldsymbol{R}$.

2. *Полная группа изометрий полученного многообразия является связной, четырёхмерной и состоит из преобразований, действующих по формулам*

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + h_1 \\ x_2' = (x_2 \cos at - x_3 \sin at)e^{h_1} + h_2, \\ x_3' = (x_2 \sin at + x_3 \cos at)e^{h_1} + h_3, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + h_1 \\ x_2' = (x_2 \sin at + x_3 \cos at)e^{h_1} + h_2, \\ x_3' = (x_2 \cos at - x_3 \sin at)e^{h_1} + h_3, \end{cases} \tag{14}$$

где $H(h_1, h_2, h_3)$ – произвольный элемент группы Ли S_3,$a = \mathrm{const} \neq 0, t \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. 1. Формулы (5) можем переписать в виде

$$L_X(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, y_2 e^{x_1} + x_2, y_3 e^{x_1} + x_3),$$

где $L_X : S_3 \to S_3$ – левый сдвиг на элемент $X(x_1, x_2, x_3)$. Находим матрицу дифференциала $(L_X)_* : T_Y G_3 \to T_{XY} G_3$ и обратную к ней матрицу:

$$[(L_X)_*] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{x_1} \end{pmatrix}; \qquad W(X) = [(L_X)_*]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-x_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-x_1} \end{pmatrix}.$$

Они постоянны, т. е. не зависят от элемента $Y(y_1, y_2, y_3)$.

Матрицу метрического тензора g в точке $X(x_1, x_2, x_3)$ находим по формуле

$$[g(X)] = W^T(X) \Gamma W(X)$$

в соответствии с методикой, описанной в работе [4]. Для рассматриваемого случая получаем матрицу (11).

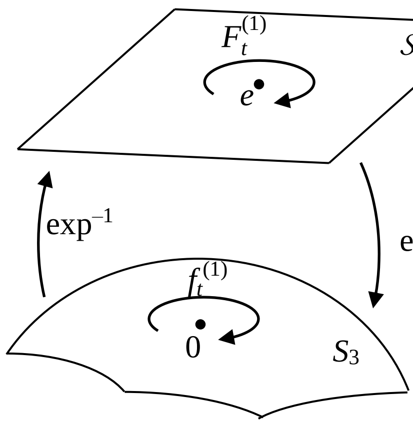


Рис. 3. Построение однопараметрической группы подобий

Пусть $F_t^{(1)} : \mathcal{S}_3 \to \mathcal{S}_3$ – однопараметрическая группа автоизометрий алгебры Ли $\mathcal{S}_3$. Тогда подобия группы Ли S_3 будем строить по правилу (рис. 3):

$$f_t^{(1)} = \exp \circ F_t^{(1)} \circ \exp^{-1} : S_3 \to S_3.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что однопараметрическая группа, состоящая из изометрий $f_t^{(1)}$, действует по формулам (12).

Убедимся, что полученные преобразования действительно являются изометриями при любом значении t. При каждом фиксированном значении t дифференциал $(f_t^{(1)})_*$ преобразования относительно координатных векторных полей $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ задаётся в точности матрицей (9). Обратная матрица I_t имеет вид

$$I_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos at & \sin at \\ 0 & -\sin at & \cos at \end{pmatrix}.$$

Матрицу тензора $(f_t^{(1)})^* g(X)$ находим из равенства

$$[(f_t^{(1)})^* g(X)] = I_t^T [g(X)] I_t.$$

Непосредственным вычислением получаем, что $[(f_t^{(1)})^* g(X)] = g(X')$, где $X' = f_t(X)$. Это значит, что однопараметрическая группа преобразований, действующая по формулам (12), действительно является группой изометрий.

2. С помощью точно таких же вычислений мы найдём ещё одно множество изометрий построенного нами однородного многообразия:

$$f_t^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 \sin at + x_3 \cos at, x_2 \cos at - x_3 \sin at), \tag{15}$$

$a = \mathrm{const} \neq 0, t \in \boldsymbol{R}$. Произвольную изометрию мы можем представить, как композицию $L_H \circ f_t^{(1)}$ или $L_H \circ f_t^{(2)}$, где H – произвольный элемент группы. Левый сдвиг на элемент $H(h_1, h_2, h_3)$ задаётся формулой

$$L_H(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + h_1, x_2 e^{h_1} + h_2, x_3 e^{h_1} + h_3).$$

Подставляя сюда формулы (12) или (15) получим формулы (13) или (14).

■

Замечание 1. Полученное в этой работе однородное риманово многообразие является многообразием постоянной положительной кривизны Риччи.

В работе [5] была описана разработка рабочей книги Excel для вычисления тензора кривизны левоинвариантных метрик на четырёхмерных группах Ли. Существует несложная методика применения этой рабочей книги и в трёхмерном случае. Мы вычислили тензор кривизны и тензор Риччи для полученного в этой работе однородного многообразия вручную и проверили результаты с помощью рабочей книги.

Вычисления удобнее проводить в ортонормированном базисе (V_1, V_2, V_3), а в нём операция $[\cdot,\cdot]$ задаётся формулами (8). Матрицы операторов $R(V_1, V_2), R(V_1, V_3), R(V_2, V_3)$ имеют, соответственно, вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -m^2 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & m^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ненулевыми являются следующие компоненты тензора кривизны типа (4.0):

$$R_{1221} = R_{1331} = R_{2332} = -m^2$$

и получающиеся из них в результате известных перестановок индексов. В соответствии с [1] кривизна Риччи в направлении единичного вектора X вычисляется по формуле $r(X) = \langle \sum_i R(X, V_i)X, V_i) \rangle$, где $\langle , \rangle$ означает метрический тензор. В результате кривизна Риччи в направлении всех базисных векторов получается равной:

$$r(V_1) = r(V_2) = r(V_3) = 2m^2.$$

Это означает, что и для любого единичного вектора $r(X) = 2m^2$.

5. Матричное представление связной группы изометрий

Мы выяснили, что полная группа изометрий группы Ли S_3, снабжённая римановой левоинвариантной метрикой, состоит из преобразований, которые действуют по формулам (13) или (14) относительно канонических координат, будем их называть изометриями первого и второго рода соответственно. Полную группу изометрий обозначим $Is(S_3)$, а преобразования первого рода образуют связную группу – компоненту связности единичного элемента группы $Is(S_3)$. Мы обозначим её $Is_e(S_3)$.

Если рассмотреть представление группы Ли S_3 в виде вектор-столбцов с компонентами $(x_1, 1, x_2, x_3, 1)$, то действие преобразований из $Is_e(S_3)$ может быть представлено в виде матрицы

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{h_1}\cos at & -e^{h_1}\sin at & 0 \\ 0 & 0 & e^{h_1}\sin at & e^{h_1}\cos at & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \mathrm{const} > 0, t \in \boldsymbol{R}.$$

Припишем такому элементу группы $Is_e(S_3)$ координаты (t, h_1, h_2, h_3). Координата t является циклической: (t, h_1, h_2, h_3) и $(t + \frac{2\pi k}{a}, h_1, h_2, h_3), k \in \boldsymbol{Z}$, определяют одну и ту же точку.

Нетрудно вычислить, что групповая операция в $Is_e(S_3)$ задаётся формулами

$$(t_1, h_1, h_2, h_3) \cdot (t_2, g_1, g_2, g_3) =$$
$$= \left(t_1 + t_2, h_1 + g_1, e^{h_1}(g_2 \cos t_1 - g_3 \sin t_1) + h_2, e^{h_1}(g_2 \sin t_1 + g_3 \cos t_1) + h_3\right).$$

Обратный элемент:

$$(t, h_1, h_2, h_3)^{-1} = \left(-t, -h_1, -e^{-h_1}(h_2 \cos at + h_3 \sin at), e^{-h_1}(h_2 \sin at - h_3 \cos at)\right).$$

Преобразования второго рода также можно представить в виде матрицы, но произведение двух преобразований второго рода является преобразованием первого рода, и поэтому преобразования второго рода группу не образуют.

Заметим, что

$$(t_1, h_1, 0, 0) \cdot (t_2, g_1, 0, 0) = (t_1 + t_2, h_1 + g_1, 0, 0).$$
$$(0, 0, h_2, h_3) \cdot (0, 0, g_2, g_3) = (0, 0, h_2 + g_2, h_3 + g_3).$$

Это значит, элементы, для которых $t = h_1 = 0$, образуют коммутативную подгруппу, и элементы, для которых $h_2 = h_3 = 0$, тоже образуют коммутативную подгруппу. Нетрудно проверить, что эти подгруппы являются нормальными; обозначим их G_1 и G_2 соответственно, и их элементам будем приписывать две координаты, отбрасывая нули.

Каждому элементу $(t_1, h_1) \in G_1$ поставим в соответствие преобразование

$$\varphi(t, h_1) : G_2 \to G_2,$$

действующее по формуле:

$$\varphi(t, h_1)(h_2, h_3) = (e^{h_1}(h_2 \cos t_1 - h_3 \sin t_1), e^{h_1}(h_2 \sin t_1 + h_3 \cos t_1)).$$

Нетрудно проверить, что

$$\varphi(t_1 + t_2, h_1 + g_1)(h_2, h_3) = (\varphi(t_1, h_1) \circ \varphi(t_2, g_1))(h_2, h_3) =$$
$$= (\varphi(t_2, g_1) \circ \varphi(t_1, g_2))(h_2, h_3).$$

Поскольку каждое преобразование $\varphi(t, h_1)$ является линейным, то оно является автоморфизмом группы G_2. Тем самым мы имеем отображение

$$\varphi : G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2),$$

которое является гомоморфизмом.

Из этого можно сделать вывод, что группа $Is_e(S_3)$ является полупрямым произведением групп G_1 и G_2: $Is_e(S_3) = G_2 \lhd_\varphi G_1$.

Литература

1. Milnor J. Curvaturies of left-invariant metrics on Lie groups // Advances in Mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.
2. Podoksenov M.N., Yang G. Special three-dimensional Lie algebra and its group of autoisomorphisms // Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов XI Междунар. науч. конф. (Омск, 15 марта 2024 г.). Омск: Изд-во Ом. гос. ун., 2024. С. 28–30.
3. Гаврилов С.П. Левоинвариантные метрики на односвязных группах, содержащих абелеву подгруппу коразмерности 1 // Гравитация и теория относительности. 1984. Вып. 21. С. 13–48.
4. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на односвязной трёхмерной группе Ли II типа Бианки // Гравитация и теория относительности. 1982. Вып. 19. С. 37–47.
5. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Тензор кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых четырёхмерных групп Ли // Математические структуры и моделирование. 2023. № 2 (67) С. 16–22.

COMPLETE GROUP OF ISOMETRIES OF THE SPECIAL THREE-DIMENSIONAL LIE GROUP

M.N. Podoksenov

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

G. Yang

Master's Degree Student, e-mail: guoliangyang355@gmail.com

Vitebsk State University named after P.M. Masherov, Vitebsk, Belarus'

Abstract. We consider a special three-dimensional Lie algebra $\mathcal{S}_3$ of Bianchi type V. A matrix representation of this Lie algebra and the corresponding connected simply connected Lie group S_3 is found and natural coordinates are introduced, which are determined by the matrix representation. Formulas for exponential mapping with respect to natural coordinates are found. Complete groups of autoisometries of the special Lie algebra with respect to the Euclidean or Lorentz scalar product are written out. The left-invariant Riemannian metric of the Lie group S_3 and the complete group of isometries of the resulting homogeneous manifold are found. This manifold turned out to be a space of constant Ricci curvature.

Keywords: Lie group, Lie algebra, left invariant metric, isometry, Ricci curvature.

Дата поступления в редакцию: 03.04.2024