Математические структуры и моделирование
2024. № 2 (70). С. 29–41

УДК 519.644.7
DOI 10.24147/2222-8772.2024.2.29-41

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТОРА

И.М. Федотова
канд. физ.-мат. наук, e-mail: firim@mail.ru
М.И. Медведева
канд. физ.-мат. наук, e-mail: mimedvedeva@rambler.ru
А.С. Кацунова
канд. физ.-мат. наук, e-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия

Аннотация. В статье построены инвариантные кубатурные формулы 11 и 13 степени точности для тора в $\mathbb{R}^3$. Описан алгоритм построения таких формул.

Ключевые слова: кубатурные формулы, тор, инвариантные многочлены.

Введение

В работе строятся кубатурные формулы вида

$$I[f] = \frac{1}{4\pi^2 r}\int\limits_T f(x,y,z) \simeq \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i, y_i, z_i) \tag{1}$$

для поверхности тора T в $\mathbb{R}^3$, определяемой уравнением

$$(x^2+y^2+z^2-r^2-1)^2 + 4r^2z^2 - 4r^2 = 0, \quad r \geqslant 1, \tag{2}$$

инвариантные относительно группы G порождённой отражениями T.

Для построения используется теорема С.Л. Соболева об инвариантных кубатурных формулах в формулировке из [1].

Теорема 1. *Для того чтобы кубатурная формула*

$$\int\limits_\Omega p(x)f(x)dx \simeq \sum_{j=1}^{N} c_j f(x^{(j)}), \quad \Omega \in \mathbb{R}^n,$$

инвариантная относительно преобразований группы G, была точна для всех функций конечномерного векторного пространства Ψ, инвариантного относительно G, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для тех функций из Ψ, которые инвариантны относительно G.

Будем говорить, что кубатурная формула (1) имеет точность d, если она точно интегрирует (превращается в точное равенство) многочлены из $\mathbb{R}^3$ степени не выше d и существует хотя бы один многочлен степени $d+1$, для которого формула (1) не точна.

В качестве группы G будем рассматривать группу отображений тора T в себя. Она представима в виде декартового произведения группы G_1, порождённой отражением от плоскости xOy, и группой G_2, порождённой группой симметрий плоскости $xOy : G = G_1 \times G_2$.

В статье строятся инвариантные формулы степени 11 и 13. В качестве группы G_2 мы будем рассматривать группу D_4 (группа симметрий квадрата) и D_8 (группа симметрий правильного восьмиугольника) [6]. Для группы D_4 формула 11-й степени точности содержит 92 узла, для группы D_8 формула 11-й степени содержит 112 узлов, 13-й степени – 144 узла.

В случае $G = G_1 \times D_4$ G-орбита точки $M(x, y, z) \in T$ может содержать самое большое 16 точек. В случае $G = G_1 \times D_8$ G-орбита точки $M(x, y, z) \in T$ может содержать самое большое 32 точки.

1. Построение инвариантной кубатурной формулы 11-й степени точности

Сначала рассмотрим построение формулы 11-й степени точности инвариантной относительно группы $G = G_1 \times D_4$.

Базисными инвариантными формами для $G = G_1 \times D_4$ являются многочлены

$$x^2 + y^2, \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad z^2.$$

Тогда инвариантными для G многочленами не выше 11-й степени являются

$$1,\ x^2+y^2,\ z^2,\ x^4-6x^2y^2+y^4,\ (x^2+y^2)^2,\ z^2(x^2+y^2),\ z^4,\ (x^2+y^2)^3,\ z^2(x^2+y^2)^2,$$
$$z^2(x^4-6x^2y^2+y^4),\ (x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4),\ z^6,\ z^4(x^2+y^2),\ (x^2+y^2)^4,$$
$$(x^2+y^2)^2(x^4-6x^2y^2+y^4),\ (x^4-6x^2y^2+y^4)^2,\ z^2(x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4),$$
$$z^2(x^2+y^2)^3,\ z^8,\ z^6(x^2+y^2),\ z^4(x^4-6x^2y^2+y^4),\ (x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4)^2,$$
$$(x^2+y^2)^5,\ z^6(x^4-6x^2y^2+y^4),\ (x^2+y^2)^3(x^4-6x^2y^2+y^4),\ z^4(x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4),$$
$$z^{10},\ z^8(x^2+y^2),\ z^2(x^2+y^2)^2(x^4-6x^2y^2+y^4),\ z^2(x^4-6x^2y^2+y^4)^2,\ z^2(x^2+y^2)^4.$$

Из уравнения (2) видно, что z^4 линейно выражается через

$$x^2 + y^2, \quad z^2, \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad z^2(x^2 + y^2)$$

и постоянные. Учитывая это, получаем, что инвариантными формами относительно G для T будут многочлены:

$$u_1 = 1,\ u_2 = x^2 + y^2,\ u_3 = z^2,\ u_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4,\ u_5 = (x^2 + y^2)^2,$$
$$u_6 = z^2(x^2+y^2), \quad u_7 = (x^2+y^2)^3, \quad u_8 = z^2(x^2+y^2)^2, \quad u_9 = z^2(x^4-6x^2y^2+y^4),$$

$$u_{10} = (x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4), \quad u_{11} = z^2(x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4),$$

$$u_{12} = (x^2+y^2)^4, \quad u_{13} = z^2(x^2+y^2)^3, \quad u_{14} = (x^4-6x^2y^2+y^4)^2,$$

$$u_{15} = (x^2+y^2)^2(x^4-6x^2y^2+y^4), \quad u_{16} = (x^2+y^2)^5, \quad u_{17} = (x^2+y^2)(x^4-6x^2y^2+y^4)^2,$$

$$u_{18} = (x^2+y^2)^3(x^4-6x^2y^2+y^4), \quad u_{19} = z^2(x^2+y^2)^2(x^4-6x^2y^2+y^4),$$

$$u_{20} = z^2(x^4-6x^2y^2+y^4)^2, \quad u_{21} = z^2(x^2+y^2)^4.$$

В уравнение тора (2) входит параметр r, поэтому узлы и коэффициенты кубатурной формулы будут зависеть от r. Выберем узлы кубатурной формулы так, чтобы их число было наименьшим возможным. Это число N определяется разрешимостью системы

$$I[u_j] = \sum_{i=1}^{N} c_i u_j(x_i, y_i, z_i), \quad j = 1, \ldots, 21, \tag{3}$$

относительно неизвестных коэффициентов c_i и координат узлов формулы.

Возьмём в качестве узлов формулы орбиты точек:

$$(r+1,0,0),\ (x_2,y_2,0),\ \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,t, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,t, z_3\right),\ (x_4,x_4,z_4),$$

$$(x_5,x_5,z_5),\ (x_6,x_6,z_6),\ (x_7,0,z_7),\ (x_8,0,z_8),\ (x_9,0,z_9),\ (x_{10},0,z_{10}),\ (x_{11},0,z_{11}).$$

Узлы лежат на поверхности тора, поэтому

$$\begin{gathered} x_2^2+y_2^2 = (r+1)^2, \quad z_3^2 = 1-(t-r)^2, \\ z_i^2 = 1-(x_i\sqrt{2}-r)^2 \qquad (i=4,\ 5,\ 6), \\ z_i^2 = 1-(x_i-r)^2 \qquad (i=7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11). \end{gathered}$$

Получаем 21 уравнение, 21 неизвестное, число узлов $N = 92$ (нижняя граница числа узлов 62). Так как для произвольного r система выглядит громоздко, приведём её вид при $r = 1$:

$$4c_1 + 8c_2 + 16c_3 + 8c_4 + 8c_5 + 8c_6 + 8c_7 + 8c_8 + 8c_9 + 8c_{10} + 8c_{11} = 1,$$

$$16c_1 + 32c_2 + 16c_3t^2 + 16c_4x_4^2 + 16c_5x_5^2 + 16c_6x_6^2 + 8c_7x_7^2 + 8c_8x_8^2 + 8c_9x_9^2 + 8c_{10}x_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^2 = \frac{5}{2},$$

$$16c_3z_3^2 + 8c_4z_4^2 + 8c_5z_5^2 + 8c_6z_6^2 + 8c_7z_7^2 + 8c_8z_8^2 + 8c_9z_9^2 + 8c_{10}z_{10}^2 + 8c_{11}z_{11}^2 = \frac{1}{2},$$

$$64c_1 + 64c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2) - 32c_4x_4^4 - 32c_5x_5^4 - 32c_6x_6^4 + 8c_7x_7^4 + 8c_8x_8^4 + 8c_9x_9^4 + 8c_{10}x_{10}^4 + 8c_{11}x_{11}^4 = 0,$$

$$16c_3t^2z_3^2 + 16c_4x_4^2z_4^2 + 16c_5x_5^2z_5^2 + 16c_6x_6^2z_6^2 + 8c_7x_7^2z_7^2 + 8c_8x_8^2z_8^2 + 8c_9x_9^2z_9^2 + 8c_{10}x_{10}^2z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^2z_{11}^2 = \frac{7}{8},$$

$$64c_1 + 128c_2 + 16c_3t^4 + 32c_4x_4^4 + 32c_5x_5^4 + 32c_6x_6^4 + 8c_7x_7^4 + 8c_8x_8^4 + 8c_9x_9^4 + 8c_{10}x_{10}^4 + 8c_{11}x_{11}^4 = \frac{63}{8},$$

$$256c_1 + 512c_2 + 16c_3t^6 + 64c_4x_4^6 + 64c_5x_5^6 + 64c_6x_6^6 + 8c_7x_7^6 + 8c_8x_8^6 + 8c_9x_9^6 + 8c_{10}x_{10}^6 + 8c_{11}x_{11}^6 = \frac{429}{16},$$

$$16c_3t^4z_3^2 + 32c_4x_4^4z_4^2 + 32c_5x_5^4z_5^2 + 32c_6x_6^4z_6^2 + 8c_7x_7^4z_7^2 + 8c_8x_8^4z_8^2 + 8c_9x_9^4z_9^2 + 8c_{10}x_{10}^4z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^4z_{11}^2 = \frac{33}{16},$$

$$-32c_4x_4^4z_4^2 - 32c_5x_5^4z_5^2 - 32c_6x_6^4z_6^2 + 8c_7x_7^4z_7^2 + 8c_8x_8^4z_8^2 + 8c_9x_9^4z_9^2 + 8c_{10}x_{10}^4z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^4z_{11}^2 = 0,$$

$$256c_1 + 256c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2) - 64c_4x_4^6 - 64c_5x_5^6 - 64c_6x_6^6 + 8c_7x_7^6 + 8c_8x_8^6 + 8c_9x_9^6 + 8c_{10}x_{10}^6 + 8c_{11}x_{11}^6 = 0,$$

$$1024c_1 + 2048c_2 + 16c_3t^8 + 128c_4x_4^8 + 128c_5x_5^8 + 128c_6x_6^8 + 8c_7x_7^8 + 8c_8x_8^8 + 8c_9x_9^8 + 8c_{10}x_{10}^8 + 8c_{11}x_{11}^8 = \frac{12155}{128},$$

$$16c_3t^6z_3^2 + 64c_4x_4^6z_4^2 + 64c_5x_5^6z_5^2 + 64c_6x_6^6z_6^2 + 8c_7x_7^6z_7^2 + 8c_8x_8^6z_8^2 + 8c_9x_9^6z_9^2 + 8c_{10}x_{10}^6z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^6z_{11}^2 = \frac{715}{128},$$

$$-64c_4x_4^6z_4^2 - 64c_5x_5^6z_5^2 - 64c_6x_6^6z_6^2 + 8c_7x_7^6z_7^2 + 8c_8x_8^6z_8^2 + 8c_9x_9^6z_9^2 + 8c_{10}x_{10}^6z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^6z_{11}^2 = 0,$$

$$1024c_1 + 512c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2)^2 + 128c_4x_4^8 + 128c_5x_5^8 + 128c_6x_6^8 + 8c_7x_7^8 + 8c_8x_8^8 + 8c_9x_9^8 + 8c_{10}x_{10}^8 + 8c_{11}x_{11}^8 = \frac{12155}{256},$$

$$1024c_1 + 1024c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2) - 128c_4x_4^8 - 128c_5x_5^8 - 128c_6x_6^8 + 8c_7x_7^8 + 8c_8x_8^8 + 8c_9x_9^8 + 8c_{10}x_{10}^8 + 8c_{11}x_{11}^8 = 0,$$

$$4096c_1 + 8192c_2 + 16c_3t^{10} + 256c_4x_4^{10} + 256c_5x_5^{10} + 256c_6x_6^{10} + 8c_7x_7^{10} + 8c_8x_8^{10} + 8c_9x_9^{10} + 8c_{10}x_{10}^{10} + 8c_{11}x_{11}^{10} = \frac{88179}{256},$$

$$
\begin{aligned}
&16c_3t^8z_3^2 + 128c_4x_4^8z_4^2 + 128c_5x_5^8z_5^2 + 128c_6x_6^8z_6^2 + 8c_7x_7^8z_7^2 + 8c_8x_8^8z_8^2 + \\
&\qquad + 8c_9x_9^8z_9^2 + 8c_{10}x_{10}^8z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^8z_{11}^2 = \frac{4199}{256}, \\
&128c_4x_4^8z_4^2 + 128c_5x_5^8z_5^2 + 128c_6x_6^8z_6^2 + 8c_7x_7^8z_7^2 + 8c_8x_8^8z_8^2 + 8c_9x_9^8z_9^2 + \\
&\qquad + 8c_{10}x_{10}^8z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^8z_{11}^2 = \frac{4199}{512}, \\
&4096c_1 + 4096c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2) + 16c_3t^{10} - 256c_4x_4^{10} - 256c_5x_5^{10} - 256c_6x_6^{10} + \\
&\qquad + 8c_7x_7^{10} + 8c_8x_8^{10} + 8c_9x_9^{10} + 8c_{10}x_{10}^{10} + 8c_{11}x_{11}^{10} = 0, \\
&4096c_1 + 2048c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2)^2 + 256c_4x_4^{10} + 256c_5x_5^{10} + 256c_6x_6^{10} + 8c_7x_7^{10} + \\
&\qquad + 8c_8x_8^{10} + 8c_9x_9^{10} + 8c_{10}x_{10}^{10} + 8c_{11}x_{11}^{10} = \frac{88179}{512}, \\
&-128c_4x_4^8z_4^2 - 128c_5x_5^8z_5^2 - 128c_6x_6^8z_6^2 + 8c_7x_7^8z_7^2 + 8c_8x_8^8z_8^2 + 8c_9x_9^8z_9^2 + \\
&\qquad + 8c_{10}x_{10}^8z_{10}^2 + 8c_{11}x_{11}^8z_{11}^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Преобразовав систему, можно разбить её на две подсистемы. Первая состоит из 10 уравнений и имеет вид

$$
\begin{aligned}
&-64c_2(x_2^4 - 4x_2^2) + 64c_4x_4^4 + 64c_5x_5^4 + 64c_6x_6^4 = \frac{63}{8}, \\
&16c_3t^4z_3^2 + 64c_4x_4^4z_4^2 + 64c_5x_5^4z_5^2 + 64c_6x_6^4z_6^2 = \frac{33}{16}, \\
&-256c_2(x_2^4 - 4x_2^2) + 16c_3t^6 + 128c_4x_4^6 + 128c_5x_5^6 + 128c_6x_6^6 = \frac{429}{16}, \\
&-512c_2x_2^2(x_2^2 - 4)(x_2^2 - 2)^2 + 16c_3t^8 = \frac{12155}{256}, \\
&16c_3t^6z_3^2 + 128c_4x_4^6z_4^2 + 128c_5x_5^6z_5^2 + 128c_6x_6^6z_6^2 = \frac{715}{128}, \\
&-512c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2)(x_2^4 - 4x_2^2) + 256c_4x_4^8 + 256c_5x_5^8 + 256c_6x_6^8 = \frac{12155}{256}, \\
&-2048c_2x_2^2(x_2^2 - 4)(x_2^2 - 2)^2 + 16c_3t^{10} = \frac{88179}{512}, \\
&2048c_2(x_2^4 - 4x_2^2 + 2)(x_2^4 - 4x_2^2) - 16c_3t^{10} + 512c_4x_4^{10} + 512c_5x_5^{10} + \\
&\qquad\qquad + 512c_6x_6^{10} = \frac{88179}{512}, \\
&16c_3t^8z_3^2 = \frac{4199}{512}, \quad 256c_4x_4^8z_4^2 + 256c_5x_5^8z_5^2 + 256c_6x_6^8z_6^2 = \frac{4199}{512},
\end{aligned}
$$

где $z_3^2 = 1 - (t - r)^2$, $z_i^2 = 1 - (x_i\sqrt{2} - r)^2$ $(i = 4, 5, 6)$. Из этих соотношений находим узлы:

$$
(x_2, y_2, 0), \ \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\,t, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,t, z_3\right), \ (x_4, x_4, z_4), \ (x_5, x_5, z_5), \quad (x_6, x_6, z_6)
$$

и коэффициенты к ним c_2, c_3, c_4, c_5, c_6. Подставляем найденные значения коэффициентов и узлов кубатурной формулы во вторую систему, которая состоит из 11 уравнений и имеет вид

$$
\begin{aligned}
&4c_1+8c_2+16c_3+8c_4+8c_5+8c_6+8c_7+8c_8+8c_9+8c_{10}+8c_{11}=1,\\
&16c_1+32c_2+16c_3t^2+16c_4x_4^2+16c_5x_5^2+16c_6x_6^2+8c_7x_7^2+\\
&\qquad\qquad+8c_8x_8^2+8c_9x_9^2+8c_{10}x_{10}^2+8c_{11}x_{11}^2=\frac{5}{2},\\
&16c_3z_3^2+8c_4z_4^2+8c_5z_5^2+8c_6z_6^2+8c_7z_7^2+8c_8z_8^2+8c_9z_9^2+8c_{10}z_{10}^2+8c_{11}z_{11}^2=\frac{1}{2},\\
&128c_1+64c_2(x_2^2-2)^2+16c_3t^4+16c_7x_7^4+\\
&\qquad\qquad+16c_8x_8^4+16c_9x_9^4+16c_{10}x_{10}^4+16c_{11}x_{11}^4=\frac{63}{8},\\
&16c_3t^2z_3^2+16c_4x_4^2z_4^2+16c_5x_5^2z_5^2+16c_6x_6^2z_6^2+8c_7x_7^2z_7^2+\\
&\qquad\qquad+8c_8x_8^2z_8^2+8c_9x_9^2z_9^2+8c_{10}x_{10}^2z_{10}^2+8c_{11}x_{11}^2z_{11}^2=\frac{7}{8},\\
&512c_1+256c_2(x_2^2-2)^2+16c_3t^6+16c_7x_7^6+16c_8x_8^6+\\
&\qquad\qquad+16c_9x_9^6+16c_{10}x_{10}^6+16c_{11}x_{11}^6=\frac{429}{16},\\
&16c_3t^4z_3^2+16c_7x_7^4z_7^2+16c_8x_8^4z_8^2+16c_9x_9^4z_9^2+16c_{10}x_{10}^4z_{10}^2+16c_{11}x_{11}^4z_{11}^2=\frac{33}{16},\\
&16c_3t^6z_3^2+16c_7x_7^6z_7^2+16c_8x_8^6z_8^2+16c_9x_9^6z_9^2+16c_{10}x_{10}^6z_{10}^2+16c_{11}x_{11}^6z_{11}^2=\frac{715}{128},\\
&2028c_1+512c_2(x_2^4-4x_2^2+2)(x_2^2-2)^2+16c_7x_7^8+\\
&\qquad\qquad+16c_8x_8^8+16c_9x_9^8+16c_{10}x_{10}^8+16c_{11}x_{11}^8=\frac{12155}{256},\\
&16c_7x_7^8z_7^2+16c_8x_8^8z_8^2+16c_9x_9^8z_9^2+16c_{10}x_{10}^8z_{10}^2+16c_{11}x_{11}^8z_{11}^2=\frac{4199}{512},\\
&4096c_1+4096c_2(x_2^2-2)^2+32c_3t^{10}+16c_7x_7^{10}+\\
&\qquad\qquad+16c_8x_8^{10}+16c_9x_9^{10}+16c_{10}x_{10}^{10}+16c_{11}x_{11}^{10}=\frac{88179}{256},
\end{aligned}
$$

где $z_i^2=1-(x_i-r)^2$ ($i=7,8,9,10,11$). Из этих соотношений находим узлы

$$(x_7,0,z_7),\ (x_8,0,z_8),\ (x_9,0,z_9),\ (x_{10},0,z_{10}),\ (x_{11},0,z_{11})$$

и коэффициенты $c_1, c_7, c_8, c_8, c_{10}, c_{11}$.

Примеры построенных инвариантных формул 11-й степени точности для разных радиусов приведены в табл. 1–3.

Следует отметить, что такого типа инвариантные кубатурные формулы существуют только для небольших радиусов r. Ранее построенные кубатурные формулы 11-й степени точности, инвариантные относительно группы $G=G_1\times D_6$, где D_6 – группа симметрий правильного шестиугольника с 96 узлами [7], также существуют только для небольших радиусов.

Построим формулы 11-й степени точности инвариантные относительно группы $G=G_1\times D_8$.

Базисными инвариантными формами для $G=G_1\times D_8$ являются многочлены:

$$x^2+y^2,\quad (x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2,\quad z^2.$$

Таблица 1. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 11-й степени точности для радиуса $r = 1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2, 0, 0)$	4	-0.0024
$(1.8167, 0.8362, 0)$	8	0.0150
$\left(\frac{19}{22}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{19}{22}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{57}}{11}\right)$	16	0.0137
$(0.5545, 0.5545, 0.9764)$	8	0.0094
$(0.9462, 0.9462, 0.9410)$	8	0.0139
$(1.3571, 1.3571, 0.3936)$	8	0.0135
$(0.1135, 0, 0.4627)$	8	0.0022
$(0.4188, 0, 0.8137)$	8	0.0076
$(1.0118, 0, 0.9999)$	8	0.0105
$(1.4380, 0, 0.8989)$	8	0.0104
$(1.9465, 0, 0.3227)$	8	0.0162

Таблица 2. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 11-й степени точности для радиуса $r = 1.25$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2.25, 0, 0)$	4	-0.0054
$(0.9466, 2.0411, 0)$	8	0.0144
$(1.7930, 0.7427, 0.7230)$	16	0.0132
$(0.6044, 0.6044, 0.9185)$	8	0.0102
$(1.0570, 1.0570, 0.9695)$	8	0.0139
$(1.5252, 1.5252, 0.4212)$	8	0.0128
$(0.2813, 0, 0.2483)$	8	0.0044
$(0.5079, 0, 0.6703)$	8	0.0075
$(1.1645, 0, 0.9963)$	8	0.0113
$(1.6432, 0, 0.9194)$	8	0.0094
$(2.1978, 0, 0.3188)$	8	0.0168

Таблица 3. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 11-й степени точности для радиуса $r = 1.3$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2.3, 0, 0)$	4	-0.0057
$(0.9689, 2.0859, 0)$	8	0.0144
$(1.8324, 0.7590, 0.7300)$	16	0.0132
$(0.6128, 0.6128, 0.9012)$	8	0.0104
$(1.0788, 1.0788, 0.9742)$	8	0.0139
$(1.5587, 1.4266, 0.4212)$	8	0.0128
$(0.3216, 0, 0.2069)$	8	0.0043
$(0.5197, 0, 0.6254)$	8	0.0076
$(1.1898, 0, 0.9939)$	8	0.0114
$(1.6811, 0, 0.9244)$	8	0.0094
$(2.2474, 0, 0.3198)$	8	0.0169

Тогда инвариантными для G многочленами не выше 11-й степени являются

$$1,\ x^2+y^2,\ z^2,\ (x^2+y^2)^2,\ z^2(x^2+y^2),\ z^4,\ (x^2+y^2)^3,\ z^2(x^2+y^2)^2,\ z^6,\ z^4(x^2+y^2),$$
$$(x^2+y^2)^4,\ z^2(x^2+y^2)^3,\ (x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2,\ z^8,\ z^6(x^2+y^2),$$
$$(x^2+y^2)^5,\ (x^2+y^2)((x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2),$$
$$z^2((x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2),\ z^{10},\ z^8(x^2+y^2),\ z^2(x^2+y^2)^4.$$

Из уравнения (2) видно, что z^4 линейно выражается через

$$x^2+y^2, \quad z^2, \quad (x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2, \quad z^2(x^2+y^2)$$

и постоянные. Учитывая это, получаем что инвариантными формами относительно G для T будут многочлены:

$$u_1=1,\ u_2=x^2+y^2,\ u_3=z^2,\ u_4=(x^2+y^2)^2,\ u_5=z^2(x^2+y^2),$$
$$u_6=(x^2+y^2)^3,\ u_7=z^2(x^2+y^2)^2,\ u_8=(x^2+y^2)^4,\ u_9=z^2(x^2+y^2)^3,$$
$$u_{10}=((x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2),$$
$$u_{11}=(x^2+y^2)((x^2-y^2)^4-24x^2y^2(x^2-y^2)^2+16x^2y^2),\ u_{12}=(x^2+y^2)^5,$$

$$u_{13} = z^2((x^2-y^2)^4 - 24x^2y^2(x^2-y^2)^2 + 16x^2y^2),\ u_{14} = z^2(x^2+y^2)^4.$$

В уравнение тора (2) входит параметр r, поэтому узлы и коэффициенты кубатурной формулы будут зависеть от r. Выберем узлы кубатурной формулы так, чтобы их число было наименьшим возможным. Это число определяется разрешимостью системы (3).

Возьмём в качестве узлов формулы орбиты точек:

$$(r{+}1,0,0),\ \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}(r+1), \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}(r+1), 0\right),\ \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}t, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}t, z_3\right),$$

$$(x_4,0,z_4),\quad (x_5,0,z_5),\ (x_6,0,z_6),\ (x_7,0,z_7),\ (x_8,0,z_8).$$

Узлы лежат на поверхности тора, поэтому $z_3^2 = 1-(t-r)^2$, $z_i^2 = 1-(x_i-r)^2$ ($i = 4$, 5, 6, 7, 8). Получаем 14 уравнений, 14 неизвестных, число узлов $N = 112$ (нижняя граница числа узлов 62). Систему решаем методом, приведённым выше. Примеры построенных инвариантных формул 11-й степени точности для разных радиусов приведены в табл. 4–5.

Таблица 4. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 11-й степени точности для радиуса $r = 1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2,0,0)$	8	0.0005
$(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}, 0)$	8	$\frac{46189}{3145728}$
$\left(\frac{19}{22}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \frac{19}{22}\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{57}}{11}\right)$	16	0.0137
$(0.1228, 0, 0.4801)$	16	0.0012
$(0.4583, 0, 0.8406)$	16	0.0045
$(0.9168, 0, 0.9965)$	16	0.0088
$(1.3767, 0, 0.9263)$	16	0.0124
$(1.9296, 0, 0.3683)$	16	0.0142

Таблица 5. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 11-й степени точности для радиуса $r = 1.5$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2, 0, 0)$	8	-0.0003
$\left(\frac{5\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}, \frac{5\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}, 0\right)$	8	0.0137
$(1.9895, 0.8240, 0.7569)$	16	0.0131
$(0.5384, 0, 0.2747)$	16	0.0039
$(0.8130, 0, 0.7267)$	16	0.0056
$(1.2530, 0, 0.9690)$	16	0.0082
$(1.7378, 0, 0.9713)$	16	0.0111
$(2.4156, 0, 0.4918)$	16	0.0137

Таблица 6. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 11-й степени точности для радиуса $r = 2$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(1, 0, 0)$	8	0.0058
$\left(\frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, 0\right)$	8	0.0137
$(2.3788, 0.9853, 0.8182)$	16	0.0134
$(1.1644, 0, 0.5494)$	16	0.0066
$(1.5893, 0, 0.9093)$	16	0.0086
$(2.1082, 0, 0.9941)$	16	0.0110
$(2.4484, 0, 0.8938)$	16	-0.0007
$(2.8935, 0, 0.4489)$	16	0.0136

Таблица 7. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 13-й степени точности для радиуса $r = 1$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2, 0, 0)$	8	0.0004
$(\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}, 0)$	8	0.0112
$(1.2821, 0.5311, 0.9217)$	16	0.0089
$(1.7026, 0.7052, 0.5380)$	16	0.0105
$(0.0862, 0, 0.4062)$	16	0.0007
$(0.3272, 0, 0.7399)$	16	0.0026
$(0.6732, 0, 0.9450)$	16	0.0053
$(1.0515, 0, 0.9986)$	16	0.0077
$(1.6497, 0, 0.7601)$	16	0.0098
$(1.9592, 0, 0.2824)$	16	0.0109

Таблица 8. Узлы и коэффициенты кубатурной формулы 13-й степени точности для радиуса $r = 1.25$

Узлы	Число точек в орбите	Коэффициенты
$(2.25, 0, 0)$	8	-0.0001
$(\frac{9\sqrt{2+\sqrt{2}}}{8}, \frac{9\sqrt{2-\sqrt{2}},0)}{8}$	8	0.0107
$(1.4372, 0.5953, 0.9521)$	16	0.0088
$(1.9141, 0.7928, 0.5696)$	16	0.0102
$(0.2789, 0, 0.2388)$	16	0.0021
$(0.4814, 0, 0.6397)$	16	0.0033
$(0.8086, 0, 0.8973)$	16	0.0052
$(1.1893, 0, 0.9981)$	16	0.0072
$(1.8552, 0, 0.7960)$	16	0.0095
$(2.2056, 0, 0.2946)$	16	0.0106

В отличие от предыдущего случая, здесь формула существует для большего диапазона радиусов и для $r = 1$ все коэффициенты положительны. Если изменить первый узел и взять точку $(r-1, 0, 0)$, то можно построить инвариантную формулу 11-й степени точности для $r = 2$ (см. табл. 6).

2. Построение инвариантной кубатурной формулы 13-й степени точности

В этом случае инвариантными формами относительно $G = G_1 \times D_8$, для T будут многочлены:

$$u_1 = 1,\ u_2 = x^2 + y^2,\ u_3 = z^2,\ u_4 = (x^2 + y^2)^2,\ u_5 = z^2(x^2 + y^2),$$

$$u_6 = (x^2 + y^2)^3,\ u_7 = z^2(x^2 + y^2)^2,\ u_8 = (x^2 + y^2)^4,\ u_9 = z^2(x^2 + y^2)^3,$$

$$u_{10} = ((x^2 - y^2)^4 - 24x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2),$$

$$u_{11} = (x^2 + y^2)((x^2 - y^2)^4 - 24x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2),\ u_{12} = (x^2 + y^2)^5,$$

$$u_{13} = z^2((x^2 - y^2)^4 - 24x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2),\ u_{14} = z^2(x^2 + y^2)^4.$$

$$u_{15} = (x^2 + y^2)^6,\ u_{16} = z^2(x^2 + y^2)^4,$$

$$u_{17} = (x^2 + y^2)^2((x^2 - y^2)^4 - 24x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2),$$

$$u_{18} = z^2(x^2 + y^2)((x^2 - y^2)^4 - 24x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 16x^2y^2).$$

В уравнение тора (2) входит параметр r, поэтому узлы и коэффициенты кубатурной формулы будут зависеть от r. Выберем узлы кубатурной формулы так, чтобы их число было наименьшим возможным. Возьмём в качестве узлов формулы орбиты точек:

$$(r+1, 0, 0),\ \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}(r+1), \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}(r+1), 0\right),$$

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}t_3, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}t_3, z_3\right),\ \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}t_4, \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}t_4, z_4\right),$$

$$(x_5, 0, z_5),\ (x_6, 0, z_6),\ (x_7, 0, z_7),\ (x_8, 0, z_8),\ (x_9, 0, z_9),\ (x_{10}, 0, z_{10}).$$

Узлы лежат на поверхности тора, поэтому $z_i^2 = 1 - (t_i - r)^2$ $(i = 3,\ 4)$, $z_i^2 = 1 - (x_i - r)^2$ ($i = 5$, 6, 7, 8, 9, 10). Получаем 18 уравнений, 18 неизвестных, число узлов $N = 144$ (нижняя граница числа узлов 86). Построенные кубатурные формулы приведены в табл. 7–8.

Как видно из таблицы, такие формулы 13-й степени тоже существуют только для небольших радиусов r. Ранее в работе [7] была построена формула 13-й степени с 132 узлами, инвариантная относительно группы $G = G_1 \times D_6$, но её можно построить только для $r = 1$ и один из коэффициентов формулы отрицательный.

Заключение

В работе построены инвариантные кубатурные формулы 11-й и 13-й степеней точности для интегралов по поверхности тора в $\mathbb{R}^3$. Показано, что такие формулы можно построить только для небольших радиусов r.

Литература

1. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
2. Носков М.В. О приближенном интегрировании по поверхности тора // Вестник СПбГУ. 1992. Сер. 1, вып. 3 (№ 15). С. 100–102.
3. Noskov M.V., Schmid H.J. Minimal cubature formulae of degree 3 for integrals over the surface of the torus // Computing. 1996. Vol. 57. P. 213–233.
4. Fedotova I.M., Noskov M.V. Minimal cubature formulas of degree 3 for a torus in $\mathbb{R}^3$ // Siberian Advances in Mathematics. 2016. Vol. 26, No 2. P. 90–98.
5. Noskov M.V., Fedotova I.M. On a minimal cubature formula of degree two for a torus in $\mathbb{R}^3$ // Siberian Advances in Mathematics. 2021. Vol. 31, No 1. P. 45–52.
6. Винберг Э.Б. Симметрия многочленов. М.: МЦНМО, 2001.
7. Носков М. В., Федотова И.М. Об инвариантных кубатурных формулах для тора в $\mathbb{R}^3$ // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 23, № 9. С. 1323–1329.

FEATURES OF CONSTRUCTING INVARIANT CUBATURE FORMULAS OF A HIGH DEGREE OF ACCURACY FOR APPROXIMATE INTEGRATION OVER THE SURFACE OF A TORUS

I.M. Fedotova
Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: firim@mail.ru
M.I. Medvedeva
Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: mimedvedeva@rambler.ru
A.S. Katsunova
Ph.D. (Phys.-Math.), e-mail: akatsunova@sfu-kras.ru

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. Invariant cubature formulas of 11th and 13th degrees of accuracy for a torus in $\mathbb{R}^3$ are constructed. An algorithm for constructing such formulas is described.

Keywords: cubature formulas, torus, invariant polynomials.

Дата поступления в редакцию: 21.02.2024