Математические структуры и моделирование
2024. № 2 (70). С. 5–12

УДК 512.563+519.85+512.647
DOI 10.24147/2222-8772.2024.2.5-12

КРИТЕРИИ ВЫПОЛНИМОСТИ И МОНОТОННОСТИ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ТЕРМИНАХ ЕЁ ПОЛИЛИНЕЙНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Д.Н. Баротов
старший преподаватель, e-mail: DNBarotov@fa.ru

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье рассмотрены критерии выполнимости и монотонности булевой функции в терминах её полилинейного продолжения, а именно, во первых, найдено необходимое и достаточное условие монотонности булевой функции в терминах её полилинейного продолжения, во-вторых, доказано, что, только один раз вычислив значение $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ – полилинейного продолжения булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ в любой внутренней точке единичного n-мерного куба $[0, 1]^n$, можно определить выполнимость булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и в центральной точке куба $[0, 1]^n$ можно найти число решений булева уравнения $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$.

Ключевые слова: полилинейная функция, булева функция, полилинейное продолжение булевой функции, глобальная оптимизация, задача выполнимости булевых формул.

Введение

На протяжении многих десятилетий в истории цифровой науки булевы переменные были основными переменными, используемыми в большинстве компьютерных операций. Встречается много основных задач, связанных с булевыми переменными, а некоторые задачи, несмотря на зрелость области, не имеют удовлетворительных методов решения. Среди них проблема решения булевых уравнений и систем булевых уравнений [1]. Эта задача имеет множество применений во многих областях [1–3]. В настоящее время теория булевых функций представляет собой увлекательную область исследований в области дискретной математики с приложениями к криптографии и теории кодирования [4, 5]. В связи с этим развивается множество новых направлений и алгоритмов решения систем булевых уравнений. Один из методов решения такой задачи состоит в том, что, во-первых, система булевых уравнений, заданная над кольцом булевых многочленов, трансформируется в систему уравнений над полем действительных чисел, во-вторых, трансформированная система, в том числе на компьютере, решается с использованием различных разработанных алгоритмов [1, 6–10].

Имеется много способов, позволяющих трансформировать систему булевых уравнений в задачу непрерывной минимизации на компьютере, поскольку, с одной стороны, принципиальное отличие таких методов от «переборных» алгоритмов локального поиска заключается в том, что на каждой итерации алгоритма сдвиг по антиградиенту осуществляется по всем переменным одновременно [2,3,6–8,11–17], с другой стороны, вычислительная мощность компьютеров в мире растёт.

В данной работе рассматриваются некоторые свойства полилинейного продолжения булевой функции. В результате исследования найдены критерии монотонности, выполнимости булевой функции в терминах её полилинейного продолжения и формула количества решений булева уравнения общего вида $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$.

1. Используемые обозначения и определения

Определение 1. Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть полилинейной функцией, если она линейна по каждому из своих аргументов.

Определение 2. Вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ не больше вектора $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, если $x_k \leqslant y_k, \ \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Определение 3. Булеву функцию $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть монотонной, если для любых двух сравнимых $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, таких, что $x \leqslant y$, имеет место неравенство $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant p(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Пусть $\mathbb{B}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ – множество всевозможных двоичных слов (булевых векторов) длины n, $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]\}$ – n-мерный куб, натянутый на булевы векторы длины n.

Пусть $int(\mathbb{K}^n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0, 1)\}$ – множество внутренних точек куба $\mathbb{K}^n$.

Определение 4. Булеву функцию $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть выполнимой, если $\exists(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n : p(b_1, b_2, ..., b_n) = 1$.

Определение 5. Функцию $p_D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть полилинейным продолжением булевой функции $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если она полилинейная и $p_D(b_1, b_2, \ldots, b_n) = p(b_1, b_2, \ldots, b_n), \ \ \forall(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$.

2. Критерий монотонности булевой функции в терминах её полилинейного продолжения

В этом разделе разрабатывается критерий монотонности булевой функции в терминах её полилинейного продолжения и доказывается его корректность. Монотонные булевы функции – повсеместные важные объекты математики, встречающиеся во многих обличьях [18, 19].

Предложение 1. *Булева функция $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ монотонна тогда и только тогда, когда $\nabla p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ – градиент её полилинейного продолжения $\geqslant (0, 0, ..., 0)$ для любой $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\frac{\partial}{\partial x_k}p_D(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant 0, \forall(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ и $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$. Если $(a_1, a_2, ..., a_n), (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n$ и $(a_1, a_2, ..., a_n) \leqslant (b_1, b_2, ..., b_n)$, тогда

$$p(b_1, b_2, ..., b_n) - p(a_1, a_2, ..., a_n) = p_D(b_1, b_2, ..., b_n) - p_D(a_1, a_2, ..., a_n) =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x_1} p_D(x_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) dx_1 +$$

$$+ \int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{\partial}{\partial x_2} p_D(b_1, x_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{a_3}^{b_3} \frac{\partial}{\partial x_3} p_D(b_1, b_2, x_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) dx_3 + \cdots +$$

$$+ \int\limits_{a_{n-2}}^{b_{n-2}} \frac{\partial}{\partial x_{n-2}} p_D(b_1, b_2, b_3, ..., x_{n-2}, a_{n-1}, a_n) dx_{n-2} +$$

$$+ \int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} p_D(b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-2}, x_{n-1}, a_n) dx_{n-1} +$$

$$+ \int\limits_{a_n}^{b_n} \frac{\partial}{\partial x_n} p_D(b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-2}, b_{n-1}, x_n) dx_n \geqslant 0,$$

так как все подынтегральные функции неотрицательны.

Необходимость. В работах [11, 13, 14, 20–24], исходя из разных целей, разными способами было доказано, что для произвольной булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ существует единственное полилинейное продолжение $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$. Один из явных видов полилинейного продолжения может быть написан в виде [11]

$$p_D(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n} ((2b_k - 1)x_k + (1 - b_k)).$$

Если булева функция $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ монотонна, тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_m} p_D(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_m} \Bigg(\sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n} ((2b_k - 1)x_k + (1 - b_k)) \Bigg) =$$

$$= \sum_{(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(p(b_1,b_2,...,b_n)\cdot\prod_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k))\right) =$$

$$= \sum_{(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathbb{B}^n} p(b_1,b_2,...,b_n)\cdot\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\prod_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k))\right) =$$

$$= \sum_{(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathbb{B}^n} (2b_m-1)\cdot p(b_1,b_2,...,b_n)\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k)) =$$

$$= \sum_{(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n)\in\mathbb{B}^n} (2\cdot0-1)\cdot p(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n)\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k))+$$

$$+ \sum_{(b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n)\in\mathbb{B}^n} (2\cdot1-1)\cdot p(b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n)\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k)) =$$

$$= - \sum_{(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n)\in\mathbb{B}^n} p(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n)\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k))+$$

$$+ \sum_{(b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n)\in\mathbb{B}^n} p(b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n)\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k)) =$$

$$= \sum_{(b_1,...,b_{m-1},b_{m+1},...,b_n)\in\mathbb{B}^{n-1}} \Bigg((p(b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n) - p(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n))\cdot$$

$$\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k))\Bigg) \geqslant 0, \quad \forall m\in\{1,2,...,n\},$$

так как $(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n) \leqslant (b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n)$. Следовательно,

$$p(b_1,...,b_{m-1},1,b_{m+1},...,b_n) - p(b_1,...,b_{m-1},0,b_{m+1},...,b_n) \geqslant 0 \text{ и}$$

$$0 \leqslant \prod_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n}((2b_k-1)x_k+(1-b_k)) \leqslant 1,$$

$$\forall(b_1,...,b_{m-1},b_{m+1},...,b_n)\in\mathbb{B}^{n-1} \text{ и } \forall(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{K}^n.$$

Предложение 1 подробно доказано. ■

3. Критерий выполнимости булевой функции в терминах её полилинейного продолжения

В этом разделе, во-первых, разрабатывается критерий выполнимости булевой функции в терминах её полилинейного продолжения и доказывается его корректность, во-вторых, находится формула числа решений булева уравнения общего вида $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$.

Предложение 2. *Пусть задано $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ – полилинейное продолжение произвольной булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тогда справедливы следующие свойства:*
a) Только один раз вычислив значение функции в любой внутренней точке куба $\mathbb{K}^n$, можно определить выполнимость булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$.
b) Только один раз вычислив значение функции в точке $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$ куба $\mathbb{K}^n$, можно найти количество решений булева уравнения $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$.

Доказательство. a) Зафиксируем любую внутреннюю точку $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in int(\mathbb{K}^n)$. Вычислим значение функции $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$:

$$p_D(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k^* + (1 - b_k)).$$

Теперь покажем, что булева функция $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнима в том и только в том случае, когда $p_D(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) > 0$. Действительно, если $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнима, то $\exists(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{B}^n : p(s_1, s_2, ..., s_n) = 1$ и, следовательно,

$$p_D(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \geqslant 1 \cdot \prod_{k=1}^{n}((2s_k - 1)x_k^* + (1 - s_k)) > 0.$$

А если $p_D(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = 0$, то $p(b_1, b_2, ..., b_n) = 0$, $\forall(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n$, так как нетрудно заметить, что $0 < \prod\limits_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k^* + (1 - b_k)) < 1$, $\forall(b_1, b_2 ..., b_n) \in \mathbb{B}^n$ и $\forall(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in int(\mathbb{K}^n)$.

b) Если $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$, то

$$p_D(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) = p_D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n}((2b_k - 1) \cdot \frac{1}{2} + (1 - b_k)) =$$

$$= \sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} = \sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n} p(b_1, b_2, ..., b_n) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{p(b_1, b_2, ..., b_n) = 1} 1.$$

Отсюда следует, что $2^n \cdot p_D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right) = \sum\limits_{p(b_1,b_2,...,b_n)=1} 1$ – это количество решений булева уравнения $p(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$. Теперь нетрудно заметить, что $\forall b \in \{0, 1\}$ количество решений булева уравнения $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$ равно

$$2^n \cdot (1 - b) + 2^n \cdot (2b - 1) \cdot p_D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right).$$

Предложение 2 подробно доказано. ■

Уместно привести еще несколько полезных фактов, справедливость которых непосредственно следует из предложения 2.

Следствие 1. *Если в одной внутренней точке* $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in int(\mathbb{K}^n)$ *значение функции* $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ *равно нулю, то* $p_D(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$ *и* $p(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$.

Следствие 2. *Если в одной внутренней точке* $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in int(\mathbb{K}^n)$ *значение функции* $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ *равно единице, то* $p_D(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 1$ *и* $p(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 1$.

Следствие 3. *Если в одной внутренней точке* $(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in int(\mathbb{K}^n)$ *значение функции* $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ *принадлежит интервалу* $(0, 1)$, *то* $p_D(x_1, x_2, ..., x_n) \in (0, 1)$, $\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in int(\mathbb{K}^n)$ *и* $\exists (a_1, a_2, ..., a_n)$, $(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{B}^n$: $p(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$, $p(b_1, b_2, ..., b_n) = 1$.

Заключение

В работе рассмотрено применение полилинейного продолжения булевой функции. Найден критерий монотонности булевой функции в терминах её полилинейного продолжения. Доказано, что, только один раз вычислив значение $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ – полилинейного продолжения булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ в любой внутренней точке куба $\mathbb{K}^n$, можно определить выполнимость булевой функции $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ и в центральной точке куба $\mathbb{K}^n$ можно найти число решений уравнения $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$. При оптимальном нахождении полилинейного продолжения полученные результаты могут быть применены для определения выполнимости булевых функций, нахождения количества решений булевых уравнений, исследования булевых функций на монотонность и нахождения числа булевых монотонных функций.

Литература

1. Abdel-Gawad A.H., Atiya A.F., Darwish N.M. Solution of systems of Boolean equations via the integer domain // Information Sciences. 2010. Vol. 180, No. 2. P. 288–300. DOI: `10.1016/j.ins.2009.09.010`.
2. Barotov D.N., Barotov R.N. Polylinear Transformation Method for Solving Systems of Logical Equations // Mathematics. 2022. Vol. 10. Art. 918. DOI: `10.3390/math10060918`.
3. Barotov D.N. Target Function without Local Minimum for Systems of Logical Equations with a Unique Solution // Mathematics. 2022. Vol. 10. Art. 2097. DOI: `10.3390/math10122097`.

4. Armario J.A. Boolean Functions and Permanents of Sylvester Hadamard Matrices // Mathematics. 2021. Vol. 9. Art. 177. DOI: `10.3390/math9020177`.
5. Valiant L.G. The complexity of computing the permanent // Theoretical computer science. 1979. Vol. 8, No. 2. P. 189–201. DOI: `10.1016/0304-3975(79)90044-6`.
6. Файзуллин Р.Т., Дулькейт В.И., Огородников Ю.Ю. Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, №. 2. С. 285–294.
7. Gu J. Global optimization for satisfiability (SAT) problem // IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 1994. Vol. 6, No. 3. P. 361–381. DOI: `10.1109/69.334864`.
8. Gu J., Gu Q., Du D. On optimizing the satisfiability (SAT) problem // Journal of Computer Science and Technology. 1999. Vol. 14, N. 1. P. 1–17. DOI: `10.1007/BF02952482`.
9. Pakhomchik A.I., Voloshinov V.V., Vinokur V.M., Lesovik G.B. Converting of Boolean Expression to Linear Equations, Inequalities and QUBO Penalties for Cryptanalysis // Algorithms. 2022. Vol. 15. Art. 33. DOI: `10.3390/a15020033`.
10. Barotov D.N., Barotov R.N., Soloviev V., Feklin V., Muzafarov D., Ergashboev T., Egamov K. The Development of Suitable Inequalities and Their Application to Systems of Logical Equations // Mathematics. 2022. Vol. 10. Art. 1851. DOI: `10.3390/math10111851`.
11. Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения // Вычислительные методы и программирование. 2023. Т. 24. С. 10–23. DOI: `10.26089/NumMet.v24r102`.
12. Barotov D., sipov A., Korchagin S., Pleshakova E., Muzafarov D., Barotov R., Serdechnyy D. Transformation method for solving system of Boolean algebraic equations // Mathematics. 2021. Vol. 9. Art. 3299. DOI: `10.3390/math9243299`.
13. Owen G. Multilinear extensions of games // Management Science. 1972. Vol. 18 (5-part-2). P. 64–79. DOI: `10.1287/mnsc.18.5.64`.
14. Wittmann D.M., Krumsiek J., Saez-Rodriguez J., Lauffenburger D.A., Klamt S., Theis F.J. Transforming Boolean models to continuous models: methodology and application to T-cell receptor signaling // BMC systems biology. 2009. Vol. 3, No. 1. P. 1–21. DOI: `10.1186/1752-0509-3-98`.
15. Баротов Д.Н. Выпуклое продолжение булевой функции и его приложения // Дискретный анализ и исследование операций. 2024. Т. 31, № 1. С. 5–18. (Принята в печать).
16. Баротов Д.Н. О существовании и свойствах выпуклых продолжений булевых функций // Математические заметки. 2024. Т. 115, № 4. С. 483–500. (Принята в печать).
17. Баротов Д.Н., Музафаров Д.З., Баротов Р.Н. Об одном методе решения систем булевых алгебраических уравнений // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2021. Т. 8, № 1. С. 17–23.
18. Stephen T., Yusun T. Counting inequivalent monotone Boolean functions // Discrete Applied Mathematics. 2014. Vol. 167, P. 15–24. DOI: `10.1016/j.dam.2013.11.015`.
19. Carić M., Živković M. The number of nonequivalent monotone Boolean functions of 8 variables // IEEE Transactions on Information Theory. 2022. DOI: `10.1109/TIT.2022.3214973`.
20. Jukna S. Boolean function complexity: advances and frontiers. Heidelberg, Springer, 2012. Vol. 5.
21. O'Donnell R. Analysis of boolean functions. Cambridge University Press, 2014.

22. Beigel R. The polynomial method in circuit complexity // Proceedings of the Eigth Annual Structure in Complexity Theory Conference. IEEE. 1993. P. 82–95. DOI: 10.1109/SCT.1993.336538.
23. Buhrman H., De Wolf R. Complexity measures and decision tree complexity: a survey // Theoretical Computer Science. 2002. Vol. 288, No. 1. P. 21–43. DOI: 10.1016/S0304-3975(01)00144-X.
24. Hatami P., Kulkarni R., Pankratov D. Variations on the sensitivity conjecture // arXiv preprint arXiv: 1011.0354. 2010.

CRITERIA FOR SATISFIABILITY AND MONOTONICITY OF A BOOLEAN FUNCTION IN TERMS OF ITS POLYLINEAR CONTINUATION

D.N. Barotov
Assistant Professor, e-mail: DNBarotov@fa.ru

Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russia

Abstract. This paper examines the criteria for the satisfiability and monotonicity of a Boolean function in terms of its polylinear continuation, namely, firstly, a necessary and sufficient condition for the monotonicity of a Boolean function in terms of its polylinear continuation is found, and secondly, proved that by only once calculating the value of the polylinear continuation $p_D(x_1, x_2, ..., x_n)$ of the Boolean function $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ at any interior point of the unit n-dimensional cube $[0, 1]^n$, we can determine the satisfiability of the Boolean function $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ and, in the central at the cube point $[0, 1]^n$, we can find the number of solutions to the Boolean equation $p(x_1, x_2, ..., x_n) = b$.

Keywords: polylinear function, Boolean function, polylinear continuation of a Boolean function, global optimization, SAT.

Дата поступления в редакцию: 17.01.2024