Математические структуры и моделирование 2023. № 4 (68). С. 5–11

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2023.4.5-11

О МОМЕНТАХ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ρ-ПЕРЕМЕШИВАНИЕМ

А.Г. Гринь
доктор физ.-мат. наук, профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Получены неулучшаемые по порядку оценки для моментов определённого класса функций от случайных величин, которые образуют стационарную последовательность с ρ-перемешиванием.

Ключевые слова: моменты случайных величин, симметрические функции от случайных величин, ρ-перемешивание.

В работе [1] М. Пелиград получила неулучшаемые по порядку оценки моментов сумм случайных величин из последовательности с ρ-перемешиванием. Для для последовательностей с более жёстким φ-перемешиванием такие оценки впервые получены И. А. Ибрагимовым (см., например: [2, лемма 18.5.1]); на этих оценках базировалось доказательство центральной предельной теоремы. В настоящей работе вместо сумм рассматриваются симметрические функции специального вида от величин из последовательности с ρ-перемешиванием и доказываются оценки для моментов этих функций. Для последовательностей с φ-перемешиванием такие оценки ранее были получены автором в [3].

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена вещественнозначная функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n),\ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ (т. е. определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждения, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем предполагать, что функция f при любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R},\ y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям (условия A):

A_1. Симметричность: $f(x_{i_1}, ..., x_{i_n}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

A_2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

A_3. $|f(\mathbf{x} + \mathbf{y})| \leqslant |f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{y})|$.

Нетрудно видеть (см., например: [4]), что из условия A_3 следует следующее утверждение:

A_3'. $||f(x_1, x_2, ..., x_n)| - |f(x_1, x_2, ..., x_k)|| \leqslant |f(x_{k+1}, , ..., x_n)|$ для любого $1 \leqslant k \leqslant n$. (Согласно сказанному выше $f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k, 0, ..., 0)$.)

Более того, из A_3 вытекает $|f(x_k)| \leqslant |f(x_1, x_2, ..., x_k)| + |f(x_1, x_2, ..., x_{k-1})|$, $k = 2, ..., n$, так что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |f(x_k)| \leqslant 2 \max_{1\leqslant k\leqslant n} |f(x_1, x_2, ..., x_k)| \leqslant 2(|f(x_1)| + ... + |f(x_n)|). \tag{1}$$

В [4] приводятся многочисленные примеры функций, удовлетворяющих условиям A.

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ – стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$ – σ-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$, $L_{\leqslant 0} = \{\xi : \xi\ \mathcal{F}_{\leqslant 0} -$ измерима, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty\}$, $L_{\geqslant n} = \{\eta : \eta\ \mathcal{F}_{\geqslant n} -$ измерима, $\mathbf{E}\eta^2 < \infty\}$. Будем говорить, что стационарная последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания, если

$$\rho(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbf{E}\,\xi\eta - \mathbf{E}\,\xi\mathbf{E}\,\eta|}{\sqrt{\mathbf{E}\,\xi^2\mathbf{E}\,\eta^2}} : \xi \in L_{\leqslant 0},\ \eta \in L_{\geqslant n}\right\} \to 0,\ \ n \to \infty,$$

(см., например: [2]). Взяв в этом определении

$$\xi = \mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases},\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ \eta = \mathbf{1}(B),\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n},$$

получим

$$|\mathbf{P}\{AB\} - \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}| \leqslant \rho(n)\sqrt{\mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}}. \tag{2}$$

Будем обозначать

$$X_{k,m} = f\left(\xi_k, ..., \xi_m\right),\ \ X_n = X_{1,n},\ \ \overline{X}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k|, \quad k, m, n \in \mathbb{N}.$$

Следующие две леммы – это обобщение соответствующих неравенств М. Пелиград из [1].

Лемма 1. *Пусть $\{\xi_n\}$ стационарная последовательность и пусть при некоторых натуральных n и r таких, что $l = [n/r] \geqslant 2$ и $a_n > 0$, выполняется*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_k| > a_n\} + \sqrt{n/r}\rho(r) \leqslant \gamma < 1. \tag{3}$$

Тогда при любом $x \geqslant a_n$

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant 7x\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(2\max_{2r\leqslant i\leqslant n}\mathbf{P}\{|X_i| > 3x\} + l\mathbf{P}\left\{\overline{X}_{2r} > x\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть $E_i(x) = \{\overline{X}_{i-1} \leqslant x,\ |X_i| > x\}$, $i = 1, 2, ...$ Тогда $E_i(x)E_j(x) = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i(x) = \{\overline{X}_n > x\}$.

В силу A_3'

$$|X_{(i+1)r,n}| \geqslant |X_{(i-1)r+j}| - |X_n| - |X_{(i-1)r+j+1,(i+1)r-1}|,\ 1 \leqslant i \leqslant l-1,\ 1 \leqslant j \leqslant r,$$

откуда с помощью (2) получаем

$$\mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant 7x\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_n| > 3x\} + \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1}(E_i(7x), |X_n| \leqslant 3x)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|X_n| > 3x\} + \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} \left(E_{(i-1)r+j}(7x), |X_{(i+1)r,n}| \geqslant 3x\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} \left(E_{(i-1)r+j}(7x), |X_{(i-1)r+j+1,(i+1)r-1}| \geqslant x\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{i=(l-1)r+1}^{n} \mathbf{P}\left\{E_i(7x), |X_{i+1,n}| \geqslant 4x\right\} \leqslant \mathbf{P}\{|X_n| > 3x\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(7x)\right\} \mathbf{P}\left\{|X_{(i+1)r,n}| \geqslant 3x\right\} +$$

$$+\rho(r) \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}^{1/2}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(7x)\right\} \mathbf{P}^{1/2}\left\{|X_{(i+1)r,n}| \geqslant 3x\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant r} |X_{(i-1)r+j+1,(i+1)r-1}| \geqslant x\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{(l-1)r+1\leqslant i\leqslant n} |X_{(i+1)r,n}| \geqslant x\right\}. \quad (4)$$

Обозначим $R_n(x) = \max_{2r\leqslant l\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_{l,n}| > x\} = \max_{2r\leqslant l\leqslant n} \mathbf{P}\{|X_{n-l+1}| > x\}$, $S_m(x) = \mathbf{P}\left\{\overline{X}_m > x\right\}$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}^{1/2}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(7x)\right\} \mathbf{P}^{1/2}\left\{|X_{(i+1)r+1,n}| \geqslant 3x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(l-1) \sum_{i=1}^{l-1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(7x)\right\} \mathbf{P}\left\{|X_{(i+1)r+1,n}| \geqslant 3x\right\}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(l-1)R_n(3x)S_n(7x)} \leqslant \sqrt{l-1}\left(S_n(7x) + \frac{1}{4}R_n(3x)\right) \quad (5)$$

(в последнем переходе использовалось элементарное неравенство $xy \leqslant x^2 + y^2/4$). Из (4) и (5) следует теперь

$$S_n(7x) \leqslant R_n(3x) + R_n(3x)S_n(7x) + \rho(r)\sqrt{n/r}\left(S_n(7x) + \frac{1}{4}R_n(3x)\right) +$$

$$+lS_{2r}(x) \leqslant \gamma S_n(7x) + 2R_n(3x) + lS_{2r}(x),$$

откуда получаем утверждение леммы ■

Лемма 2. *В условиях леммы 1*

$$\mathbf{P}\left\{\overline{X}_n > 7x\right\} \leqslant \frac{2\gamma}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\overline{X}_n > x\right\} + \frac{2}{1-\gamma}\mathbf{P}\left\{\overline{X}_{2r} > x\right\}$$

Доказательство. Пусть $k = [m/r],\ E_i(x),\ S_n(x),\ R_n(x)$ определены так же, как в лемме 1. В силу A_3'

$$|X_{(i+1)r,m}| \geqslant |X_m| - |X_{(i-1)r+j-1}| - |X_{(i-1)r+j,(i+1)r-1}|,\ 1 \leqslant i \leqslant k-1,\ 1 \leqslant j \leqslant r.$$

С помощью (2) получаем

$$\mathbf{P}\{|X_m| > 3x\} = \mathbf{P}\{|X_m| > 3x, \overline{X}_m > x\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} \left(E_{(i-1)r+j}(x), |X_{(i+1)r,m}| \geqslant x\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} \left(E_{(i-1)r+j}(x), |X_{(i-1)r+j,(i+1)r-1}| \geqslant x\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{i=(k-1)r+1}^{m} \mathbf{P}\left\{E_i(x), |X_{i,m}| \geqslant 2x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant S_m(x)R_m(x) + \rho(r)\sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}^{1/2}\left\{\bigcup_{j=1}^{r} E_{(i-1)r+j}(x)\right\} \mathbf{P}^{1/2}\left\{|X_{(i+1)r,m}| \geqslant x\right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant r} |X_{(i-1)r+j+,(i+1)r-1}| \geqslant x\right\} + \mathbf{P}\left\{\max_{(k-1)r+1\leqslant i\leqslant m} |X_{i,m}| \geqslant x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant S_m(x)R_m(x) + \rho(r)\sqrt{(k-1)S_m(x)R_m(x)} + kS_{2r}(2x).$$

Так как $R_m(x) \leqslant S_m(x)$, отсюда следует

$$R_n(3x) \leqslant \gamma S_n(x) + lS_{2r}(2x),$$

и с помощью леммы 1 получаем теперь

$$S_n(7x) \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\left(2R_n(3x) + lS_{2r}(x)\right) \leqslant \frac{2\gamma}{1-\gamma} S_n(x) + \frac{2}{1-\gamma} S_{2r}(x).$$

■

Теорема 1. *Пусть в условиях леммы 1*

$$\mathbf{E}\overline{X}_n^p < \infty,\ p > 1,\ \delta = \frac{2\gamma 7^p}{1-\gamma} < 1,\ \frac{n}{r}\left(\frac{a_r}{a_n}\right)^p \to 0,\ n \to \infty. \tag{6}$$

Тогда $\sup\limits_{n\geqslant 1} a_n^{-p}\mathbf{E}\overline{X}_n^p < \infty.$

Доказательство. Имеем

$$\mathbf{E}\{|\xi|^p, |\xi| \geqslant a_n\} = -\int\limits_{a_n}^{\infty} x^p \, d\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\} = a_n^p \mathbf{P}\{|\xi| \geqslant a_n\} + p\int\limits_{a_n}^{\infty} x^{p-1}\mathbf{P}\{|\xi| \geqslant x\} \, dx,$$

где $a_n \geqslant 1$ удовлетворяет условию (3). С помощью леммы 2 получаем

$$\mathbf{E}\{\overline{X}_n^p, \overline{X}_n \geqslant 7a_n\} \leqslant (7a_n)^p \mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant 7a_n\} + p7^p \int\limits_{a_n}^{\infty} x^{p-1}\mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant 7x\} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\gamma 7^p}{1-\gamma} a_n^p \mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant a_n\} + \frac{2l7^p}{1-\gamma} a_n^p \mathbf{P}\{\overline{X}_{2r} \geqslant a_n\} +$$

$$+ \frac{2p\gamma 7^p}{1-\gamma} \int\limits_{a_n}^{\infty} x^{p-1}\mathbf{P}\{\overline{X}_n \geqslant x\} \, dx + \frac{2lp7^p}{1-\gamma} \int\limits_{a_n}^{\infty} x^{p-1}\mathbf{P}\{\overline{X}_{2r} \geqslant x\} \, dx =$$

$$= \frac{2\gamma 7^p}{1-\gamma} \mathbf{E}\{\overline{X}_n^p, \overline{X}_n \geqslant a_n\} + \frac{2l7^p}{1-\gamma} \mathbf{E}\{\overline{X}_{2r}^p, \overline{X}_{2r} \geqslant a_n\}.$$

Отсюда

$$\mathbf{E}\overline{X}_n^p \leqslant (7a_n)^p + \delta \mathbf{E}\overline{X}_n^p + \frac{2l7^p}{1-\gamma} \mathbf{E}\overline{X}_{2r}^p,$$

$$\mathbf{E}\overline{X}_n^p \leqslant \frac{(7a_n)^p}{1-\delta} + \frac{2l7^p}{(1-\gamma)(1-\delta)} \mathbf{E}\overline{X}_{2r}^p.$$

Обозначим

$$D_n = \mathbf{E}\left(\frac{\overline{X}_n}{a_n}\right)^p, \quad A = \frac{7^p}{1-\delta}, \quad C = \frac{2 \cdot 7^p}{(1-\gamma)(1-\delta)}.$$

Последнее неравенство принимает вид

$$D_n \leqslant A + C\frac{n}{r}\left(\frac{a_{2r}}{a_n}\right)^p D_{2r} \quad r = r(n) \to \infty, \ 2r < n.$$

По условию при достаточно больших n

$$C\frac{n}{2r}\left(\frac{a_{2r}}{a_n}\right)^p < \varepsilon < 1,$$

так что

$$D_n \leqslant A + \varepsilon D_{2r}. \tag{7}$$

Если $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n = \infty$, то найдётся подпоследовательность $n_k \to \infty$ такая, что $D_{n_k} = \max\limits_{n \leqslant n_k} D_n \to \infty$, и тогда, поскольку $2r_k = 2r(n_k) < n_k$, в силу (7)

$$D_{n_k} \leqslant A + \varepsilon D_{2r_k} \leqslant A + \varepsilon D_{n_k}, \text{ то есть } D_{n_k} \leqslant \frac{A}{1-\varepsilon}.$$

Полученное противоречие означает, что $\limsup\limits_{n\to\infty} D_n < \infty$. Теорема доказана. ■

Некоторые комментарии по поводу условия (6).

Если, скажем, $\{a_n\}$ – правильно меняющаяся последовательность порядка $\rho,\ \rho p > 1$ (см., например: [5]), то в (3) $k = n/2r \to \infty$ можно сделать растущей столь медленно, что $\dfrac{a_{km}}{a_m} \sim k^{\rho},\ m = 2r \to \infty$, Тогда

$$\frac{n}{2r}\left(\frac{a_{2r}}{a_n}\right)^p = k\left(\frac{a_m}{a_{km}}\right)^p \sim k^{1-\rho p} \to 0,\ n \to \infty. \tag{8}$$

Пусть $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i,\ \mathbf{E}\xi_1 = 0,\ \mathbf{E}\xi_1^2 < \infty,\ \sigma_n^2 = \mathbf{D}X_n$. Если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию ρ-перемешивания и $\sigma_n \to \infty$, то $\{\sigma_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка 1/2 (см., например: [2, замечание 18.2.2]), которая при $n \to \infty$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности [5, с. 26], так что $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sigma_k \sim \sigma_n$ и в (3) в качестве a_n можно взять $N\sigma_n$, где $N > 0$ достаточно велико. В силу теоремы 1

$$\mathbf{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right|^p \leqslant K\sigma_n^p,\ p > 2,\ K > 0,\ \text{причем так как } \mathbf{E}\left|\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right|^p \geqslant \sigma_n^p,$$

то полученное неравенство неулучшаемо по порядку. Эта (и даже несколько более общая) оценка доказана в [1].

Аналогично, если в наших предположениях при некотором $\alpha > 0$, $B_n = (\mathbf{E}|X_n|^{\alpha})^{1/\alpha}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка ρ и $\rho p > 1$, то в силу теоремы 1 $\mathbf{E}\overline{X}_n^p \leqslant CB_n^p$ и так как $p > 1,\ \mathbf{E}\overline{X}_n^p \geqslant B_n^p$, эта оценка неулучшаема по порядку.

Требование правильного изменения последовательности $\{a_n\}$ избыточно, достаточно потребовать, например, чтобы $a_{kn} \geqslant Ck^{\rho}a_n,\ \rho p > 1,\ C > 0$. Если, например, функция $f(x) > 0,\ x > 0$ выпукла (вниз), $f(n) = a_n$, то $a_{kn} = f(kn) \geqslant kf(n) = ka_n$ и условие (6) при $p > 1$ выполняется очевидным образом. Такую выпуклую функцию можно подобрать всегда, взяв, например, вместо $f(x)$ выпуклую оболочку $f(x)$ (наименьшую выпуклую функцию, большую или равную $f(x)$), но в этом случае полученная оценка для $\mathbf{E}\overline{X}_n^p$ может и не быть неулучшаемой по порядку.

Литература

1. Peligrad M. The convergence of moments in the central limit theorem for ρ-mixing sequences of random variables // Proceeding of the AMS. 1987. Vol. 101, No. 1. P. 142–148.
2. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
3. Гринь А.Г. О моментах симметрических функций от зависимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 4 (40). С. 17–23.
4. Гринь А.Г. О предельных теоремах для функций от независимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 2 (38). С. 5–15.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985. 141 с.

ON THE MOMENTS OF FUNCTIONS OF RANDOM VARIABLES WITH ρ-MIXING

A.G. Grin'
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Estimates for the moments for a certain class of functions of random variables from a stationary sequence with ρ-mixing is obtained in this article. This estimates that cannot be improved in order.

Keywords: moments of random variables, symmetric functions of random variables, ρ-mixing.

Дата поступления в редакцию: 25.09.2023