*Математические
структуры и моделирование
2023. № 3 (67). С. 16–22*

УДК 514.765+512.812.4
DOI 10.24147/2222-8772.2023.3.16-22

ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ САМОПОДОБНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

М.Н. Подоксенов
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Ю.А. Шпакова
студент, e-mail: juliashpkv@gmail.com

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Для вычисления тензора кривизны четырёхмерных групп Ли, снабжённых левоинвариантной лоренцевой метрикой, создана рабочая книга Excel. Применение рабочей книги показало, что самоподобные однородные лоренцевы многообразия четырёхмерных групп Ли, снабжённых левоинвариантными лоренцевыми метриками, не обязательно являются плоскими. А именно, среди найденных ранее трёх самоподобных однородных многообразий группы Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$ только одно является плоским, два – плоскими не являются. Единственное с точностью до изометрии самоподобное однородное многообразие группы Ли $SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ является плоским.

Ключевые слова: группа Ли, левоинвариантная метрика, тензор кривизны, Excel.

1. Постановка задачи

Пусть (M, g) – риманово или лоренцево многообразие. Однопараметрическая группа преобразований подобия $f_t : M \to M$ называется *существенной*, если она не сводится к группе изометрий для многообразия $(M, \overline{g})$, где $\overline{g}$ – метрика, конформно эквивалентная g. Многообразие (M, g) называется *самоподобным*, если оно допускает существенную однопараметрическую группу преобразований подобия.

Если две левоинвариантные метрики на группе Ли приводятся одна к другой с помощью изометрии, то мы будем относить их к одному классу метрик.

В работе [1] рассматривалась четырёхмерная группа Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$, где Hs – трёхмерная группа Гейзенберга, а $\boldsymbol{R}^+$ – мультипликативная группа положительных действительных чисел. Найдены три класса метрик, при которых данная группа Ли является самоподобным многообразием, и доказано, что других классов метрик не существует. В работе [2] найден единственный аналогичный класс левоинвариантных лоренцевых метрик на четырёхмерной группе Ли $SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ ($SE(2)$ – группа движений евклидовой плоскости, сохраняющих ориентацию плоскости). Вычисление вручную тензора кривизны для этого класса метрик показало, что многообразие является плоским. В связи с этим возникла гипотеза, что и найденные ранее самоподобные лоренцевы многообразия группы Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$ окажутся плоскими.

Заметим, что в работе [3] доказан следующий результат: односвязное однородное пространство-время нулевой кривизны изометрично пространству Минковского.

При большом числе математических операций невозможно быть уверенным в отсутствии вычислительной ошибки. В связи с этим возникла идея создания простой и удобной рабочей книги в Excel для вычисления тензора кривизны левоинвариантных метрик на группах Ли.

Авторам известно о существовании нескольких программных комплексов [4–7], позволяющих вычислять различные характеристики метрических связностей на многообразиях. Из них только комплексы [6] и [7] рассчитаны именно для применения к левоинвариантным метрикам на группах Ли, при этом они используют математический пакет Maple. Мы поставили цель создать рабочую книгу в Excel. Выбор Excel связан с удобством и наглядностью представления исходных данных и результатов вычислений.

2. Вычисление тензора кривизны левоинвариантной метрики на группе Ли

Пусть (M, g) – риманово или псевдориманово многообразие, а ∇ – риманова связность без кручения, которая определяется метрическим тензором. Тогда, используя общепринятое обозначение $\langle\ ,\ \rangle$ для скалярного произведения (т. е. метрического тензора), можно записать, что для любых дифференцируемых векторных полей X, Y, Z на многообразии имеет место известная формула

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - \\ - Z\langle X, Y\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle). \quad (1)$$

Пусть $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ – базис в алгебре Ли. Тогда базисные векторы можно рассматривать как левоинвариантные векторные поля на группе Ли. В этом случае компоненты метрического тензора являются постоянными величинами, и формула (1) упрощается до

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle [E_i, E_j], E_k\rangle - \langle [E_j, E_k], E_i\rangle + \langle [E_k, E_i], E_j\rangle\right\}, i, j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если ввести обозначения

$$\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k\rangle, i, j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

то получаем формулу (см. [8]):

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k\rangle = \frac{1}{2}\left\{\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}\right\}, i, j, k = 1, \ldots, n. \quad (2)$$

Числа $\Gamma_{ijk} = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle$ называются символами Кристоффеля первого рода. Поскольку для обозначения матрицы Грама мы тоже используем прописную греческую букву «Гамма», будем обозначать символы Кристоффеля так: $\triangledown_{ijk}$. Эти символы обладают косой симметрией: $\triangledown_{ijk} = -\nabla_{ikj}$.

Тензор кривизны типа (3.1) многообразия определяется формулой [9]

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

а тензор кривизны типа (4.0) задаётся формулой

$$R(X,Y,Z,U) = \langle R(X,Y)Z, U \rangle.$$

Компоненты этих тензоров определяются так:

$$R(E_i, E_j)E_k = R^l_{ijk} E_l, i, j, k = 1, \ldots, n;$$

$$R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l), i, j, k, l = 1, \ldots, n$$

(здесь мы используем тензорное правило суммирования, т. е. в первом равенстве подразумевается сумма по l от 1 до размерности пространства).

Можно отметить следующие свойства тензоров кривизны, которые упрощают вычисление их компонент:

1. $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z; R(X,Y,Z,U) = -R(X,Y,Z,U)$.
2. $R(X,Y,Z,U) = R(Z,U,X,Y)$.
3. $R(X,Y,Z,U) = -R(X,Y,U,Z)$.

3. Рабочая книга для вычисления тензора кривизны для левоинвариантной метрики на группе Ли

Применительно к левоинвариантным метрикам на группах Ли можно сказать, что все компоненты тензора кривизны любого типа являются постоянными. Можно рассматривать $R(X,Y)$ как оператор, действующий в алгебре Ли, которая соответствует данной группе Ли (используется также его обозначение: R_{XY}). Главная цель рабочей книги, составленной в Excel, – получить матрицы операторов $R(E_i, E_j), i, j = 1, \ldots, 4$, где (E_1, E_2, E_3, E_4) – базис в четырёхмерной алгебре Ли. Эти матрицы все получатся нулевыми тогда и только тогда, когда рассматриваемая левоинвариантная метрика на группе Ли является плоской. Элементы этих матриц и являются компонентами тензора кривизны типа (3.1). А именно, R^l_{ijk} расположен в l-й строке и k-м столбце матрицы оператора $R(E_i, E_j)$. В силу кососимметричности (свойство 1) тензора кривизны типа (3.1) по первым двум индексам, нам достаточно найти матрицы операторов $R(E_i, E_j)$ только для $i < j$.

Исходными данными для рабочей книги являются трёхмерный массив, состоящий из структурных констант алгебры Ли в рассматриваемом базисе, и матрицы Грама скалярного произведения в алгебре Ли (она же называется матрицей метрического тензора).

Структурные константы определяются формулой

$$[E_i, E_j] = \alpha_{ij}^k E_k.$$

Мы организуем массив структурных констант в виде четырёх матриц операторов $\mathrm{ad}E_1$, $\mathrm{ad}E_2$, $\mathrm{ad}E_3$, $\mathrm{ad}E_4$ (пример см. на рис. 1).

Ad E_1			
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Ad E_2			
0	0	0	0
0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

Ad E_3			
0	0	0	0
-1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Ad E_4			
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Рис. 1. Пример массива структурных констант

Оператор $\mathrm{ad}X : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4$ определяется равенством (ad$X$)= $[X, Y]$. С учётом кососимметричности структурных констант по первым двум индексам, мы имеем не 4^3 исходных констант, а только 24. Для удобства ввода данных координаты вектора $(\mathrm{ad}E_i)E_j$ записываются не в *j*-й столбец матрицы $\mathrm{ad}E_i$, а в *j*-ю строку.

Кроме того, мы задаём матрицу Грама (пример см. на рис. 2).

Матрица Грама			
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0

Рис. 2. Пример матрицы Грама

Первым действием мы умножаем каждую из матриц указанных выше операторов на матрицу Грама Γ справа. Тем самым получаем матрицы $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$, которые состоят из элементов $\alpha_{1jk}, \alpha_{2jk}, \alpha_{3jk}, \alpha_{4jk}, j, k = 1, \ldots, 4$. На втором шаге мы вычисляем символы Кристоффеля ∇_{ijk} по формуле (2). Учитывая кососимметричность этих символов по вторым индексам, нам достаточно ввести в подходящие клетки Excel только 24 формулы. Результат выглядит как 4 матрицы $\nabla_{1jk}, \nabla_{2jk}, \nabla_{3jk}, \nabla_{4jk}, j, k = 1, \ldots, 4$.

Также мы вычисляем обратную матрицу к матрице Грама. После чего на третьем шаге мы вычисляем матрицы $\nabla_{jk}^1 = \nabla_{1jk}\Gamma^{-1}, \ldots, \nabla_{jk}^4 = \nabla_{4jk}\Gamma^{-1}, j, k = 1, \ldots, 4$ и тут же на четвёртом шаге транспонируем получившиеся матрицы. В результате имеем матрицы операторов $\nabla_{E_i} : \mathcal{G}_4 \to \mathcal{G}_4, i = 1, \ldots, 4$.

На пятом шаге мы вычисляем 6 матриц операторов $\nabla_{[E_i,E_j]}, i, j = 1 \ldots, 4, i < j$. На шестом шаге мы вычисляем 12 матриц операторов $\nabla_{E_i}, \nabla_{E_j}, i, j = 1 \ldots, 4$. Удвоение числа матриц связано с тем, что умножение матриц не коммутативно. На седьмом шаге мы находим 6 матриц

$$R(E_i, E_j) = \nabla_{E_i}\nabla_{E_j} - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i} - \nabla_{[E_i,E_j]}, i, j = 1, \ldots, 4, i < j.$$

Казалось бы, цель достигнута. Но мы продолжаем вычисления и находим 6 матриц, которые составлены из компонент тензора кривизны типа (4.0):

$$R_{12kl} = R(E_1, E_2, E_k, E_l), R_{13kl} = R(E_1, E_3, E_k, E_l), R_{14kl} = R(E_1, E_4, E_k, E_l),$$

$$R_{23kl} = R(E_2, E_3, E_k, E_l), R_{24kl} = R(E_2, E_4, E_k, E_l), R_{34kl} = R(E_3, E_4, E_k, E_l), \quad (3)$$
$$k, l = 1, \ldots, n.$$

Необходимость этого шага вызвана следующими обстоятельствами:

1. Для большей уверенности в достоверности полученных результатов хотелось бы убедиться, что тензор кривизны типа (4.0) действительно обладает симметриями или косыми симметриями, указанными выше.

2. В дальнейшей перспективе рабочая книга может быть расширена, с тем чтобы иметь возможность вычислять секционную кривизну, тензор Риччи и скалярную кривизну однородного многообразия группы Ли, снабжённой левоинвариантной метрикой.

4. Применение рабочей книги для вычисления тензора кривизны самоподобных лоренцевых многообразий некоторых групп Ли

Применение рабочей книги подтвердило, что тензор кривизны любого типа для самоподобного многообразия группы Ли $SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ является нулевым.

Для трёх многообразий группы Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$, найденных в работе [1], во всех трёх случаях коммутационные соотношения в каноническом базисе задаются одним равенством $[E_2, E_3] = E_1$, а матрицы Грама скалярного произведения имеют вид

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений тензора кривизны типа (4.0) в каноническом базисе.

Для Γ_1 и Γ_3, из числа матриц (3), ненулевыми оказались только матрицы, показанные на рис. 3 и 4 соответственно. Для матрицы Γ_2 метрика оказалась плоской.

Тем самым можно сделать вывод, что группы Ли, снабжённые левоинвариантными лоренцевыми метриками, могут быть самоподобными многообразиями не только в тех случаях, когда их метрики являются плоскими. В частности, односвязная группа Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$ может быть самоподобным однородным многообразием не только в том случае, когда это многообразие изометрично пространству Минковского.

R(E_2,E_3,E_k,E_l)			
0	0	0	0
0	0	0	0,25
0	0	0	0
0	-0,25	0	0

R(E_3,E_4,E_k,E_l)			
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0,25
0	0	-0,25	0

Рис. 3. Ненулевые матрицы для Γ_1

R(E_1,E_2,E_k,E_l)			
0	0,25	0	0
-0,25	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

R(E_2,E_3,K,L)			
0	0	0	0
0	0	-0,75	0
0	0,75	0	0
0	0	0	0

Рис. 4. Ненулевые матрицы для Γ_3

Литература

1. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Четырёхмерные самоподобные однородные многообразия группы Ли $Hs \times \boldsymbol{R}^+$ // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2022. № 1. С. 5–10.
2. Подоксёнов М.Н., Шпакова Ю.А. Самоподобное однородное лоренцево многообразие группы Ли $SE(2) \times \boldsymbol{R}^+$ // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1 (65) С. 46–54.
3. Duncan D.C., Ihrig E.C. Simply connected homogeneous spacetimes of zero curvature: Preprint. Tempe : Arizona State University, 1988.
4. Можей Н.П. Применение пакетов аналитических вычислений к изучению тензоров Риччи инвариантных связностей // Информатика: проблемы, методы, технологии : материалы XXI Международной научно-методической конференции, Воронеж, 11–12 февраля 2021 г. Воронеж : Воронежский государственный технический университет, 2021. С. 501–505.
5. Можей Н.П. Об исследовании трёхмерных многообразий с использованием пакета Maple // Информационные технологии в образовании, науке и производстве : III Международная научно-техническая интернет-конференция, 20–21 ноября 2015 г. Секция 2. URL: `https://rep.bntu.by/handle/data/21889` (дата обращения: 07.08.2023).
6. Программный комплекс для вычисления сигнатур оператора тензора кривизны на метрических группах Ли: RU 2015617314 / Е.Д. Родионов, О.П. Хромова, С.В. Пастухова; правообладатель Алтайский государственный университет. № 2015613996; заявл. 15.05.2015; опубл. 20.08.2015. URL: `http://elibrary.asu.ru/xmlui/handle/asu/7469/` (дата обращения: 07.08.2023).
7. Программный комплекс для нахождения кривизн метрических связностей с векторным кручением конечномерных групп Ли: RU 2019611195 / О.П. Хромова; правообладатель Алтайский государственный университет. № 2019610108; заявл. 10.01.2019; опубл. 23.01.2019, Бюл. № 2. URL: `http://elibrary.asu.ru/handle/asu/7748` (дата обращения: 07.08.2023).
8. Milnor J. Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups // Advances in Mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

9. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом / под. ред. В.А. Топоногова. М. : Мир, 1971. 344 с.

CURVATURE TENSOR OF SELF-SEMILAR LORENTZ MANIFOLDS OF SOME FOUR-DIMENSIONAL LIE GROUPS

M.N. Podoksenov
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Yu.A. Shpakova
Student, e-mail: juliashpkv@gmail.com

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. An Excel workbook has been created to calculate the curvature tensor of four-dimensional Lie groups equipped with a left-invariant Lorentzian metric. Application of the workbook showed that self-similar homogeneous Lorentzian manifolds of four-dimensional Lie groups equipped with left-invariant Lorentzian metrics are not necessarily flat. Namely, among the previously found three self-similar homogeneous manifolds of the Lie group $Hs \times \boldsymbol{R}^{+}$, only one is flat, and two are not flat. The only one up to isometry self-similar homogeneous manifold of the Lie group $SE(2) \times \boldsymbol{R}^{+}$ is flat.

Keywords: Lie group, left-invariant metric, curvature tensor, Excel.

Дата поступления в редакцию: 25.08.2023