Математические структуры и моделирование
2023. № 2 (66). С. 15–37

УДК 515.164.15+517.925:631.4
DOI 10.24147/2222-8772.2023.2.15-37

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ ПОЧВЫ И ИХ КАТАСТРОФИЧЕСКИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПОД ВЛИЯНИЕМ АНТРОПОГЕННЫХ НАГРУЗОК

А.К. Гуц
д-р. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., e-mail: aguts@mail.ru

Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр Российской академии наук», Сочи, Россия

Аннотация. Предлагаются несколько моделей плодородия почвы, основанные на математической теории катастроф. Модели дают возможность рассчитывать изменения параметров почвы под влиянием антропогенного воздействия на неё. Каждая модель отвечает тому или иному типичному ростку катастроф и учитывает нужное число параметров, характеризующих свойства почвы. Это позволяет учитывать разнообразие региональных зон и климатических условий. Типичность ростков и их универсальных деформаций даёт нам возможность говорить о достаточной адекватности предлагаемых моделей, поскольку нетипичные ростки относятся с точки зрения математики к исключительным явлениям, редко встречающимся в природе.

Ключевые слова: математическая модель, почва, плодородие, антропогенная нагрузка, теория катастроф.

Введение

Почва как система состоит из таких взаимодействующих подсистем, как почвообразующая порода, кислотность *pH*, гумус, химические макро- и микроэлементы, вода. Их рассматривают как параметры, характеризующие свойства почвы. Под воздействием деятельности людей эти параметры могут меняться. Важно иметь возможность, формулы, с помощью которых мы могли бы оценивать, предсказывать, как изменятся те или иные параметры почвы под антропогенной нагрузкой. Для этого нужно построить математическую модель, учитывающую все свойства почвы и возможное антропогенное воздействие на неё. Кроме того, имея такую модель, можно будет математически подтверждать предположения почвоведов о том, что фиксируемое ими изменение, скажем, кислотности почвы, обусловлено человеческим вмешательством [1].

Почва обладает таким важным жизнеобеспечивающим свойством как *плодородие*. Степень плодородия будем рассматривать как переменную величину $x(t)$, зависящую от времени и от управляющих параметров $u_1, ..., u_k$, характеризующих другие свойства почвы и определяющих её плодородие. В данной статье мы предлагаем математическое описание этой зависимости с учётом антропогенного влияния, которое в условиях стабильного уровня плодородия можно будет использовать, в частности, для изучения степени антропогенного воздействия на свойства почвы.

1. О плодородии почвы и возможности математики

Под *потенциальным плодородием* понимается способность конкретной почвы, расположенной в определённых климатических условиях и условиях рельефа, обеспечивать растения всеми необходимыми факторами роста, развития и получения биомассы или основной и побочной сельскохозяйственной продукции за счёт природных и приобретённых под влиянием хозяйственной деятельности человека свойств почв в многолетнем цикле. Потенциальное плодородие – это нечто стабильное, сохраняющееся неизменным долгое время. Но под интенсивным антропогенным воздействием способно измениться весьма быстро [2, с. 7].

Напротив, *эффективное плодородие* – это динамически меняющееся свойство почвы. Под эффективным плодородием мы понимаем способность конкретной почвы, расположенной в определённых климатических условиях и условиях рельефа, обеспечивать растения всеми необходимыми факторами роста, развития и получения биомассы или основной и побочной сельскохозяйственной продукции в **конкретный период времени** (фазу развития растений) [2, с. 8].

«Урожайность (биомасса) растений в естественных природных условиях (без непосредственного воздействия человека) определяется динамикой эффективного плодородия почв в период всего цикла роста и развития растений.

Урожайность сельскохозяйственных культур, получаемая при непосредственном воздействии человека, определяется динамикой эффективного плодородия почв в период всего цикла роста и развития этих культур, а также другими факторами, не влияющими непосредственно на эффективное плодородие почвы (сроки сева, качество посевного материала, сроки уборки урожая, стихийные явления и т. д.)» [2, с. 8].

Агрономия, почвоведение накопили большой исторический научный опыт поддержки и влияния на плодородие почвы. Но, как правило, методы исследования плодородия сугубо традиционные – многолетние наблюдения и эксперименты. Предсказания делаются, опираясь на соответствующий накопленный опыт почвоведов и агрономов. С середины XX века стали использоваться методы математического моделирования. Но здесь используется математика, развитая в основном в XIX веке, и методы теории дифференциальных уравнений и математической статистики [12].

Математическое моделирование является альтернативным инструментом изучения динамики изменения плодородия почвы под влиянием многих фактов, таких как природные изменения климата, антропогенные воздействия и пр. Оно способно делать предсказания различных до сей поры неизвестных явлений, существенно влияющих на состояние почвы. В частности, это касается предсказания скачкообразных, катастрофических изменений состояния почвы, возникающих при, казалось бы, совершенно спокойных, незначительных и контролируемых изменениях в окружающей среде и известных в математике под названием *бифуркации процессов*. Бифуркации изучаются в математике в рамках теории особенностей дифференцируемых отображений, или математической теории катастроф.

Поскольку скачкообразные изменения свойств почвы с последующей непредсказуемой эволюцией[1] в силу сопутствующего явления бифуркации могут происходить не только при стихийных природных катастрофах, но в наше время под влиянием деятельности человека, как, например, заявлено в работе [1], то естественно обратиться к теории бифуркаций и теории катастроф для описания динамики плодородия почвы. В рамках этих теорий в данной статье строятся модели плодородия почвы, посредством которых мы сможем решать перечисленные выше задачи.

2. Математические модели плодородия почв

Как пример моделирования плодородия почвы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений, которые используются и нами, рассмотрим подход авторов статьи [7].

Их модели имеют вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, \text{гумус}, N, F, K, pH, W, \Phi_I, CO_2),$$

где x_i $(i = 1, ..., n)$ – меры плодородия, W – влажность почвы, Φ_I $(I = 1, ..., m)$ – скорость фотосинтеза, которая определяется интенсивностью диффузионного потока CO_2 к хлоропластам из атмосферы.

Более конкретно в статье [7] рассматриваются модели в виде как обыкновенного дифференциального уравнения, так и дифференциального уравнения с запаздыванием:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 - u_2 x - u_3 x^2 \qquad (*)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = u_1 - u_2 x(t) - u_3 x^2(t - \tau)$$

с начальным условием: $x(t_0) = x_0$.

Здесь $x(t)$ – мера плодородия почвы; константы u_1, u_2, u_3 зависят от следующих параметров: pH, массы тела, скорости фотосинтеза, интенсивности диффузии, потока CO_2, кальция, фосфора и почвенной влаги.

Уравнение (*), переписанное в виде

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, a_1, a_2, a_3), \qquad (**)$$

где

$$V(x, a) = \frac{u_3}{3} x^3 + \frac{u_2}{2} x^2 - u_1 x,$$

содержит в правой части нетипичную особенность, её нет среди типичных особенностей, о которых речь ниже (табл. 3), и уравнение (**) не сохраняет своих свойств, т. е. не является структурно устойчивым при малых шевелениях правой части вида

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, u_1, u_2, u_3) \to \frac{\partial}{\partial x} V(x, u_1, u_2, u_3) + \delta G(x, u_1, u_2, u_3),$$

[1]Время протекания таких скачков пренебрежимо по сравнению с временем в десятки тысяч лет существования почвы. В статье [1] говорится о 100 годах.

где δG – малое возмущение. А поскольку малые шевеления неизбежны – природа полна спонтанных изменений и возмущений, то уравнение (**) плохо описывает то, для чего написано. Типичным и структурно устойчивым будет, например, *катастрофа складки*

$$V(x,a) = x^3 + u_1 x$$

или *катастрофа сборки*

$$V(x,a) = x^4 + u_1 x^2 + u_2 x.$$

3. Бонитировка почв

«*Бонитировка почв* (лат. bonitas — доброкачественность) – это сравнительная оценка качества почв, их производительной способности. Другими словами бонитировка почв – это специализированная генетико-производственная классификация почв, плодородие которых выражено в баллах» [4]. *Бонитет почв* – показатель качества почв, их продуктивности, добротности [4].

Бонитировка почв производится посредством *критериев балльной оценки почв*. Баллы бонитета устанавливаются с учётом природных свойств почв и их корреляцией с урожайностью ведущих сельскохозяйственных культур.

Анализ почвы является наиболее простым, экономичным и эффективным способом диагностики её плодородия, а также основанием для рекомендации адекватного количества корректирующих средств и удобрений для повышения продуктивности сельскохозяйственных культур и, как следствие, урожайности и рентабельности.

4. Измерение степени плодородия почвы

Моделирование плодородия почвы предполагает выделение числовой переменной $x(t)$, значения которой коррелируют с данными признанной бонитировочной шкалы. Однако практически весьма трудно составить единую бонитировочную шкалу, которая охватила бы всё разнообразие почв России. Поэтому, как правило, составляются местные, региональные бонитировочные шкалы [4, с. 73].

Имеющиеся на сегодня различные шкалы оценивают плодородие почв на основе различных показателей, характеризующих состояние почв. В табл. 1 мы можем насчитать 23 (или 29) таких показателя.

4.1. Способ оценки по Н.С. Лебедеву

Способ оценки почвенного плодородия, предложенный Н.С. Лебедевым [5], заключается в том, что берут пробы конкретных почв, в которых физико-химическим анализом определяют содержание физической глины и фактические параметры оценочных признаков плодородия:

1) pH;

2) содержание гумуса;

3) содержание макро- и микроэлементов;

4) мощность пахотного слоя.

Таблица 1. Показатели состояния почвы [3]

Свойство почвы	Степень динамичности (параметр/переменная)	Обозначения и единицы измерения
Структурно-механическое состояние		
Плотность	Переменная	ρ, г/см^3; кг/м^3
Пористость	Переменная	n, % от объема
Удельная поверхность	Параметр	$S_{уд}$, м^2/г; м^2/кг
Структурная прочность	Параметр	$P_{стр}$, кПа; кгс/см^2
Содержание физической глины	Параметр	% от веса
Гидротермическое состояние		
Теплоемкость	Параметр	C, Дж/кг·град
Теплопроводность	Параметр	λ, Вт/м·град
Температуропроводность	Параметр	k, с/м^2
Температура	Переменная	T^0, град
Уровень грунтовых вод	Переменная	УГВ, м
Коэффициент фильтрации	Параметр	$K_Ф$, м/с
Влагоемкость:		
полевая	Параметр	НВ, % от веса
максимальная молекулярная	Параметр	ММВ, % от веса
Влажность	Переменная	W, % от веса
Воздухоемкость	Переменная	$V_В$, % от объема
(Био)Химическое состояние		
Содержание гумуса	Параметр	C, % от веса
Обогащенность азотом	Параметр	C/N, безразм. велич.
Качественный состав гумуса	Параметр	$C_{ФК}/C_{ГК}$
Мощность гумусовых гориз.	Параметр	Нг, м
Мощность подстилки	Параметр	Нп, м
Кислотность	Переменная	pH, - lgH$^+$
Окислит.-восстанов. потенциал	Переменная	Eh, mB
Емкость катионного обмена	Параметр	Мг-экв./м^3
Санитарно-гигиеническое состояние		
Содержание нитратов	Переменная	мг/кг; мг/м^3
Содержание нитритов	Переменная	мг/кг; мг/м^3
Содержание пестицидов	Переменная	мг/кг; мг/м^3
Тяжелые металлы	Переменная	мг/кг; мг/м^3
Радиоактивность	Переменная	мкР/ч
Патогенные микроорганизмы	Переменная	кол./м^3

В качестве эталонной почвы берут почву, которая содержит 20–50 % физической глины, для оценочных признаков эталонной почвы задают параметры, соответствующие её потенциальному плодородию.

Строят оценочную шкалу, в которой относительно эталонной почвы, которой присваивают высший балл, устанавливают баллы другим по содержанию физической глины почвам и в которую вводят параметры потенциального плодородия эталонной почвы и оптимальные параметры оценочных признаков почвенного плодородия, обладающего конкретным в объёме оценочной шкалы количеством баллов. Балл, который соответствует фактическому параметру каждого оценочного признака плодородия конкретной почвы, и оптимальные параметры каждого оценочного признака почвенного плодородия, обладающего конкретным количеством баллов, устанавливают по единой оценочной основе, рассчитываемой по формуле

$$x = K\left[1 - \left(1 - \frac{p}{a}\right)^2\right],$$

где x – балл плодородия почвы; p – фактический параметр основного признака плодородия почвы; a – оптимальный параметр того же признака плодородия эталонной почвы, соответствующий её потенциальному плодородию; K – объём оценочной шкалы в баллах.

Признак, лимитирующий плодородие конкретной почвы, предварительный балл плодородия этой почвы определяют по наименьшему баллу из числа оценочных признаков почвенного плодородия. Затем определяют окончательный балл плодородия конкретной почвы (табл. 2).

Таблица 2. Шкала для оценки плодородия почвы [5]

Балл плодородия	Содержание физической глины, %		Оценочные признаки почвенного плодородия												
			$pH_{(KCl)}$	содержание гумуса, по Тюрину, %	Содержание макроэлементов мг на 100 г почвы				Содержание микроэлементов по методам ЦИНА, мг на 1 кг почвы/ГОСТ 26487-85					
					P_2O_5, по Кирсанову	K_2O, по Кирсанову	NO_3+NH_4, по Тюрину-Кононовой	MgO, по А-1 методу	Mn, по Шеленбергеру	B, водный раствор	Mo, оксалатно-буферный р-р с pH 3,3	Zn, ацетат-буферный р-р с pH 4,8	Cu, 1 ммоль HCl	Co, 1 ммоль $H1O_3$
100	20-50		6,5	5,0	30	30	14	30	10	1,5	0,5	10	7,0	5,0
90	15	55	6,1	3,5	21	21	10	21	7	1,0	0,35	7	5,0	3,5
80	10	60	5,7	2,8	17	17	8	17	6	0,8	0,28	6	4,0	2,8
70		70	5,4	2,3	14	14	6,5	14	5	0,7	0,23	5	3,0	2,3
60	5	80	5,1	1,9	11	11	5,0	11	4	0,6	0,19	4	2,6	1,9
50			4,9	1,5	9	9	4,0	9	3	0,45	0,15	3	2,1	1,5
40			4,7	1,2	7	7	3,0	7	2	0,35	0,12	2	1,6	1,2
30			4,5	0,9	5	5	2,0	5	1,5	0,25	0,1	2,5	1,2	0,9
20			4,3	0,6	3	3	1,5	3	1,0	0,20	0,06	1,5	0,8	0,6
10			4,1	0,3	2	2	1,0	2	0,5	0,1	0,03	0,5	0,4	0,3
0			4,0	0,1	1	1	0,5	1	0,2	0,05	0,01	0,1	0,1	0,1

В табл. 2 входят, как мы видим, 13 параметров:

$$u_1 = \text{глина}, \;\; u_2 = pH, \;\; u_3 = \text{гумус}, \ldots, u_{12} = Cu, \;\; u_{13} = Co,$$

управляющих степенью плодородия почвы.

К основным признакам плодородия относят кислотность *pH* и содержание гумуса.

Таблица 3. Шкала бонитировки доминантных почв лесостепи (по А.И. Серому и др., 1987) [6]

Почвы	Основные критерии											Поправки к		Бонитет почвы в баллах
	гумус		азот		фосфор		калий		ММЗПВ[1]		Средний бал			
	в слое 0-100 см, т/га	балл	на 100 г почвы, мг	балл	на 100 г почвы, мг	балл	на 100 г почвы, мг	балл	в слое 0-100 см, мм	балл		Кислотности	Климату	
1. Светло-серые лесные крупнопылевато-легкосуглинистые на лессах (Черниговская область)	16	23	7,9[2]	40	10,5[4]	42	5,7[4]	34	171	86	45	0,96	0,94	41
2. Темно-серые лесные тяжелосуглинистые на лессах (Харьковская область)	274	55	7,5[3]	75	17,4[4]	70	10,8[4]	64	155	78	68	0,96	0,90	59
3. Черноземы типичные глубокие среднегумусные тяжелосуглинистые (Полтавская область)	507	101	11,3[3]	113	14,6[5]	73	18,6[5]	93	174	87	94	-	0,90	85

[1] - максимально возможный запас продуктивной влаги в слое 0-100 см; [2] - активный азот по Зражевскому-Серому; [3] - легкогидролизуемый азот по Тюрину-Кононовой; [4] - метод Кирсанова; [5] - метод Чирикова

Большое число показателей >5 порождает определённые трудности для выбора модели плодородия в рамках теории катастроф, поскольку хотя они и перечислены, но их может быть бесконечное число, а выбранные могут быть структурно неустойчивыми, т. е. терять свои свойства при внешних небольших возмущениях (при малых шевелениях).

Кроме этого, «почвы в среднем содержат около 20 % воды от всей массы, т. е. одна пятая часть почвы – вода, её жидкая часть. Однако в зависимости от погодных условий содержание воды в почве разное» [21, с. 83]. В табл. 2 вода фактически не учитывается.

4.2. Способ оценки по А.И. Серому

Гораздо меньше показателей – 5, правда, для лесостепей, используется в шкале А.И. Серого (табл. 3). Для наших целей это принципиально, поскольку можно будет утверждать, что раз управляющих параметров 5:

$$u_1 = \text{гумус},\ u_2 = \text{азот},\ u_3 = \text{фосфор},\ u_4 = \text{калий},\ u_5 = \text{ММЗПВ},$$

то модель будет *типичной и структурно устойчивой*, и её мы берём их табл. 4. Прочие, как правило, не встречаются в природе.

5. Выбор модели

Изменчивость эффективного плодородия подсказывает, как можно строить математическую модель плодородия. Если $x(t)$ – показатель плодородия в момент времени t, то плодородие в следующий момент времени $t + \Delta t$ определяется величиной

$x(t)$ и факторами, действующими на временном отрезке $[t, t + \Delta t]$ и повлёкшими изменения значения величины плодородия:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + X(t, \Delta t, x, u_1, ..., u_k).$$

Отсюда, полагая, например, что

$$X(t, \Delta t, x, u_1, ..., u_k) = A(t, x, u_1, ..., u_k)\Delta t,$$

получаем соотношение

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = A(t, x, u_1, ..., u_k),$$

или, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t, x, u_1, ..., u_k).$$

В случае неизменности величины плодородия, как, например, для потенциального плодородия,

$$\frac{dx}{dt}(t) = 0,$$

или

$$A(t, x, u_1, ..., u_k) = 0.$$

Это уравнение определяет так называемые *стационарные равновесия*, которые могут иметь место и в случае изучения эффективного плодородия.

Мы уточним нашу модель, взяв за основу более конкретное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla V(x, u), \qquad (1)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \ \ u = (u_1, ..., u_k) \in \mathbb{R}^k,$$

обеспечивающее нам наличие следующих стационарных равновесных состояний, т. е. состояний почвы

$$\frac{dx}{dt} = \nabla V(x, u) = 0,$$

плодородие которых не меняется некоторое длительное время, а если меняется, то скачками, осуществляющимися сравнительно за короткое время, в случае, когда управляющие параметры $u_1, ..., u_k$, меняясь, пересекают *бифуркационное множество* (если таковое имеется, см. § 8.1. и рис. 1).

Поскольку агрономия способна добиваться повышения плодородия почвы, и можно сказать, что повышение плодородия, в общем-то, идёт скачкообразно (внесение удобрений, ...), то следует подбирать функцию $V(x, u)$ так, чтобы она заведомо обладала бифуркационным множеством. Это означает, что мы должны её искать в рамках теории особенностей дифференцируемых отображений [17], или математической теории катастроф.

Если вспомнить, что эта теория классифицирует *типичные* формы семейств функций или виды функций $V(x,u)$, то создаваемые нами модели в рамках теории катастроф не просто подпадают под данную классификацию, но и используют её для выделения моделей с нужными свойствами.

Типичность понимается как то, что встречается почти всегда, и поскольку почву скорее нужно отнести к типичным, обычным явлениям, то вполне можно искать функцию $V(x,u)$ среди типичных ростков. В случае признания почвы, как впрочем и жизни в целом, нетипичным явлением, нам придётся искать вид функции V уже вне этой теории, а точнее, придётся выводить, определять её вид, опираясь на некоторые, скажем, эвристические методы.

Типичные формы ростков во многом все классифицированы, и нам всего лишь нужно будет выбрать подходящую. Это обстоятельство отчасти нас смущает – одна и та же функция для различных явлений совсем не из близких сфер человеческой деятельности или природы. Но в этом блеск теории катастроф, ведь она сумела единым способом описать самые разнообразные явления, сосредоточившись на типе катастрофического, скачкообразного перехода от одного равновесия к другому. Эти переходы оказались достаточно однообразными и их смогли классифицировать. Правда, если число управляющих ими факторов/параметров не слишком большое. Но в ряде случаев их может быть и бесконечно много.

В данной статье будем рассматривать параметрическое семейство, функцию $V(x,u)$, в рамках теории особенностей дифференцируемых отображений.

Если мы описываем плодородие одним уравнением (1), т. е. имея только одну 1-мерную переменную x, и учитываем 13 управляющих параметров, то в общем случае функция $V(x,u)$ имеет вид [18, с. 52]:

$$V(x,u) = \pm x^{15} + \sum_{k=1}^{13} u_k x^k \tag{2}$$

и, следовательно, плодородие почвы описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \mp 15x^{14} - \sum_{k=1}^{13} k u_k x^{k-1}. \tag{3}$$

Если используем для оценки плодородия почвы табл. 3 с 5 параметрами, то имеем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = -7x^{6} - \sum_{k=1}^{5} k u_k x^{k-1}. \tag{4}$$

6. Учёт растительности

Заметим, что мы никоим образом не обращали внимание на растительность, которая существенным образом может влиять на плодородие почвы.

Обозначим через b биомассу растительности. В качестве уравнения для биомассы возьмём уравнение

$$\frac{db}{dt} = R(b,x,v) = r(x)\left(1 - \frac{b}{K}\right)b - vbz,$$

где $r(x)$ – скорость продукции биомассы с учётом плодородия почвы; v – скорость истощения биомассы; z – фактор, характеризующий использование (потребление) биомассы, например, человеком $z = z(a)$ или z – это то, что «уходит в почву, способствуя её плодородию», т. е. $z = z(x)$.

Взаимовлияние почвы и растительности математически осуществляется через введение в их уравнения соответствующей переменной, например, x или b соответственно:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\nabla_x V(x, b, u) \\ \dfrac{db}{dt} = R(b, x, v) \end{cases} . \tag{5}$$

Если за уравнение плодородия возьмём уравнение, полученное из уравнения (2) или (3), то возникает проблема вставки в правую часть полученного уравнения переменной b.

Это можно сделать, не нарушая типичности функции V для уравнения (2), поскольку теперь она зависит от двух переменных x, b, а число управляющих параметров u_i более 5.

Известно, что типичные ростки таких функций могут содержать *модули*, т. е. могут быть *непростыми* ростками [18, с. 40]. Модуль – это фактически дополнительный числовой параметр b, присутствующий в функции V. Он характеризуется тем, что не может быть устранён из ростка заменой переменных $x_1, ..., x_n$. Поэтому модуль можно рассматривать как переменную b, а также как антропогенный фактор a (см. раздел 12).

Число модулей в ростке обозначаем через m.

Росток с модулем $a = (a_1, ..., a_m)$ будем обозначать как $V(x|a, u)$.

7. Упрощение уравнений

Наблюдаемые значения плодородия x_0, биомассы b_0 имеют конкретные числовые значения, заведомо отличные от нуля, скажем, как это видно из таблиц оценки плодородия. Мы будем использовать в нашей модели ростки функций $V(x, u)$, $x = (x, b) \in \mathbb{R}^2$ критическими точками, которыми в литературе принято считать начало координат $(0, 0) \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что изучая систему

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla_x V(x, u), \tag{6}$$

мы на самом деле имеем в виду систему

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla_x V(x - x_0, u), \tag{6'}$$

Иначе говоря, узнав что-то о поведении решения системы (6) в окрестности $(0, 0)$, мы имеем в виду, что речь в действительности идёт о поведении системы (6') в окрестности (x_0, b_0) – достаточно использовать сдвиг $x \to x + x_0,\ b \to b + b_0$.

8. Типичные ростки и их версальные деформации

Теория катастроф пытается дать ответ на вопрос: каковы *обычно* встречаемые типы k-параметрических гладких семейств функций $V(x, u_1, ..., u_k)$? Или: каковы типичные формы этих семейств?

Хотелось, чтобы именно эти типы и властвовали в природе. А те, что к ним не причислены, были крайне редки. На языке математики можно это выразить словами: множество семейств с типичными формами образуют среди всех гладких семейств *открытое плотное* множество. Иначе говоря, если берём типичную форму, то все близкие к ней также типичны, а если попалась нам нетипичная форма, то сколь угодно близко к ней всегда есть типичная.

Семейство с параметром u

$$V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R},$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \;\; u \in \mathbb{R}^k$$

имеет *особенность* в точке $x = 0$, если

$$V(0, u) = 0, \;\; d_x V(0, u) = 0.$$

Функцию с особенностью часто саму называют *особенностью*.

Особенность вырожденная, если

$$det \left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0, u) \right\| = 0.$$

Пусть l – число нулевых собственных чисел λ_i матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(0, u) \right\|.$$

Тогда можно рассматриваемое нами семейство $V(x, u)$ с помощью замены переменных $x \to \phi(x, u)$, $u \to \psi(u)$ привести к *каноническому* выражению вида (расщепление Тома):

$$V(x, u) = f(x, u) + F(x, u),$$

где

$$f(x, u) = CG(l) + \underbrace{\sum_{i=l+1}^{n} \lambda_i(u) x_i^2}_{\text{морсова часть}},$$

$$l \text{ — коранг функции } V,$$

где $CG(l) = CG(l)(x_1, ..., x_l)$ – *росток катастрофы*; $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \to \mathbb{R}$ – его *универсальная деформация* (возмущение).

Задача теории особенностей дифференцируемых отображений состоит в вычислении канонических ростков катастрофы и их универсальных деформаций[2].

Тем самым мы получаем канонические списки потенциальных функций $V(x, u)$, которые можно использовать в целях моделирования процессов в виде дифференциального уравнения (1). Выбирая каноническое выражение, мы будем автоматически получать типичные модели.

[2]Алгоритм вычисления универсальных деформаций дан в [19, с. 256].

8.1. Бифуркационное множество

Рассмотрим семейство $V : \mathbb{R}^x \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Множество

$$C_V = \{(x,u) : d_x V(x,u) = 0\}$$

называется *множеством катастроф семейства* V, оно состоит из стационарных равновесий.

Среди стационарных равновесий есть вырожденные – это особенности, образующие *множество особенностей*:

$$\Sigma_V = \{(x,u) \in C_V : det\ d_x^2 V(x,u) = 0\},$$

проекция $\pi_V : R^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ которого на плоскость $u \in \mathbb{R}^k$ дает **бифуркационное множество**:

$$B_V = \pi_V(\Sigma_V) = \{u \in \mathbb{R}^k : \exists x((x,u) \in \Sigma_V)\}.$$

При изменении u с пересечением множества B_V происходит смена равновесия. Это и есть катастрофа!

8.2. Пример катастрофы Cusp (катастрофа сборки)

Рассмотрим семейство

$$V(x,u,v) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx,$$

для которого

$$C_V = \{(x,u,v) : x^3 + ux + v = 0\},$$

$$\Sigma_V = \{(x,u,v) \in C_V : 3x^2 + u = 0\} =$$

$$= \{(x,u,v) : x^3 + ux + v = 0, u = -3x^2\} = \{(x,u,v) : v = 2x^3, u = -3x^2\}$$

– *множество особенностей*.

Тогда

$$B_V = \pi(\Sigma_V) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \exists x(u = -3x^2, v = 2x^3)\}.$$

При движении в плоскости (u,v) вокруг (0,0) функция $V_{(u,v)}(x) = V(x,u,v)$ меняет число критических точек, происходят катастрофы (рис. 1).

8.3. Структурная устойчивость семейств функций

Два семейства функций $V(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ и $W(y,v) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *эквивалентны*, если существуют:

1) $y = \phi(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение, которое для каждого $u \in \mathbb{R}^k$ даёт диффеоморфизм $\phi_u(x) = \phi(x,u) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

2) $v = \psi(u) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ – диффеоморфизм;

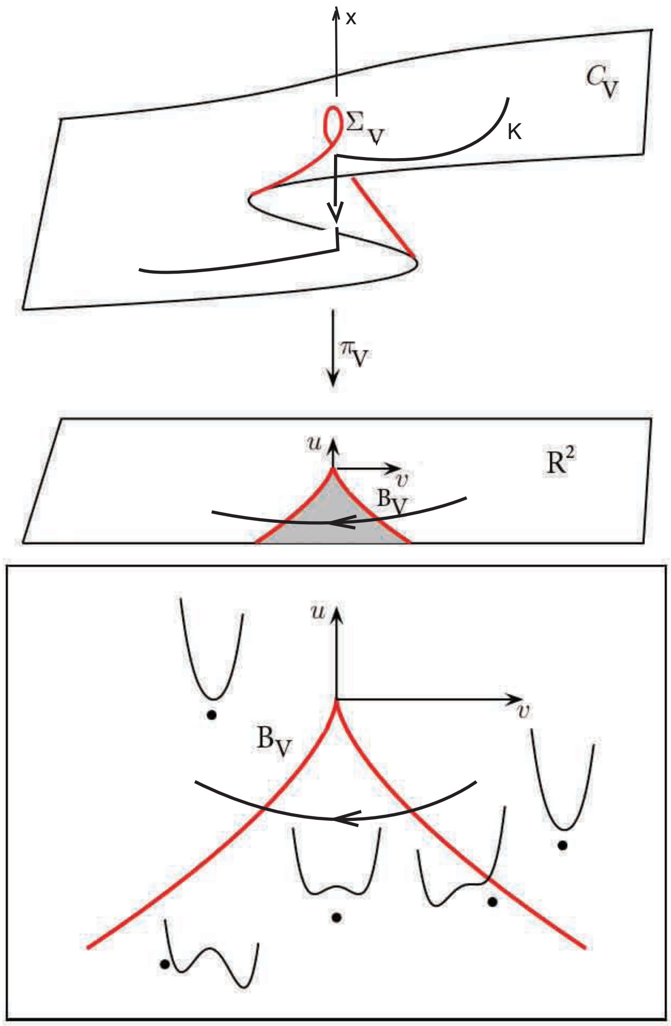

Рис. 1. Катастрофы сборки [15]. При движении в плоскости (u, v) вокруг (0,0) функция $V_{(u,v)}(x) = V(x, u, v)$ меняет число критических точек (в которых $d_x V_{(u,v)} = 0$). На рисунках видно, как пересечение (проекция кривой K) бифуркацинного множества B_V скачком «обрушивает» значение плодородности почвы x

3) $\mu(u) : R^k \to \mathbb{R}$ – гладкое отображение, такие, что

$$V(x, u) = W(\phi_u(x), \psi(u)) + \mu(u)$$

для всех $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Семейство $V(x, u)$ *структурно устойчиво*, если ему эквивалентно любое его возмущение $W(x, u) = V(x, u) + \delta G(x, u)$ (малое шевеление). Как правило, ограничиваются некоторой окрестностью $0 \in \mathbb{R}^n$.

Структурная устойчивость является типичным свойством семейств функций при $k \leqslant 5$ [11, с. 157]. Но при $k > 5$ это уже не наблюдается.

Таблица 4. Ростки и их деформации при $k \leqslant 5$

Тип	n	k	$CG(l)$	$F(-,-)$
Складка	1	1	x^2	u_1x
Сборка	1	2	$\pm x^4$	$u_1x + u_2x^2$
Ласточкин хвост	1	3	x^5	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3$
Бабочка, (A_5)	1	4	$\pm x^6$	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4$
Гиперболическая омбилическая точка	2	3	$x^3 + y^3$	$u_1x + u_2y + u_3xy$
Параболическая омбилическая точка	2	3	$\pm(x^2y + y^4)$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4y^2$
Эллиптическая омбилическая точка	2	4	$x^3 - xy^2$	$u_1x + u_2y + u_3(x^2 + y^2)$
Вигвам, (A_6)	1	5	x^7	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^2 + u_5x^5$
Вторая эллиптическая омбилическая точка, (D_6^-)	2	5	$x^2y - y^5$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4y^2 + u_5y^3$
Вторая гиперболическая омбилическая точка, (D_6^+)	2	5	$x^2y + y^5$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4y^2 + u_5y^3$
Символическая омбилическая точка, (E_6)	2	5	$\pm(x^3 + y^4)$	$u_1x + u_2y + u_3xy + u_4y^2 + u_5xy^2$

9. Теорема Тома – Зимана ($k \leqslant 5$)

Теорема 1. *Для* $n \geqslant 1$ *и* $k \leqslant 5$ *существует открытое и плотное множество структурно устойчивых гладких k-параметрических семейств* $V(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *эквивалентных вблизи любой точки одному из канонических семейств, перечисленных в табл.* 4. *Число таких семейств зависит от k:*

k	$\leqslant 1$	$\leqslant 2$	$\leqslant 3$	$\leqslant 4$	$\leqslant 5$	$\geqslant 6$
Число типов	1	2	5	7	11	∞

■

Мы видим, что формулировка этой теоремы раскрывает нам понятие *типичности* ростка катастрофы: они образуют открытое плотное множество в многообразии всех гладких k-параметрических семейств функций. Иначе говоря, *почти любое* гладкое k-параметрическое семейство указано в табл. 4.

Бесконечное число семейств функций V при $k \geqslant 6$ можно исключить за счёт ослабления определения эквивалентности семейств [22, с. 170], заменяя диффеоморфность и гладкость замен переменных на топологические и непрерывные. Для решаемой нами задачи это принципиально – число параметров k оценки плодородия часто > 5, и желательно иметь конечное число вариантов при выборе модели плодородия почвы.

Кроме того, топологически устойчивые отображения образуют всюду плотное множество в пространстве всех гладких отображений (теорема Мазера [16, с. 139]). Иначе говоря, они типичны.

9.1. Простые ростки $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Каноническая форма *простых* ($m = 0$) ростков $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ коранга $l \leqslant 2$ и их универсальных деформаций дана в табл. 5 [18, с. 59].

Таблица 5. Простые ростки и их деформации

Тип	l	k	$CG(l)$	$F(-,-)$
$A_{\pm k}$, $k \geqslant 1$	1	k-1	$\pm x^{k+1} \pm \underbrace{y^2}_{\text{морсова часть}}$	$u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + ... + u_{k-1}x^{k-1}$
$D_k^{\pm}$, $k \geqslant 4$	2	k-1	$x^2y \pm y^{k-1}$,	$\sum\limits_{j=1}^{k-3} u_jy^j + \sum\limits_{j=k-2}^{k-1} u_jx^{j-(k-3)}$
$E_6^{\pm}$	2	5	$\pm(x^3 + y^4)$	$u_1y + u_2y^2 + u_3x + u_4xy + u_5xy^2$
E_7	2	6	$x^3 + xy^3$	$u_1y + u_2y^2 + u_3y^3 + u_4xy^4 + u_5x+$ $+u_6xy$
E_8	2	7	$y^3 + y^5$	$u_1y + u_2y^2 + u_3y^3 + u_4x + u_5xy+$ $+u_6xy^2 + u_7xy^3$

Если плодородие оценивается по 13 управляющим параметрам (табл. 2), то для нас подходят только ростки A_{14} и D_{14}.

10. Модели истощения плодородия почвы

В этом параграфе мы демонстрируем модели деградации системы «почва – растительность». Ситуация в некотором роде малозначительная, но она подсказывает, каким образом можно относиться к такому показателю как гумус. Это может быть переменная модели (раздел 10.1), а может быть и управляющий параметр (4).

10.1. Модель A_5 (бабочка, 4 параметра)

При выборе ростка A_6 с морсовой частью y^2 вида

$$V(x,y,u) = x_6 + y^2 + u_1x^4 + u_2x^3 + u_3x^2 + u_4x$$

система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = -6x^5 + u_1x^3 + u_2x^2 + u_3x + u_4 \\ \dfrac{dy}{dt} & = -2y \\ \dfrac{db}{dt} & = R(b,x,y,v) \end{cases},$$

где были переобозначены параметры u_i.

Мы видим, что

$$y(t) = Ce^{-2t},$$

т. е. имеется компонента в почве, которая постоянно убывает. Что моделирует переменная y?

Известно, что если удобрения не применяются, то содержание гумуса снижается, и это подтверждают исследования во всех зонах нашей страны [21, с. 92].

Таким образом, переменная y соответствует гумусу. Иначе говоря, гумус – это не управляющий параметр u_5, а переменная модели. Поэтому мы и взяли росток A_5 и только 4 управляющих параметра, придав им, следуя табл. 3, следующий смысл:

$$u_1 = \textit{азот},\;\; u_2 = \textit{фосфор},\;\; u_3 = \textit{калий},\;\; u_4 = \textit{ММЗПВ}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = \mp 14x^{13} + u_1 + 2u_2x + ... + 12u_{12}x^{11} \\ \dfrac{dy}{dt} & = -2y \\ \dfrac{db}{dt} & = R(x,y,b,v) \end{cases}.$$

Построенная модель – это модель плодородия почвы *без внесения удобрений*. Более того, переменная y не входит в первое уравнение, т. е. гумус уже не влияет на плодородие, и если третье уравнение переписать в виде

$$\frac{db}{dt} = y\left(1 - \frac{b}{K}\right)b - wba,$$

где $w > 0$ – вода, точнее её нехватка; $a > 0$ – влияние человека, в данном случае пагубное, то система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x^5 + u_1 + u_2x + u_3x^2 + u_4x^3 \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \\ \dfrac{db}{dt} = y\left(1 - \dfrac{b}{K}\right)b - wba \end{cases}$$

явно описывает истощение, умирание как почвы (рис. 2), так и растительности.

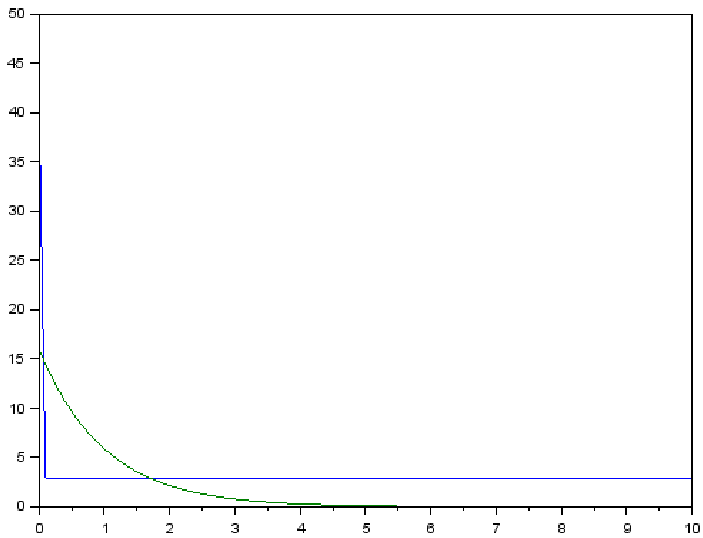

Рис. 2. Истощение почвы: кривые для $x(t)$ и $y(t)$, $x(0) = 41$, $y(0) = 16$, $u_1 = 8$, $u_2 = 10$, $u_3 = 6$, $u_4 = 171$

10.2. Модели A_{14} и A_{13} (12 параметров)

Модель A_5 из раздела 10.1 можно приписать на случай 12 управляющих параметров с переменной y (гумус).

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = \mp 14x^{13} + u_1 + 2u_2x + ... + 12u_{12}x^{11} \\ \dfrac{dy}{dt} & = -2y \\ \dfrac{db}{dt} & = y\left(1 - \dfrac{b}{K}\right)b - wba \end{cases},$$

также описывающее умирание почвы и растительности.

11. Модели плодородия почвы D_{13} (12 параметров)

Рассмотрим другие модели плодородия почвы, в которых гумус является переменной, но отсутствует прямая тенденция к истощению почвы.

Оставляем параметр «гумус» как переменную y и рассматриваем росток D_{13}. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = -[2xy + u_{11} + 2u_{12}x] \\ \dfrac{dy}{dt} & = -[x^2 \pm 12y^{11} + \sum\limits_{j=1}^{10} ju_j y^{j-1}], \\ \dfrac{db}{dt} & = R(b, x, y, v) \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что поскольку переменные x, y можно заменять одну на другую, то можно записать и такую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = -[y^2 \pm 12x^{11} + \sum\limits_{j=1}^{10} ju_j x^{j-1}] \\ \dfrac{dy}{dt} & = -[2yx + u_{11} + 2u_{12}y]. \\ \dfrac{db}{dt} & = R(b, x, y, v) \end{cases}$$

Если в первом уравнении (7) заменить u_{11} на $-u_{11}$, то получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = u_{11} - 2u_{12}x - 2xy \\ \dfrac{dy}{dt} & = -[x^2 \pm 12y^{11} + \sum\limits_{j=1}^{10} ju_j y^{j-1}], \\ \dfrac{db}{dt} & = R(b, x, y, v), \end{cases}$$

первое уравнение которой по сути дела совпадает с уравнением (*) с той разницей, что член самовзаимодействия $x^2 = x \cdot x$ заменяется на уточняющий это взаимодействие член $x \cdot y$.

12. Учёт антропогенного воздействия

Скорее всего антропогенное воздействие a надо рассматривать как один из модулей. Действительно, человеческий фактор никак нельзя убрать, меняя так или иначе переменные нашей модели, каковыми являются плодородие x, гумус y и биомасса b.

Антропогенное воздействие может влиять на плодородие, меняя его в ту или иную сторону, либо сохранять, но при этом влияя уже на другие факторы (параметры), рассматриваемые нами как управляющие, делая их зависимыми от a. В таком случае имеем стационарное равновесие $x = x_0$ и соответствующее уравнение равновесия

$$\nabla V(x_0|a, u) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) при определённых условиях может быть (локально) разрешено относительно параметра u_i

$$u_i = \phi(x_0|a, u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_k),$$

и тем самым мы получаем возможность математически просчитывать влияние антропогенного воздействия a на параметр u_i.

Так благодаря соотношению (9) видно, что изменение значения антропогенного воздействия может отразиться на одном или на нескольких параметрах $u_1, \ldots, u_k$, например на $u_i = pH$ или на редкоземельных элементах, как утверждается в работе [1].

Более того, разрешив уравнение (8) относительно a:

$$a = \psi(x_0, u),$$

можно охарактеризовать и оценить уровень антропогенной нагрузки, отвечающей управляющим параметрам, поддерживающим потенциальное плодородие почвы x_0 или стационарное равновесие x_0 в случае эффективного плодородия.

13. Унимодальные и бимодулярные ростки

Для того чтобы построить модель, учитывающую антропогенный фактор как модуль, необходимо рассмотреть непростые ростки катастроф.

В табл. 6 представлены унимодулярные и бимодулярный типичные ростки min-функций, т. е. имеющих минимум в критической точке $0 \in \mathbb{R}^n$ и их деформации [13, 14]. В общих семействах функций с $k < 16$ параметрами точки минимума, не эквивалентные перечисленным в таблице, не встречаются [17, с. 219]. Иначе говоря, имеем типичные ростки катастроф.

Бимодулярные ростки ($m = 2$) позволяют учитывать как модуль и антропогенный фактор, и гумус.

14. Модели, учитывающие антропогенную нагрузку

Рассмотрим модели плодородия почвы, включающие модули, интерпретируемые как антропогенная нагрузка.

14.1. Модель $Y^{1+}_{3,3}$ (модуль a, 13 параметров)

Гумус считаем переменной y, модуль a – антропогенный фактор. Рассматриваем 13 управляющих параметров, 12 из которых взяты из таблицы 2 и 13-й – это вода.

Тогда имеем систему

Таблица 6. Непростые ростки и их деформации

Тип	m	k	Росток	Универсальная деформация
$X_{1,0}$	1	7	$x^4 + ax^2y^2 + y^2$, $a > -2, a \neq 2$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4xy + u_5y^2 + u_6x^2y + u_7xy^2$
$X_{1,2r}$	1 1	$7 + 2r$	$x^4 + x^2y^2 + ay^{4+2r}$, $a > 0$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4xy + u_5y^2 + u_6y^3 + ... + u_{7+2r}y^{2(r+1)}$
$Y^{1+}_{r,r}$	1	$7 + 2r$	$(x^2 + y^2) + ay^{4+r}$, $a \neq 0$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4xy + u_5y^2 + u_6x^2y + u_7xy^2 + u_8y^3 + u_9xy^3 + u_{10}y^4 + u_{11}xy^4 + ... + u_{7+2r-1}xy^{2+r} + u_{7+2r}y^{2+r}$
$W_{1,0}$	2	12	$x^4 + Ax^2y^3 + y^6$, $A = a_1 + a_2y,\ a_1^2 < 4$	$u_1x + u_2y + u_3x^2 + u_4xy + u_5y^2 + u_6x^2y + u_7xy^2 + u_8y^3 + u_9x^2y^2 + u_{10}y^4 + u_{11}xy^3 + u_{12}xy^4$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = -[2x + u_1 + 2u_3x + u_4y + 2u_6xy + u_7y^2 + u_9y^3 + u_{11}y^4] \\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = -[2y + 7ay^6 + u_2 + u_4x + 2u_5y + u_6x^2 + 2u_7xy + 3u_8y^2 + \\
\qquad\qquad + 3u_9xy^2 + 4u_{10}y^3 + 4u_{11}xy^3 + 5u_{12}y^4 + 5u_{13}y^4], \\[2ex]
\dfrac{db}{dt} = r(x)\left(1 - \dfrac{b}{K}\right)b - vbz(a)
\end{cases}
\tag{9}
$$

где функция $z(a)$, например $z(a) = a > 0$ – использование биомассы людьми.

Рассматривая стационарное равновесие, из второго уравнения системы (9) имеем:

$$
\begin{aligned}
&2y + 7ay^6 + u_2 + u_4x + 2u_5y + u_6x^2 + 2u_7xy + 3u_8y^2 + \\
&\qquad + 3u_9xy^2 + 4u_{10}y^3 + 4u_{11}xy^3 + 5u_{12}y^4 + 5u_{13}y^4 = 0,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

и, следовательно, находим уровень антропогенной нагрузки, «поддерживающий» установившееся равновесие

$$
\begin{aligned}
a = -\frac{1}{7y^6}&[2y + u_2 + u_4x + 2u_5y + u_6x^2 + 2u_7xy + 3u_8y^2 + \\
&+ 3u_9xy^2 + 4u_{10}y^3 + 4u_{11}xy^3 + 5u_{12}y^4 + 5u_{13}y^4].
\end{aligned}
$$

Очевидно, что точно также уравнение (10) можно разрешить относительно любого параметра u_i.

Параметры $a, u_1, ..., u_{13}$ могут изменяться, не влияя существенно на степень плодородия почвы, пока выполняется уравнение (10) и пока они не пересекут бифуркационное множество B_V. Нечто подобное, видимо, и произошло в г. Сочи [1]. Но, как мы знаем, равновесие может непредсказуемо измениться (бифуркация), если параметры $a, u_1, ..., u_{13}$, а главным образом интересующее нас антропогенное воздействие a, начнут меняться так, что пересекут бифуркационное множество B_V, то тогда возможно скачкообразное изменение плодородия почвы.

14.2. Модель $W_{1,0}$ (2 модуля a_1, a_2, 12 параметров)

Гумус считаем переменной y, модуль a_1 – антропогенный фактор общего характера, а модуль a_2 – влияние людей на гумус, плюс 12 управляющих параметров.

Тогда имеем систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & -[4x^3 + 2(a_1 + a_2 y)xy^3 + u_1 + 2u_3 x + u_4 y + 2u_6 xy + \\ & +u_7 y^2 + 2u_9 xy^2 + u_{11} y^3 + u_{12} y^4] \\ \dfrac{dy}{dt} = & -[a_2 x^2 y^3 + 3(a_1 + a_2 y)x^2 y^2 + 6y^5 + u_2 + u_4 x + 2u_5 y + u_6 x^2 + \\ & +2u_7 xy + 3u_8 y^2 + 2u_9 x^2 y + 4u_{10} y^3 + 3u_{11} xy^2 + 4u_{12} xy^3]. \\ \dfrac{db}{dt} & = r(x)\left(1 - \dfrac{b}{K}\right)b - vba_1 \end{cases}$$

В данной модели мы имеем более богатый способ учёта антропогенного влияния, находясь в условиях табл. 2. Параметры a_1, a_2 находятся посредством решения системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4x^3 + 2(a_1 + a_2 y)xy^3 + u_1 + 2u_3 x + u_4 y + 2u_6 xy + \\ \qquad\qquad +u_7 y^2 + 2u_9 xy^2 + u_{11} y^3 + u_{12} y^4 = 0 \\ a_2 x^2 y^3 + 3(a_1 + a_2 y)x^2 y^2 + 6y^5 + u_2 + u_4 x + 2u_5 y + u_6 x^2 + \\ \qquad +2u_7 xy + 3u_8 y^2 + 2u_9 x^2 y + 4u_{10} y^3 + 3u_{11} xy^2 + 4u_{12} xy^3 = 0. \end{cases}$$

15. Заключение

Мы видим, что теория катастроф позволяет построить множество различных моделей плодородия почвы, которые дают возможность учитывать достаточно большое количество показателей, характеризующих свойства почвы, и, при желании, в ряде моделей их число можно неограниченно увеличивать. Такая множественность, можно предположить, неплохо отвечает очень большому числу региональных зон с тем или иным составом почв.

Хочется обратить внимание на то, что теория катастроф дала классификацию типичных ростков. И в какой-то мере это одновременно своеобразная классификация почв с точки зрения их плодородия. Типичность ростков и их универсальных деформаций позволяет говорить о достаточной адекватности предлагаемых моделей, поскольку нетипичные ростки относятся с точки зрения математики к исключительным явлениям, редко встречающимся в природе.

В ходе дальнейших разработок предложенных моделей очевидно нужно найти те, которые дают бонитировку почв, близкую к тем, что используются в почвоведении. Здесь будут задействованы шкалы оценки почв и как инструмент уточнения моделей корректировка управляющих параметров $u_i \to c_i u_i$, где c_i – подбираемые константы, обеспечивающие совпадение данных моделей и данных из используемых почвоведами таблиц. Наконец, следует выяснить, какой из параметров u_i соответствует тому или иному конкретному показателю из табл. 2, 3. Это в большой степени определяет адекватность используемой модели.

16. Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

Литература

1. Гуц А.К., Захарихина Л.В., Лесникова П.С. Математическая модель временной трансформации фракционирования редкоземельных элементов в почвах при городской нагрузке // Математические структуры и моделирование. 2023. № 1(65). С. 63–69.
2. Дышко В.Н. Управление плодородием почв: курс лекций для аспирантов. Смоленск : ФГБОУ ВПО «Смоленская ГСХА», 2014. 87 с.
3. Росновский И.Н. Системный анализ и математическое моделирование процессов в почвах: учебное пособие. Томск : Томский государственный университет, 2007. 312 с.
4. Гаврилюк Ф.Я. Бонитировка почв. М. : Высш. школа, 1974. 272 с.
5. Лебедев Н.С. Способ оценки почвенного плодородия // Описание изобретения к патенту. Патент RU 2080771 C1 от 10.06.1997.
6. Медведев В.В., Плиско И.В. Бонитировка и качественная оценка пахотных земель Украины. Харьков, 2006. 386 с.
7. Rustamov Y., Gadjiev T., Askerova S. A Mathematical Model of Soil Fertility / CMSEM 2020: Proceedings of the Fourteenth International Conference on Management Science and Engineering Management // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. V. 1190. P. 503–510.
8. Ismayilov A., Mikailsoy F. Mathematical models of fertility for the soils of Azerbaijan // Eurasian J. Soil Sci. 2015. N. 4(2). P. 118–125.
9. Mitrofanov S., Novikov N., Nikitin V., Belykh S. Mathematical models and soil fertility management software // ITSE-2020. E3S Web of Conferences. 2020. V. 210, 04008.
10. Helfer G.A., Barbosa J., Santos R., Costa A. A computational model for soil fertility prediction in ubiquitous agriculture // Computers and Electronics in Agriculture. 2020. V. 175, 105602.
11. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М. : Мир, 1982. с. 617.
12. Шеин Е.В. Конспект лекций «Математическое моделирование в почвоведении». М. : МГУ. URL: `https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/mathematical-modeling-in-soil-science-M-2.pdf` (дата обращения: 10.05.2023).
13. Павлов С.В. Описание феноменологических моделей фазовых переходов методами теории катастроф // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 1990. Т. 31, № 1. С. 70–76.

14. Васильев В.А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 1-–11.
15. Montaldi J. Singularities Bifurcations & Catastrophes. Manchester : University of Manchester, 2009. 74 c. URL: https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/j.montaldi/SBC-LookInside.pdf (дата обращения: 10.05.2023).
16. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и нолновых фронтов. М . : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 304 с.
17. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3-е изд., стереотип. М. : МЦНМО, 2009. 672 с.
18. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 1. М. : Мир. 350 с. URL: http://www.physics.gov.az/book_P/Gilmore_1.pdf (дата обращения: 10.05.2023).
19. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т. 2. М. : Мир. 285 с. URL: http://www.physics.gov.az/book_P/Gilmore_2.pdf (дата обращения: 10.05.2023).
20. Vassiliev V.A. Complements of discriminants of simple real function singularities. URL: https://arxiv.org/pdf/2109.12287v4.pdf (дата обращения: 10.05.2023).
21. Минеев В.Г. Агрохимия: Учебник. М. : Изд-во МГУ, Изд-во «Колос», 2004. 720 с.
22. Касти Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы. М. : Мир, 1982.

MODELING OF STATIONARY EQUILIBRIUM STATES OF THE SOIL AND THEIR CATASTROPHIC CHANGES UNDER THE INFLUENCE OF ANTHROPOGENIC IMPACTS

A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

Federal Research Centre the Subtropical Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Sochi, Russia

Abstract. Several soil fertility models based on mathematical catastrophes theory are proposed. Models make it possible to calculate changes in soil parameters under the influence of anthropogenic impact on it. Each model corresponds to one or another typical sprout of catastrophes and takes into account the required number of parameters characterizing soil properties. This makes it possible to take into account the diversity of regional zones and climatic conditions. Typicality of germs and their universal deformations gives us the opportunity to speak about the sufficient adequacy of the proposed models, since atypical germs refer from the point of view of mathematics to exceptional phenomena that are rarely found in nature

Keywords: mathematical model, soil, fertility, anthropogenic impacts, catastrophe theory.

Дата поступления в редакцию: 11.05.2023