

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ФРАКЦИОНИРОВАНИЯ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЧВАХ ПРИ ГОРОДСКОЙ НАГРУЗКЕ**

**А.К. Гуц**

д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., e-mail: aguts@mail.ru

**Л.В. Захарихина**

д-р биол. наук, вед. науч. сотр., e-mail: zlv63@yandex.ru

**П.С. Лесникова**

мл. науч. сотр., e-mail: lesnikovaps@yandex.ru

Федеральный исследовательский центр «Субтропический научный центр  
Российской академии наук», Сочи, Россия

**Аннотация.** Представлена математическая модель, описывающая трансформацию фракционирования редкоземельных элементов в почвах трёх местностей Черноморского побережья под влиянием антропогенного воздействия в течение 100 лет.

**Ключевые слова:** математическая модель, процессы Маркова, трансформация почв, редкоземельные элементы, антропогенное воздействие, Сочи.

### **Введение**

Редкоземельные элементы (РЗЭ) – это группа химических элементов, отличающихся близостью химических свойств и схожестью поведения в гипергенных геохимических процессах. Элементы этой группы могут проявлять геохимическое фракционирование, в случае, к примеру, изменения кислотно-основных свойств почвы.

На территории влажных субтропиков России мы изучили три генетически близких типа почв, образованных 1) на глинистых аргиллитах в незатронутой антропогенезом части долины реки Мзымта, 2) на схожих породах в условиях антропогенной нагрузки в г. Сочи, и 3) на карбонатных породах вне техногенеза на территории заповедника Утриш.

Почвы, образованные в естественных условиях на глинистых аргиллитах, характеризуются фракционированием РЗЭ с преобладанием их средней группы (СРЗЭ) и проявлением положительной аномалий Eu со средним значением  $Eu/Eu^* = 1,2$ . В сходных по генезису городских почвах мы наблюдаем повышение содержания элементов лёгкой группы (ЛРЗЭ) и исчезновение положительной аномалии Eu. Все указанные изменения объясняются их трансформацией в результате городской нагрузки.

За последние 100 лет в почвах города произошло их подщелачивание со смещением рН на 2 единицы и увеличением содержаний суммы Са и Mg в 1,5 раза. Наблюдается связь фракционирования РЗЭ с кислотностью почв кривая распределения РЗЭ для почв заповедника Утриш, которые отличаются ещё большим преобладанием в группе ЛРЗЭ, за счёт повышенной щёлочности почв ввиду образования их на карбонатных породах.

Полученные данные дают нам возможность утверждать, что основным фактором, определяющим трансформацию фракционирования РЗЭ в почвах при городской нагрузке, является кислотность почв и степень насыщенности в них основаниями. Подщелачивание почв за счёт городского техногенеза способствует увеличению в почвах содержания лёгких РЗЭ. Где-то за 100 лет городская нагрузка определила смещение рН в почвах на две единицы (с увеличением насыщенности почв основаниями в 1,5 раза). При такой трансформации химических свойств почв величина ЛРЗЭ/СРЗЭ изменилась от 0,91 до 1,05.

Различия фракционирования РЗЭ в трёх почвенных разновидностях можно увидеть наглядно, если рассмотреть показатель отношений средних нормированных содержаний ЛРЗЭ к СРЗЭ. Для почв долины реки Мзымта ЛРЗЭ/СРЗЭ составляет величину 0,91, для городских почв – 1,05 и для почв заповедника Утриш – 1,28.

Отметим, что отношения ЛРЗЭ/СРЗЭ можно рассматривать как диагностический признак, отличающий почвы, образованные на глинистых или на карбонатных породах. В условиях городской нагрузки большее или меньшее смещение показателя относительно фона будет отражать соответственно большую или меньшую антропогенную трансформацию почв.

## 1. Математическая модель трансформации почв

Как было сказано, исследования показали, что спектр концентрации РЗЭ смещен влево, т. е. доминируют лёгкие РЗЭ при увеличении рН: это относится к городу (Хоста) и заповеднику Утриш. Данные территории различны в смысле влияния антропогенного фактора, но их ситуация с концентрацией одинакова. Напротив, долина реки Мзымта, как и заповедник Утриш, антропогенным воздействиям не подвергались, а ситуация со спектром концентрации РЗЭ различна. Различны и показатели ЛРЗЭ/СРЗЭ и рН. Возникает предположение, что причиной тому является изменения в ЛРЗЭ/СРЗЭ или рН. Отметим, что показатель рН по сравнению с ЛРЗЭ/СРЗЭ является нестабильным, и в силу этого последний следует рассматривать как более предпочтительный.

Построим математическую модель, которая отражает и подтверждает наше предположение. Рассматриваем начальные ситуации для трёх изучаемых местностей: Хоста, Утриш, Мзымта. Полагаем, что их почвы в 1920 году находились соответственно в состояниях  $S_X^0$ ,  $S_U^0$ ,  $S_M^0$ . В настоящее время (2022 год) имеем состояния  $S_X^1$ ,  $S_U^1$ ,  $S_M^1$ , которые представляются как местности с найденными в 2022 году показателями ЛРЗЭ/СРЗЭ или рН.

Там, где не было влияния человека, кислотность не изменилась, 100 лет – слишком малый срок для процессов почвообразования, тем более что на

изучаемых местностях не менялись ни рельеф, ни климат, ни породы. Кроме того, долина реки Мзымта имеет иной состав бурозёмов, и это сказывается как на интенсивности потока различных природных событий, фиксируемых в указанных местностях, а он существенно меньше, чем, скажем, в Хосте, так и на преобладании средних РЗЭ.

Иначе говоря, показатель ЛРЗЭ/СРЗЭ (или рН) в заповеднике Утриш и долине реки Мзымта не менялся за 100 лет, а в Хосте он изменился с 0,9 до 1,05 (а рН с 5–6 до 7–8).

Рассматриваем процессы Маркова  $S_X^0 \rightarrow S_X^1$ ,  $S_U^0 \rightarrow S_U^1$ ,  $S_M^0 \rightarrow S_M^1$  с интенсивностями соответственно  $\mu_X^0, \mu_U^0, \mu_M^0$  [1], где индексами  $X, U, M$  помечены изучаемые местности: Хоста, Утриш и долина реки Мзымта. Для всех трёх процессов записываем уравнения Колмогорова – Чепмена:

$$\begin{aligned} p'_{0X} &= -\mu_X^0 p_{0X}(t), & p'_{1X} &= \mu_X^0 p_{0X}(t), \\ p'_{0U} &= -\mu_U^0 p_{0U}(t), & p'_{1U} &= \mu_U^0 p_{0U}(t), \\ p'_{0M} &= -\mu_M^0 p_{0M}(t), & p'_{1M} &= \mu_M^0 p_{0M}(t), \end{aligned}$$

при условии

$$p_{0X}(t) + p_{1X}(t) = 1, \quad p_{0U}(t) + p_{1U}(t) = 1, \quad p_{0M}(t) + p_{1M}(t) = 1,$$

где  $p_{0X}(t), p_{0U}(t), p_{0M}(t)$  – вероятности состояний  $S_X^0, S_U^0, S_M^0$ , а  $p_{1X}(t), p_{1U}(t), p_{1M}(t)$  – вероятности состояний  $S_X^1, S_U^1, S_M^1$  в момент времени  $t$  [1, с. 126].

Уравнения Колмогорова – Чепмена решаем с начальными данными

$$p_{0X}(0) = p_{0U}(0) = p_{0M}(0) = 1, \quad p_{1X}(0) = p_{1U}(0) = p_{1M}(0) = 0.$$

Получаем решения

$$p_{0X}(t) = \exp(-\mu_X^0 t), \quad p_{0U}(t) = \exp(-\mu_U^0 t), \quad p_{0M}(t) = \exp(\mu_M^0 t),$$

$$p_{1X}(t) = 1 - \exp(-\mu_X^0 t), \quad p_{1U}(t) = 1 - \exp(-\mu_U^0 t), \quad p_{1M}(t) = 1 - \exp(-\mu_M^0 t).$$

Мы видим, что вероятности состояний  $S_X^0, S_U^0, S_M^0$  уменьшаются, а вероятности состояний  $S_X^1, S_U^1, S_M^1$  увеличиваются, что, в принципе, говорит о трансформации состояний 1920 года к современным.

Примем, что

$$\mu_X^0 = k_X \cdot a_X \cdot (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1X}, \tag{1}$$

$$\mu_U^0 = k_U \cdot a_U \cdot (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1U}, \tag{2}$$

$$\mu_M^0 = k_M \cdot a_M \cdot (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1M}, \tag{3}$$

где  $(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1X}, (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1U}, (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1M}$  – значения этих показателей в 2022 году в соответствующих местностях  $X$  (Хоста),  $U$  (Утриш),  $M$  (Мзымта),  $k_X, k_U, k_M > 0$  – коэффициенты, делающие интенсивности безразмерными величинами с численными значениями, которые определяются спецификой решаемой конкретной задачи (см. ниже),  $a_X, a_U, a_M$

( $0 \leq a_X, a_U, a_M \leq 1$ ) – числовые факторы, характеризующие антропогенное воздействие на почву в местностях X (Хоста), U (Утриш), M (Мзымта) соответственно.

Для Хосты, где произошли изменения показателя ЛРЗЭ/СРЗЭ под влиянием людей, принимаем  $a_X = 1$ , а для для почв долины Мзымты и для заповедника Утриш факторы  $a_U$  и  $a_M$  берём близкими к нулю. Это означает, что вероятности  $p_{0U}(t), p_{0M}(t) \approx 1, p_{1U}(t), p_{1M}(t) \approx 0$  для достаточно большого промежутка времени, например для физического времени  $t$ , текущего от 1920 до 2022 года, т. е. почвы в долине Мзымты и в заповеднике Утриш «замерли» в «исторически неизменных состояниях»  $S_M^0, S_U^0$ . Фактически это можно интерпретировать как природную тождественность состояний  $S_M^0$  и  $S_M^1$ , а также состояний  $S_U^0$  и  $S_U^1$ .

Подставляя в формулы (1), (2), (3) соответствующие значения для показателя ЛРЗЭ/СРЗЭ:

$$(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1X} = 1,05; (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1U} = 1,28; (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1M} = 0,91,$$

находим, что

$$\mu_X^0 = k_X \cdot 1,05 \gg \mu_U^0 = k_U \cdot a_U \cdot 1,28 \approx 0 \text{ и } \mu_M^0 = k_M \cdot a_M \cdot 0,91 \approx 0. \quad (4)$$

В таком случае среднее время трансформации почвы к современному состоянию, оцениваемое как

$$T_X = \frac{1}{\mu_X^0}, \quad T_U = \frac{1}{\mu_U^0}, \quad T_M = \frac{1}{\mu_M^0},$$

для территории Хосты, должно совпадать со 100 годами, а для долины реки Мзымта и для заповедника Утриш оно, при должном выборе  $a_U \approx 0, a_M \approx 0$ , практически бесконечно.

Иначе говоря, должны иметь:  $T_X = 1/\mu_X^0 = 100, T_U = 1/\mu_U^0 \propto \infty$  и  $T_M = 1/\mu_M^0 \propto \infty$ . Это выполнимо, как видим из (4), при  $k_X = 1,05 \cdot 100$  и  $k_U \cdot a_U \approx 0, k_M \cdot a_M \approx 0$ . В силу того, что рассматриваемый отрезок физического времени в 100 лет для всех трёх местностей один и тот же, то величина  $T_A (A = X, U, M)$  отражает время изменения ЛРЗЭ/СРЗЭ в случае антропогенного воздействия (Хоста) и возраст и рельеф (породы, климат и др.) территории долины Мзымты и заповедника Утриша.

Очевидно, что ключевыми в предложенной модели являются формулы (1), (2), (3). С их помощью не только находятся вероятности состояний почвы, но и делаются выводы о времени их трансформации.

## 2. Варианты вычисления интенсивностей

Предложенные в статье формулы (1), (2) и (3) не являются единственно возможным способом характеризовать процесс трансформации почвы. Рассмотрим иные варианты.

**Вариант 1.** Вместо формул (1), (2), (3) можно использовать более абстрактные формулы, учитывающие начальные состояния:

$$\mu_X^0 = k_X \cdot a_X \cdot \Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1X},$$

$$\mu_U^0 = k_U \cdot a_U \cdot \Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1U},$$

$$\mu_M^0 = k_M \cdot a_M \cdot \Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1M},$$

где

$$\Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1A} = (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1A} - (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{0A},$$

$$A = X, U, M.$$

Тогда

$$\Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1X} = 0,15; \quad \Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1U} = 0; \quad \Delta(\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1M} = 0,$$

и поэтому имеем для времени трансформации

$$T_X = \frac{1}{\mu_X^0} = 100 \text{ лет} \quad \text{при } k_X = 0,15 \cdot 100$$

и

$$T_U = \frac{1}{\mu_U^0} = \infty \quad \text{и} \quad T_M = \frac{1}{\mu_M^0} = \infty,$$

говорящие о природной бесконечности ( $\infty$ ) возраста и рельефа долины реки Мзымта и заповедника Утриш.

**Вариант 2.** Можно рассмотреть следующие формулы для интенсивностей:

$$\mu_X^0 = k_X \cdot a_X \cdot (\text{pH})_{1X},$$

$$\mu_U^0 = k_U \cdot a_U \cdot (\text{pH})_{1U},$$

$$\mu_M^0 = k_M \cdot a_M \cdot (\text{pH})_{1M},$$

где  $(\text{pH})_{1X} = 7,0 - 8$ ;  $(\text{pH})_{1U} = 7,2$ ;  $(\text{pH})_{1M} = 5,1$ .

**Вариант 3.** С учётом показателя насыщенности

$$\mu_X^0 = k_X \cdot a_X \cdot (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1X} \cdot (\text{Насыщенность})_{1X},$$

$$\mu_U^0 = k_U \cdot a_U \cdot (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1U} \cdot (\text{Насыщенность})_{1U},$$

$$\mu_M^0 = k_M \cdot a_M \cdot (\text{ЛРЗЭ/СРЗЭ})_{1M} \cdot (\text{Насыщенность})_{1M},$$

где использован новый показатель  $(\text{Насыщенность})_{1A}$  – степень насыщенности основаниями;  $(\text{Насыщенность})_{1X} = 94 \%$ ,  $(\text{Насыщенность})_{1U} = 96 \%$  и  $(\text{Насыщенность})_{1M} = 46 \%$ .

### 3. Время пребывания почвы в конкретном состоянии

Состояние почвы в той или иной местности определяется в основном её физическими, химическими и биологическими свойствами. Для каждого из них можно назвать десять типичных характеристик, и тем самым почва пребывает в одном из 1000 ( $=10 \cdot 10 \cdot 10$ ) состояний  $S_i$ . Причём из каждого из них можно (за конечное число шагов) перейти в любое другое. Во всяком случае в рассматриваемых обстоятельствах трудно что-то запретить на пути эволюции.

Что это означает? В рамках математики [1, с. 129] это говорит о существовании *финальных вероятностей*, т. е. для каждого состояния  $S_i$  существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i \quad (i = 1, \dots, 1000).$$

Очевидно, они тоже образуют в сумме единицу:

$$\sum_{i=1}^{1000} p_i = 1.$$

Как понимать эти финальные вероятности? При  $t \rightarrow \infty$  в данной местности устанавливается *предельный стационарный режим*, в ходе которого почва случайным образом меняет свои состояния, но их вероятности уже не зависят от времени. Финальную вероятность состояния  $S_i$  можно истолковать как среднее относительное время пребывания почвы в этом состоянии. Например, если система  $S$  имеет три состояния  $S_1, S_2, S_3$  и их финальные вероятности равны 0,2, 0,3 и 0,5, это значит, что в предельном, стационарном режиме почва в среднем две десятых времени проводит в состоянии  $S_1$ , три десятых – в состоянии  $S_2$  и половину времени – в состоянии  $S_3$  [1, с. 129].

Правда, в нашем случае имеем 1000 состояний и десятки миллионов лет эволюции... Когда, в каких состояниях и сколько времени в них пребывала почва – вряд ли кто назовёт. Особенно с учётом того, что мы наблюдаем состояния почвы на Черноморском побережье от силы 100 лет. Тем не менее в данной статье отмечено мощное влияние человеческой деятельности, и, видимо, именно с человеком стоит связывать короткие отрезки пребывания в том или ином состоянии.

### 4. Заключение

Проведено математическое моделирование трансформации почвы на изучаемых местностях посредством процессов Маркова, и получены формулы, позволяющие численно оценивать состояния и время изучаемой трансформации.

### 5. Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № государственной регистрации 122032300363-3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Венцель Е.С. Исследование операций. М. : Советское радио, 1972. 550 с.

**MATHEMATICAL MODEL OF TEMPORAL TRANSFORMATION  
OF FRACTIONATION OF RARE EARTH ELEMENTS IN SOILS UNDER  
URBAN LOAD**

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Leading Researcher, e-mail: aguts@mail.ru

**L.V. Zaharhina**

Dr.Sc. (Biology), Leading Researcher, e-mail: zlv63@yandex.ru

**P.S. Lesnikova**

Junior Researcher, e-mail: lesnikovaps@yandex.ru

Federal Research Centre the Subtropical Scientific Centre of the Russian Academy  
of Sciences, Sochi, Russia

**Abstract.** In the article we present a mathematical model that describes the transformation of the fractionation of rare earth elements in the soils of three areas of the Black Sea coast under the influence of anthropogenic impact for 100 years.

**Keywords:** mathematical model, Markov processes, soil transformation, rare earth elements, anthropogenic impact, Sochi.

*Дата поступления в редакцию: 21.02.2023*