

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ КОМПЬЮТЕРНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Л.Ю. Уразаева¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: delovoi2004@mail.ru

Н.В. Манюкова²

к.п.н., доцент, e-mail: manukovanv@mail.ru

¹Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия

²Нижевартовский государственный университет, г. Нижневартовск, Россия

Аннотация. В работе раскрыты и описаны возможности применения программного средства GeoGebra для организации обучения по компьютерному моделированию. Программное средство является свободным, имеет веб-интерфейс, однако пока литературы по использованию программного продукта недостаточно. В качестве преимуществ работы с программой можно назвать возможность создания собственных расширений функционала программы, разработки алгоритмов решения прикладных задач математического моделирования с помощью этого средства. Авторами предложены ранее не описанные в литературе возможные решения типовых задач моделирования в среде GeoGebra.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, математическая модель, линейное программирование, графический метод решения, составление модели управления запасами, моделирование гармонических колебаний, GeoGebra.

Введение

Интерактивность процесса обучения, визуализация зависимостей и графическая поддержка процесса решения – важнейшие инструменты повышения эффективности освоения учебного материала, тем более в условиях самостоятельного обучения в рамках дистанционного обучения [19–21]. Вопросы компьютерного моделирования с использованием прикладных программных пакетов рассматриваются во многих работах [1–35].

Анализ исследований, посвящённых инструментальным средствам компьютерного моделирования, позволяет выявить важную проблему необходимости выбора наиболее удобного и эффективного средства графического и динамического моделирования в процессе обучения. В то же время реализация компьютерного моделирования в программном средстве пока недостаточно освещена, и авторы своей задачей видят раскрытие основных возможностей программного

сервиса GeoGebra для компьютерного моделирования при решении прикладных задач.

1. Краткое описание основных возможностей GeoGebra

GeoGebra — это бесплатный многоязычный пакет математического программного обеспечения с открытым исходным кодом, созданный международным сообществом программистов в 2001 году. Математический сервис GeoGebra разработан специально для целей изучения различных математических дисциплин, включая геометрию, алгебру, математический анализ, теорию вероятностей, математическую статистику и компьютерное моделирование. Программа написана на кроссплатформенном языке Java, что позволяет использовать ее на компьютерах различных типов и на большинстве операционных систем [1].

Идея GeoGebra заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления. Такое сочетание позволяет создавать конструкции с точками, линиями, векторами, математическими функциями с возможностью их дальнейшего изменения. Таким образом, полученными объектами обучающиеся могут легко манипулировать в пространстве, реализовывать интерактивные геометрические объекты (2D и 3D), работать с электронной таблицей, системой компьютерной алгебры (CAS), реализовывать вероятностное моделирование и статистическую обработку данных и прочее.

Общество пользователей сервиса постоянно развивает функционал GeoGebra, размещают материалы с новыми возможностями. Однако некоторые вопросы до сих пор не разработаны, авторы статьи решили компенсировать этот недостаток и предложить решение ряда типовых задач компьютерного моделирования средствами GeoGebra. Рассмотрим возможности GeoGebra при решении задач линейного программирования.

1.1. Пример 1. Линейное программирование

Задача линейного программирования важнейших инструмент решения социально-экономических и иных задач.

Для получения представления об особенностях решения этой задачи, знакомства с компьютерным моделированием полезно использование возможностей сервиса GeoGebra для иллюстрации графического метода решения задач линейного программирования.

Пусть дана задача линейного программирования об оптимальной производственной программе, в которой математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} f = 3x + 4y \rightarrow \max, \\ 5x + 6y \leq 30, \\ 4x + 8y \leq 32, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

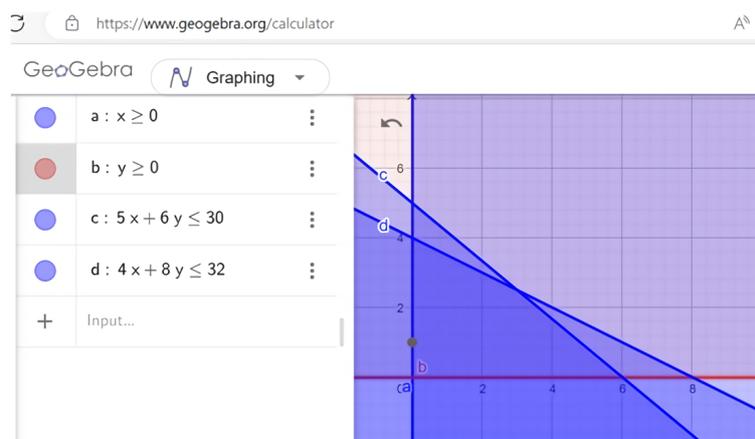


Рис. 1. Создание области допустимых решений команды и результат

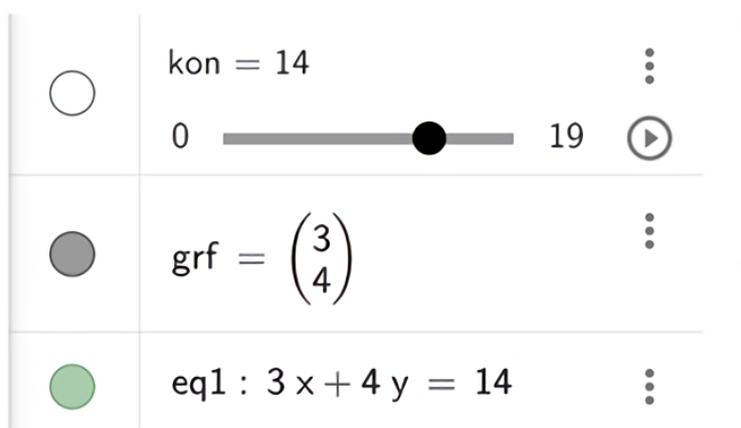


Рис. 2. Создание слайдера для автоматического передвижения линии уровня целевой функции и команда для построения вектора градиента

Реализуем решение и компьютерное моделирование в GeoGebra.

Построим область допустимых решений задачи (рис. 1), используя классический калькулятор GeoGebra.

Создадим слайдер (ползунок) kon для автоматизации движения прямой — уровня целевой функции параллельно самой себе (рис. 2). Построим вектор градиента grf для целевой функции, для определения направления наискорейшего возрастания выручки (прибыли).

Рассмотрим некоторые настройки слайдера (рис. 3)

Для определённости найдём вершины области допустимых решений, которая выделена более насыщенным цветом. В этой области все штриховки совпадают. Для определения координат точек пересечения прямых зададим прямые с помощью уравнений прямых и используем команду `intersect` для получения координат точек пересечения прямых (рис. 4).

Для иллюстрации сути графического решения запускаем работу слайдера и наблюдаем за параллельным переносом линии уровня в направлении градиента

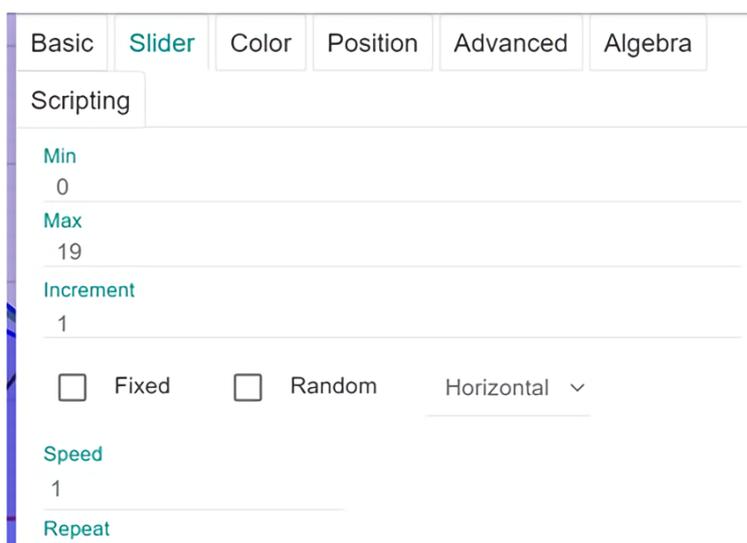


Рис. 3. Настройки слайдера: максимальное и минимальное значение, шаг

	eq2 : $x = 0$	⋮
	f : $y = 0$	⋮
	eq3 : $5x + 6y = 30$	⋮
	eq4 : $4x + 8y = 32$	⋮
	A = Intersect(eq2, eq4) → (0, 4)	⋮
	B = Intersect(eq3, eq4) → (3, 2.5)	⋮
	C = Intersect(eq3, f) → (6, 0)	⋮

Рис. 4. Получение точек пересечения прямых — вершин многоугольника допустимых решений

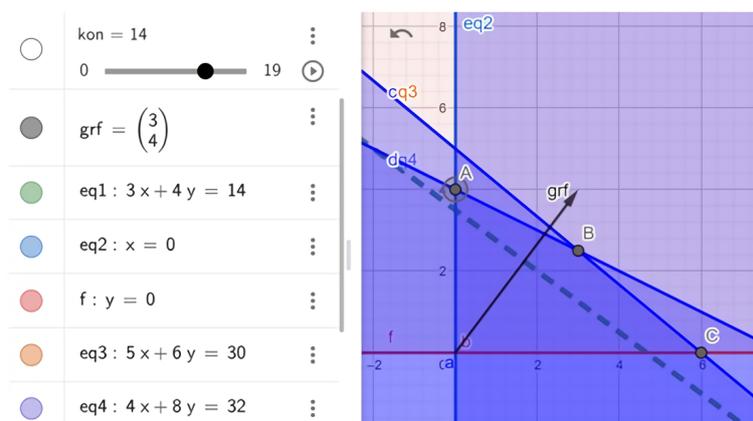


Рис. 5. Положение линии уровня при значении целевой функции, равном 14

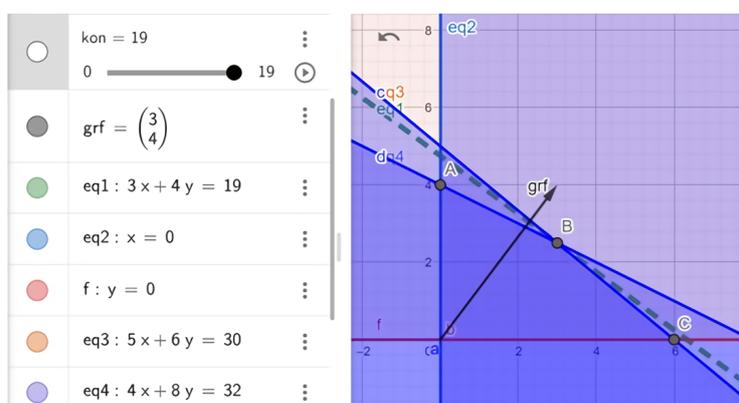


Рис. 6. Положение линии уровня при оптимальном значении целевой функции, равном 19

до пересечения с крайней вершиной В (рис. 5 и рис. 6).

Проведём компьютерный эксперимент для исследования влияния изменения запасов ресурсов на оптимальное решение. Введём параметр – слайдер, для правой части ограничения в виде неравенства по первому ресурсу и для границы области, определяемой уравнением (рис. 7).

Ниже показаны объекты (рис. 8), зависящие от изменения параметра parametr.

Аналогично можно исследовать влияния цен на оптимальное решение.

1.2. Пример 2. Модель управления запасами

Модели управления запасами были одними из первых моделей, разработанных математиками для управления производственными процессами. Постепенно эти модели стали также использоваться и в сфере управления финансами, например, модель Баумеля.

Простейшей моделью теории управления запасами является модель детерминированного спроса для однономенклатурного запаса. В этой модели счита-

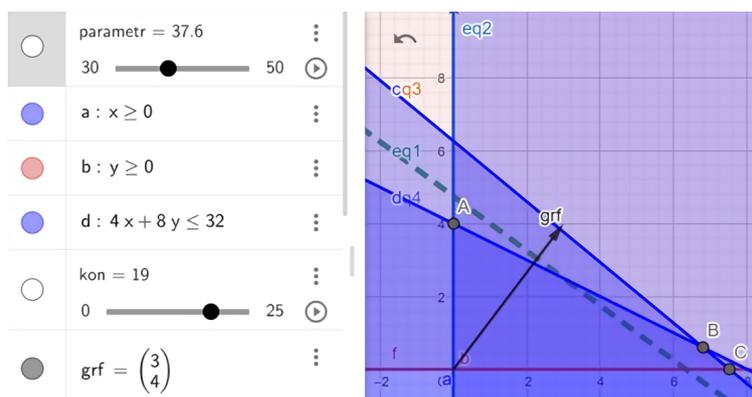


Рис. 7. Изменение параметра и связанное изменение положения точки В

●	eq3 : $5x + 6y = 37.6$
●	B = Intersect(eq3, eq4) → (6.8, 0.6)
●	C = Intersect(eq3, f) → (7.52, 0)
●	c : $5x + 6y \leq \text{parametr}$ → $5x + 6y \leq 37.6$

Рис. 8. Зависимые от параметра parametr объекты

ется, что известны общая за период потребность в ресурсе (периодом может быть год, месяц), затраты на доставку одной партии, затраты на хранение единицы запаса за весь период. Общие затраты складываются в результате суммирования затрат на доставку и затрат на хранение.

Модели управления запасами в простейшем случае относятся к задачам безусловной нелинейной оптимизации. С помощью аппарата дифференциального исчисления или графически можно определить размер оптимального заказа, при котором общие затраты будут минимальными. Зная величину оптимального заказа, можно определить число заказов, временной промежутков между заказами.

Задачи управления запасами можно использовать при обучении компьютерному моделированию. Приведём пример компьютерной реализации этой модели средствами веб-сервиса Графический калькулятор GeoGebra (рис. 9).

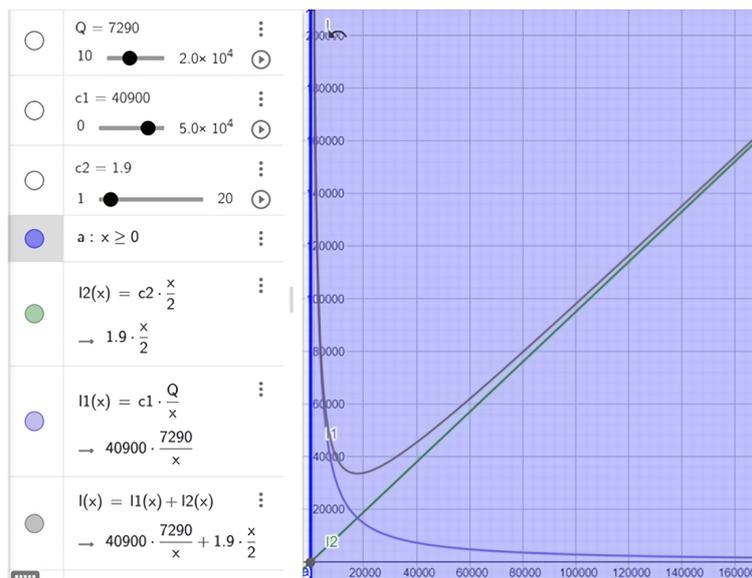


Рис. 9. Окно команд и графики функций затрат на доставку, на хранение и общих суммарных затрат

Для исследования влияния изменений входных параметров используются слайдеры для изменения общей потребности в ресурсе, для изменения затрат на доставку одной партии, затрат на хранение за весь период. Вводятся функции: затраты на хранение, затраты на доставку, общие затраты. Точка минимума общих затрат определяет оптимальный размер партии, при котором общие затраты минимальны.

Изменяя значения входных параметров, можно анализировать возможное значение оптимального размера партии, при котором общие затраты будут минимальными.

1.3. Пример 3. Моделирование гармонических колебаний

Периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по закону синуса или косинуса, называют гармоническими колебаниями.

Рассмотрим графическое представление уравнения гармонического колебания: $y = x_0 \cos(\omega_0 x)$. На рисунке 10 представлено исследование влияния параметров гармонических колебаний на график колебательного процесса.

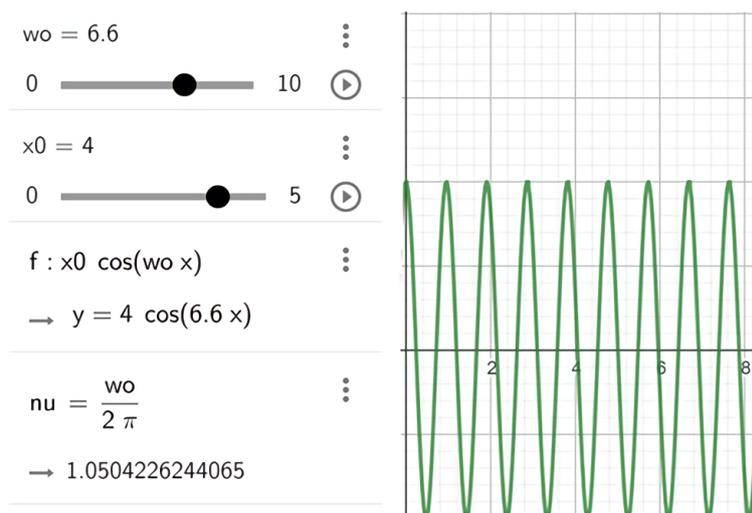


Рис. 10. Окно команд и график колебательного процесса

1.4. Пример 4. Задача об образовании двух новых веществ, при разложении исходного вещества

Пусть из исходного вещества массой a образуются два новых вещества x_1, x_2 . Скорость образования новых веществ пропорциональна массе неразложившегося исходного вещества с коэффициентами k_1, l . В начальный момент времени $x_{10} = 0, x_{20} = 0$. Требуется промоделировать процесс образования новых веществ на отрезке времени $[0, 20]$ секунд.

Для решения задачи составим математическую модель. Имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1(a - x_1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = l(a - x_1 - x_2), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Используем возможности веб-сервиса по численному решению задачи Коши первого порядка для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, применим процедуру NSolveODE, основанную на применении численных методов семейства Рунге–Кутты.

Подготовим для моделирования запись уравнений системы и исходных параметров в соответствии с правилами синтаксиса использования NSolveODE. В нашей реализации параметр l фиксирован, но зато можно изменять начальные значения и параметр k_1 , также a -массу исходного вещества (рис. 11, рис. 12).

The screenshot shows the configuration interface for the NSolveODE tool. It features several rows, each with a parameter value, a slider, and a play button. The parameters are: $l = 7$, $a = 4.84$, 1 (with a slider from 1 to 5), $k_1 = 2.48$, 0 (with a slider from 0 to 5), and the differential equations $x_1'(t, x_1, x_2) = k_1 (a - x_1 - x_2)$ and $x_2'(t, x_1, x_2) = l (a - x_1 - x_2)$. Below each equation, the numerical result is shown: $\rightarrow 2.48 (4.84 - x_1 - x_2)$ and $\rightarrow 7 (4.84 - x_1 - x_2)$.

Рис. 11. Настройка параметров и запись уравнений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Затем вызовем процедуру NSolveODE для численного решения системы с начальными условиями.

Графическое представление результата приведено на рисунке 13.

Программное средство позволяет многократно проводить решения, для выбора самого оптимального режима работы системы.

Видно, что с некоторого момента времени процесс образования новых веществ практически прекращается, из-за почти полного расходования исходного вещества, массы новых веществ с определённого момента практически не меняются. Ползунки слайдеры позволяют анализировать влияние изменения ряда входных параметров на интенсивность процесса образования новых веществ.

Использование возможностей веб-сервиса даёт возможность проводить интерактивное компьютерное моделирование, иллюстрировать различные сценарии развития при изменении входных параметров модели. Преимуществом ис-

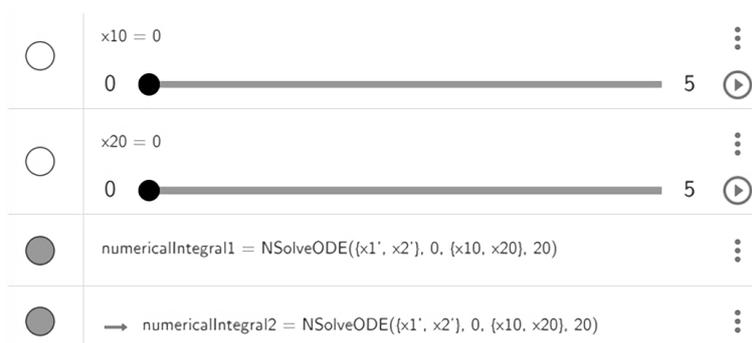


Рис. 12. Вызов процедуры численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

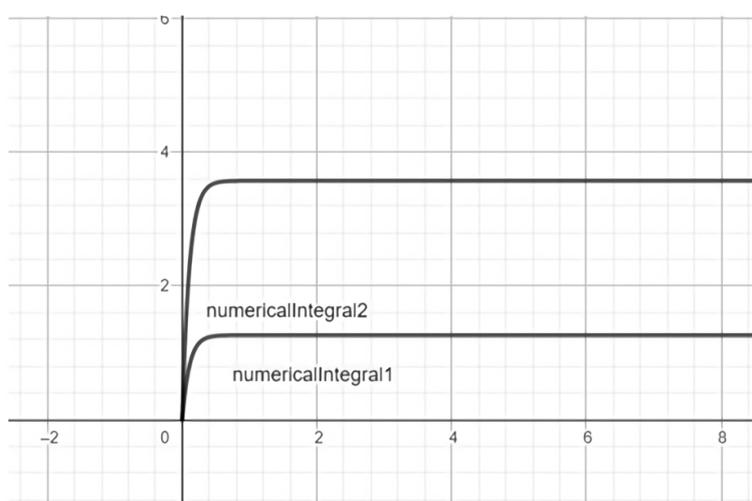


Рис. 13. Графическое представление результата численного решения

пользования является возможность графической поддержки при визуальном отражении основных закономерностей при моделировании.

Использование визуализации повышает уровень восприятия процедуры моделирования и используемых моделей, развивает навыки компьютерного моделирования.

2. Заключение

Таким образом, мы рассмотрели возможности применения графического метода решения задачи линейного программирования, модели управления запасами, компьютерного моделирования физико-химических процессов. Очевидно, преимущество применения GeoGebra или подобных программных средств с точки зрения развития навыков исследовательской деятельности и выработки наглядных представлений о сущности решаемых задач.

В целом, внесение анимационной наглядности существенно пополняет арсенал средств обучения компьютерному моделированию, что, несомненно, спо-

способствует повышению уровня понимания и прочного усвоения компьютерных и математических знаний. Эта новая составляющая современной методики обучения компьютерному моделированию является технологическим проявлением цифровизации образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акишин Б.А., Воронцова В.А. Решение типовых математических задач с помощью программы GEOGEBRA // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике. 2017. Т. 3, № 1(2). С. 275–280.
2. Алиева С.А., Воробьева И.А. Интерактивная геометрическая среда GEOGEBRA и ее применение на уроках математики // Вопросы педагогики. 2022. № 3–2. С. 17–20.
3. Войтенко Т.Ю., Фирер А.В. Цифровая визуализация геометрических вероятностей в GEOGEBRA // Педагогическая информатика. 2021. № 2. С. 121–127.
4. Горзиннежад М.Р. Эффективность использования компьютерной программы GEOGEBRA 4 в обучении геометрии // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2015. № 1–2. С. 69–72.
5. Губская И.О. Применение GEOGEBRA на уроках математики // Современное образование Витебщины. 2017. № 4(18). С. 69–74.
6. Елькина Ю.С. Применение среды GEOGEBRA к решению задач с параметрами в условиях дистанционного обучения // Студенческий вестник. 2020. № 20–2(118). С. 18–21.
7. Дронова Е.Н., Захарова Д.С. Актуальность использования программы GEOGEBRA при изучении школьного курса геометрии // Решение. 2017. Т. 1. С. 33–34.
8. Калыбекова Ж.А. Математика в высших учебных заведениях с применением программы GEOGEBRA // Новости науки Казахстана. 2018. № 1(135). С. 61–67.
9. Караказьян С.А., Уразаева Л.Ю. Возможности обработки данных с помощью программного продукта PAST // Наукосфера. 2020. № 11–2. С. 185–191.
10. Кислякова М.А., Деньгуб И.А. Методическая модель изучения функциональной линии в малых группах с применением программы GEOGEBRA // Учёные заметки ТОГУ. 2019. Т. 10, № 3. С. 17–23.
11. Клековкин Г.А. Моделирование контуров листьев растений в среде GEOGEBRA // Математическое образование. 2021. № 3(99). С. 48–57.
12. Колпакова Д.С. GEOGEBRA как средство визуализации решения задач на уроках геометрии в 7 классе // Молодой учёный. 2018. № 11(197). С. 164–167.
13. Куклин С.А., Адамович Н.О. Использование программного комплекса "GEOGEBRA" при исследовании механизмов // Наука, техника и образование. 2020. № 8(72). С. 17–21.
14. Косьянов П.М., Манюкова Н.В. Проектирование компьютерной модели эксплуатации нескольких пластов одной нагнетательной скважины // Математические структуры и моделирование. 2021. № 4(60). С. 94–108.
15. Курушин П.Д. Пример использования GEOGEBRA для изучения квадратичной функции в старших классах // Вестник научных конференций. 2020. № 12–1(64). С. 80–82.

16. Ларин С.В. Алгебра и математический анализ с GEOGEBRA // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1(23). С. 236–240.
17. Ларин С.В., Майер В.Р. Задачи на построение, неразрешимые циркулем и линейкой, и их решение в компьютерной среде // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1(23). С. 223–227.
18. Малышева Я.В. Обучение математике с использованием интерактивной геометрической среды GEOGEBRA // Современная наука: тенденции развития. 2017. № 17. С. 98–100.
19. Манюкова Н. В. Повышение эффективности управления учебной деятельностью учащихся на уроках разного типа: дис. ... канд. пед. наук. Омск, 2002. 194 с.
20. Манюкова Н.В. Современный взгляд на структуру ИКТ-компетентности // Проблемы и перспективы развития регионов и предприятий в условиях глобализации экономики. Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, уфимский институт (филиал), Дрезденский технический университет, Словацкий технологический университет, Институт экономики УрО РАН. М., 2014. С. 164–168.
21. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю. Методология проектирования и разработки обучающих программных комплексов / В сборнике: Современное программирование. Материалы II Международной научно-практической конференции. Отв. редактор Т.Б. Казиахмедов. 2019. С. 112–116.
22. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю., Дацун Н.Н. Особенности программирования в пакете Gretl / В сборнике: Современное программирование. Материалы II Международной научно-практической конференции. Отв. редактор Т.Б. Казиахмедов. 2019. С. 52–56.
23. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю., Мамедли Р.Э. Математическое моделирование в преподавании информационных технологий // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 118–133.
24. Мещерякова К.С. Дидактические возможности компьютерных программ КОМПАС-3D, GEOGEBRA, MAPLE при решении геометрических задач // Информация и образование: границы коммуникаций. 2021. № 13(21). С. 91–93.
25. Мордашева Т.Ю. Использование приложения GEOGEBRA на уроках математики // Педагогический опыт: теория, методика, практика. 2016. № 4(9). С. 170–173.
26. Нестерук О.В. Использование программы GEOGEBRA при изучении школьного математического материала // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. 2018. № 13. С. 102–107.
27. Пронина Е.В. Особенности использования математического пакета GEOGEBRA при изучении темы «Кривые второго порядка» // Наука и образование: новое время. Научно-методический журнал. 2020. № 3(21). С. 10–16.
28. Серба М.Д., Кравчун М.В. Концепция разработки учебных материалов средствами GEOGEBRA // Молодой ученый. 2019. № 47 (285). С. 51–54.
29. Ситникова Т.В., Малева А.А. Использование системы динамической геометрии GEOGEBRA для работы с графами // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2, № 5–2(10–2). С. 258–261.
30. Тагаева Е.А. Использование программной среды GEOGEBRA при изучении темы «Производная функции» в средней школе // Учебный эксперимент в образовании. 2018. № 3(87). С. 40–44.

31. Уразаева Л.Ю., Манюкова Н.В., Мамедли Р.Э. Математическое моделирование миграционных процессов // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 83–92.
32. Уханова Л.В. Использование среды GEOGEBRA при решении задач с параметрами // Школьная педагогика. 2018. № 3(13). С. 40–44.
33. Albano G., Dello Iacono U. GEOGEBRA in e-learning environments: a possible integration in mathematics and beyond // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2018.5.63.
34. Kusumah Y.S., Herman T., Kustiawati D. The effect of GEOGEBRA in three-dimensional geometry learning on students' mathematical communication ability//International Journal of Instruction. 2020. V. 13, No. 2. P. 895–908.
35. Latifi M., Hattaf K., Achtaich N. The effect of dynamic mathematics software GEOGEBRA on student' achievement: the case of differential equations // Journal of Educational and Social Research. 2021. V. 11, No. 6. P. 211–221.

USING GEOGEBRA IN TEACHING COMPUTER MODELING

L.U. Urazayeva¹

Ph.D.(Phys.Math.), Associate Professor, e-mail: delovoi2004@mail.ru

N.V. Manyukova²

Ph.D. (Ped.), Associate Professor, e-mail: manukovanv@mail.ru

¹ 1Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia

²Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. The paper discloses and describes the possibilities of using the GeoGebra software tool for organizing training in computer modeling. The software tool is free, has a web interface, but so far there is not enough literature on the use of the software product. The advantages of working with the program include the ability to create your own extensions of the program's capabilities, the development of algorithms for solving applied problems of mathematical modeling using this tool. The authors proposed possible solutions to typical modeling problems in the GeoGebra environment that were not previously described in the literature.

Keywords: computer modeling, mathematical model, linear programming, graphical solution method, compilation of inventory management model, modeling of harmonic oscillations, GeoGebra.

Дата поступления в редакцию: 13.11.2022