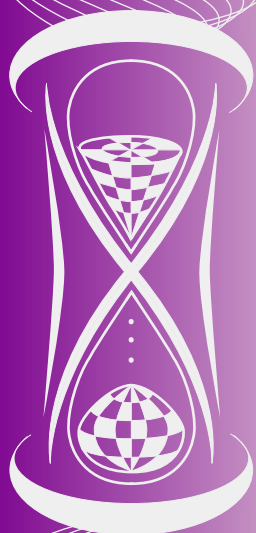


ISSN 2222-8772

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

№ 4(64)
2022



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 4 (64)

Омск
2022

Редакционная коллегия

А. К. Гуц	главный редактор , председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, Международный инновационный университет, г. Сочи.
Д. Н. Лавров	зам. глав. редактора , канд. техн. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
Н. Ф. Богаченко	технический редактор, зам. глав. редактора , канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
В. П. Голубятников	доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
С. И. Горлов	доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
А. Г. Гринь	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра информационной безопасности, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
В. А. Еровенко	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра общей математики и информатики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь.
B. Zilber	Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
А. Н. Кабанов	канд. физ.-мат. наук, кафедра компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
А. В. Копыльцов	доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).
А. Г. Коробейников	доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН.
П. А. Корчагин	доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), г. Омск.
V. Kreinovich	Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
В. А. Плетюхов	доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь.
Л. Б. Соколинский	доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
A. A. Fedorenko	Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
A. Jadczyk	Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 20.12.2022.

Тираж 25 экз.

Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsk.su>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

- И.А. Болдов. *Геометрия элементарных ча-
стиц*.....5
- А.Г. Гринь. *О моментах функций от зависи-
мых случайных величин*22
- А.К. Гуц. *Реальность прошлого: эмпирические
и онтологические доказательства*29
- С.Г. Казаков. *О категориях групповых аффин-
ных (Γ, λ) -схем и (Γ, λ) -коммутативных ал-
гебр Хопфа*44

Прикладная математика и моделирование

- Н.Ф. Annapeh, V.A. Kurushina. *Analysis of
vortex-induced forces on the group of subsea
structures in proximity of equipment at $Re=3900$* ..60
- Р.Э. Мамедли. *Устойчивость двухслойных
неоднородных пластинок в анизотропно со-
противляемой среде*.....75
- Р.Э. Мамедли. *Собственные колебания двух-
слойных неоднородных стержней в упругой
среде*83
- С.Н. Чуканов, И.С. Чуканов, С.В. Лейхтер. *Формирование признаков машинного обуче-
ния на основе методов вычислительной то-
пологии*.....89

Компьютерные науки

- А.Л. Голованов. *Разработка автоматизиро-
ванной системы прокторинга для платфор-
мы Google Формы*100

Информационная безопасность

- А.А. Богаченко, Н.Ф. Богаченко, Д.Д. Лаврова,
Д.Н. Лавров. *Протокол обмена криптографи-
ческими ключами в мультимаршрутной среде
передачи данных*112
- Н.Ф. Богаченко. *Схема разделения секрета
между иерархически связанными participa-
нтами*117

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



Проблемы образования

- А.К. Гуц. *Вариации истории и модальная логика* 122
- В.А. Еровенко, Н.В. Михайлова. *Роль Пифагора и его школы в философском идеале нового математического знания* 129
- Л.Ю. Уразаева, Н.В. Манюкова. *Использование GeoGebra при обучении компьютерному моделированию* 140

ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

И.А. Болдов

исследователь, e-mail: ilboldov@yandex.ru

ООО «Ладожское», Краснодарский край, Россия

Аннотация. На основании предположения отсутствия прямой причинно-следственной связи между дефектом массы атомных ядер и сил удерживающих нуклоны в ядре [1], выдвинута гипотеза о том, что кварками выступают нуклоны с целыми кулоновскими и иными (барионный, лептонный) зарядами. На основании выводов полученных автором [1], что нет принципиального запрета на использование в физике микромира подходов и концепций макромира, и что масса в пространстве нашей Вселенной эквивалентна трёхмерному объёму, предложено сопоставление геометрии элементарных частиц и кварков правильным (полуправильным) многогранникам. Сделано предположение, что масса частицы определяется объёмом соответствующего многогранника-кварка (или суммой объёмов кварков, с дискретной (квантованной) длиной ребра многогранника. Сделано предположение о возможности осцилляции не только нейтрино, но и осцилляциях иных заряженных лептонов (кварков), протекающих при распадах частиц, с несохранением групп симметрии кварков-многогранников, а также о возможности внутригрупповой осцилляции пар одинаковых кварков. Выдвинуто предположение, что при процессах создания или распада частиц привлекаются пары кварк-антикварк ($q\bar{q}$) всегда присутствующие в пространстве в силу «кипения вакуума». С учётом вышеуказанного, формулы реакций частиц приведены в строгий математический вид. Суммы кварков (лептонов) до реакции и после равны с учётом осцилляций. Проведено компьютерное моделирование — сопоставление масс элементарных частиц суммам многогранников для мезонов, барионов, тетракварков, пентакварков и гексакварка. Сделана попытка систематизации всего списка элементарных частиц в «Таблицы кварковых сочетаний», аналогичных Таблице Д.И. Менделеева для химических элементов. В предлагаемых таблицах в каждой ячейке подразумеваются все элементарные частицы данного набора кварков и различной массы. Полученная в результате сопоставления кварков-многогранников форма нуклонов, имеющих внешние кварки-кубы, даёт основание предположить о пространственной анизотропии т. н. «ядерных сил» в виде шести ортогональных направлений взаимодействия.

Ключевые слова: элементарные частицы, кварки, осцилляции, формулы распада.

Введение

Бог действует как величайший геометр,
который предпочитает наилучшее решение задач.
Г.К. Лейбниц

Современную физику невозможно представить без раздела изучающего мельчайшие частицы материи — атомные ядра и элементарные частицы. Колоссальные научные, финансовые и технологические средства вложены человечеством в установки по исследованию этих кирпичиков материи, от лабораторных установок до гигантских ускорителей, порой раскинувшихся на территории нескольких государств. Стандартная Модель (СМ) на сегодня является исключительно удачной описательной моделью, позволяющей делать очень точные расчеты и сравнивать их с экспериментально полученными данными. Но и СМ не лишена недостатков и необъяснимых моментов.

В данной работе автор поставил целью обосновать массы элементарных частиц на основе полученного вывода [1], что масса в нашей Вселенной эквивалентна объёму трёхмерного пространства.

Геометрия элементарных частиц

В теории дискретно-непрерывного пространства [2,3] наша Вселенная представляется в виде плотно упакованных 0-мерных дискретных образований — Планкеонов (размера Планковской длины $l_P = 1,616255 \cdot 10^{-35} m$). Движение элементарной частицы по такому пространству можно описать как «перескок» — передача возбуждённого (объёмного) состояния из одного планкеона в соседний планкеон. Автор считает, что в структуре пространства помимо 0-мерных, возможно существование (постоянное образование и уничтожение) и 1,2-мерных и виртуальных 3-хмерных планкеонов, что описывается как «нулевые колебания» вакуума [4].

Это же подтверждается теоремой Рамсея [5, с. 264-286]. По сути данная теорема говорит о том, что в любом хаосе плавают зерна упорядоченных структур. В применении к вакууму, плотность которого $\rho_0 t^2 = \frac{1}{G} = 1,4982844 \cdot 10^{10} (kg s^2 / m^3)$ [1] это значит, что в нем постоянно существуют пары $(q\bar{q})$, необходимые (и привлекаемые) для реакций взаимодействия и распада частиц.

Автор считает, что аналогично тому, как любая геометрическая конструкция или пространство могут быть описаны математической формулой, так и любая математическая формула или теория имеет геометрический смысл.

СМ основана на математическом аппарате, описывающем три группы симметрии. Это унитарные группы $SU(3)$, $SU(2)$, $SU(1)$. При этом принято, что при слабых взаимодействиях, вызывающих распад частиц, не сохраняется комбинированная симметрия.

В геометрии трёхмерного пространства есть много тел, обладающих симметрией, также описываемых в теории групп. Так, конечные подгруппы

собственных вращений трёхмерного пространства исчерпываются списком C_n, D_n, T, O, Y .

В списке имеется две серии C_n, D_n с произвольным n . Остальные T, O, Y — спорадические группы симметрии правильных многогранников, которые не входят ни в какие серии.[6] Если рассмотреть таблицу правильных выпуклых многогранников (Табл.1), все грани которых есть конгруэнтные правильные многоугольники, то можно заметить ее сходство с началом таблицы элементарных частиц (Табл.2).

Таблица 1. Правильные многогранники

№	Group chape	Polyhedron	Number of		
			Faces	Vertices	Edges
1	T	Tetrahedron	4	4	6
2	O	Octahedron	8	6	12
3		Cube	6	8	12
4	Y	Icosahedron	12	20	30
5		Dodecahedron	20	12	30

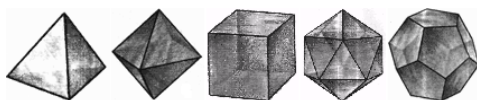


Рис. 1. Правильные многогранники

Таблица 2. Фотон и лептоны

№	Type of particle	mass MeV	Q_{culon}	Q_{lepton}
1	γ	0	0	0
2	ν_e	$2,2 * 10^{-6}$	0	$+1_e$
3	e^-	0,511	-1	$+1_e$
4	ν_μ	<0,17	0	$+1_\mu$
5	μ^-	105,658	-1	$+1_\mu$

Исходя из выдвинутого автором в [1] допущения, что масса в нашем трёхмерном мире эквивалентна объёму, и лептоны подчиняются симметрии, предложим гипотезу :

Гипотеза 1: Фотон и лептоны представляют собой по форме правильные многогранники.

Масса частицы определяется объемом соответствующего многогранника (или набора многогранников) и зависит от длины ребра. Свойства частицы определяются видом (структурой) многогранника и его симметрией. Проявления различных законов сохранения нефизических зарядов (лептонных, барионных, странность и пр.) — следствия закона сохранения структуры многогранника, выраженной в его осях симметрии и количества рёбер. В таблице (1) есть один многогранник, который дуален сам себе. Это тетраэдр. В таблице (2) ему соответствует Фотон.

Также есть две группы многогранников, которые дуальны, т. е. один можно получить из другого, если центры граней одного, принять за вершины другого, и которые имеют одинаковую группу симметрии. Это пары Гексаэдр (куб) и Октаэдр, Додекаэдр и Икосаэдр. У каждой из этих пар одинаковое количество рёбер, а количество вершин и граней меняются местами. Можно предположить, что это пары связанные лептонными зарядами, тогда первая пара — это Электрон (Гексаэдр или Куб) и электронное нейтрино (Октаэдр). Вторая пара — Мюон (Додекаэдр) и Мюонное нейтрино (Икосаэдр).

Заметим, что частицы – многогранники с гранями – правильными треугольниками двигаются со скоростью света. Это кстати, хорошо стыкуется с Теорией Динамической Триангуляции, в которой пространство представлено в виде треугольных симплексов [7].

Напротив, многогранники, образованные из квадрата (Электрон) и пятиугольника (Мюон), имеют массу покоя и не движутся со скоростью света. Электрический заряд возможно представить как реакцию окружающего пространства на структуру многогранника в котором соотношение рёбер к вершинам составляет $3/2$.

Примем, что ребра многогранников элементарных частиц (не движущихся со скоростью света) в трехмерном пространстве дискретны (квантуются) и составляют ряд $R = l_{min} * N$. Где l_{min} некая минимальная длина N — ряд натуральных целых чисел. Тогда элементарные частицы будут иметь массы (объемы) с дискретными значениями зависящими от дискретных длин рёбер.

Проверим это предположение на лептонах. Объем куба (электрон) равен третьей степени длины ребра $V_e = a^3$ При длине ребра $a = 1$ объем куба $V_e = 1(V_{min})$.

Объем додекаэдра (мюон) вычисляется как $V_\mu = a^3 \left(\frac{15+7\sqrt{5}}{4} \right)$. При длине ребра $a = 3$, $V_\mu = 206,9(V_{min})$. Если сравнивать полученную величину с табличным значением мюона в электронных массах $V_{mu} = 206,7671$ (e.m.), то погрешность составляет около 0,06 %.

Лептонный заряд можно объяснить дуальностью частиц или, точнее, одинаковым количеством и расположением осей симметрии, или одинаковым количеством 1-мерных планкеоных диад-рёбер многогранников. В Табл. 2 это электронный лептонный заряд и мюонный лептонный заряды, соответственно.

Поскольку телами Платона исчерпаны правильные многогранники, то на роль ещё двух лептонов надо искать иные многогранники. Если гранями элек-

трона являются квадраты, мюона — пятиугольники, то логично предположить, что среди граней таона будут шестиугольники. Кроме тел Платона также простейшими многогранниками являются призмы. И первым же кандидатом на Таон становится шестиугольная призма (две грани шестиугольники и шесть квадратов), объем которой вычисляется как (1) и со стороной $a=11$ будет равен $3458,39(V_{min})$.

$$V_{\tau} = a^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3458,39(V_{min}); \quad (1)$$

Если сравнить полученное значение в э.м. со справочной массой Таона равной 3477,143 (э.м.) получим погрешность 0,6 %, что также не может объясняться простым совпадением. Дуальным многогранником (Тау-нейтрино) к шестиугольной призме будет видимо сдвоенная шестиугольная пирамида. Единственное отличие таонного от других нейтрино будет в том, что его треугольные грани будут равнобедренными треугольниками. Также как у тел Платона дуальные шестиугольная призма и сдвоенная пирамида (Таон и его нейтрино) будут иметь одинаковое количество рёбер, а количество вершин и граней меняются местами.

Вполне возможно, что элементарные частицы могут принимать формы иных многогранников (полуправильных или невыпуклых). Но видимо окружающее пространство (давление вакуума) будет приводить к быстрому распаду таких частиц.

На основании предположения, что возникновение сил, удерживающих нуклоны в атомном ядре, и наблюдаемый при этом дефект массы не являются причиной и следствием [1], выдвинем следующую гипотезу :

Гипотеза 2. Кварки являются лептонами (многогранниками) с целыми зарядами (Кулоновский и Барионный).

По сути Летонный заряд и Барионный — одно и то же, это сумма кварков и антикварков в реакциях слияния или распада элементарных частиц. Только в лептонном заряде, это ещё и сохранение в частицах распада группы внутренней симметрии исходной частицы. Таким образом мы получаем, что кварки одного поколения есть одна группа симметрии. Автор предлагает обозначать эти группы как «О,У,Р», где «О» и «У» подгруппы симметрии октаэдра и икосаэдра, а «Р» — группа симметрии призмы.

Сведем в одну таблицу все многогранники кварки-лептоны (см. табл.3).

* Число после обозначения типа кварка представляет собой дискретную (квантованную) длину ребра многогранника в l_{min} .

** Объем многогранника умноженный на $0,511 \text{ МэВ}/c^2$.

Барионный заряд кварков в предлагаемой модели будет равен +1 у кварков, и -1 у антикварков. Адроны в предлагаемой модели имеют тот же кварковый состав, что и в СМ, с единственным отличием, что у Барионов один или два кварка будут антикварк, и также соответственно иметь Барионный заряд +1 или -1. Также и с электрическими зарядами. Например π^- мезон в СМ имеет кварковое сочетание $d\bar{u}$. Его электрический заряд складывается из зарядов

Таблица 3. Многогранники-Лептоны-Кварки

Group	Polihedron	Q	J_p	Lepton	mc^2 MeV/s^2	Quark*	Σ_V^{**} MeV/s^2
O	Cube	-1	1/2	e^-	0,511	d1	0,511
	Octahedron	0	1/2	ν_e	$<2,2e^{-6}$	u1	0,24
Y	Dodecahedron	-1	1/2	μ^-	105,66	s3	105,73
	Icosahedron	0	1/2	ν_μ	$<0,19$	c1	2,182
P	6-carbon prism	-1	1/2	τ^-	1776,84	b11	1767,06
	two 6-coal pyramids	0	1/2	ν_τ	$<18,2$	t1	0,89

кварка d и антикварка $\bar{u}$ (2):

$$Q_{\pi^-} = Q_d + Q_{\bar{u}} = (-1/3 + (-2/3) = -1; \quad (2)$$

В предлагаемой коррекции СМ+ электрический заряд π^- также складывается из зарядов кварка d и антикварка $\bar{u}$ (3).

$$Q_{\pi^-} = Q_d + Q_{\bar{u}} = -1 + 0 = -1; \quad (3)$$

Гипотеза 3. Кварки-многогранники входят в адроны с разной массой (объёмом), с сохранением своей внутренней симметрии.

Естественно, что масса таких кварков также будет определяться квантованной длиной их рёбер. А масса адронов в таком случае будет складываться из масс составляющих их кварков-многогранников. Размер кварков в адронах будем указывать числом после указания вида кварка. Это число – количество l_{min} составляющих ребро данного кварка-многогранника. Например π^- мезон будет иметь обозначение $\bar{u}5d6$, что обозначает антикварк $\bar{u}$ (октаэдр) с длиной ребра $a = 5$ и кварк d(куб) с длиной ребра $a = 6$.

Реакции распада частиц в предлагаемой теории происходят с возможностью осциллирующий групп симметрий кварков-многогранников (аромата) (Рис.2).

(u $\leftrightarrow$ c $\leftrightarrow$ t) – нейтринные осцилляции.

(d $\leftrightarrow$ s $\leftrightarrow$ b) – другие лептонные (кварковые) осцилляции.

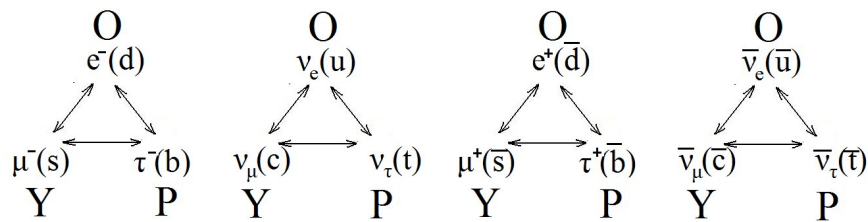


Рис. 2. Осцилляции лептонов (кварков) в группах симметрии

При этом для распада частицы возможно привлечение из вакуума одной или несколько пар кварк-антикварк ($q\bar{q}$).

Предлагаемая модель элементарных частиц позволяет отказаться от исчезновений, возникновений и «превращений» одних частиц в другие через некие промежуточные бозоны. При распадах и иных взаимодействиях частиц сохраняется количество кварков многогранников их составляющих либо в виде лептонов, либо в виде кварков, что приводит формулы в строгий математический вид.

Наличие локализованных в вершинах многогранников точечных зарядов, составляющих кулоновский заряд частицы, вполне соответствует современному представлению о преонах [8].

1. Уравнения распадов элементарных частиц

1.1. Лептоны

Рассмотрим формулы распадов частиц в предлагаемой модели. В левой части уравнения в круглых скобках рядом с указанием частицы мы будем указывать соответствующий ей кварк или набор кварков и антикварков, в скобках без указания частицы будем указывать привлечённую пару кварк-антикварк. После формулы и точки с запятой, в квадратных скобках укажем осцилляции кварков (изменение аромата). Заметим, что осцилляции возможны только для кварков и антикварков имеющих одинаковый электрический заряд. Тогда распад мюона будет проходить по следующим формулам (4) (5):

$$\mu^-(s) + (u\bar{u}) \rightarrow e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}) + \nu_\mu(c); \quad [s \rightarrow d] \quad [u \rightarrow c] \quad (4)$$

$$\mu^-(s) + (c\bar{c}) \rightarrow e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}) + \nu_\mu(c); \quad [s \rightarrow d] \quad [\bar{c} \rightarrow \bar{u}] \quad (5)$$

Распады таона (6)...(10):

$$\tau^-(b) + (u\bar{u}) \rightarrow e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}) + \nu_\tau(t); \quad [b \rightarrow d] \quad [u \rightarrow t] \quad (6)$$

$$\tau^-(b) + (u\bar{u}) \rightarrow \mu^-(s) + \bar{\nu}_\mu(\bar{c}) + \nu_\tau(t); \quad [b \rightarrow s] \quad [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad [u \rightarrow t] \quad (7)$$

$$\tau^-(b) + (c\bar{c}) \rightarrow \mu^-(s) + \bar{\nu}_\mu(\bar{c}) + \nu_\tau(t); \quad [b \rightarrow s] \quad [c \rightarrow t] \quad (8)$$

$$\tau^-(b) + (t\bar{t}) \rightarrow \mu^-(s) + \bar{\nu}_\mu(\bar{c}) + \nu_\tau(t); \quad [b \rightarrow s] \quad [\bar{t} \rightarrow \bar{c}] \quad (9)$$

$$\tau^-(b) + (u\bar{u}) \rightarrow \pi^-(d\bar{u}) + \nu_\tau(t); \quad [b \rightarrow d] \quad [u \rightarrow t] \quad (10)$$

1.2. Адроны-Мезоны

Автором предложено систематизировать весь известный «зоопарк» элементарных частиц в «Таблицы кварковых сочетаний», аналогичных Таблице Д.И. Менделеева для химических элементов. В каждой ячейке такой таблицы будут сосредоточены все элементарные частицы с разной массой, но имеющие определённое (одинаковое) сочетание кварков в своей структуре.

Адроны – мезоны в предлагающейся коррекции Стандартной Модели «СМ+» также состоят из кварка и антикварка ($q\bar{q}$) как в СМ и имеют абсолютно такое же кварковое сочетание.

Составим таблицу кварковых сочетаний мезонов.(см. табл.4). В левой колонке мы укажем группы симметрии :2Y; 1Y1O;....1P1Y. Опорными для такой таблицы будут строки в ячейках которых будут кварковые сочетания одной группы симметрии. Для группы «2O» ($u\bar{u}$) ($d\bar{d}$), для группы «2Y» ($c\bar{c}$) ($s\bar{s}$), и для группы «2P» ($t\bar{t}$) ($b\bar{b}$). Мезоны сочетаний двух групп будут располагаться между их опорными ячейками. В каждой такой ячейке будут пониматься все мезоны данного кваркового сочетания.

Так в ячейках $|\pi^0(u\bar{u})|\pi^-(d\bar{u})|\pi^+(u\bar{d})|\pi^0(d\bar{d})|$ будут подразумеваться все мезоны такого же кваркового состава : $\pi, b, \rho, a, \eta, \eta', h, h', \omega, \varphi, f, f'$.

Таблица 4. Кварковые сочетания мезонов

<i>Mesons</i> $q\bar{q}$ $Q_B = 0$				
$Q \rightarrow$	0	-1	+1	0
Group	2 group combinations			
2Y	$\eta^0(c\bar{c})$	$D_s^-(s\bar{c})$	$D_s^+(c\bar{s})$	$\eta^0(s\bar{s})$
1Y1O	$D^0(c\bar{u})$	$D^-(d\bar{c})$	$K + (u\bar{s})$	$\bar{K}^0(s\bar{d})$
1O1Y	$\bar{D}^0(u\bar{c})$	$K^-(s\bar{u})$	$D^+(c\bar{d})$	$K^0(d\bar{s})$
2O	$\pi^0(u\bar{u})$	$\pi^-(d\bar{u})$	$\pi^+(u\bar{d})$	$\pi^0(d\bar{d})$
1O1P	$u\bar{t}$	$B^-(b\bar{u})$	$t\bar{d}$	$B^0(d\bar{b})$
1P1O	$t\bar{u}$	$d\bar{t}$	$B^+(u\bar{b})$	$\bar{B}^0(d\bar{b})$
2P	$\eta^0(t\bar{t})$	$B_t^-(b\bar{t})$	$B_t^+(t\bar{b})$	$\eta^0(b\bar{b})$
1P1Y	$t\bar{c}$	$s\bar{t}$	$B_c^+(c\bar{b})$	$\bar{B}_s^0(b\bar{s})$
1Y1P	$c\bar{t}$	$B_c^-(b\bar{c})$	$t\bar{s}$	$B_s^0(s\bar{b})$

Как видим в таблице в строке группы сочетаний «2O», есть два варианта π^0 мезонов с парами электрически заряженных и не заряженных кварков: $\pi^0(u\bar{u})$ $\pi^0(d\bar{d})$.

Можно предположить, что кроме межгрупповых осцилляций (Рис.2), возможны осцилляции внутри одной группы симметрии для пар одинаковых кварков $q\bar{q}$:

$$O(u\bar{u} \Leftrightarrow d\bar{d}); \quad Y(c\bar{c} \Leftrightarrow s\bar{s}); \quad P(t\bar{t} \Leftrightarrow b\bar{b});$$

Анализ списка частиц — продуктов распада показывает, что разные варианты распада, зависят не только от кваркового сочетания распадающейся частицы, но и от того, какие пары $q\bar{q}$ и их количество при распаде привлекается, с учётом кварковых осцилляций.

Этим объясняются, что для мезонов типа π^0, f, η^0, ρ и других, которые в СМ считаются смесью нескольких сочетаний кварков (мезонов), наблюдаются несколько вариантов распадов на группы заряженных или незаряженных частиц. Соответственно наблюдается два варианта распадов :

Первый вариант $\pi^0(u\bar{u})$ на электрически незаряженные частицы(11)...(13).

$$\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow 2\gamma; \quad (11)$$

$$\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow \nu_e(u) + \bar{\nu}_e(\bar{u}); \quad (12)$$

$$\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow \nu_\mu(c) + \bar{\nu}_\mu(\bar{c}); [u \rightarrow c] [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad (13)$$

Второй вариант распадов $\pi^0(d\bar{d})$ на заряженные частицы (14),(15). :

$$\pi^0(u\bar{u} \Rightarrow d\bar{d}) \rightarrow e^-(d) + e^+(\bar{d}); \quad (14)$$

$$\pi^0(u\bar{u} \Rightarrow d\bar{d}) \rightarrow \mu^-(s) + \bar{\mu}^+(\bar{s}); [d \rightarrow s] [\bar{d} \rightarrow \bar{s}] \quad (15)$$

Распады других мезонов (16)...(24):

$$\pi^+(u\bar{d}) \rightarrow \mu^+(\bar{s}) + \nu_\mu(c); [\bar{d} \rightarrow \bar{s}] [u \rightarrow c] \quad (16)$$

$$K^+(u\bar{s}) + (u\bar{u}) + (d\bar{d}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \pi^+(u\bar{d}) + \pi^-(d\bar{u}); [\bar{s} \rightarrow \bar{d}] \quad (17)$$

$$K^0(d\bar{s}) + (u\bar{u}) + (u\bar{u}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \pi^-(d\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}); [\bar{s} \rightarrow \bar{d}] \quad (18)$$

$$D^+(c\bar{d}) \rightarrow e^+(\bar{d}) + \nu_e(u); [c \rightarrow u] \quad (19)$$

$$D_s^+(c\bar{s}) + (d\bar{d}) \rightarrow K_S^0(s\bar{d}) + K^+(u\bar{s}); [c \rightarrow u] [d \rightarrow s] \quad (20)$$

$$B^+(u\bar{b}) + (u\bar{u}) \rightarrow \bar{D}^0(u\bar{c}) + \pi^+(u\bar{d}); [\bar{b} \rightarrow \bar{d}] [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad (21)$$

$$B_s^0(s\bar{b}) + (u\bar{u}) \rightarrow D_s^-(s\bar{c}) + \pi^+(u\bar{d}); [\bar{b} \rightarrow \bar{d}] [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad (22)$$

$$B_c^+(c\bar{b}) + (c\bar{c}) \rightarrow J/\Psi_{1s}(c\bar{c}) + \pi^+(u\bar{d}); [\bar{b} \rightarrow \bar{d}] [c \rightarrow u] \quad (23)$$

$$\Upsilon_{1S}(b\bar{b}) \rightarrow \tau^-(b) + \bar{\tau}^+(\bar{b}); \quad (24)$$

$$\eta(u\bar{u}) + (u\bar{u}) + (u\bar{u}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}); \quad (25)$$

$$\eta(u\bar{u} \Rightarrow d\bar{d}) \rightarrow e^-(d) + e^+(\bar{d}); \quad (26)$$

$$J/\Psi(1S)(c\bar{c} \Rightarrow s\bar{s}) \rightarrow \mu^-(s) + \mu^+(\bar{s}); \quad (27)$$

$$J/\Psi(1S)(c\bar{c} \Rightarrow s\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow \rho^+(u\bar{d}) + \pi^-(d\bar{u}); [s \rightarrow d][\bar{s} \rightarrow \bar{d}] \quad (28)$$

Список основных известных элементарных частиц с указаниями кварковых сочетаний приведен в Приложении [9] Погрешность вычисления сумм масс кварков-многогранников составила как правило менее 0.1 МэВ.

Расчёты производились полуэмпирически путём, методом подбора многогранников необходимого кваркового состава частицы, сумма объёмов которых имела минимальную погрешность с установленной экспериментально массой. Полученные результаты приводят к следующим выводам :

Для частиц которые считаются в СМ смесью других мезонов, например π^0 или ρ^0 -мезон, рассматриваемые как смесь $\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$, расчёты показали, что данные мезоны возможно являются смесью дикварков $(u\bar{u})$, $(d\bar{d})$ и тетракварков $d\bar{d}u\bar{u}$. Именно у них идет наиболее близкое совпадение вычисленной и экспериментально установленной массы (суммы объёмов многогранников-кварков).

Косвенно это подтверждается формулами распадов на частицы суммарно содержащие то два, то четыре кварка в итоге. А η^0 мезон, понимаемый в СМ как $\frac{u\bar{u}+d\bar{d}-s\bar{s}}{\sqrt{6}}$ и другие мезоны с таким же кварковым составом скорее всего является соответственно гексакварками $d\bar{d}u\bar{u}s\bar{s}$.

Аналогично ω^0 и φ^0 -мезоны, принимаемые в СМ как смесь $\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$, возможно являются тетракварками $d\bar{d}u\bar{u}$ или также при распадах проходят через внутригрупповые и межгрупповые осцилляции.

И наконец есть ещё пара мезонов, которую в СМ принято также считать смесью кварков : $K_L^0(\frac{d\bar{s}+s\bar{d}}{\sqrt{2}})$ и $K_S^0(\frac{d\bar{s}-s\bar{d}}{\sqrt{2}})$. В предлагаемой коррекции СМ+ автор также полагает, что это смеси дикварков, тетракварков и гексакварков : $K^0(d\bar{s})$, $K_S^0(d\bar{s}u\bar{u})$, $K_L^0(d\bar{s}d\bar{s}u\bar{u})$, $K_L^0(d\bar{s}u\bar{u}u\bar{u})$; $\bar{K}^0(s\bar{d})$, $\bar{K}_S^0(s\bar{d}u\bar{u})$, $\bar{K}_L^0(s\bar{d}s\bar{d}u\bar{u})$, $\bar{K}_L^0(s\bar{d}u\bar{u}u\bar{u})$;

Поскольку именно распад на два или три нейтральных пиона отличает K_S^0 от K_L^0 , то формулы распада этих странных частиц можно представить как (29), (30) с учётом внутригрупповых осцилляций :

$$K_S^0(d\bar{s}u\bar{u}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}); \quad [\bar{s} \rightarrow \bar{d}] [d\bar{d} \Rightarrow u\bar{u}] \quad (29)$$

$$K_L^0(d\bar{s}u\bar{u}u\bar{u}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}) [s \rightarrow d] [d\bar{d} \Rightarrow u\bar{u}] \quad (30)$$

1.3. Адроны-Барионы

Как уже указывалось выше, кварки в предлагаемой модели СМ+ несут целые барионные числа +1 у кварков или -1 у антикварков. Это означает, что частицы барионы будут состоять из двух кварков и одного антикварка $qq\bar{q}$, а состав античастиц соответственно, один кварк и два антикварка $q\bar{q}\bar{q}$. Представим таблицу кварковых сочетаний Барионов (см. табл.5).

Распады барионов по предлагаемой модели: Распад нейтрона (31):

$$n(udd\bar{u}) + (u\bar{u}) \rightarrow p(uud\bar{u}) + e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}); \quad (31)$$

Аналогично происходит распад антинейтрона (32) :

$$\bar{n}(d\bar{d}\bar{u}) + (u\bar{u}) \rightarrow \bar{p}(d\bar{u}\bar{u}) + e^+(\bar{d}) + \nu_e(u); \quad (32)$$

Суммы кварков, антикварков и частиц с учётом привлечения пары $(u\bar{u})$ до распада и после равны.

Проверим соответствие предложенного кваркового состава другим наблюдаемым схемам распадов частиц. Возникновение странных частиц происходит при столкновении двух протонов. Большая энергия, с которой сталкиваются протоны, приводит к образованию и привлечению пары $(s\bar{s})$ (33).

$$p(uud\bar{u}) + p(uud\bar{u}) + (s\bar{s}) \rightarrow p(uud\bar{u}) + \Lambda^0(sud\bar{u}) + K^+(u\bar{s}); \quad (33)$$

Дальнейший распад получившихся странных K^+ и Λ^0 гиперона возможен по двум схемам также с привлечением пар $(q\bar{q})$: Один из вариантов распада (34)...(40):

Таблица 5. Кварковые сочетания Барионов

Barions $qq\bar{q}$ $Q_B = +1$						
$Q \rightarrow$	0	+1	0	-1	0	+1
Group	3 group combinations					
1O1Y1P	$cd\bar{b}$	$uc\bar{b}$	$st\bar{d}$	Ξ_b^- ($ds\bar{b}$)	Ξ_b^0 ($us\bar{b}$)	$ut\bar{s}$
				$cd\bar{t}$	$ct\bar{u}$	
Group	1,2 group combinations					
3Y	Ω_c^0 ($cc\bar{c}$)	Ω_{cc}^+ ($cc\bar{s}$)	Ω_{cs}^0 ($cs\bar{s}$)	Ω^- ($ss\bar{s}$)		
2Y1O	$cc\bar{u}$	Ξ_c^+ ($uc\bar{s}$)	Ξ_c^0 ($us\bar{s}$)	Ξ_c^- ($ds\bar{s}$)	Ξ_c^0 ($cs\bar{d}$)	Ξ_{cc}^+ ($cc\bar{d}$)
1Y2O	Σ_c^0 ($cu\bar{u}$)	Σ^+ ($uu\bar{s}$)	Σ^0, Λ^0 ($us\bar{d}$)	Σ^- ($dd\bar{s}$)	Σ_c^0 ($cd\bar{d}$)	Λ_c^+, Σ_c^+ ($cu\bar{d}$)
3O	Δ^0 ($uu\bar{u}$)	p, N^+, Δ^+ ($uud\bar{d}$)	n, N^0, Δ^0 ($udd\bar{d}$)	Δ^- ($ddd\bar{d}$)		
2O1P	Σ_t^0 ($uut\bar{t}$)	Σ_t^+, Λ_t^+ ($ut\bar{d}$)	Σ_t^0 ($td\bar{d}$)	Σ_b^- ($dd\bar{b}$)	Σ_b^0, Λ_b^0 ($u\bar{d}b$)	Σ_b^+ ($uub\bar{b}$)
1O2P	$ut\bar{t}$	$tt\bar{d}$	$tb\bar{d}$	Ξ^- ($db\bar{b}$)	Ξ^0 ($ub\bar{b}$)	$ut\bar{b}$
3P	Ω_t^0 ($tt\bar{t}$)	$tt\bar{b}$	$tb\bar{b}$	Ω_{bbb}^- ($bbb\bar{b}$)		
2P1Y	$tt\bar{c}$	$ct\bar{b}$	Ω_{cbb}^0 ($cb\bar{b}$)	Ω_{bb}^- ($sb\bar{b}$)	$ts\bar{b}$	$tt\bar{s}$
1P2Y	$tc\bar{c}$	Ω_{ccb}^+ ($cc\bar{b}$)	$cb\bar{s}$	Ω_b^- ($ss\bar{b}$)	$ts\bar{s}$	$tc\bar{s}$

$$\Lambda^0(su\bar{d}) + (u\bar{u}) \rightarrow n(ud\bar{d}) + \pi^0(u\bar{u}); [s \rightarrow d] \quad (34)$$

$$n(ud\bar{d}) + (u\bar{u}) \rightarrow p(uud) + e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}); \quad (35)$$

$$\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow 2\gamma; \text{ from}(34) \quad (36)$$

$$K^+(u\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow \pi^+(u\bar{d}) + \pi^0(u\bar{u}); [\bar{s} \rightarrow \bar{d}] \quad (37)$$

$$\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow 2\gamma; \text{ from}(37) \quad (38)$$

$$\pi^+(u\bar{d}) \rightarrow \mu^+(\bar{s}) + \nu_\mu(c); [\bar{d} \rightarrow \bar{s}] [u \rightarrow c]; \quad (39)$$

$$\mu^+(\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow e^+(\bar{d}) + \nu_e(u) + \bar{\nu}_\mu(\bar{c}); [\bar{s} \rightarrow \bar{d}] [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad (40)$$

Количество кварков (частиц) изначально и по окончании всех распадов с учётом сокращения пар ($q\bar{q}$) остаётся неизменным.

Рассмотрим распад Ω_s^- гиперона (41)...(48):

$$\Omega_s^-(ss\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow \Xi^0(su\bar{s}) + \pi^-(d\bar{u}); \quad [s \rightarrow d] \quad (41)$$

$$\Xi^0(su\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow \Lambda^0(sud\bar{d}) + \pi^0(u\bar{u}); \quad [s \rightarrow d] \quad (42)$$

$$\pi^-(d\bar{u}) \rightarrow \mu^-(s) + \bar{\nu}_\mu(c); \quad [\bar{d} \rightarrow \bar{s}] \quad [u \rightarrow c] \quad from(41) \quad (43)$$

$$\pi^0(u\bar{u}) \rightarrow 2\gamma; \quad from(42) \quad (44)$$

$$\mu^-(s) + (u\bar{u}) \rightarrow e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}) + \nu_\mu(c); \quad [s \rightarrow d] \quad [u \rightarrow c] \quad (45)$$

$$\Lambda^0(sud\bar{d}) + (u\bar{u}) \rightarrow p(uud\bar{d}) + \pi^-(d\bar{u}); \quad [s \rightarrow d] \quad (46)$$

$$\pi^-(d\bar{u}) \rightarrow \mu^-(s) + \bar{\nu}_\mu(\bar{c}); \quad [d \rightarrow s] \quad [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad from(46) \quad (47)$$

$$\mu^-(s) + (u\bar{u}) \rightarrow e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}) + \nu_\mu(c); \quad [s \rightarrow d] \quad [u \rightarrow c] \quad (48)$$

Рассмотрим другие варианты распада Ω_s^- гиперона (49),(50).

$$\Omega_s^-(ss\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow \Lambda^0(sud\bar{d}) + K^-(s\bar{u}); \quad [\bar{s} \rightarrow \bar{d}] \quad (49)$$

$$\Omega_s^-(ss\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow \Xi^-(ds\bar{s}) + \pi^0(u\bar{u}); \quad [s \rightarrow d] \quad (50)$$

Отличие предлагаемых кварковых сочетаний от СМ есть только в одном случае — для семейства частиц с двойным электрическим зарядом, например Δ^{++} . Данный барион был открыт в середине 50-х годов вместе с другими Дельта резонансами, с использованием ускоренных положительных пионов на водородных мишенях. И распадался он опять же на положительный пион и протон. Логично предположить, что именно из кварковых сочетаний этих частиц он и состоит как пентакварк (51).

$$p(uud\bar{d}) + \pi^+(u\bar{d}) \rightarrow \Delta^{++}(uuu\bar{d}\bar{d}) \rightarrow p(uud\bar{d}) + \pi^+(u\bar{d}); \quad (51)$$

Автор предполагает, что не только Δ^{++} , но и другие барионы с двойным зарядом $\Sigma_c^{++}(uuc\bar{d}\bar{d})$, и потенциальный $\Delta_t^{++}(uut\bar{d}\bar{d})$ являются пентакварками. Тогда они вписываются и в Стандартную Модель, и отвечают предлагаемой коррекции СМ+.

В предлагаемой модели структуры (кварковые сочетания) протона и нейтрона будут следующими: $p(u7u9\bar{d}11)$; $n(u6d12\bar{d}2)$; В реальности геометрия нуклонов будет в виде представленных на (см.Рис.3) с внешними кварками в форме куба: d-кварк у нейтрона и $\bar{d}$ у протона

Исходя из структуры нуклонов, имеющих внешние d кварки – кубы, можно сделать предположение, что каждый из них может присоединить к себе только шесть частиц по количеству внешних граней. Следовательно, ядерные силы имеют ограничение на количество возможных межукулоновских связей, и пространственную анизотропию по шести ортогональным направлениям, что будет диктовать структуру атомных ядер. Косвенным подтверждением такого вывода является то, что самый тяжёлый изотоп Водорода 7H содержит шесть нейтронов.

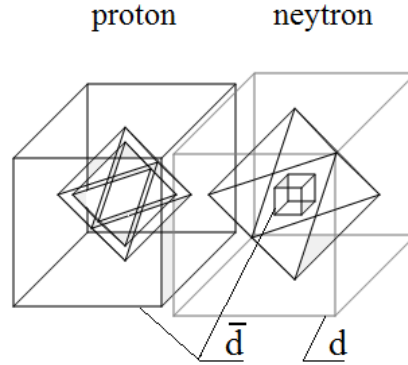


Рис. 3. Структура протона и нейтрона

1.4. Тетракварки, пентакварки, гексакварки

Полная таблица кварковых сочетаний тетракварков будет достаточно велика. Автор ограничился частью таблицы в которой содержатся уже открытые частицы (см. табл.6).

Автором проведён анализ распадов тетракварков, пентакварков и гексакварков. Все формулы получились корректными, без исчезновения и превращения частиц. Приведём несколько примеров (52)–(58) :

$$T_{\psi 1}^b(3900)^+(c\bar{c}u\bar{d}) \rightarrow J/\Psi(c\bar{c}) + \pi^+(u\bar{d}); \quad (52)$$

Получение тетракварка $T_{cs0}^a(2900)^{++}$ происходит при столкновении протона и антипротона и распаде $B^+(u\bar{b})$ или $B^0(d\bar{b})$.

$$p(uu\bar{d}) + \bar{p}(\bar{u}\bar{u}d) \rightarrow B^+(u\bar{b}) + \pi^0(u\bar{u}) + \pi^-(d\bar{u}); \quad [\bar{d} \rightarrow \bar{b}] \quad (53)$$

$$B^+(u\bar{b}) + (c\bar{c}) + (d\bar{d}) \rightarrow T_{cs0}^a(2900)^{++}(u\bar{d}c\bar{s}) + D^-(d\bar{c}); \quad [u \rightarrow c] \quad [\bar{b} \rightarrow \bar{s}] \quad (54)$$

Практически сразу он распадается на два мезона :

$$T_{cs0}^a(2900)^{++}(u\bar{d}c\bar{s}) \rightarrow D_s^+(c\bar{s}) + \pi^+(u\bar{d}); \quad (55)$$

Получение $B^0(d\bar{b})$:

$$p(uu\bar{d}) + \bar{p}(d\bar{u}\bar{u}) \rightarrow B^0(d\bar{b}) + \pi^0(u\bar{u}) + \pi^0(u\bar{u}); \quad [\bar{d} \rightarrow \bar{b}] \quad (56)$$

$$B^0(d\bar{b}) + (u\bar{u}) \rightarrow T_{cs0}^a(2900)^0(c\bar{u}d\bar{s}); \quad [\bar{b} \rightarrow \bar{s}] \quad [u \rightarrow c] \quad (57)$$

$$T_{cs0}^a(2900)^0(c\bar{u}d\bar{s}) + (u\bar{u}) \rightarrow D^0(u\bar{c}) + D_c^+(c\bar{s}) + \pi^-(d\bar{u}); \quad [\bar{u} \rightarrow \bar{c}] \quad (58)$$

Полная таблица кварковых сочетаний пентакварков также будет достаточно велика. Автор ограничился частью таблицы в которой содержатся уже открытые частицы и три бариона с двойным зарядом $++$, которые автор считает также пентакварками (см. Табл.7).

Таблица 6. Кварковые сочетания тетракварков

Tetraquarks $q\bar{q}q\bar{q}$ B=0						
$Q \rightarrow$	0	+1	0	-1	0	+2
Group	4 group combinations					
4Y	$T_{\psi\psi}(6900)$ $c\bar{c}c\bar{c}$	$c\bar{c}c\bar{s}$	$\chi_{c1}(4140)$ $c\bar{c}s\bar{s}$	$s\bar{c}s\bar{s}$	$s\bar{s}s\bar{s}$	$c\bar{s}c\bar{s}$
3Y1O	$c\bar{c}c\bar{u}$	$c\bar{c}c\bar{d}$	$c\bar{c}d\bar{s}$	$s\bar{u}s\bar{s}$	$d\bar{s}s\bar{s}$	$c\bar{d}c\bar{s}$
3Y1O	$c\bar{c}u\bar{c}$	$T_{\psi s1}^{\theta}(4000)^+$ $c\bar{c}u\bar{s}$	$c\bar{u}s\bar{s}$	$d\bar{c}s\bar{s}$	$u\bar{c}s\bar{s}$	$c\bar{s}u\bar{s}$
2Y2O	$c\bar{c}u\bar{u}$	$T_{\psi 1}^b(3900)^+$ $c\bar{c}u\bar{d}$	$T_{cs0}(2900)^0$ $c\bar{u}d\bar{s}$	$s\bar{s}d\bar{u}$	$d\bar{d}s\bar{s}$	$T_{cs0}^a(2900)^{++}$ $u\bar{d}c\bar{s}$
2Y2P	$u\bar{u}s\bar{s}$	$u\bar{u}c\bar{s}$	$u\bar{c}d\bar{s}$	$d\bar{d}s\bar{c}$	$c\bar{c}d\bar{d}$	$u\bar{s}u\bar{s}$
1Y3O	$u\bar{u}u\bar{c}$	$u\bar{c}u\bar{d}$	K_L^0 $u\bar{u}d\bar{s}$	K^- $u\bar{u}s\bar{u}$	$u\bar{c}d\bar{d}$	$u\bar{d}u\bar{s}$
1Y3O	$c\bar{u}u\bar{u}$	K^+ $u\bar{u}u\bar{s}$	K_S^0 $u\bar{u}s\bar{d}$	$d\bar{c}d\bar{d}$	$d\bar{d}d\bar{s}$	$u\bar{d}c\bar{d}$
4O	$u\bar{u}u\bar{u}$	$u\bar{u}u\bar{d}$	$\rho^0, \omega^0, \varphi^0$ $u\bar{u}d\bar{d}$	$d\bar{u}d\bar{d}$	$d\bar{d}d\bar{d}$	$u\bar{d}u\bar{d}$
3O1P	$u\bar{u}u\bar{t}$	$u\bar{u}u\bar{b}$	$u\bar{u}b\bar{d}$	$d\bar{t}d\bar{d}$	$b\bar{d}d\bar{d}$	$u\bar{d}u\bar{b}$
	$u\bar{u}t\bar{u}$	$u\bar{u}t\bar{d}$	$u\bar{t}d\bar{d}$	$b\bar{u}d\bar{d}$	$d\bar{d}d\bar{b}$	$u\bar{d}t\bar{d}$
2O2P	$u\bar{u}t\bar{t}$	$u\bar{u}t\bar{b}$	$u\bar{t}d\bar{b}$	$d\bar{d}b\bar{t}$	$b\bar{b}d\bar{d}$	$u\bar{d}t\bar{b}$
	$t\bar{t}d\bar{d}$	$t\bar{t}u\bar{d}$	$t\bar{u}b\bar{d}$	$T_{Y1}^b(10610)^+$ $b\bar{b}u\bar{d}$	$u\bar{u}b\bar{b}$	$u\bar{b}u\bar{b}$
1O3P	$u\bar{t}t\bar{t}$	$t\bar{t}t\bar{d}$	$t\bar{d}b\bar{t}$	$b\bar{u}b\bar{b}$	$b\bar{b}b\bar{d}$	$t\bar{d}t\bar{b}$
4P	$t\bar{t}t\bar{t}$	$t\bar{t}t\bar{b}$	$t\bar{t}b\bar{b}$	$b\bar{t}b\bar{b}$	$b\bar{b}b\bar{b}$	$t\bar{b}t\bar{b}$

Получение и распад некоторых пентакварков (59)...(62):

$$B^-(b\bar{u}) + (c\bar{c}) + (u\bar{u}) + (d\bar{d}) \rightarrow P_{\psi s}^{\Lambda}(4338)^0(c\bar{c}usd\bar{d}) + \bar{p}(d\bar{u}u\bar{u}); \quad [b \rightarrow s] \quad (59)$$

$$P_{\psi s}^{\Lambda}(4338)^0(c\bar{c}usd\bar{d}) \rightarrow J/\Psi(c\bar{c}) + \Lambda^0(usd\bar{d}); \quad (60)$$

$$\Lambda_b^0(ubd\bar{d}) + (c\bar{c}) \rightarrow P_{\psi s}^{\Lambda}(4459)^0(c\bar{c}usd\bar{d}); \quad [b \rightarrow s] \quad (61)$$

$$P_{\psi s}^{\Lambda}(4459)^0(c\bar{c}usd\bar{d}) \rightarrow \Lambda^0(usd\bar{d}) + J/\Psi^0(c\bar{c}); \quad (62)$$

Распады $P_{\psi s}^N(4312)^+$ (63)...(65):

$$P_{\psi s}^N(4312)^+(c\bar{c}uud\bar{d}) \rightarrow p(uud\bar{d}) + \eta_c^0(c\bar{c}); \quad (63)$$

$$P_{\psi s}^N(4312)^+(c\bar{c}uud\bar{d}) \rightarrow \Sigma_c^+(cuu\bar{d}) + \bar{D}^{*0}(u\bar{c}); \quad (64)$$

$$P_{\psi s}^N(4312)^+(c\bar{c}uud\bar{d}) \rightarrow p(uud\bar{d}) + J\psi_c^0(c\bar{c}); \quad (65)$$

Таблица 7. Кварковые сочетания пентакварков

Pentaquarks $q\bar{q}qq\bar{q}$ B=+1					
$Q \rightarrow$	0	+1	-1	0	+2
Group	1 group combinations				
5O	$u\bar{u}uu\bar{u}$	$u\bar{u}uud\bar{d}$	$u\bar{u}ud\bar{u}$	$P_{n\pi^0}^N(939)^0$ $u\bar{u}udd\bar{d}$	$P_{p\pi}^\Delta(1332)^{++}$ $(uuu\bar{d}\bar{d})$
Group	2-3 group combinations				
4O1Y	$u\bar{u}u\bar{u}c$	$u\bar{u}u\bar{s}u$	$u\bar{u}u\bar{u}s$	$u\bar{u}us\bar{d}$	$P_{\Lambda_c\pi}^\Sigma(2454)^{++}$ $uuc\bar{d}\bar{d}$
4O1P	$u\bar{u}u\bar{u}t$	$u\bar{u}u\bar{b}u$	$u\bar{u}u\bar{u}b$	$u\bar{u}us\bar{b}$	$P_{\Lambda_t\pi}^\Sigma(????)^{++}$ $uut\bar{d}\bar{d}$
3Y2O	$c\bar{c}uu\bar{c}$	$c\bar{c}uc\bar{d}$	$c\bar{c}ud\bar{c}$	$P_{\psi s}^\Lambda(4459)^0$ $c\bar{c}ud\bar{s}$	$ccc\bar{d}\bar{d}$
2Y3O	$c\bar{c}uu\bar{u}$	$P_\psi^N(4312)^+$ $c\bar{c}uud\bar{d}$	$c\bar{c}ud\bar{u}$	$c\bar{c}udd\bar{d}$	$ccu\bar{d}\bar{d}$

Автор предполагает, что возможно и распад нейтрона также идет через стадию Пентакварка либо он изначально является пентакварком (66). Тем более, что именно вариант пентакварка с кварковым сочетанием n ($d12\bar{d}4u2\bar{u}3u4$) дает лучшее совпадение по массе (сумме объемов) равное 939,559 MeV.

$$n(u\bar{d}\bar{d}) + (u\bar{u}) \rightarrow P_{n\pi^0}^N(939)^0(u\bar{u}udd\bar{d}) \rightarrow p(u\bar{u}\bar{d}) + e^-(d) + \bar{\nu}_e(\bar{u}); \quad (66)$$

В 2014 году в Центре Юлиха был обнаружен гексакварк d-Star (дибарион)- d^*2380 . По предположениям, он состоит из трёх нижних и трёх верхних кварков, т. е. ($uuudd\bar{d}$). Приведём его обозначение в стиле рекомендуемом организацией «Particle Data Group», учитывая, что барионный заряд частицы равен нулю, т. е. в составе частицы три кварка и три антикварка: $G^\Lambda(2380)^-(u\bar{u}\bar{u}dd\bar{d})$. Формулы распада для данной частицы возможны разные, но скорее всего основных будут три: (67)–(69)

$$G_{n\bar{p}}(2380)^-(u\bar{u}\bar{u}dd\bar{d}) \rightarrow n(u\bar{d}\bar{d}) + \bar{p}(\bar{u}\bar{u}d); \quad (67)$$

$$G_{n\bar{p}}(2380)^-(u\bar{u}\bar{u}dd\bar{d}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) + \pi^-(d\bar{u}) + \pi^0(d\bar{d}); \quad (68)$$

$$G_{n\bar{p}}(2380)^-(u\bar{u}\bar{u}dd\bar{d}) + (s\bar{s}) \rightarrow \Lambda^0(us\bar{d}) + K^0(d\bar{s}) + \bar{p}(d\bar{u}\bar{u}); \quad (69)$$

Также наиболее возможными гексакварками будут $G_{p\Omega}^0(uu\bar{d}ss\bar{s})$, $G_{\Omega\Omega}^0(ss\bar{s}ss\bar{s})$, $G_{\Lambda\Lambda}^0(u\bar{u}dd\bar{s}\bar{s})$.

2. Выводы

Резюмируя вышеизложенное. Гипотеза о геометрической форме кварков-лептонов в виде правильных (полуправильных) многогранников с квантованной длиной ребра, позволила полуэмпирическим путем составить таблицы масс (объемов) элементарных частиц от лептонов до пентакварков.

Гипотеза о принятии кварков как лептонов с целыми кулоновским и иными зарядами (барионный, лептонный) и допустимости не только нейтринных, но и лептонных (кварковых) осцилляций происходящих при распадах частиц (как несохранение группы симметрии кварка-многогранника), позволила с учётом привлечения пар кварк-антикварк ($q\bar{q}$), привести все формулы столкновений и распадов элементарных частиц в строгий вид без привлечения $W^\pm$ и Z^0 бозонов.

Проведённые расчёты и полученные массы (объёмы) элементарных частиц показали, что возможно адроны принимаемые в СМ как смесь мезонов, являются тетракварками, а возможно и гексакварками.

Также массы некоторых адронов близки к значениям масс (объёмов) кварковых сочетаний пентакварков и возможно ими являются.

Сделана попытка составления «Таблиц кварковых сочетаний» элементарных частиц, аналогичных Периодической таблице Д.И. Менделеева. В каждой ячейке такой таблицы подразумеваются все элементарные частицы данного кваркового состава. В Приложении [9] в виде таблиц приведены списки кварковых сочетаний и сопоставленных им наборов кварков-многогранников.

Форма внешних кварков нуклонов в форме кубов даёт основание предполагать, что ядерные силы удерживающие нуклоны в атомном ядре имеют пространственную анизотропию и действуют по шести ортогональным направлениям, перпендикулярно граням кубов d-кварков. Это даёт предпосылки для построения геометрической модели атомных ядер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болдов И.А. Масса как геометрия пространства // Математические структуры и моделирование. 2022. № 3(63). С. 12–23 . URL: <http://msm.omsu.ru/jrn63/boldov.pdf> (дата обращения: 10.11.2022).
2. Вьяльцев А.Н. Дискретное пространство-время М : Комкнига, 2007. 400 с.
3. Шарыпов О.В. О формировании новой физической картины мира на основе планкеоновской гипотезы. Новосибирск : Изд-е ИФиПр СО РАН, 2005.
4. Ципенюк Ю.М. Нулевая энергия и нулевые колебания: как они обнаруживаются экспериментально // УФН. 2012. С. 855–867.
5. Ramsey F.P. On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. 2-nd ser. 1930. V. 30. P. 264–286. URL: <https://www.gwern.net/docs/math/1930-ramsey.pdf> (дата обращения: 10.11.2022).
6. Шапиро Д.А. Представления групп и их применение в физике Функции Грина Конспект лекций по математическим методам физики. Часть II. Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2003. URL: <https://studfile.net/preview/4479311/page:2/> (дата обращения: 10.11.2022).
7. Ambjørn J., Jurkiewicz J., Loll R. The Self-Organizing Quantum Universe // Scientific American. July, 2008.
8. Dugne, J.J., Fredriksson S., Hansson J. Preon Trinity — A Schematic Model of Leptons, Quarks and Heavy Vector Bosons // Europhysics Letters. 2002. T. 60, № 2. С. 188–194.

9. Болдов И.А. Таблицы кварковых сочетаний и масс мезонов, барионов, тетракварков, пентакварков и гексакварков. URL: https://disk.yandex.ru/i/OpEf6FbD1c7O_w (дата обращения: 10.11.2022).

GEOMETRY OF ELEMENTARY PARTICLES

Илья.А. Boldov

researcher, e-mail: ilboldov@yandex.ru

"Ladozhskoe" Ltd, Vimovets settlement, Krasnodar Region, Russia

Abstract. Based on the assumption that there is no direct causal relationship between the defect in the mass of atomic nuclei and the forces holding the nucleons in the nucleus [1], the hypothesis is put forward that the quarks are nucleons with whole Coulomb and other (baryon, lepton) charges. Based on the conclusions obtained by the author [1] that there is no fundamental prohibition on the use of approaches and concepts of the macrocosm in the physics of the microcosm, and that the mass in the space of our Universe is equivalent to a three-dimensional volume, a comparison of the geometry of elementary particles and quarks to regular (semi-regular) polyhedra is proposed. It is assumed that the mass of a particle is determined by the volume of the corresponding polyhedron-a quark (or the sum of the volumes of quarks, with a discrete (quantized) edge length of the polyhedron. An assumption is made about the possibility of oscillation not only of neutrinos, but also of oscillations of other charged leptons (quarks) occurring during particle decays, with non-preservation of symmetry groups of quarks-polyhedra, as well as about the possibility of intra-group oscillation of pairs of identical quarks. It is suggested that during the processes of creation or decay of particles, quark-antiquark pairs ($q\bar{q}$) are always present in space due to "boiling vacuum". Taking into account the above, the formulas of particle reactions are given in a strict mathematical form. The sums of quarks (leptons) before the reaction and after are equal, taking into account the oscillations. Computer modeling is carried out — comparison of the masses of elementary particles to the sums of polyhedra for mesons, baryons, tetraquarks, pentaquarks and hexaquarks. An attempt is made to systematize the entire list of elementary particles in "Tables of quark combinations", similar to the Table of D.I. Mendeleev for chemical elements. In the proposed tables, all elementary particles of a given set of quarks and of different masses are assumed in each cell. The shape of nucleons with external quarks-cubes obtained as a result of the juxtaposition of quarks-polyhedra gives reason to assume the spatial anisotropy of the so-called "nuclear forces" in the form of six orthogonal directions of interaction.

Keywords: elementary particles, quarks, oscillations, decay formulas.

Дата поступления в редакцию: 15.11.2022

О МОМЕНТАХ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.Г. Гринь

профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Получены оценки для моментов симметрических функций от величин из стационарных последовательностей, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания. Эти оценки обобщают аналогичные результаты, имеющиеся к настоящему времени

Ключевые слова: симметрические функции, равномерно сильное перемешивание, оценки для моментов.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена вещественнозначная функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$ (то есть, определена последовательность функций, но, чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем предполагать, что f удовлетворяет следующим условиям:

A_1 . Симметричность: $f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для любой перестановки $\{i_1, \dots, i_n\}$ множества $\{1, \dots, n\}$;

A_2 . $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$;

A_3 . Для любого $1 \leq k \leq n$ $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq g(x_{k+1}, \dots, x_n)$, где функция g удовлетворяет условиям A_1, A_2 и условию

A'_3 : $|g(x_1, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_k)| \leq g(x_{k+1}, \dots, x_n)$.

(Согласно сказанному выше $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.)

Если функция f удовлетворяет условиям A_1, A_2 и A_3 , то будем говорить, что f удовлетворяет условиям $A(g)$, а если удовлетворяет условиям A_1, A_2 и A_3 , где $g = f$ то говорим, что f удовлетворяет условиям $A(f)$.

Из $A_3(g)$ вытекает

$$\begin{aligned} |f(x_1, x_2, \dots, x_k)| &\leq |f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})| + |g(x_k)| \leq \\ &\leq |f(x_1, x_2, \dots, x_{k-l})| + |g(x_{k-l+1})| + \dots + |g(x_k)|, \quad 1 \leq l \leq k. \end{aligned} \quad (1)$$

Многочисленные примеры функций, удовлетворяющих условиям $A(g)$ и $A(f)$ приведены в [1].

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — стационарная в узком смысле последовательность, $b > 0, n = 1, 2, \dots$. Будем обозначать

$$X_{k,m}(b) = f\left(\frac{\xi_k}{b}, \dots, \frac{\xi_m}{b}\right), \quad X_k(b) = X_{1,k}(b), \quad \overline{X}_k(b) = \max_{1 \leq j \leq k} |X_j(b)|,$$

$$Y_{k,m}(b) = g\left(\frac{\xi_k}{b}, \dots, \frac{\xi_m}{b}\right), \quad Y_k(b) = Y_{1,k}(b), \quad Z_k(b) = g\left(\frac{\xi_k}{b}\right),$$

$$X_k = X_k(1), \quad Y_k = Y_k(1), \quad Z_k = Z_k(1), \quad k, n, m \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathcal{F}_{\leq n}$ и $\mathcal{F}_{\geq n}$ – σ -алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leq n\}$ и $\{\xi_i : i \geq n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания* (φ -перемешивания) с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup \left\{ \frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} : A \in \mathcal{F}_{\leq 0}, B \in \mathcal{F}_{\geq n} \right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма 1. Пусть $\varepsilon > 0$, $x > 0$ и $k \leq n$, а функция f удовлетворяет условиям А. Если последовательность $\{c_n\}$ такова, что

$$\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geq \varepsilon\} + \varphi(m) \leq \gamma < 1,$$

то при любых $x > 0$

$$\mathbb{P}\{\bar{X}_n(c_n) \geq 2x + \varepsilon\} \leq \frac{1}{1 - \gamma} \left(\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} \right).$$

Доказательство. Пусть $E_i = \{\bar{X}_{i-1}(c_n) < 2x + \varepsilon \leq |X_i(c_n)|\}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $E_i E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n E_i = \{\bar{X}_n(c_n) \geq 2x + \varepsilon\}$.

В силу свойства A_3 и (1)

$$|X_n(c_n) - X_k(c_n)| \leq \sum_{j=k+1}^{k+m} |Z_j(c_n)| + |Y_{k+m+1,n}(c_n)|,$$

так что при $k + m \leq n$

$$\{|X_k(c_n)| \geq 2x + \varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}, |Y_{k+m+1,n}(c_n)| < \varepsilon\} \subseteq \{|X_n(c_n)| \geq x\}$$

то есть

$$\{|X_n(c_n)| < x\} \subseteq \{|X_k(c_n)| < 2x + \varepsilon\} \cup \{|Y_{k+m+1,n}(c_n)| \geq \varepsilon\} \cup \left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\},$$

откуда

$$\{|X_n(c_n)| < x, E_k\} \subseteq \{|Y_{k+m+1,n}(c_n)| \geq \varepsilon, E_k\} \cup \left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}, E_k\right\}. \quad (2)$$

С помощью (2) и условия φ -перемешивания получаем

$$\mathbb{P}\{\bar{X}_n(c_n) \geq 2x + \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\} + \sum_{k=1}^k \mathbb{P}\{|X_k(c_n)| < x, E_k\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\} + \sum_{k=1}^k \mathbb{P}\{|Y_{k+m+1,n}(c_n)| \geq \varepsilon, E_k\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} \leq \\
&\leq \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\} + \left(\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geq \varepsilon\} + \varphi(m)\right) \sum_{k=1}^n \mathbb{P}\{E_k\} + \\
&+ \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} \leq \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\} + \gamma \mathbb{P}\{\bar{X}_n(c_n) \geq 2x + \varepsilon\} + \\
&\quad + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\}.
\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы. ■

Лемма 2. Если последовательность $\{c_n\}$ и $m > 0$ таковы,

$$\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geq \varepsilon\} + \varphi(m) \leq \gamma < 1,$$

то при любом $x > 0$

$$\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon\} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq x\} + \frac{1}{1-\gamma} \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $E_k = \{\bar{X}_{k-1}(c_n) < 2x + \varepsilon \leq |X_k(c_n)|\}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда $E_i E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{k=1}^n E_k = \{\bar{X}_n(c_n) \geq 2x + \varepsilon\}$. В силу свойства A_3 и (1)

$$|X_n(c_n)| \leq |X_{k-1}(c_n)| + \sum_{j=k}^{k+m} |Z_j(c_n)| + |Y_{k+m,n}(c_n)|,$$

откуда следует

$$\left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, E_k, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} \subseteq \{E_k, |Y_{k+m,n}(c_n)| \geq \varepsilon\}. \quad (3)$$

Аналогично выводится

$$\begin{aligned}
&\left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} \subseteq \\
&\subseteq \left\{\bar{X}_{n-m}(c_n) \geq 2x + \varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\},
\end{aligned}$$

следовательно

$$\begin{aligned}
&\left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} = \\
&= \left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, \bar{X}_{n-m}(c_n) \geq 2x + \varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\}. \quad (4)
\end{aligned}$$

С помощью (4) получаем $\mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon\} \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{P}\left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} = \\ &= \mathbb{P}\left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, \bar{X}_{n-m}(c_n) \geq 2x + \varepsilon, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} + \\ &+ \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} = \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\left\{|X_n(c_n)| \geq 3x + 2\varepsilon, E_k, \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| < \frac{x}{m}\right\} + \\ &+ \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из соотношений (3), (5) и условия φ -перемешивания следует

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_n(c_n) \geq 3x + 2\varepsilon\} &\leq \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\{E_k, |Y_{k+m,n}(c_n)| \geq \varepsilon\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} \leq \\ &\leq \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\} + \left(\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geq \varepsilon\} + \varphi(m)\right) \sum_{k=1}^{n-m} \mathbb{P}\{E_k\} = \\ &\leq \lambda \mathbb{P}\{\bar{X}_n(c_n) \geq 2x + \varepsilon\} + \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)| \geq \frac{x}{m}\right\}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения с помощью Леммы 1 выводим утверждение леммы. $\blacksquare$

Пусть последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\sigma_n^2 = \mathbb{E}S_n^2 \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. К последовательности $\{\xi_n\}$ применима центральная предельная теорема тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$ равномерно интегрируема. Существенный прогресс в предельных теоремах для последовательностей с φ -перемешиванием достигнут М. Пелиград в [2] на основе доказательства того, из равномерной интегрируемости $\{\sigma_n^{-2} \max_{1 \leq i \leq n} \xi_i^2\}$ следует равномерная интегрируемость $\{\sigma_n^{-2} S_n^2\}$.

Получим здесь аналогичный результат, где вместо сумм S_n участвуют функции $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$, удовлетворяющие условиям $A(g)$.

Теорема 1. Пусть функция f удовлетворяет условиям $A(g)$, $E|Z_1(c_n)|^p < \infty$, а последовательность $\{c_n\}$ и $m > 0$ таковы,

$$\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}\{|Y_j(c_n)| \geq \varepsilon\} + \varphi(m) \leq \gamma, \quad \frac{\gamma(3 + 2\varepsilon)^p}{1 - \gamma} < 1.$$

Тогда из равномерной интегрируемости последовательности $\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)|^p\right\}$ следует равномерная интегрируемость последовательности $\{|X_n(c_n)|^p\}$.

Доказательство. Если $E|Z_1(c_n)|^p < \infty$, то в силу (1) $E|X_n(c_n)|^p < \infty$. Имем

$$\mathbb{E}\{|\xi|^p, |\xi| \geq N\} = - \int_N^\infty x^p d\mathbb{P}\{|\xi| \geq x\} = N^p \mathbb{P}\{|\xi| \geq N\} + p \int_N^\infty x^{p-1} \mathbb{P}\{|\xi| \geq x\} dx.$$

В силу леммы 2 при $N \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geq (3+2\varepsilon)N\} &\leq (3+2\varepsilon)^p N^p \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq N(3+2\varepsilon)\} + \\ &+ p(3+2\varepsilon)^p \int_N^\infty x^{p-1} \mathbb{P}\{|X_n(c_n)| \geq 3x+2\varepsilon\} dx \leq \\ &\leq \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} \mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geq N\} + \\ &+ \frac{m^p(3+2\varepsilon)^p}{(1-\gamma)} \mathbb{E}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p, \max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)| \geq \frac{N}{m}\right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть последовательность $\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p\right\}$ равномерно интегрируема, то есть

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p, \max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)| \geq N\right\} = 0$$

и пусть

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geq N\}.$$

Из равномерной интегрируемости $\left\{\max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p\right\}$ следует

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p < \infty,$$

а из (6) при $N = 1$, $\tau = \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X_n(c_n)|^p &\leq (3+2\varepsilon)^p + \mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p, |X_n(c_n)| \geq (3+2\varepsilon)\} \leq (3+2\varepsilon)^p + \\ &+ \tau \mathbb{E}\{|X_n(c_n)|^p\} + \frac{m^p(3+2\varepsilon)^p}{(1-\gamma)} \sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p < \infty, \end{aligned} \quad (7)$$

так что $0 \leq R < \infty$, а из (6) вытекает $R \leq \tau R$, следовательно $R = 0$ и последовательность $\{|X_n(c_n)|^p\}$ равномерно интегрируема. ■

Покажем, как с помощью теоремы 2 можно получать оценки для моментов величин $X_n(c_n)$. Пусть $\mathbb{E}|Z_1(c_n)|^p < \infty$. Тогда в силу (6) и (7)

$$\mathbb{E}|X_n(c_n)|^p \leq A + B \mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq n} |Z_k(c_n)|^p, \quad (8)$$

где A и B не зависят от n , а если $\left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j(c_n)|^p \right\}$ равномерно интегрируема, то $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}|X_k(c_n)|^p < \infty$.

Будем говорить, что для функции f выполнено условие A_4 , если при любом $\lambda > 0$

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

В большинстве примеров, приводимых в [1], функции f удовлетворяют условию A_4 (в том числе так называемые симметрические калибровочные функции).

Если функция f удовлетворяет условиям $A(g)$ и A_4 , то из оценок (5) получаем следующий результат, обобщающий теорему 2 из [3] и лемму 18.5.1 из [4].

Теорема 2. Пусть функция f удовлетворяет условиям $A_1 - A_4$ и пусть $0 < q < p$, $\|Z_1\|_p = \mathbb{E}|Z_1|^p < \infty$. Тогда

$$\max_{1 \leq k \leq n} \|X_n\|_p \leq A \max_{1 \leq k \leq n} \|Y_n\|_q + B \max_{1 \leq k \leq n} \|Z_k\|_p$$

где A и B не зависят от n .

Доказательство. Пусть $0 < q < p$, а $\varepsilon > 0$, $m > 0$ и $\gamma > \varphi(m)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Обозначим $c_n = N \max_{1 \leq k \leq n} \|Y_k\|_q$, где $N > 0$ таково, что

$$\varphi(m) + \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}\{|Y_k| \geq \varepsilon c_n\} \leq \varphi(m) + \frac{\max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{E}|Y_k|^q}{\varepsilon^q c_n^q} \leq \gamma, \quad \frac{\gamma(3+2\varepsilon)^p}{1-\gamma} < 1.$$

Так как $\{c_n\}$ неубывающая последовательность, то при $k \leq n$ и при любом $x > 0$ из леммы 2 следует

$$\mathbb{P}\{|X_k| \geq (3x+2\varepsilon)c_n\} \leq \frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbb{P}\{|X_k| \geq xc_n\} + \frac{1}{1-\gamma} \mathbb{P}\left\{\max_{1 \leq j \leq n} |Z_j| \geq \frac{xc_n}{m}\right\}$$

откуда аналогично (8) выводим

$$\mathbb{E}|X_k|^p \leq Ac_n^p + B \mathbb{E} \max_{1 \leq j \leq n} |Z_j|^p, \quad k \leq n \quad (9)$$

где $A > 0$ и $B > 0$ не зависят от n . Из последнего соотношения следует утверждение теоремы. ■

Пусть $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $p > 2$, $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, $\sigma_n^2 = \mathbb{E}X_n^2 \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда σ_n является правильно меняющейся последовательностью порядка $1/2$ [4, теорема 18.2.3], которая при $n \rightarrow \infty$ эквивалентна некоторой неубывающей последовательности [5, с. 26], так что $\max_{1 \leq k \leq n} \sigma_k \sim \sigma_n$. Далее, при $p > 2$

$$\mathbb{E} \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|^p \leq n \mathbb{E}|\xi_1|^p = o(\sigma_n^p),$$

и из теоремы 2 следует неравенство И.А. Ибрагимова (лемма 18.5.1 из [4]): $\mathbb{E}|X_n|^p \leq C \sigma_n^p$, где $C > 0$ не зависит от n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринь А.Г. О предельных теоремах для функций от независимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 2(38). С. 5–15.
2. Peligrad M. An invariance principle for φ -mixing sequences // Ann. Probab. 1985. V. 13, No. 4, P. 1304–1312.
3. Гринь А.Г. О моментах симметрических функций зависимых случайных величин // Математические структуры и моделирование. 2016. № 4(40). С. 17–23.
4. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука. 1985. 141 с.

ON THE MOMENTS OF FUNCTIONS OF DEPENDENT RANDOM VARIABLES

A.G. Grin

Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Estimates for the moments of symmetric functions of variables from stationary sequences that satisfy the condition of uniformly strong mixing are obtained. These estimates generalize similar results existing by now.

Keywords: symmetric functions, uniformly strong mixing condition, norming sequences, estimates for the moments.

Дата поступления в редакцию: 11.10.2022

РЕАЛЬНОСТЬ ПРОШЛОГО: ЭМПИРИЧЕСКИЕ И ОНТОЛОГИЧЕСКИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Международный инновационный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Космологическое решение уравнений Эйнштейна, найденное Куртом Гёделем, продемонстрировало возможность существования временных петель в пространстве-времени, которые можно использовать для путешествия в Прошлое. С точки зрения абсолютной теории пространства-времени прошлое столь же реально, как и настоящее. В статье приводятся эмпирические и онтологические доказательства реальности прошлого с привлечением модальной логики.

Ключевые слова: реальность прошлого, временные петли, онтологические доказательства, модальные логики.

Теория абсолютного пространства-времени постулирует, что прошлое и будущее столь же *объективно реальны*, что и настоящее, т. е. они пребывают, существуют в бытии. Поэтому возможно переместиться из настоящего в прошлое. Механизм был открыт Куртом Гёделем [1]. Он нашёл решение уравнений Эйнштейна с временными петлями. На этих кривых, если событие A было раньше события B , то столь же справедливо утверждение, что B раньше A . С точки зрения человека, мировая линия которого в пространстве-времени есть временная петля, и с точки зрения его собственного времени, он передвигаясь в будущее оказывается в своём прошлом.

Прошлое каждого человека (коллектива людей, народа, человечества) не является чем-то постоянным, неизменным. Оно *расширяется* с каждым моментом прожитой жизни. Для человека события его прошлого обладают одним и тем же свойством $Z(-)$ – они завершены.

1. Парадокс дедушки и модальная логика

Открытие Куртом Гёделем замкнутых временных петель, которые он интерпретировал как возможный механизм переходов Прошлое, т. е. как машину времени, было встречено Эйнштейном настороженно.

С одной стороны он Эйнштейн пишет, что статья Гёделя является важным вкладом в общую теорию относительности (ОТО), «в особенности в анализ понятия времени. Проблема, о которой идёт речь, беспокоила меня ещё во времена создания общей теории относительности, но решить её мне так и не

удалось» [2, с. 313]. Тут следует вспомнить, Гёдель его друг и сосед по коттеджу, которому Эйнштейн помогал получить гражданство США. А с другой – деликатно интересуется, что «было бы интересно выяснить, не следует ли такие исключать из рассмотрения на основе физических соображений» [2, с. 314].

Фактически решение, найденное Гёделем, означает, что если все решения уравнений Эйнштейна соответствуют реальности, то путешествия в Прошлое возможны. Сам же Эйнштейн задаётся вопросом, а все ли решения полевых уравнений отвечают *реальности*?

Важно уточнить, что понимается под реальностью? Для Эйнштейна реальность – это мир, не зависящая от человеческого разума. Альтернатива реальности есть «мир как единое целое, зависящее от человека» [2, с. 130]. Истина, научная истина по Эйнштейну, есть утверждения, факты, не зависящие от человека:

«Я не могу доказать, что научную истину следует считать истиной, справедливой независимо от человечества, но в этом я твёрдо убеждён. <..> Во всяком случае, если есть реальность, не зависящая от человека, то должна быть истина, отвечающая этой реальности, и отрицание первой влечёт за собой отрицание последней» [2, с. 131].

Прошлое, достижимое машиной Гёделя, есть свойство решения уравнений Эйнштейна, т. е. есть научная истина, и, следовательно, относится к миру, не зависящему от человека, а поэтому оно реально.

Отрицать Прошлое Гёделя – значит отрицать, что все решения уравнений Эйнштейна суть научная истина, не зависящая от воли и желаний человека. За все время существования ОТО не появилось какое-либо правило, позволяющее исключать те или иные решения уравнений Эйнштейна. Мы должны признать, что все они говорят нам о том или ином возможном искривлении пространства-времени; все они говорят о *возможной* структуре *реальности*.

«Согласно ньютоновой системе, физическая реальность характеризуется понятиями пространства, времени, материальной точки и силы (взаимодействия материальных точек)» [2, с. 136]. Поэтому считая Прошлое реальностью, мы должны описать его в терминах пространства (где?), времени (когда?), материального взаимодействия (что это, из чего состоит, на что влияет и т. д.). Но при этом «речь идёт о том, чтобы заменить абстрактное и туманное «пространство» по возможности наиболее прямым и простым способом (твёрдое тело) чем-то, имеющим смысл с точки зрения эксперимента» [2, с. 572]. Иначе говоря, мы должны сообщить, как то, что в прошлом, можно «пощупать-потрогать».

Казалось, ответ прост: потрогать своего дедушку! А вы хорошо знаете, каким был дедушка до свадьбы с вашей бабушкой? Ведь вряд ли помните своего дедушку в деталях, каким видели его в своём детстве (тогда дедушка был в большей мере похож на того, кто был на свадьбе). Другими словами, тот, кого вы «трогаете», ваш ли это дедушка? Стоит также задуматься об обстоятельствах, при которых произойдёт встреча с «дедушкой» (где, при какой погоде и т. д. – масса *случайностей*, которые могут повлиять на задуманное вами).

Отправляясь в Прошлое к дедушке, мы плохо представляем во всех деталях своего дедушку¹. Мы говорим: «Он такой-то...» и тут же соглашаемся, что «возможно, он не совсем такой...». Мы не можем это ни доказать, ни опровергнуть.

А ведь мы сейчас фактически обсуждали важнейшую материальную составляющую физической реальности, которую приписали Прошлему. И единственное, что можем заключить, это то, что если Прошлое и реально, то оно расплывчато, нечётко, не восстановимо! И это либо его объективное, т. е. независимое от людей свойство, либо оно непрерывно меняется в угоду мыслящих о нем людей – не объективно. Противоречие. Противоречивые утверждения появляются всегда, когда вы пытаетесь изучить путешествия в прошлое. Но это противоречия, как правило, в рамках используемой нами классической двужначной логики. Другую логику, насколько известно автору, никто и не использовал.

А работа машины времени – переход в прошлое – это переход в некоторую реальность. Но это с классической точки зрения, известной как теория абсолютного пространства-времени [3], в котором Прошлое столь же реально, как и Настоящее. Другими словами, и Прошлое, и Настоящее, и Будущее всегда есть, всегда существуют, всегда наличествуют. В случае квантовой машины времени следует понимать, что величины, выступающие в основных законах квантовой механики, «не претендуют на то, чтобы описывать саму физическую реальность, они описывают только вероятность появления физической реальности» [2, с. 139]. Замечательное замечание Эйнштейна о сущности квантовой механики: квантовая машина времени оказывается в реальности Прошлого, которое оказывается либо той, либо иной, скорее всего наиболее вероятной, но и это не факт [3, 4]. Дедушка вроде бы мой, ну, или очень похож на моего. С какой-то вероятностью, он появляется,... но возможны сомнения, и выстрел не прозвучит. Парадокс дедушки – парадокс лишь с точки зрения классической логики, где «или... или... и третьего не дано».

«Цель учёного состоит в том, чтобы дать логически непротиворечивое описание природы» [2, с. 162].

Но прежде следует определиться, в рамках какой логики он будет давать своё описание? Нам нужно различать «необходимую истину» и «возможную (случайную) истину». Последнее отражает то, что мы оговаривали как «размытое», «вероятное». Иначе говоря, нам следует обратиться к модальным логикам.

¹Гёдель указывает иное противоречие: если я пришёл к себе прошлому, то могу сделать с собой прошлым что-то такое, чего, на моей памяти, как я знаю, со мной не случилось [14]. Удивляет, что Гёдель, один из разработчиков модальных логик, в данном случае придерживается логической однозначности (идеальная память, безусловное исполнение задуманного). Впрочем, его целью было привести аргументы в пользу иллюзорности объективного времени, в пользу идеалистической философии (Парменид, Кант и др.), отрицающей объективные изменения и рассматривающей изменения как иллюзию или видимость, обусловленную нашим особым способом восприятия. «Он использовал Эйнштейна, чтобы возродить вневременную концепцию реальности, которую исторически отстаивали такие мыслители, как Парменид и Мактаггарт» [15].

Что, по сути дела, позволяет благополучно разрешить парадокс дедушки: даже если путешественник в Прошлое настроен решительно – убью и всё! – в реальности, т. е. в мире, не зависящем от желаний людей и где живёт возможный дедушка, совсем не факт, что это ему удастся. Законы пространства-времени, где реализуется модальная логика (или лучше сказать, квантовая логика), более изощренны, нежели в классической реальности с двузначной логикой.

Так ли это? Соответствующий эксперимент с моделью квантовой машины времени, действующей по законам квантовой механики, провели Сет Ллойд и Стейнберг [4, 5]. Опуская детали устройства их модели квантовой машины времени, основанной на квантовой запутанности и квантовой телепортации, остановимся на результате. Серии экспериментов показали нечто интересное: каждый раз, когда путешествие во времени реализуется, пистолет не стреляет. И когда путешествие во времени не удаётся, пистолет работает. На языке дедушкиного парадокса это означает, что до тех пор, пока есть вероятность того, что ваш пистолет не выстрелит и убийство не удастся, путешествие во времени может реализоваться. «Вы можете навести пистолет, но не сможете нажать на курок, – прокомментировал эксперименты Ллойд».

Конечно, они действовали в рамках микрофизики, но эффекты квантовой механики самым неожиданным образом проявляются и в макрофизике. Просто на данный момент мы не имеем полноценной макроскопической квантовой механики, с помощью которой такие эффекты можно было бы досконально изучить.

Обращение для решения парадокса дедушки к квантовой механике естественно. Во-первых, это более общая теория, фактически включающая в себя классическую механику, как было показано еще в 1934 году А.Д. Александровым [6], а, во-вторых, ей присуща неклассическая, квантовая, а точнее, модальная логика [7].

Что мы ищем, рассуждая о машине времени? Истину. О которой Эйнштейн пишет:

«Нашу естественную точку зрения относительно существования истины, не зависящей от человека, нельзя ни объяснить, ни доказать, но в неё верят все, даже первобытные люди. Мы приписываем истине сверхчеловеческую объективность. Эта реальность, не зависящая от нашего существования, нашего опыта, нашего разума, необходима нам, хотя мы и не можем сказать, что она означает» [2, с. 132].

Обращение к модальной логике, это не только отказ от двузначности (см. например [8]). Семантика модальной логики в её наиболее распространённой форме семантики Крипке даёт ответ на вопрос Эйнштейна о природе сверхчеловеческой объективности истины. Семантика Крипке модальной логики рассматривает множество «возможных миров», одним из которых является наш мир. Истина необходима, т. е. обладает сверхчеловеческой объективностью, если она истинна во всех возможных мирах. Напротив, если утверждение оказывается

истинным в нашем мире, но ложным в другом мире, то оно является условной истиной, для нас она всего лишь возможная истина. Миры Крипке, а, точнее, миры Лейбница, в какой-то мере суть миры Эверетта.

Мы привели аргументы в пользу реальности Прошлого и в пользу привлечения модальной логики, которая разрешает парадокс дедушки и делает логически доступными путешествия в Прошлое.

2. Реальность пространства-времени

Пространство-время, как его определил Герман Минковский, состоит из *мировых точек*. Говоря о точках, Минковский фиксирует внимание на геометрии – всё обстоит также как у Евклида. У того все точки вместе составляют пространство, а у Минковского все точки образуют пространство-время, которое, по существу, ничем не отличается от пространства Евклида, разве что размерность не три, а четыре, да еще расстояние $d(A, B)$ между точками A и B измеряется по другой формуле: вместо

$$[d(A, B)]^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2$$

используем

$$[d(A, B)]^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (t_A - t_B)^2.$$

Это математика, а в чем физика? В том, что точки *мировые*, т. е. точки наделяются атрибутами места (x, y, z) и времени t . Более того, в «каждом месте и в каждый момент времени имеется некоторый объект для наблюдения. Чтобы не говорить о материи или электричестве, я буду пользоваться словом «субстанция» для обозначения этого объекта». Минковский уточняет: в каждой мировой точке имеется «субстанциональная точка». Другими словам, это *след материи*, формирующей пространство-время. Нет материи – нет пространства-времени.

Таким образом, мировая точка A – это (x_A, y_A, z_A, t_A) ². Совокупность мировых точек названа Минковским *Миром* (Welt) [10].

Обратим внимание на следующую фразу Минковского:

«Мы получаем тогда в качестве изображения, так сказать, вечного жизненного пути субстанциональной точки некоторую кривую в мире, мировую линию, точки которой можно однозначно отнести к параметру t во всем интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Весь мир представляется разложенным на такие мировые линии, и мне хотелось бы сразу отметить, что, по моему мнению, физические законы могли бы найти своё наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между этими мировыми линиями» [9, с. 168]

²В известном русском переводе доклада Минковского из [9] при определении мировой точки и Мира написано x, y, z вместо x, y, z, t .

Перевод с немецкого, на наш взгляд, неверный. Он несёт отпечаток отношения к Миру Минковского как к удобной абстрактной диаграмме изменений, происходящих в реальном пространстве.

Верный перевод первого предложения иной:

Тогда мы получаем кривую в мире как, так сказать, картину вечного течения жизни субстанциальной точки, мировую линию, точки которой можно чётко соотнести с параметром t от $-\infty$ до $+\infty$. Весь мир представляется разбитым на такие мировые линии, и я хотел бы сразу предвидеть, что, по моему мнению, физические законы должны найти своё наиболее совершенное выражение во взаимоотношениях между этими мировыми линиями.

Wir erhalten alsdann als Bild sozusagen für den ewigen Lebenslauf des substantiellen Punktes eine Kurve in der Welt, eine *Weltlinie*, deren Punkte sich eindeutig auf den Parameter t von $-\infty$ bis $+\infty$ beziehen lassen. Die ganze Welt erscheint aufgelöst in solche Weltlinien, und ich möchte sogleich vorwegnehmen, daß meiner Meinung nach die physikalischen Gesetze ihren vollkommensten Ausdruck als Wechselbeziehungen unter diesen Weltlinien finden dürften [10, S. 432].

При таком переводе, Минковский, как бы говорит нам: «Вы видите картину происходящего в объективно реальном пространстве-времени». И это утверждение более соответствует программному заявлению, сделанному в самом начале исторического доклада:

Дамы и господа! Наблюдения о пространстве и времени, которые я хотел бы развить для вас, выросли на экспериментальной физической почве. В этом их сила. Их тенденция радикальна. С этого часа пространство для себя и время для себя должны полностью погрузиться в тень, и лишь некий их союз должен сохранить независимость.

M. H.! Die Anachauingen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

И наконец, он вводит постулат абсолютного пространства-времени:

Поскольку смысл постулата сводится к тому, что только четырёхмерный мир в пространстве и времени дан явлениями, но проекция в пространстве и во времени все же может быть осуществлена с известной свободой, то я скорее назову это утверждение *постулатом абсолютного мира* (или постулата мира для краткости).

Indem der Sinn des Postulats wird, daß durch die Erscheinungen nur die in Raum und Zeit vierdimensionale Welt gegeben ist, aber die Projektion in Raum und in Zeit noch mit einer gewissen Freiheit vorgenommen werden kann, möchte ich dieser Behauptung eher den Namen Postulat der absoluten Welt (oder kurz Weltpostulat) geben.

Интересен комментарий Эйнштейна: «мир физических явлений, названный Минковским просто «миром», естественно, является четырёхмерным в пространственно-временном смысле. В самом деле, он складывается из отдельных событий, каждое из которых описывается четырьмя числами, а именно: тремя пространственными координатами x, y, z и временной координатой – значением времени t ».

Иначе говоря Мир Минковского – это мир физических явлений, он же есть *Мир событий*! [11, с. 558]. Почему событий? Да потому, что в мировой точке x, y, z, t находится, как писал Минковский, объект наблюдений, субстанциональная точка, и то что она собой представляет – это результат наблюдения, т. е. наблюдаемое событие, или просто событие.

В четырёхмерном Мире событий развёрнуты, размещены физические явления, а отнюдь не изображены подобно диаграмме для наглядности. В этой фразе отражены два борющиеся направления в физике. Для одного направления Мир событий, пространство-время, суть объективное бытие, объективная реальности, а для другого – наглядные картинки, диаграммы. Для последних (Лев Ландау, Джон Уилер и др.) объективная реальность это отдельно трёхмерное пространство и отдельно время, которые всего лишь как-то взаимодействуют.

К первому направлению принадлежат Герман Минковский, А.А. Фридман, Эйнштейн, А.Д. Александров, Дж. Синг, Н. Козырев, М.М. Лаврентьев, И.А. Еганова, В. Каллис и др.

Почему я написал о борьбе направлений? Да потому, что, например, в ходе «Мюнхенской религиозной беседы», собравшей 15 ноября 1940 года немецких физиков, было принята «Формула перемирия», один из пунктов которой гласил [8, с. 7]:

Четырёхмерное представление природных процессов является удобным математическим вспомогательным средством, но оно не означает введение нового представления о пространстве и времени.

Беседа шла под председательством начальника отдела по науке нацистского Союза доцентов.

2.1. Опытные данные в пользу объективной реальности пространства-времени

Эйнштейн с 1921 года становится решительным сторонником реальности пространства-времени. Об этом говорит его доклад в Принстоне 1921 года.

Он заявляет: «Представление о чем-либо происходящем есть всегда представление о четырёхмерном континууме, но понимание этого было затемнено абсолютным характером дорелятивистского времени. После отказа от абсолютности времени, и особенно одновременности, сразу проявилась четырёхмерность пространственно-временного представления» [13, с. 25].

Абсолютизация времени в дорелятивистскую эпоху по Эйнштейну – это результат того, что субъективное время, ощущаемое каждым человеком как отношение «раньше-позже», хорошо согласовывалась с тем, что наблюдалось во внешнем мире. А в силу одинаковости людей все наблюдали одно и тоже «раньше-позже» во внешних процессах. Кроме того, «переход от этого «субъективного» времени («Ich-Zeit») к понятию времени донаучного мышления связывается с возникновением идеи о существовании реального внешнего мира, независимого от субъекта» [13, с. 242].

Абсолютизации времени способствовало и то, что никто не передвигался с околосветовыми скоростями, и как следствие одновременность была абсолютной, т. е. никак не зависящей от наблюдений отдельных людей. Так объективизировалось, абсолютизировалась субъективное время, став абсолютным временем Ньютона.

Во-первых, «до создания теории относительности предполагалось, что понятие одновременности имеет абсолютный объективный смысл также и для событий, разделённых в пространстве.

Это предположение было опровергнуто открытием закона распространения света. В самом деле, если скорость света в пустоте оказывается величиной, не зависящей от выбора (или, другими словами, от состояния движения) инерциальной системы, к которой она относится, то нельзя придавать никакого абсолютного смысла понятию одновременности событий, разделённых пространственным расстоянием. Более того, в каждой инерциальной системе должно быть определено своё особое время. Если же для отсчёта не используется никакая система координат (инерциальная система), то не имеет смысла и утверждать, что события в разных точках пространства происходят одновременно. Именно вследствие этого пространство и время сливаются в единый четырёхмерный континуум» [13, с. 243].

Во-вторых, *экспериментально обнаруживаемые* относительность одновременности³, а также относительность времени жизни частицы в разных системах наблюдения (образовавшийся на высоте 15 км и живущий всего 2,3 мкс мюон по Ньютону пролетел бы всего 660 м, но в силу специальной теории относительности (СТО) он достигает поверхности Земли. По СТО его время жизни в системе отсчёта «поверхность Земли», благодаря его скорости близкой к скорости света, позволяет ему долететь до поверхности) продемонстрирова-

³Гёдель по этому поводу пишет, что относительность одновременности в значительной степени подразумевает относительность последовательности, т. е. что «утверждение, что события *A* и *B* одновременны (а для большого класса пар событий также утверждение, что *A* произошло раньше *B*) теряет свой объективный смысл, поскольку другой наблюдатель с той же претензией на правильность может утверждать, что *A* и *B* не одновременны (или что *B* произошло до *A*)» [14].

ли, что абсолютным характером, т. е. объективным реальным существованием обладает именно четырёхмерное пространство-время, Мир Минковского.

Поэтому Эйнштейн констатирует:

Физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Нет абсолютного (независимого от пространства отсчёта) соотношения в пространстве и нет абсолютного соотношения во времени, но есть абсолютное (независимое от пространства отсчёта) соотношение в пространстве и времени, как это будет видно из дальнейшего. Факт отсутствия разумного объективного способа разделить четырёхмерный континуум на трёхмерное пространство и одномерный временной континуум указывает, что законы природы примут наиболее удовлетворительный, с точки зрения логики, вид, будучи выражены как законы в четырёхмерном пространственно-временном континууме [13, с. 25].

Наконец, в-третьих, это солнечные эксперименты Н.А. Козырева [17], М.М. Лаврентьева, И.А. Егановой и др. [18] и Вальтера Каллиса [19,20]. Речь идёт о фиксации мгновенной связи между событиями пространства-времени, которые находятся на изотропных кривых. Такие события разделены нулевым интервалом $ds^2 = 0$. Эти события относятся как к Настоящему, так и к Прошлому и к Будущему. Первым такие наблюдения проводил Н.А. Козырев. По инициативе академика М.М. Лаврентьева эксперименты Козырева были повторены сотрудниками Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева. Было заявлено об обнаружении датчиками Козырева мгновенных сигналов как от одновременного с наблюдателем истинного положения Солнца, так и от будущего положения Солнца (ещё не состоявшееся событие), свет от которого должен прийти только в будущем, и от прошлого положения Солнца (уже состоявшееся событие).

Последняя публикация Вальтера Каллиса с И.А. Егановой в журнале «Метафизика» посвящена именно этой теме – теме мгновенных связей на расстоянии, природа которых во многом неясна, а заявление Козырева, что это проявление времени как физического процесса даже сейчас лежит за гранью современной научной физической парадигмы, хотя уже признана мгновенная связь посредством квантовых корреляций, т. е. несиловых связей.

Итак, события, из которых состоит пространство-время – это часть объективной реальности, того, что не зависит от человека, что существует независимо от него. И это опытный факт! Но в таком случае, моё прошлое на момент, когда я на своей мировой линии нахожусь в мировой точке A также объективно реально. Оно существует вне зависимости от моей воли, от моих действий.

Осталось изобрести способ перемещение из A к моему прошлому событию B , которое я пережил раньше события A .

В случае Вселенной, открытой Гёделем, достаточно следовать в будущее вдоль временной петли. Можно ускориться, разогнавшись до субсветовой ско-

рости (дело в том, что надо обойти всю Вселенную). Но никто экспериментально не подтверждает, что наша Вселенная устроена именно так, как в модели Гёделя. Следовательно, нужно найти универсальный способ перемещения в Прошлое. На сегодня есть несколько проектов, один из них, предложенный Кипом Торном, самый «раскрученный», увы, является ошибочным [16].

3. Пространство-время не совсем абсолютно

Ряд соображений заставляют нас предположить, что пространство-время, хотя объективно реально, однако *не совсем абсолютно* [21, с. 103], т. е. составляющие его события не всегда могут быть фиксированы как существующие в момент попытки их наблюдать. Отчасти это навеяно квантовой механикой с её вероятностной трактовкой наблюдаемого в эксперименте факта, отчасти парадоксом дедушки.

Вероятность можно воспринимать как *возможность*. Свойство объекта с вероятностью p могло наблюдаться, но не наблюдалось, т. е. была возможность, но факт наблюдения не был зафиксирован.

Допущение в языке протокола эксперимента слова «возможность» – это отход от классической однозначности «да–нет»; это отход от классической логики, это переход к модальной логике.

Следовательно, если мы хотим установить, доказать объективную реальность Прошлого чисто логическим путём, то прежде всего должны выяснить, какую логику будем использовать? Математики напридумывали более 400 логик!

Классическая двузначная логика явно не подходит для доказательства реальности Прошлого, поскольку если оно реально и туда попал маньяк, желающий убить дедушку, то чтобы избежать известного парадокса, последующего за убийством, нам придётся допускать возможность недопуска подобного злодеяния. Но уже использование только что слова «возможность» (либо какого-либо иного) говорит о логическом усложнении описания взаимодействия объектов в Прошлом и, соответственно, об усложнении доказательства реальности Прошлого. Иначе говоря, всё указывает на то, что мы должны оставить классическую логику при анализе Прошлого и выбрать иную, неклассическую логику.

Возьмём модальную логику $S5$ и попробуем с её помощью доказать реальность Прошлого.

Подчеркнём, что пространство-время в целом, как система, реально. Это экспериментальный факт. А вот отдельные события, рассматриваемые в рамках модальных логик, всего лишь возможны, т. е. возможно реальны.

4. Онтологическое доказательство бытия Прошлого

Итак, приведём логический аргумент в пользу реальности Прошлого, который можно назвать онтологическим доказательством (заключением, идущим от понятия к бытию) реальности, т. е. существования, или бытия Прошлого,

используя схему онтологического доказательства существования Бога, предложенного Гёделем в системе модальной логики S5 второго порядка [23].

4.1. Модальная логика S5 второго порядка

«Модальность – это выражение, описывающее «оттенок истинности» высказывания (уверенность, необходимость, доказуемость, осведомлённость,...) Чаще всего в суждениях используются модальности двух двойственных видов:

Модальность необходимого: необходимо, обязательно, всегда, должен, знает, доказуемо, $\Box$.

Модальность возможного: возможно, не исключено, иногда, имеет право, предполагает, непротиворечиво, $\Diamond$.

Таких модальностей можно предложить сколь угодно много, но есть способ единообразного определения смысла модальностей: в терминах формализованной модальной логики» [22].

Модальная логика – система S5 – строится за счёт расширения языка логики высказываний:

1. Дополнительный модальный знак: $\Box$.
2. В определение формул добавляется новая фраза:

если $\mathcal{A}$ – формула, то $\Box\mathcal{A}$ – формула.

Формула $\Box\mathcal{A}$ читается как «необходимо $\mathcal{A}$ ».

3. Дополнительные аксиомы:

$$\begin{aligned}\Box(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) &\Rightarrow (\Box\mathcal{A} \Rightarrow \Box\mathcal{B}) \\ \Box\mathcal{A} &\Rightarrow \mathcal{A} \\ \Box\mathcal{A} &\Rightarrow \Box(\Box\mathcal{A}) \\ \neg(\Box\mathcal{A}) &\Rightarrow \Box(\neg(\Box\mathcal{A})).\end{aligned}$$

4. Дополнительное правило вывода:

$$\frac{\mathcal{A}}{\Box\mathcal{A}} \quad (\text{Правило Гёделя}).$$

Модальность $\Diamond$ определяется через модальность $\Box$:

$$\Diamond\mathcal{A} = \neg(\Box(\neg\mathcal{A})).$$

5. Определение доказательства.

Пусть Γ – множество формул. Формула $\mathcal{A}$ выводима из множества гипотез Γ , если существует конечная последовательность формул

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \tag{1}$$

где каждая формула $\mathcal{A}_i$ является либо аксиомой, либо гипотезой, либо получена из предыдущих с помощью правил вывода и $\mathcal{A}_n$ – это формула $\mathcal{A}$.

Логика второго порядка – формальная система, расширяющая логику первого порядка возможностью квантификации общности ($\forall$) и существования ($\exists$) не только над переменными, но и над предикатами и функциональными символами. Логика второго порядка несводима к логике первого порядка. В свою очередь, она расширяется логикой высших порядков и теорией типов.

Таким образом, если $P(x_1, \dots, x_m)$ – предикат, x_i – объектные переменные, то имеют смысл, например, формулы

$$(\forall P)P(x_1, \dots, x_m), \quad (\exists P)P(x_1, \dots, x_m).$$

Логика второго порядка несводима к логике первого порядка. В свою очередь, она расширяется логикой высших порядков и теорией типов.

4.2. Доказательство реальности прошлого

Считаем, что Прошлое обладает свойством *завершённости* во всем, т. е. всё, что прошло, то завершено, свершилось. Прошлое есть сущее, все атрибуты которого обладают завершёностью. С точки зрения абсолютной теории пространства-времени – это очевидный факт, изменений нет, они иллюзорны.

Существование как реальность Прошлого в рамках модальной логики с учётом семантики Крипке есть высказывание

$$\Box \exists x P(x),$$

где $\Box$ – знак модальности «необходимо»/«обязательно», $P(x)$ – предикат «объект x есть прошлое»; нам понадобится ещё другая модальность – $\Diamond$ «возможное».

Введём предикат $Z(A)$ – «атрибут (свойство) A завершённое, свершившееся». В таком случае, перефразируя онтологическое доказательство Гёделя, мы имеем онтологическое доказательство существования, т. е. бытия, реальности Прошлого.

Аксиома 1. $(Z(A) \wedge \Box \forall x (A(x) \Rightarrow B(x))) \Rightarrow Z(B)$

(если свойство A завершённое, то завершённым будет и свойство B , вытекающее из A)

Аксиома 2. $\neg Z(A) \Leftrightarrow Z(\neg A)$

(свойство A не является завершённым только если завершено его отрицание)

Теорема 1. $Z(A) \Rightarrow \Diamond \exists x A(x)$

Определение 1. $P(x) \Leftrightarrow A(Z(A)) \Rightarrow A(x)$

(объект является Прошлым тогда и только тогда, когда имеет в качестве существенных свойств только те свойства, которые завершены)

Аксиома 3. $Z(P)$

(Прошное есть завершённое)

Теорема 2. $\Diamond \exists x P(x)$

(возможно Прошное x существует)

Определение 2. $A \text{ ess } x \Leftrightarrow A(x) \wedge \forall B(B(x) \Rightarrow \Box \forall y(A(y) \Rightarrow B(y)))$

(A является сущностью объекта x тогда и только тогда, когда x обладает свойством A и для каждого свойства B , которым x обладает, обязательно (необходимо) A влечёт за собой B), или (для свойства A быть сущностью объекта означает, что любое свойство B , присущее данному объекту, с необходимостью включается в свойство A)

Аксиома 4. $Z(A) \Rightarrow \Box Z(A)$

(если свойство завершённое, то оно обязательно завершённое)

Теорема 3. $P(x) \Rightarrow P \text{ ess } x$

(быть Прошлым – это существенное свойство, это сущность объекта x)

Определение 3. $E(x) \Leftrightarrow \forall A(A \text{ ess } x \Rightarrow \Box \exists y A(y))$

(объект обязательно существует ($E(x)$) тогда и только тогда, когда каждая сущность объекта обязательно экземплифицируется), или (необходимое существование () присуще объекту – это, когда из сущности объекта вытекает, что необходимо найдётся объект, обладающий этой сущностью).

Аксиома 5. $Z(E)$

(необходимое существование является завершённым свойством)

Теорема 4. $\Box \exists x P(x)$

(существование, бытие Прошлого необходимо/обязательно).

Другими словами, доказано, что если у нас есть понятие прошлого, то оно реально. Доказательство теоремы 4 стандартное, и было осуществлено Гёделем [23].

4.3. Сравнение логик. Топология на множестве модальных логик

Модальных логик много; их континуум. Поэтому каждая из них может предлагать своё доказательство бытия, реальности Прошлого. Чем отличаются предсказываемые ими «прошлые»? Чтобы ответить на этот вопрос, надо, видимо, научиться сравнивать две модальные логики. Континуальность множества модальных логик позволяет думать о введении топологии.

К сожалению, автор пока не знает, как это сделать, а в литературе не нашел что-либо подходящее для того, чтобы найти ответ на поставленный вопрос.

5. Заключение

Итак, Прошрое (объективно) реально. Парадокс дедушки был ложью, похожей на истину: дедушка не пришёл, маньяк-внук не нашёл нужный дом, они не узнали друг друга и т. д.... возможно, иногда, имеет право не открыть дверь и пр. Иными словами, модальная логика демонстрирует, что «то, что кажется противоречием, иногда можно развести по различным ситуациям и таким образом снять» [8]. Это цитата из короткой заметки П.И. Пивинской (Красноярск). Она в 2016 году, рассуждая по поводу «противоречий», сопровождающих теорию машины времени, задалась вопросом о логической возможности машины времени. В данной статье автор пошёл по пути использования логики для установления реальности Прошлого, подталкивая тем самым изобретателей к построению машины времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gödel K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // *Rev. Mod. Phys.* 1949. V. 21, No. 3. P. 447–450.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырех томах. Т. 4. М. : Наука, 1967.
3. Гуц А.К. Время, параллельные вселенные и машина времени. М. : УРСС, 2021.
4. Гуц А.К. Квантовая машина времени // *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*. 2019. № 3. С. 20–44.
5. Lloyd S., Maccone L., Garcia-Patron R., Giovannetti V., Shikano Y., Pirandola S., Rozema L.A., Darabi A., Soudagar Y., Shalm L.K., Steinberg A.M. Closed timelike curves via post-selection: theory and experimental demonstration // *Physical Review Letters*. 2011. V. 106, No. 4. P. 040403. URL: <https://arxiv.org/abs/1005.2219v1> (дата обращения: 28.11.2022).
6. Александров А.Д. Замечание о правилах коммутации и уравнении Шредингера // *Доклады АН СССР*. 1934. Т. 4, № 4. С. 198–202.
7. Васюков В.П. Квантовая логика. М. : ПЕР СЭ, 2005.
8. Пивинская П.И. Логическая возможность «машины времени» // *Научно-технический прогресс: актуальные и перспективные направления будущего: сборник материалов II Международной научно-практической конференции (8 апреля 2016 года), Том II. Кемерово : ЗапСибНЦ, 2016. 456 с. С. 302–305.*
9. Минковский Г. Пространство и время / Принцип относительности. Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973, 332 с.
10. Minkowski H. Raum und Zeit / *Gesammelte abhandlumen Von Hermann Minkowski*. Band 2. Leipzig und Beelin: Dbuck und Verlag Von B. G.Teubner, 1911.; *Physikalische Zeitschrift*. 1909. No. 10. S. 104.
11. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырёх томах. Т. 1. М. : Наука, 1965.
12. Каллис В. О tempora, о mores! «Мюнхенская религиозная беседа» – запрет на объективную модель физической реальности // *Дубна*. 2013. № 43 от 25 октября.
13. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в четырёх томах. Т. 2. М. : Наука, 1966.
14. Gödel K. A remark about the relationship between relativity theory and idealistic philosophy / *Collected works*. Vol. II. Oxford University Press, 1990.

15. Feser E. Godel and the unreality of time. URL: <https://edwardfeser.blogspot.com/2018/05/godel-and-unreality-of-time.html> (дата обращения: 28.11.2022).
16. Гуц А.К. Реальность и машина времени // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2013. № 3. С. 29–48.
17. Козырев Н.А. Астрономическое доказательство реальности четырёхмерной геометрии Минковского // Проявление космических факторов на Земле и звёздах. М., Л., 1980. С. 85–93.
18. Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О дистанционном воздействии звезд на резистор // ДАН СССР. 1990. Т. 314. № 2. С. 352–355. 19.
19. Еганова И., Каллис В. Солнечный эксперимент М.М. Лаврентьева. Явления пространства-времени. Saarbrücken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.
20. Еганова И.А., Каллис В. Экспериментальные исследования по выявлению априорной взаимосвязи 4-мерных событий и её свойств // Метафизика. 2021. № 4(42). С. 60–72.
21. Александров А.Д. Пространство и время в современной физике / Проблемы науки и позиция учёного. Л. : Наука, 1988.
22. Подымов В.В. Математическая логика. МГУ, 2018. URL: https://mk.cs.msu.ru/images/6/6f/Mathlog_318_lecture_14_15.pdf (дата обращения: 28.11.2022).
23. Пушкарский А.Г. Курт Гёдель и его онтологическое доказательство // РАЦИО.ru. 2014. № 13. С. 153–172.

THE REALITY OF THE PAST: EMPIRICAL AND ONTOLOGICAL PROOFS

A.K. Guts

Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

International Innovation University, Sochi, Russia

Abstract. The cosmological solution of Einstein's equations, found by Kurt Gödel, demonstrated the possibility of time loops in space-time that could be used to travel to the Past. From the point of view of the absolute theory of space-time, the past is as real as the present. The article provides empirical and ontological proofs of the reality of the past with the involvement of modal logic.

Keywords: reality of the past, time loops, ontological proofs, modal logics.

Дата поступления в редакцию: 30.11.2022

О КАТЕГОРИЯХ ГРУППОВЫХ АФФИННЫХ (Γ, λ) -СХЕМ И (Γ, λ) -КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР ХОПФА

С.Г. Казаков

аспирант, e-mail: kazakovsg@gmail.com

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

Аннотация. В работе рассматривается обобщение понятий (групповых) аффинных схем, а также (групповых) аффинных суперсхем как функторов, представимых $\mathbb{Z}_2$ -градуированными алгебрами, на случай произвольной градуировки.

Приведено обобщение известной теоремы об антиэквивалентности категорий групповых аффинных схем и коммутативных алгебр Хопфа.

Ключевые слова: коммутационный фактор, градуировка, симметрическая моноидальная категория, аффинная схема, супергруппа, алгебра Хопфа.

Введение

Пусть $\mathbb{k}$ – область целостности. Всюду далее под кольцом подразумевается коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, а под алгеброй над $\mathbb{k}$ – унитарная $\mathbb{k}$ -алгебра.

Для данной абелевой группы Γ через $\Gamma\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$ и $\Gamma\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ обозначаются категории Γ -градуированных $\mathbb{k}$ -модулей и Γ -градуированных (цветных) $\mathbb{k}$ -алгебр с сохраняющими градуировку гомоморфизмами [1, 4].

1. Групповые функторы из категорий с конечными копроизведениями

Пусть далее $\mathcal{C}$ – некоторая категория с конечными копроизведениями, а $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ – инициальный объект в ней.¹ В такой категории для любой пары объектов $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$ определён объект $A \sqcup B$ и пара морфизмов

$$\varkappa_{A,B}^1: A \rightarrow A \sqcup B, \quad \varkappa_{A,B}^2: B \rightarrow A \sqcup B,$$

удовлетворяющих универсальному свойству: для любой пары морфизмов $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow C$ в $\mathcal{C}$ существует и единственный морфизм, обозначаемый $f \nabla g: A \sqcup B \rightarrow C$ и называемый *диагональным копроизведением* f и g ,

¹ Такой объект обязательно существует [2, Ch. 2], [3, §3.5].

который делает коммутативной следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\kappa_{A,B}^1} & A \sqcup B & \xleftarrow{\kappa_{A,B}^2} & B \\ & \searrow f & \downarrow f \nabla g & \swarrow g & \\ & & C & & \end{array} .$$

Как следствие, для любых объектов $A, B, X, Y \in \text{Ob } \mathbf{C}$ и морфизмов $\varphi: A \rightarrow X$, $\psi: B \rightarrow Y$ существует единственный морфизм

$$\varphi \sqcup \psi: A \sqcup B \rightarrow X \sqcup Y,^2$$

называемый *копроизведением произведением* φ и ψ , для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \searrow \kappa_{A,B}^1 & & \swarrow \kappa_{X,Y}^1 \\ & A \sqcup B \xrightarrow{\varphi \sqcup \psi} X \sqcup Y & \\ \swarrow \kappa_{A,B}^2 & & \searrow \kappa_{X,Y}^2 \\ B & \xrightarrow{\psi} & Y \end{array} .$$

Рассматривая копроизведение $\sqcup$ как ковариантный бифунктор $\sqcup: \mathbf{C} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ на $\mathbf{C}$, на этой категории естественным образом определяют структуру симметрической моноидальной категории

$$\mathbf{C} = \langle \mathbf{C}, \sqcup, \alpha, I, \lambda, \rho, \sigma \rangle,$$

в которой функторные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \alpha: (- \sqcup -) \sqcup - &\xrightarrow{\sim} - \sqcup (- \sqcup -) \\ \lambda: I \sqcup - &\xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathbf{C}}, \quad \rho: - \sqcup I \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathbf{C}}, \\ \sigma: \sqcup &\xrightarrow{\sim} \sqcup \circ \tau,^3 \end{aligned}$$

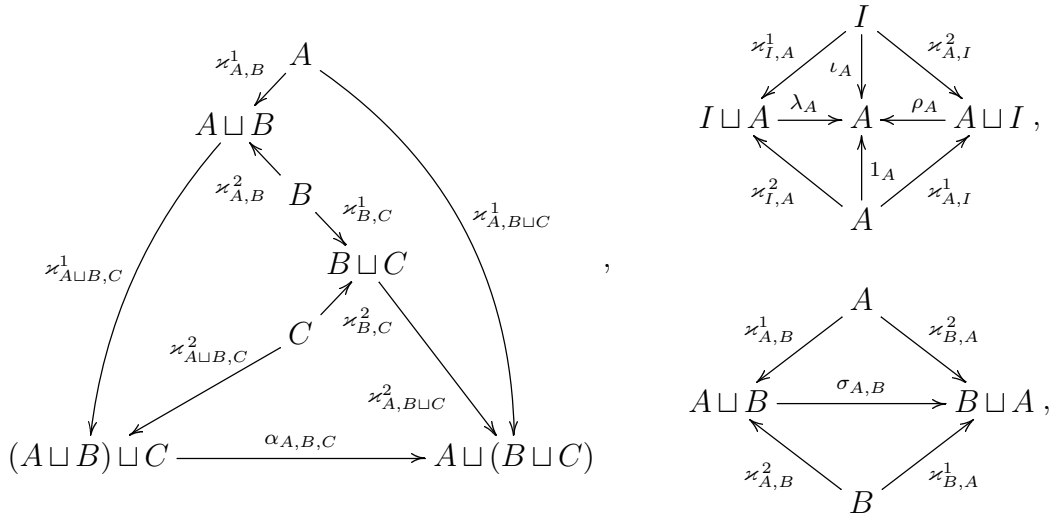
таковы, что для любых объектов $A, B, C \in \text{Ob } \mathbf{C}$ изоморфизмы

$$\begin{aligned} \alpha_{A,B,C}: (A \sqcup B) \sqcup C &\xrightarrow{\sim} A \sqcup (B \sqcup C) \\ \lambda_A: I \sqcup A &\xrightarrow{\sim} A, \quad \rho_A: A \sqcup I \xrightarrow{\sim} A \\ \sigma_{A,B}: A \sqcup B &\xrightarrow{\sim} B \sqcup A \end{aligned}$$

делают коммутативными диаграммы

² При этом $\varphi \sqcup \psi = (\kappa_{X,Y}^1 \circ \varphi) \nabla (\kappa_{X,Y}^2 \circ \psi)$, где ∇ соответствует паре $(\kappa_{A,B}^1, \kappa_{A,B}^2)$.

³ Здесь τ – переставляющий бифунктор на категории $\mathbf{C}$.



в которых $\iota_A: I \rightarrow A$ – единственный элемент множества $\text{Hom}(I, A)$.

Для $\mathbf{C}$, как и для любой другой симметрической моноидальной категории, определены понятия *группоида*, *когруппоида*, *бигруппоида*, *моноида*, *комоноида*, *бимоноида* и *моноида Хопфа* [7, Ch.1], [8, §2]. При этом, для каждого объекта $A \in \text{Ob} \mathbf{C}$ существует единственная структура моноида:

$$\langle A, 1_A \nabla 1_A, \iota_A \rangle,$$

в которой единичным морфизмом является $\iota_A: I \rightarrow A$, а умножением – диагональное копроизведение двух копий тождественного морфизма 1_A . Она примечательна тем, что с ней согласована любая структура комоноида

$$\langle A, \Delta, \varepsilon \rangle,$$

на A , определяемая морфизмами $\Delta: A \rightarrow A \sqcup A$ и $\varepsilon: A \rightarrow I$, для которых коммутативны *коассоциативная* и *коунитальные* диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (A \sqcup A) \sqcup A & \xrightarrow{\sim} & A \sqcup (A \sqcup A) \\ \Delta \sqcup 1_A \swarrow & & \nwarrow 1_A \sqcup \Delta \\ A \sqcup A & & A \sqcup A \\ \Delta \swarrow & & \nwarrow \Delta \\ A & & A \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} A \sqcup A & & \\ \varepsilon \sqcup 1_A \swarrow & & \nwarrow 1_A \sqcup \varepsilon \\ I \sqcup A & & A \sqcup I \\ \lambda_A^{-1} \swarrow & & \nwarrow \rho_A^{-1} \\ A & & A \end{array} \quad (1)$$

поскольку, ввиду определений морфизмов $1_A \nabla 1_A$ и ι_A , для Δ и ε бигруппоидная и биунитальная диаграммы заведомо коммутативны [8, §2].

Т. о., задание на объекте $A \in \text{Ob} \mathbf{C}$ структуры бимоноида определяется заданием морфизмов

$$\Delta: A \rightarrow A \sqcup A, \quad \varepsilon: A \rightarrow I,$$

делающих коммутативными диаграммы (1), а задание на $A \in \text{Ob} \mathbf{C}$ структуры моноида Хопфа – заданием морфизмов

$$\Delta: A \rightarrow A \sqcup A, \quad \varepsilon: A \rightarrow I, \quad S: A \rightarrow A$$

для которых помимо диаграмм (1) коммутативна ещё и *антиподная диаграмма*:

$$\begin{array}{ccccc}
 A \sqcup A & \xleftarrow{S \sqcup 1_A} & A \sqcup A & \xrightarrow{1_A \sqcup S} & A \sqcup A \\
 \downarrow 1_A \nabla 1_A & & \uparrow \Delta & & \downarrow 1_A \nabla 1_A \\
 & & A & & \\
 & & \downarrow \varepsilon & & \\
 A & \xleftarrow{\iota_A} & I & \xrightarrow{\iota_A} & A
 \end{array} \quad (2)$$

Напомним, что ковариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ из категории $\mathcal{C}$ в категорию множеств $\mathbf{Set}$ называется *представимым* объектом $A \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$, если существует функторный изоморфизм

$$\theta: h^A \xrightarrow{\sim} F,$$

называемый *представляющим изоморфизмом* [2, §3].

Пользуясь свойствами представимых функторов из категорий с конечными копроизведениями, получим справедливость следующего, аналогичного классическому, утверждения

Предложение 1. *Если*

$$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

– *две функтора, представимые объектами A и B с представляющими изоморфизмами*

$$\theta: h^A \xrightarrow{\sim} F, \quad \eta: h^B \xrightarrow{\sim} G,$$

то функтор

$$F \times G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

представим копроизведением $A \sqcup B$ с функторным изоморфизмом

$$\theta \boxtimes \eta: h^{A \sqcup B} \xrightarrow{\sim} F \times G,$$

таким, что, если $C \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ – ещё один объект $\mathcal{C}$, то

$$(\theta \boxtimes \eta)_C: \mathbf{Hom}(A \sqcup B, C) \ni \varphi \mapsto (\theta_C(\varphi \circ \kappa_{A,B}^1), \eta_C(\varphi \circ \kappa_{A,B}^2)) \in F(C) \times G(C).$$

Лемма Йонеды [2, 3] даёт связь между морфизмами представимых функторов и морфизмами их представляющих объектов. Так, если

$$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad G: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

два функтора, представимые объектами $A, B \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$:

$$\theta: h^A \xrightarrow{\sim} F, \quad \eta: h^B \xrightarrow{\sim} G,$$

⁴ Здесь $h^A \equiv \bar{h}_A: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ – т. н. ковариантный hom-функтор, соответствующий объекту $A \in \mathbf{Ob}\mathcal{C}$ [2, 3].

то определено биективное отображение

$$\Phi_{F,G}^{\theta,\eta}: \text{Hom}(F, G) \xrightarrow{\text{bi}} \text{Hom}(B, A),$$

такое, что, если $\varphi: F \rightarrow G$ – морфизм F в G , а $\xi: B \rightarrow A$ – гомоморфизм B в A , то

$$(\varphi: F \rightarrow G) \xleftrightarrow{\Phi_{F,G}^{\theta,\eta}} (\xi: B \rightarrow A) \quad ^5$$

тогда и только тогда, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \theta \uparrow & & \uparrow \eta \\ h^A & \xrightarrow{(\circ \xi)} & h^B \end{array} \quad (3)$$

т. е. имеет место равенство $\xi = (\eta^{-1} \circ \varphi \circ \theta)_A(1_A) = (\eta_A^{-1} \circ \varphi_A \circ \theta_A)(1_A)$.

Определение 1. Групповым функтором из категории $\mathcal{C}$ называется любой функтор $\mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ из этой категории в категорию групп $\mathbf{Grp}$. Каждому групповому функтору соответствует *подлежащий функтор*

$$F := \# \circ \mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set} \quad (4)$$

где $\#: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ – «забывающий» функтор на категории групп $\mathbf{Grp}$.

Определение 2. Групповой функтор $\mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ из категории $\mathcal{C}$ называют *представимым* объектом $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ [2, §3], если им представим его подлежащий функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, т. е. если существует функторный изоморфизм

$$\theta: h^A \xrightarrow{\sim} F,$$

называемый *представляющим изоморфизмом* $\mathbf{F}$.

Представимые функторы и представимые групповые функторы вместе с функторными морфизмами между ними составляют категории $\mathbf{R}\mathbf{Fun}(\mathcal{C})$ и соответственно $\mathbf{GR}\mathbf{Fun}(\mathcal{C})$

Групповой функтор $\mathbf{F}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ определяется заданием на его подлежащем функторе (4) групповой структуры посредством функторных морфизмов

$$m: F \times F \rightarrow F, \quad \epsilon: E \rightarrow F, \quad \iota: F \rightarrow F, \quad (5)$$

таких, что для каждого объекта A категории $\mathcal{C}$ отображения

$$m_A: F(A) \times F(A) \rightarrow F(A), \quad \epsilon_A: E(A) \rightarrow F(A), \quad \iota_A: F(A) \rightarrow F(A),$$

определяют на множестве $F(A)$ структуру группы $\mathbf{F}(A)$, т. е. для этих морфизмов в категории $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ коммутативны диаграммы:

⁵ Далее индексы “ θ, η ” и “ $_{F,G}$ ” будут опускаться.

$$\begin{array}{ccc}
(F \times F) \times F \xleftarrow{\approx} F \times (F \times F) & & \\
\downarrow m \times \text{Id}_F & & \downarrow \text{Id}_F \times m \\
F \times F & & F \times F \\
\downarrow m & & \downarrow m \\
F & & F
\end{array}, \quad
\begin{array}{ccc}
& F \times F & \\
\epsilon \times \text{Id}_F \nearrow & \downarrow m & \nwarrow \text{Id}_F \times \epsilon \\
E \times F & & F \times E \\
\downarrow \approx & & \downarrow \approx \\
F & & F
\end{array}, \quad (6)$$

$$\begin{array}{ccccc}
F \times F & \xleftarrow{\iota \times \text{Id}_F} & F \times F & \xrightarrow{\text{Id}_F \times \iota} & F \times F \\
\downarrow m & & \uparrow \delta & & \downarrow m \\
F & & F & & F \\
\downarrow \epsilon & & \downarrow \gamma & & \downarrow \epsilon \\
F & \xleftarrow{\epsilon} & E & \xrightarrow{\epsilon} & F
\end{array},$$

где

$$E: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

– т. н. «одноточечный» функтор на $\mathcal{C}$, определённый следующим образом:

$$E: \begin{cases} \text{Ob } \mathcal{C} \ni A \mapsto \{\bullet\} \in \text{Ob } \text{Set}; \\ \text{Mor } \mathcal{C} \ni (\varphi: A \rightarrow B) \mapsto (\text{id}_{\{\bullet\}}: \{\bullet\} \rightarrow \{\bullet\}) \in \text{Mor } \text{Set} \end{cases}$$

($\{\bullet\}$ – фиксированное одноточечное множество – терминальный объект в категории Set), представимый инициальным объектом $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ с представляющим изоморфизмом

$$\mathcal{E}: h^I \xrightarrow{\approx} E,$$

ставящим для каждого объекта $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ единственному элементу $\iota_A: I \rightarrow A$ множества $\text{Hom}(I, A)$ единственный элемент одноточечного множества $\{\bullet\}$:

$$\mathcal{E}_A: \text{Hom}(I, A) \ni \iota_A \mapsto \bullet \in \{\bullet\},$$

а

$$\delta: F \rightarrow F \times F, \quad \gamma: G \rightarrow E$$

– такие функторные морфизмы, что

$$\delta_A: F(A) \ni x \mapsto (x, x) \in F(A) \times F(A);$$

$$\gamma_A: F(A) \ni x \mapsto \bullet \in \{\bullet\} \equiv E(A).$$

Следующая теорема является, двойственной по отношению к Теореме 4.1 из [2, Ch. 4] и является следствием леммы Йонеды.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{C}$ – категория с конечными копроизведениями и инициальным объектом I . Задание на ковариантном функторе $F: \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, представимом $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$, групповой структуры посредством морфизмов (5), делающих коммутативными диаграммы (6), эквивалентно заданию на A структурами моноида Хопфа в $\mathcal{C}$ морфизмами

$$\Delta: A \rightarrow A \sqcup A, \quad \varepsilon: A \rightarrow I, \quad S: A \rightarrow A,$$

для которых коммутативны диаграммы (1) и (2).⁶

Более того, пусть $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ – ковариантные функторы, представимые $A, B \in \mathbf{Ob}\mathbf{C}$. Тогда любому (изо)морфизму $\varphi: F \rightarrow G$ соответствует (изо)морфизм $\xi: B \rightarrow A$, делающий коммутативной диаграмму (3), причём, если на F и G заданы групповые структуры: $\mathbf{F}, \mathbf{G}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, или, что то же заданы морфизмы

$$\begin{aligned} \Delta_A: A &\rightarrow A \sqcup A, & \varepsilon_A: A &\rightarrow I, & S_A: A &\rightarrow A, \\ \Delta_B: B &\rightarrow B \sqcup B, & \varepsilon_B: B &\rightarrow I, & S_B: B &\rightarrow B, \end{aligned}$$

определяющие на A и B структуры моноидов Хопфа в $\mathbf{C}$, то φ является функторным (изо)морфизмом $\mathbf{F}$ в $\mathbf{G}$: $\varphi: \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{G}$ – в том и только том случае, когда коммутативны следующие диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\xi} & A \\ \Delta_B \downarrow & & \downarrow \Delta_A \\ B \sqcup B & \xrightarrow{\xi \sqcup \xi} & A \sqcup A \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\xi} & A \\ \varepsilon_B \searrow & & \swarrow \varepsilon_A \\ & I & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\xi} & A \\ S_B \downarrow & & \downarrow S_A \\ B & \xrightarrow{\xi} & A \end{array}.$$

2. Категория (Γ, λ) -коммутативных $\mathbb{k}$ -алгебр

Определение 3 (см. [6],[9]). Пусть Γ – абелева группа. Коммутационным фактором на Γ со значениями в $\mathbb{k}$ называется отображение

$$\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*,$$

удовлетворяющее для любых $\mu, \nu, \gamma \in \Gamma$ следующим трём условиям:

$$\lambda(\mu, \nu)\lambda(\nu, \mu) = 1, \quad \lambda(\mu + \nu, \gamma) = \lambda(\mu, \gamma)\lambda(\nu, \gamma), \quad \lambda(\mu, \nu + \gamma) = \lambda(\mu, \nu)\lambda(\mu, \gamma).$$

Определение 4 (см. [1],[6],[9]). Пусть $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$ – коммутационный фактор на абелевой группе Γ со значениями в $\mathbb{k}$. Γ -градуированную $\mathbb{k}$ -алгебру

$$A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$$

⁶ Опуская индексы у Φ , отметим, что между функторными морфизмами, входящими в (6) и морморфизмами, входящими в (1) и (2) имеет место взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{aligned} (\delta: G &\rightarrow G \times G) &\xleftrightarrow{\Phi}& (1_A \nabla 1_A: A \sqcup A \rightarrow A), \\ (\gamma: G &\rightarrow E) &\xleftrightarrow{\Phi}& (\iota_A: I \rightarrow A), \\ (m: G &\times G \rightarrow G) &\xleftrightarrow{\Phi}& (\Delta: A \rightarrow A \sqcup A), \\ (\epsilon: E &\rightarrow G) &\xleftrightarrow{\Phi}& (\varepsilon: A \rightarrow I), \\ (\iota: G &\rightarrow G) &\xleftrightarrow{\Phi}& (S: A \rightarrow A). \end{aligned}$$

называют λ -коммукативной, если для произвольных $\mu, \nu \in \Gamma$ и $a \in A_\mu, b \in A_\nu$ имеет место равенство

$$ab = \lambda(\mu, \nu)ba.$$

λ -коммукативные Γ -градуированные $\mathbb{k}$ -алгебры будем также называть просто (Γ, λ) -коммукативными $\mathbb{k}$ -алгебрами.

Для данных $\mathbb{k}, \Gamma$ и коммутационного фактора $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$ класс всех (Γ, λ) -коммукативных $\mathbb{k}$ -алгебр вместе с сохраняющими градуировку гомоморфизмами составляет полную подкатегорию $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ категории Γ -градуированных $\mathbb{k}$ -алгебр $\Gamma\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$.

Понятие (Γ, λ) -коммукативной $\mathbb{k}$ -алгебры обобщает понятия коммукативной $\mathbb{k}$ -алгебры и суперкоммукативной $\mathbb{k}$ -супералгебры.

На тензорном произведении $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ двух Γ -градуированных $\mathbb{k}$ -модулей $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ и $N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma$ естественным образом определяется градуировка [1, 4]:

$$M \otimes_{\mathbb{k}} N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \bigoplus_{\substack{\mu, \nu \in \Gamma \\ \mu + \nu = \gamma}} M_\mu \otimes_{\mathbb{k}} N_\nu.$$

Если на абелевой группе Γ задан коммутационный фактор $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$, то на тензорном произведении $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ двух Γ -градуированных $\mathbb{k}$ -алгебр $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ можно задать [1] структуру Γ -градуированной $\mathbb{k}$ -алгебры, определив умножение как бинарную операцию

$$m: (A \otimes_{\mathbb{k}} B)^2 \rightarrow A \otimes_{\mathbb{k}} B,$$

удовлетворяющую на порождающих элементах $a \otimes_{\mathbb{k}} b, x \otimes_{\mathbb{k}} y, a \in A_\mu, b \in A_\nu, x \in B_\gamma, y \in B_\delta$ ($\mu, \nu, \gamma, \delta \in \Gamma$) равенству:

$$m(a \otimes_{\mathbb{k}} b, x \otimes_{\mathbb{k}} y) = \lambda(\nu, \gamma)ax \otimes_{\mathbb{k}} by.$$

В этом случае тензорное произведение $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ двух (Γ, λ) -коммукативных $\mathbb{k}$ -алгебр $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$ также является (Γ, λ) -коммукативной $\mathbb{k}$ -алгеброй, причём тензорное произведение $\otimes_{\mathbb{k}}$, как бифунктор, является копроизведением в категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ [1, 3].

На категории $\Gamma\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$ естественным образом определена структура моноидальной категории [3]. Более того, наличие коммутационного фактора $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$ позволяет расширить эту структуру до структуры симметрической моноидальной категории $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ [9], сплетающий функторный изоморфизм

$$\sigma: \otimes_{\mathbb{k}} \xrightarrow{\approx} \otimes_{\mathbb{k}} \circ \tau^7$$

⁷ τ – переставляющий бифунктор на $\Gamma\text{-Mod}_{\mathbb{k}}$.

которой на однородных порождающих элементах $x \otimes y, x \in M_\mu, y \in M_\nu (\mu, \nu \in \Gamma)$ тензорного произведения $M \otimes_{\mathbb{k}} N$ Γ -градуированных $\mathbb{k}$ -модулей $M = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} M_\gamma$ и $N = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} N_\gamma$ имеет вид:

$$\sigma_{M,N}(x \otimes y) = \lambda(\mu, \nu) y \otimes x$$

Для $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ стандартным образом определяются «моноидальные» аналоги таких алгебраических систем, как группоид, полугруппа, моноид, и т. п., а также двойственные им понятия и производные от них [7], [8, §2]. В частности, в ней определено понятие моноида Хопфа [7, §1.2].

Категория моноидов в $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ изоморфна категории $\Gamma\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$, а категория коммутативных моноидов в $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ – категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ (Γ, λ) -коммутативных $\mathbb{k}$ -алгебр. На ней, как на категории с конечными копроизведениями и инициальным объектом – $\mathbb{k}$ -алгеброй $\mathbb{k}$ с тривиальной градуировкой – задаётся естественная структура симметрической моноидальной категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$.

Аналогично, категория моноидов Хопфа в $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ изоморфна категории $\mathbf{Hopf}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$, объектами $\langle A, \Delta, \varepsilon, S \rangle$ которой являются Γ -градуированные $\mathbb{k}$ -алгебры $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ с заданными на них сохраняющими градуировку гомоморфизмами

$$\Delta: A \xrightarrow{\Gamma} A \otimes_{\mathbb{k}} A, \quad \varepsilon: A \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{k}, \quad S: A \xrightarrow{\Gamma} A,$$

для которых коммутативны следующие три диаграммы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & (A \otimes_{\mathbb{k}} A) \otimes_{\mathbb{k}} A \xrightarrow{\cong} A \otimes_{\mathbb{k}} (A \otimes_{\mathbb{k}} A) & & A \otimes_{\mathbb{k}} A & \\ \Delta \otimes \text{Id}_A \nearrow & & \text{Id}_A \otimes \Delta \nwarrow & \varepsilon \otimes \text{Id}_A \nwarrow & \text{Id}_A \otimes \varepsilon \nwarrow \\ A \otimes_{\mathbb{k}} A & & A \otimes_{\mathbb{k}} A & \mathbb{k} \otimes A & A \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k} \\ \Delta \nwarrow & & \Delta \nearrow & \cong \nwarrow & \cong \nwarrow \\ & A & & A & \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccccc} & S \otimes \text{Id}_A & & \text{Id}_A \otimes S & \\ & A \otimes_{\mathbb{k}} A \xleftarrow{\quad} A \otimes_{\mathbb{k}} A \xrightarrow{\quad} A \otimes_{\mathbb{k}} A & & & \\ \mu \downarrow & & \uparrow \Delta & & \downarrow \mu \\ A & \xleftarrow{\quad} \mathbb{k} \xrightarrow{\quad} A & & & \end{array} \end{array} \quad (7)$$

(где $\mu: A \otimes_{\mathbb{k}} A \xrightarrow{\Gamma} A$ и $\iota_{\mathbb{k}, A}: \mathbb{k} \xrightarrow{\Gamma} A$ – умножение в алгебре A , записанное через тензорное произведение, и канонический гомоморфизм $\mathbb{k}$ в A), а морфизмами из $\langle A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A \rangle$ в $\langle B, \Delta_B, \varepsilon_B, S_B \rangle$ – сохраняющие градуировку гомоморфизмы $h: A \xrightarrow{\Gamma} B$ Γ -градуированных $\mathbb{k}$ -алгебр, делающие коммутативными диаграммы:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A \otimes_{\mathbb{k}} A & \xrightarrow{h \otimes h} & B \otimes_{\mathbb{k}} B \\ \Delta_A \uparrow & & \uparrow \Delta_B \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ \varepsilon_A \searrow & & \swarrow \varepsilon_B \\ & \mathbb{k} & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ S_A \uparrow & & \uparrow S_B \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array} \end{array} \quad (8)$$

причём, полная подкатегория коммутативных моноидов Хопфа в $\mathbf{Mod}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ изоморфна полной подкатегории $\mathbf{Hopf}_{\mathbb{k}, c}^{\Gamma, \lambda}$ категории $\mathbf{Hopf}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$, образованной теми $\langle A, \Delta, \varepsilon, S \rangle$, в которых $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ – (Γ, λ) -коммутативные $\mathbb{k}$ -алгебры.

Определение 5. Для данного $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$ объекты категории $\mathbf{Hopf}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ будем называть (Γ, λ) -алгебрами Хопфа над $\mathbb{k}$, а объекты её полной подкатегории $\mathbf{Hopf}_{\mathbb{k}, c}^{\Gamma, \lambda}$ – λ -коммутативными (Γ, λ) -алгебрами Хопфа над $\mathbb{k}$ или просто (Γ, λ) -коммутативными алгебрами Хопфа над $\mathbb{k}$.

3. Аффинные (Γ, λ) -схемы и групповые аффинные (Γ, λ) -схемы

Пусть $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$ – коммутационный фактор на абелевой группе Γ .

Определение 6. Аффинной (Γ, λ) -схемой будем называть любой представимый (Γ, λ) -коммутативной $\mathbb{k}$ -алгеброй $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ ковариантный функтор

$$F: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Set},$$

из категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ в категорию множеств $\mathbf{Set}$, т. е. такой, что $\mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(A) \simeq F$, где $\mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(A) := h^A \equiv \bar{h}_A$ [2, §3].

При этом A будем называть *представляющей алгеброй* данной аффинной (Γ, λ) -схемы.

Тензорное произведение, являясь копроизведением в категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$, задаёт на ней естественную структуру симметрической моноидальной категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$, поэтому для $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ имеют место понятия и утверждения из §1.

Предложение 2. Если

$$G: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad H: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

– две аффинные (Γ, λ) -схемы, представимые (Γ, λ) -коммутативными $\mathbb{k}$ -алгебрами $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}$ с представляющими изоморфизмами

$$\theta: \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(A) \xrightarrow{\sim} G, \quad \eta: \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(B) \xrightarrow{\sim} H,$$

то функтор

$$G \times H: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

является аффинной (Γ, λ) -схемой, представимой тензорными произведением $A \otimes_{\mathbb{k}} B$ с функторным изоморфизмом

$$\theta \otimes \eta: \mathrm{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(A \otimes_{\mathbb{k}} B) \xrightarrow{\sim} G \times H,$$

таким, что, для любой (Γ, λ) -коммутативной $\mathbb{k}$ -алгебры $C = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$:

$$(\theta \otimes \eta)_C: \text{Hom}_\Gamma(A \otimes_\mathbb{k} B, C) \ni \varphi \mapsto (\theta_C(\varphi \circ \kappa_A), \eta_C(\varphi \circ \kappa_B)) \in G(C) \times H(C),$$

где $\kappa_A: A \xrightarrow[\Gamma]{} A \otimes_\mathbb{k} B$, $\kappa_B: B \xrightarrow[\Gamma]{} A \otimes_\mathbb{k} B$ – канонические гомоморфизмы A и B в их тензорное произведение $A \otimes_\mathbb{k} B$.

Лемма Йонеды даёт связь между морфизмами аффинных (Γ, λ) -схем и сохраняющими градуировку гомоморфизмами их представляющих алгебр: если

$$G: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_\mathbb{k} \rightarrow \text{Grp}, \quad H: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_\mathbb{k} \rightarrow \text{Grp}$$

две аффинные (Γ, λ) -схемы, представимые (Γ, λ) -коммутативными $\mathbb{k}$ -алгебрами $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$:

$$\theta: \text{Sp}_\mathbb{k}^{\Gamma, \lambda}(A) \xrightarrow{\sim} G, \quad \eta: \text{Sp}_\mathbb{k}^{\Gamma, \lambda}(B) \xrightarrow{\sim} H,$$

то определено взаимно-однозначное соответствие

$$\Phi_{G, H}^{\theta, \eta}: \text{Hom}(G, H) \xrightarrow{\text{bi}} \text{Hom}_\Gamma(B, A), \quad (\varphi: G \rightarrow H) \xleftrightarrow{\Phi_{G, H}^{\theta, \eta}} (\xi: B \xrightarrow[\Gamma]{} A)$$

между функторными морфизмами $\varphi: G \rightarrow H$ и сохраняющими градуировку гомоморфизмами $\xi: B \xrightarrow[\Gamma]{} A$, описываемое коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \theta \uparrow & & \uparrow \eta \\ \text{Sp}_\mathbb{k}^{\Gamma, \lambda}(A) & \xrightarrow[(\circ \xi)]{} & \text{Sp}_\mathbb{k}^{\Gamma, \lambda}(B) \end{array} \quad (9)$$

выражающей равенство $\xi = (\eta^{-1} \circ \varphi \circ \theta)_A(\text{Id}_A) = (\eta_A^{-1} \circ \varphi_A \circ \theta_A)(\text{Id}_A)$.

Определение 7. Групповой аффинной (Γ, λ) -схемой, представимой (Γ, λ) -коммутативной $\mathbb{k}$ -алгеброй $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ будем называть представимый ею групповой функтор

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_\mathbb{k} \rightarrow \text{Grp}, \quad (10)$$

из категории $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_\mathbb{k}$, т. е. такой, что

$$\text{Sp}_\mathbb{k}^{\Gamma, \lambda}(A) \approx \# \circ \mathbf{G},$$

где $\#: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ – «забывающий» функтор на категории групп Grp .

Иными словами, групповой функтор (10) является групповой аффинной (Γ, λ) -схемой, если аффинной (Γ, λ) -схемой является его подлежащий функтор

$$G = \# \circ \mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_\mathbb{k} \rightarrow \text{Set}. \quad (11)$$

При этом (Γ, λ) -коммутативная $\mathbb{k}$ -алгебра $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ называется *представляющей алгеброй* схемы (10).

Аффинные (Γ, λ) -схемы и групповые аффинные (Γ, λ) -схемы вместе с функторными морфизмами между ними составляют категории $\text{ASc}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ и $\text{GASc}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$.

Для различных абелевых групп Γ и коммутационных факторов $\lambda: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{k}^*$ на них аффинные (Γ, λ) -схемы и групповые аффинные (Γ, λ) -схемы будем называть просто *цветными аффинными схемами* и *цветными групповыми аффинными схемами* соответственно.

Групповая аффинная (Γ, λ) -схема (10) определяется заданием на соответствующей ей аффинной (Γ, λ) -схеме (11) групповой структуры посредством функторных морфизмов

$$m: G \times G \rightarrow G, \quad \epsilon: E \rightarrow G, \quad \iota: G \rightarrow G, \quad (12)$$

таких, что для каждой (Γ, λ) -коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ отображения

$$m_A: G(A) \times G(A) \rightarrow G(A), \quad \epsilon_A: E \rightarrow G(A), \quad \iota_A: G(A) \rightarrow G(A),$$

определяют на множестве $G(A)$ структуру группы $\mathbf{G}(A)$, т. е. для этих морфизмов в категории $\text{Set}^{(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}}$ коммутативны диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (G \times G) \times G & \xleftarrow{\approx} & G \times (G \times G) \\ m \times \text{Id}_G \swarrow & & \searrow \text{Id}_G \times m \\ G \times G & & G \times G \\ m \searrow & & \swarrow m \\ & G & \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & G \times G & \\ \epsilon \times \text{Id}_G \swarrow & & \searrow \text{Id}_G \times \epsilon \\ E \times G & \xrightarrow{m} & G \times E \\ \approx \searrow & & \swarrow \approx \\ & G & \end{array}, \quad (13)$$

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xleftarrow{\iota \times \text{Id}_G} & G \times G & \xrightarrow{\text{Id}_G \times \iota} & G \times G \\ m \downarrow & & \uparrow \delta & & \downarrow m \\ G & \xleftarrow{\epsilon} & E & \xrightarrow{\epsilon} & G \\ & & \downarrow \gamma & & \end{array},$$

где

$$E: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Set}$$

– «одноточечный» функтор на $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$:

$$E: \begin{cases} \text{Ob}((\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}) \ni A \mapsto \{\bullet\} \in \text{Ob Set}; \\ \text{Mor}((\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}) \ni (\varphi: A \xrightarrow{\Gamma} B) \mapsto (\text{id}_{\{\bullet\}}: \{\bullet\} \rightarrow \{\bullet\}) \in \text{Mor Set}, \end{cases}$$

представимый (Γ, λ) -коммутативной $\mathbb{k}$ -алгеброй $\mathbb{k}$, с представляющим изоморфизмом

$$\mathcal{E}: \text{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(\mathbb{k}) \xrightarrow{\approx} E,$$

компоненты которого для каждой $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma} \in \text{Ob}(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ имеют вид:

$$\mathcal{E}_A: \text{Hom}_{\Gamma}(\mathbb{k}, A) \ni (\iota_{\mathbb{k}, A}: \mathbb{k} \xrightarrow{\Gamma} A) \mapsto \bullet \in \{\bullet\},$$

а $\delta: G \rightarrow G \times G$ $\gamma: G \rightarrow E$ – такие функторные морфизмы, что

$$\delta_A: G(A) \ni x \mapsto (x, x) \in G(A) \times G(A), \quad \gamma_A: G(A) \ni x \mapsto \bullet \in \{\bullet\} \equiv E(A).$$

Как следствие, задание на аффинной (Γ, λ) -схеме G структуры групповой аффинной (Γ, λ) -схемы $\mathbf{G}$ эквивалентно заданию на представляющей её $\mathbb{k}$ -алгебре A структуры (Γ, λ) -коммутативной алгебры Хопфа $\mathbf{A} = \langle A, \Delta, \varepsilon, S \rangle$.

Воспользовавшись тем, что категория $(\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}}$ – категория с конечными копроизведениями и инициальным объектом $\mathbb{k}$, применяя теорему 1, получим следующее утверждение, являющееся аналогом соответствующих утверждений о категориях классических групповых аффинных схем и аффинных суперсхем.

Теорема 2. Категория $\text{GASc}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}$ групповых аффинных (Γ, λ) -схем антиэквивалентна категории $\text{Hopf}_{\mathbb{k}, c}^{\Gamma, \lambda}$ (Γ, λ) -коммутативных алгебр Хопфа над $\mathbb{k}$.

При этом задание на каждой аффинной (Γ, λ) -схеме

$$G: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Set},$$

представимой (Γ, λ) -коммутативной $\mathbb{k}$ -алгеброй $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ структуры групповой аффинной (Γ, λ) -схемы

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

посредством морфизмов (12), делающих коммутативными диаграммы (13), эквивалентно заданию сохраняющих градуировку гомоморфизмов

$$\Delta: A \xrightarrow{\Gamma} A \otimes_{\mathbb{k}} A, \quad \varepsilon: A \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{k}, \quad S: A \xrightarrow{\Gamma} A,$$

для которых коммутативны диаграммы (7).⁸

Более того, пусть $\varphi: G \rightarrow H$ – (изо)морфизм аффинных (Γ, λ) -схем

$$G: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}, \quad H: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp},$$

представимых (Γ, λ) -коммутативными $\mathbb{k}$ -алгебрами $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}$, которому соответствует (изоморфизм) гомоморфизм $\xi: B \xrightarrow{\Gamma} A$. Если на G и H заданы структуры групповых аффинных (Γ, λ) -схем

⁸ Между функторными морфизмами, входящими в (13) и гомоморфизмами, входящими в (7) имеет место следующее взаимно-однозначное соответствие:

$$\begin{aligned} (\delta: G \rightarrow G \times G) &\xleftrightarrow{\Phi} (\mu: A \otimes_{\mathbb{k}} A \xrightarrow{\Gamma} A), \\ (\gamma: G \rightarrow E) &\xleftrightarrow{\Phi} (\iota_{\mathbb{k}, A}: \mathbb{k} \xrightarrow{\Gamma} A), \\ (m: G \times G \rightarrow G) &\xleftrightarrow{\Phi} (\Delta: A \xrightarrow{\Gamma} A \otimes_{\mathbb{k}} A), \\ (\epsilon: E \rightarrow G) &\xleftrightarrow{\Phi} (\varepsilon: A \xrightarrow{\Gamma} \mathbb{k}), \\ (\iota: G \rightarrow G) &\xleftrightarrow{\Phi} (S: A \xrightarrow{\Gamma} A), \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}, \quad \mathbf{H}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

т. е. на A и B заданы структуры (Γ, λ) -коммутативных алгебр Хопфа

$$\mathbf{A} = \langle A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A \rangle, \quad \mathbf{B} = \langle B, \Delta_B, \varepsilon_B, S_B \rangle,$$

то φ является (изо)морфизмом $\mathbf{G}$ в $\mathbf{H}$: $\varphi: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$ тогда и только тогда, когда ξ является (изо)морфизмом $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$, т. е. делает коммутативными диаграммы (8).

Данная антиэквивалентность позволяет формулировать свойства групповых аффинных (Γ, λ) -схем в терминах их представляющих алгебр. При этом, если

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}, \quad \mathbf{H}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

– групповые аффинные (Γ, λ) -схемы, представимые (Γ, λ) -коммутативными $\mathbb{k}$ -алгебрами $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}$:

$$\theta: \text{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(A) \xrightarrow{\sim} G \quad (G = \# \circ \mathbf{G}), \quad \eta: \text{Sp}_{\mathbb{k}}^{\Gamma, \lambda}(B) \xrightarrow{\sim} H \quad (H = \# \circ \mathbf{H}),$$

то на A и B заданы структуры (Γ, λ) -коммутативных алгебр Хопфа

$$\mathbf{A} = \langle A, \Delta_A, \varepsilon_A, S_A \rangle, \quad \mathbf{B} = \langle B, \Delta_B, \varepsilon_B, S_B \rangle$$

и функторный морфизм $\varphi: G \rightarrow H$, которому по лемме Йонеды соответствует гомоморфизм $\xi: B \xrightarrow[\Gamma]{} A$, является морфизмом $\mathbf{G}$ в $\mathbf{H}$ (т. е. каждое отображение φ_A является гомоморфизмом групп: $\varphi_A: \mathbf{G}(A) \rightarrow \mathbf{H}(A)$), тогда и только тогда, когда $\xi: B \xrightarrow[\Gamma]{} A$ является морфизмом алгебры Хопфа $\mathbf{B}$ в алгебру Хопфа $\mathbf{A}$, причём

$$\varphi: \mathbf{G} \xrightarrow{\sim} \mathbf{H} \Leftrightarrow \xi: \mathbf{B} \xrightarrow[\Gamma]{\sim} \mathbf{A}.$$

Обобщая классические понятия из теории групповых аффинных схем [10], дадим следующие определения.

Определение 8. Групповую аффинную (Γ, λ) -схему $\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$ будем называть *алгебраической*, если она представима конечнопорождённой (Γ, λ) -коммутативной алгеброй.

Определение 9. Аффинную (Γ, λ) -схему

$$H: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Set}$$

будем называть *подсхемой* аффинной (Γ, λ) -схемы

$$G: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Set}$$

и писать $H \subseteq G$, если $H(A) \subseteq G(A)$ для любой (Γ, λ) -коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$.

Аналогично, групповую аффинную (Γ, λ) -схему

$$\mathbf{H}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

будем называть *подсхемой* групповой аффинной (Γ, λ) -схемы

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

и писать $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, если для любой (Γ, λ) -коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ группа $\mathbf{H}(A)$ является подгруппой группы $\mathbf{G}(A)$: $\mathbf{H}(A) \leq \mathbf{G}(A)$.

Определение 10. Морфизм $\varphi: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$ групповой аффинной (Γ, λ) -схемы

$$\mathbf{H}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

в групповую аффинную (Γ, λ) -схему

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

будем называть *вложением*: $\varphi: \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$, если для любой (Γ, λ) -коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ групповой гомоморфизм $\varphi_A: \mathbf{H}(A) \rightarrow \mathbf{G}(A)$ является алгебраическим вложением $\mathbf{H}(A)$ в $\mathbf{G}(A)$.

Определение 11. Подсхему $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ групповой аффинной (Γ, λ) -схемы

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp},$$

представимой (Γ, λ) -коммутативной алгебры $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$, будем называть *замкнутой подсхемой*, если она представима факторалгеброй алгебры A по некоторому её градуированному идеалу.

Определение 12. Вложение $\varphi: \mathbf{H} \hookrightarrow \mathbf{G}$ групповой аффинной (Γ, λ) -схемы

$$\mathbf{H}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

в групповую аффинную (Γ, λ) -схему

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

называется *замкнутым вложением*, если оно осуществляет изоморфизм $\mathbf{H}$ и некоторой замкнутой подсхемы $\mathbf{H}' \leq \mathbf{G}$ схемы $\mathbf{G}$.

На основе леммы Йонеды, при помощи рассуждений, аналогичных классическим [10, §2.1], легко получается следующее утверждение

Предложение 3. Пусть

$$\mathbf{G}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}, \quad \mathbf{H}: (\Gamma, \lambda)\text{-Alg}_{\mathbb{k}} \rightarrow \text{Grp}$$

– две групповые аффинные (Γ, λ) -схемы, представимые (Γ, λ) -коммутативными $\mathbb{k}$ -алгебрами $A = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{\gamma}$ и $B = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} B_{\gamma}$, а

$$\varphi: \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{G}$$

– морфизм $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$. Если морфизм $\xi: A \xrightarrow{\Gamma} B$ представляющих алгебр, соответствующий φ , сюръективен: $\xi: A \xrightarrow[\Gamma]{\text{sur}} B$, то φ – замкнутое вложение $\mathbf{H}$ в $\mathbf{G}$, а схема $\mathbf{H}$ изоморфна некоторой замкнутой подсхеме $\mathbf{H}'$ схемы $\mathbf{G}$, представимой факторалгеброй $A/\ker \xi$.

Благодарности

Автор выражает благодарность д.ф.-м.н., профессору А.Н. Зубкову за постановку задачи, советы и ценные замечания при работе над данной статьёй.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bourbaki N. Elements of Mathematics. Algebra I. New York : Springer-Verlag, 1989.
2. Bucur I., Deleanu A. Introduction to the theory of categories and functors. London, New York : John Wiley & Sons, 1968. [Перевод: Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М. : Мир, 1972.]
3. Mac Lane S. Categories for the working mathematician. New York : Springer-Verlag, 1998. [Перевод: Маклейн С. Категории для работающего математика. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.]
4. Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Methods of graded rings. New York : Springer-Verlag, 2004.
5. Dăscălescu S., Năstăsescu C., Raianu Ş. Hopf algebras. An introduction, New York, Basel : Marcel Dekker, Inc., 2001
6. Scheunert M. Generalized Lie algebra // Journal of Mathematical Physics. 1979. V. 20, No. 4. P. 712–720.
7. Aguiar M., Mahajan S. Monoidal functors, species and Hopf algebras. Providence, RI : AMS, 2010
8. Smith J.D.H. Quantum quasigroups and loops // Journal of Algebra. 2011. V. 456. P. 135–170
9. Covolo T., Michel J.-P. Determinants over graded-commutative algebras. A categorical viewpoint // L'Enseignement Mathématique. 2016. V. 62, No. 2. P. 361–420.
10. Waterhouse W.C. Introduction to affine group schemes. New York : Springer-Verlag, 1979

ON CATEGORIES OF AFFINE GROUP (Γ, λ) -SCEMES AND (Γ, λ) -COMMUTATIVE HOPF ALGEBRAS

S.G. Kazakov

PhD student, e-mail: kazakovsg@gmail.com

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. In the paper we consider the generalization of the concepts of (group) affine schemes and (group) affine superschemes as a representable by $\mathbb{Z}_2$ -graded algebras to the case of arbitrary grading.

A generalization of the well-known theorem on the anti-equivalence of categories of group affine schemes and commutative Hopf algebras is given

Keywords: commutation factor, grading, affine scheme, symmetric monoidal category, supergroups, Hopf algebra.

Дата поступления в редакцию: 23.10.2022

ANALYSIS OF VORTEX-INDUCED FORCES ON THE GROUP OF SUBSEA STRUCTURES IN PROXIMITY OF EQUIPMENT AT $Re=3900$

H.F. Annapeh¹

Laborant, Laboratory of Vibration and Hydrodynamics Modelling,
e-mail: kinghenry939@gmail.com

V.A. Kurushina^{1,2}

Ph.D. (Eng.), Head of Laboratory of Vibration and Hydrodynamics Modelling; Research
Associate, e-mail: v.kurushina@outlook.com

¹Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

²Newcastle University, Newcastle upon Tyne, United Kingdom

Abstract. Fluctuations of fluid forces associated with the vortex formation process are evaluated in this work for a group of subsea pipelines, placed in proximity of a larger piece of the subsea equipment and subjected to uniform and non-uniform flows. The computational fluid dynamics (CFD) simulations are performed for the average Reynolds number of 3900 with the $k-\omega$ SST turbulence model. Three different positions for the smaller staggered cylinders are considered, and the studied flow profiles are the uniform, linearly sheared and parabolic sheared flows. Simulation results include time histories of the hydrodynamic coefficients, FFT results, pressure on the smaller structures, velocity fields. Results for the parabolic sheared flow in the cases considered show an increase of mean drag coefficients, increase of amplitudes of the fluctuating drag and lift coefficients compared to values observed for the uniform flow and linearly sheared flow.

Keywords: vortex-induced forces, uniform flow, sheared flow, staggered cylinders, subsea pipelines, hydrodynamic coefficients.

1. Introduction

Vortex-induced forces contribute substantially to the fatigue damage and shortening the operational lifespan of slender subsea structures, including pipelines and risers conveying oil and gas from the seabed to the sea surface. Extracting the natural resources in deep waters implies an increased complexity of installations and repairs, partly due to the challenge of predicting correctly the hydrodynamic loads across long spans of structures suspended in medium and subject to various flows.

The well-known review work [1] studied both the flow over a single circular structure and the flow around two identical circular cylinders in tandem. This

study identified three flow regimes based on the center-to-center spacing ratio L/D (where L is the distance between centers of cylinders and D is the cylinder diameter). This work identified three main vortex shedding regimes around tandem structures, starting with the extended-body regime at $1.0 < L/D < 1.8$, where the wakes of two structures merge due to the structural proximity and lead to the formation of a single vortex street. The reattachment regime at $1.8 < L/D < 3.8$ was revealed by observing the shear layers detaching from the upstream cylinder and reattaching to the face of the downstream cylinder. In this case, the vortex shedding occurs only in the wake of the downstream cylinder. The co-shedding regime, where two separate vortex streets were forming, was observed at $L/D > 3.8$. This work laid a strong foundation for future investigations for the flow over a group of structures.

The method of computational fluid dynamics (CFD) is one of the main approaches to numerical simulations of the vortex formation process, where estimates of the pressure and fluid forces fluctuations are required. This method provides the maximum results accuracy if the approach of direct numerical simulations (DNS) is taken. For turbulence simulations at a high Reynolds number (Re), methods of large eddy simulations (LES) and Reynolds-averaged Navier-Stokes simulations (RANS) are often recommended in order to simplify the turbulent pulsations and improve the time efficiency. The work [2] studied the applicability of LES for high Reynolds number flows over a circular cylinder. It is worth noting numerical investigations using three-dimensional DNS and LES for a flow around a circular cylinder at Reynolds numbers of $Re = 60-1000$ in [3] and simulations on two tandem circular cylinders at subcritical Reynolds numbers in [4]. It is also worth noting the experimental studies in [5] for two staggered cylinders in turbulent flow, in [6, 7] - for three and four flexible cylinders and in [8] - for four squared cylinders at low Reynolds numbers.

Following the published results, the present work attempts to consider a flow over a group of stationary circular structures arranged in proximity to a larger structure, which would correspond to a realistic scenario of fluid loads and the vortex formation for a system of subsea structures. The aim of this work is to investigate the hydrodynamic coefficients, pressure distribution and vortex shedding patterns when three identical staggered stationary circular cylinders are subjected to uniform, linearly sheared and parabolic sheared flow at a Reynolds number of 3900, using the CFD RANS approach.

This paper consists of the following sections. Section 1 provides a brief theoretical background on the topic. Section 2 gives an overview of the numerical method and considered cases. Section 3 shows results of this study, and section 4 provides conclusions for this work.

2. Numerical model

A system of three identical staggered stationary circular structures of diameter $d = 0.3$ m, representing an array of subsea pipelines, is considered in this study in proximity to a larger object. This larger piece of the subsea equipment is

simplified to a cylinder of a squared cross-section with a side equal to $D = 5d$. The full system of structures is considered in a rectangular fluid domain of the size of $30D \times 16D$, showed in Fig. 1(a). Computational fluid dynamics (CFD) simulations are performed in this work for three staggered arrangements of cylinders, where the group of three smaller structures has three different positions relatively the larger object, as illustrated in Figs 1(a)-(c): with the cylinder closest to the squared structure located on the level of the upstream edge, centered relatively the larger structure and centered relatively its' downstream edge. Distance between circular structures is assumed equal to L , with the $L/D = 0.6$. The same distance of L from the side of the squared cylinder to the centre of the closest smaller cylinder is assumed the same for all considered cases. The distance from the squared cylinder to the domain border is $G = 20d$ in the performed simulations. The flow is entering the domain from the inlet (left) boundary, the periodic and shadow conditions are used for the top and bottom boundary, and the right boundary is the outlet.

Nine cases in total are considered in this work, with three cases for each inlet flow type. The uniform flow of the Reynolds number 3900 is simulated in Cases 1, 2 and 3, corresponding to the illustrations in Figs 1(a)-1(c), where the position of the circular structures is varied in alignment with the squared cylinder. Cases 4, 5, 6 represent the same structural arrangements as in Cases 1, 2, 3, but subjected to linearly sheared flow, and the Case 6 is displayed in Fig. 1(d). The linearly sheared flow is defined with respect to the vertical coordinate y along the inlet, where $y = 0$ corresponds to the centre of the inlet side of the domain. The linearly sheared flow velocity $U(y)$ is defined based on the averaged flow velocity U_c corresponding to the $Re = 3900$ at the inlet central point:

$$U(y) = U_c - By, \quad (1)$$

where the gradient used is $B = 0.022 \text{ s}^{-1}$, and the maximum flow velocity corresponds to the bottom boundary, while the minimum flow velocity corresponds to the top boundary.

Cases 7, 8, 9 are designed in a similar manner: structural arrangements in Cases 1, 2, 3 are subjected to the parabolic sheared flow, and Case 9 is illustrated in Fig. 1(e). The velocity of the parabolic flow is defined for the inlet boundary using the total length of inlet $h = 16D$:

$$U(y) = U_c \left(1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right), \quad (2)$$

where the maximum flow velocity corresponding to the $Re = 3900$ is on the domain centreline.

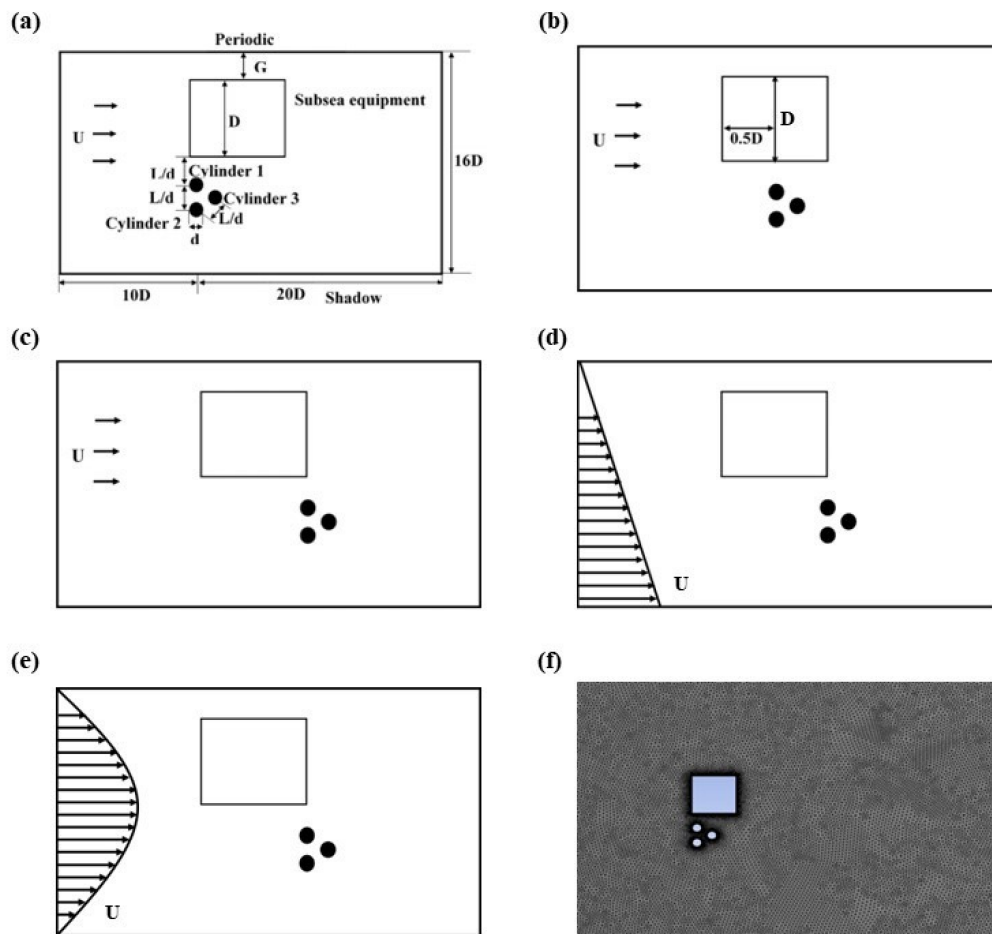


Figure 1. Computational domain for the considered cases: (a) Case 1 with staggered cylinders in uniform flow placed at the beginning of the square cylinder; (b) Case 2 with staggered cylinders in uniform flow placed exactly at the middle of the square cylinder; (c) Case 3 with staggered cylinders in uniform flow placed at the end of the square cylinder; (d) Case 6 with staggered cylinders in linearly sheared flow; (e) Case 9 with staggered cylinders in parabolic sheared flow; (f) Mesh of the computational domain for Cases 1, 4, 7.

Table 1: Mesh independence test results for $Re = 3900$

Cases	C_{D0}	Number of cells	y^+
Current study			
Mesh 1	0.87	31 297	0.0133
Mesh 2	0.91	53 951	0.0132
Mesh 3	0.93	86 637	0.0131
Mesh 4	0.93	153 227	0.0131
Published data			

LES [9]	0.92	—	—
Experiments [10]	0.98	—	—
VMS-LES [11]	0.99	—	—
LES [12]	0.98	—	—

Table 2: Simulation results

Cases	Hydrodynamic coefficients				
	C_{D0}	C_{D0}^{fl}	C_L	Dominant frequency, Hz	
				C_D	C_L
Uniform flow					
Cylinder 1					
Case 1	0.52	0.13	0.08	0.0015	0.0140
Case 2	0.47	0.12	0.02	0.0035	0.0125
Case 3	0.43	0.11	0.10	0.0020	0.0125
Cylinder 2					
Case 1	0.46	0.10	0.09	0.0015	0.0125
Case 2	0.42	0.11	0.05	0.0010	0.0125
Case 3	0.38	0.07	0.04	0.0020	0.0110
Cylinder 3					
Case 1	0.43	0.28	0.65	0.0015	0.006
Case 2	0.33	0.18	0.47	0.0125	0.004
Case 3	0.31	0.15	0.43	0.0070	0.003
Linearly sheared flow					
Cylinder 1					
Case 4	0.50	0.12	0.05	0.0020	0.0145
Case 5	0.43	0.15	0.03	0.0005	0.0125
Case 6	0.41	0.11	0.05	0.0035	0.1250
Cylinder 2					
Case 4	0.44	0.08	0.06	0.0050	0.0130
Case 5	0.39	0.12	0.04	0.0125	0.0120
Case 6	0.38	0.08	0.04	0.0010	0.0120
Cylinder 3					
Continued on next page					

Cases	Hydrodynamic coefficients				
	C_{D0}	C_{D0}^{fl}	C_L	Dominant frequency, Hz	
				C_D	C_L
Case 4	0.43	0.28	0.64	0.0100	0.0050
Case 5	0.32	0.37	0.55	0.0125	0.0045
Case 6	0.34	0.30	0.53	0.0045	0.0040
Cases	Hydrodynamic coefficients				
	C_{D0}	C_{D0}^{fl}	C_L	Dominant frequency, Hz	
				C_D	C_L
Parabolic flow					
Cylinder 1					
Case 7	0.81	0.26	0.12	0.0030	0.0090
Case 8	0.71	0.25	0.04	0.0025	0.0080
Case 9	0.67	0.21	0.12	0.0080	0.0075
Cylinder 2					
Case 7	0.71	0.25	0.22	0.0090	0.0085
Case 8	0.64	0.09	0.13	0.0085	0.0080
Case 9	0.60	0.12	0.12	0.0075	0.0075
Cylinder 3					
Case 7	0.66	0.44	1.15	0.0095	0.0030
Case 8	0.49	0.39	0.78	0.0080	0.0025
Case 9	0.48	0.37	0.73	0.0075	0.0030

Simulations are performed using the 2D incompressible Navier-Stokes system of equations, $k-\omega$ SST turbulence model, PISO algorithm and the time step of 0.1 s. The triangular grid is used for simulation purposes, and the results for the mean drag coefficient C_{D0} , the fluctuating drag coefficient C_D^{fl} and the lift coefficient C_L are reported in the next section. Here, the total drag coefficient obtained during the simulations is $C_D = C_{D0} + C_D^{fl}$. The mesh independence test results are reported in Table 1 for the uniform flow of the Reynolds number of 3900 and the mesh shown in Fig. 1(f). Comparison with the results for the mean drag coefficient C_{D0} ensures a sufficiently accurate match to the values reported in [9–12]. Mesh 3 from Table 1 is selected for all calculations in this work.

3. Results and discussion

The summary of results obtained in this study for the nine cases is given in Table 2, and time histories of the fluctuating drag and lift coefficients together

with the corresponding FFT records are displayed in Figs 2-10.

The uniform flow simulations, illustrated in Figs 2-4, indicate a progressive decrease in the mean drag coefficient on each cylinder for all three cases, with the cylinder 1 experiencing the highest mean drag coefficient of about 0.52, as shown in Fig. 2. In all the three considered cases, the cylinder 3 experiences the least mean drag coefficient. Cylinder 3, placed downstream in the array, experiences the highest fluctuating drag coefficient and the maximum amplitude of lift coefficient in three cases considered. Low frequency fluctuations of fluid forces are indicated by results in Table 2, with clearly identified dominant frequencies. Stable oscillations observed after 500 s in Case 1, after 1500 s in Case 2 and after 300 s in Case 3.

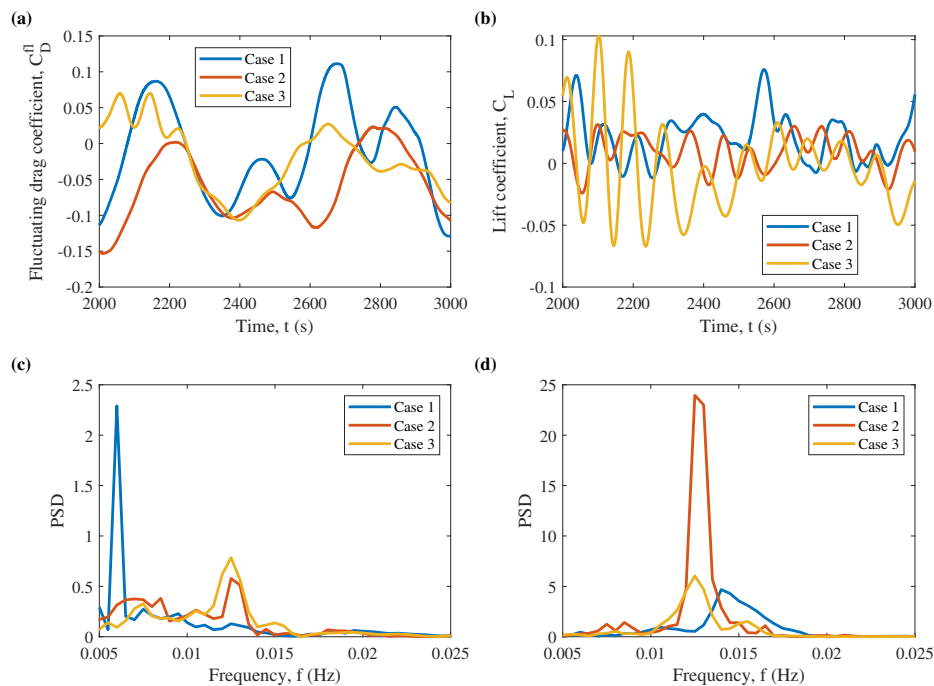


Figure 2. Fluid force coefficients for cylinder 1 immersed in the uniform flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

For the linearly sheared flow, illustrated in Figs 5-7, there is a gradual decrease in the mean drag coefficient acting on each circular cylinder from Case 4 to 6. The cylinder 1, as shown in Fig. 5, experiences the highest mean drag coefficient in all three considered cases, and the cylinder 3 experiences the least mean drag coefficient. The highest fluctuating drag coefficient and the maximum amplitude of the lift coefficient signal is experienced by cylinder 3 in all the three considered cases, as appears in Fig. 7. Results for the linearly sheared current also confirm the low frequency fluctuations of fluid forces, experienced by all structures. Fluctuating drag coefficient signal for cylinder 3 demonstrates multiple frequencies and generally higher complexity of the signal than for other structures. The average drag coefficient acting on each cylinder in the uniform flow is generally higher than in the linearly sheared flow. The fluctuating drag coefficient for the linearly

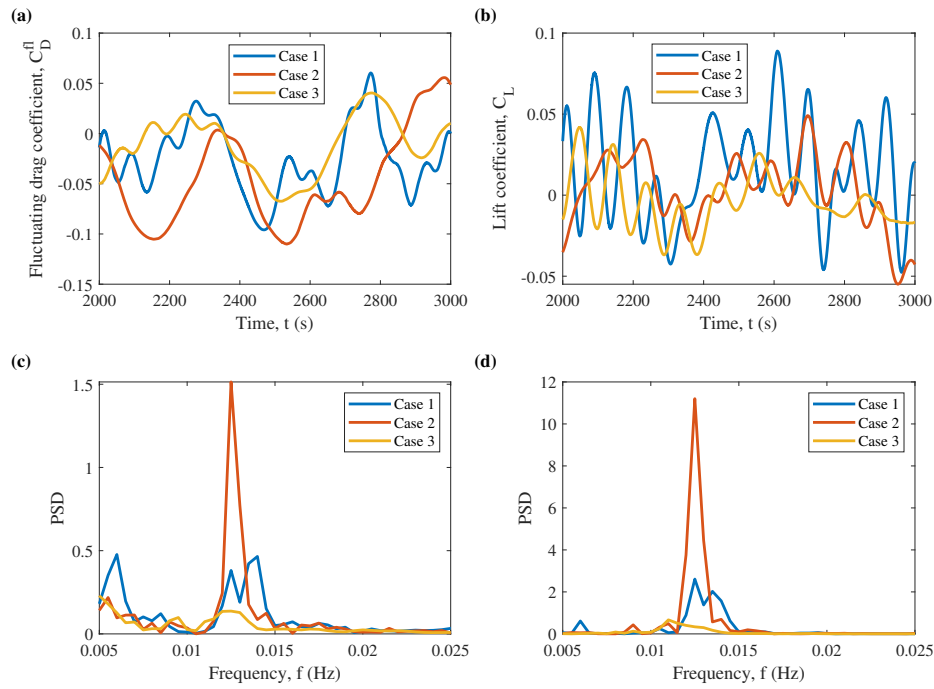


Figure 3. Fluid force coefficients for cylinder 2 immersed in the uniform flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

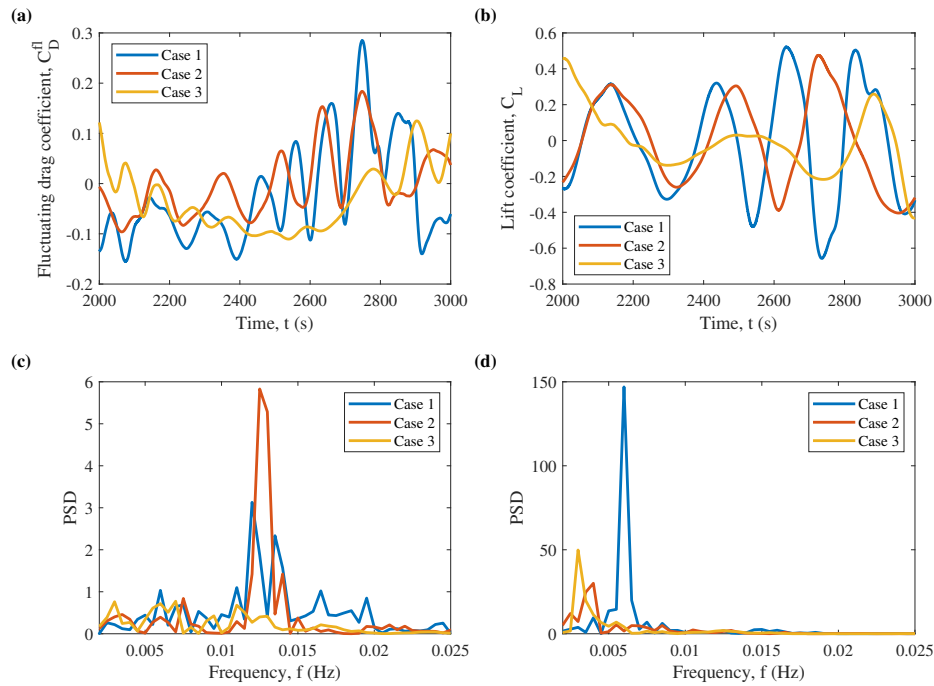


Figure 4. Fluid force coefficients for cylinder 3 immersed in the uniform flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

sheared flow is also much higher than that of the uniform flow.

The mean drag coefficient acting on each cylinder decreases from Case 7 to 9

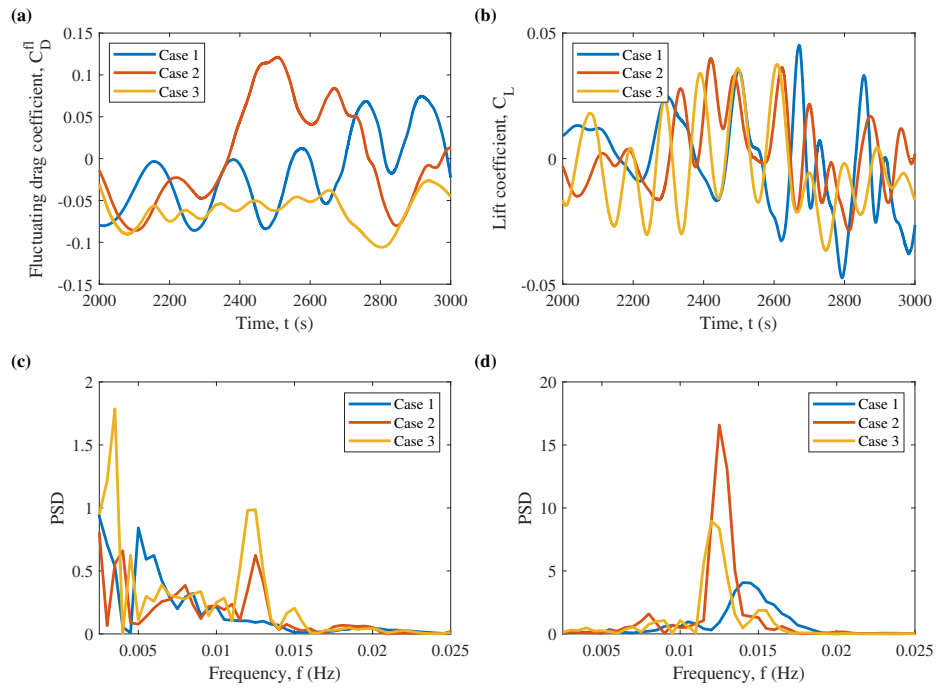


Figure 5. Fluid force coefficients for cylinder 1 immersed in the linearly sheared flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

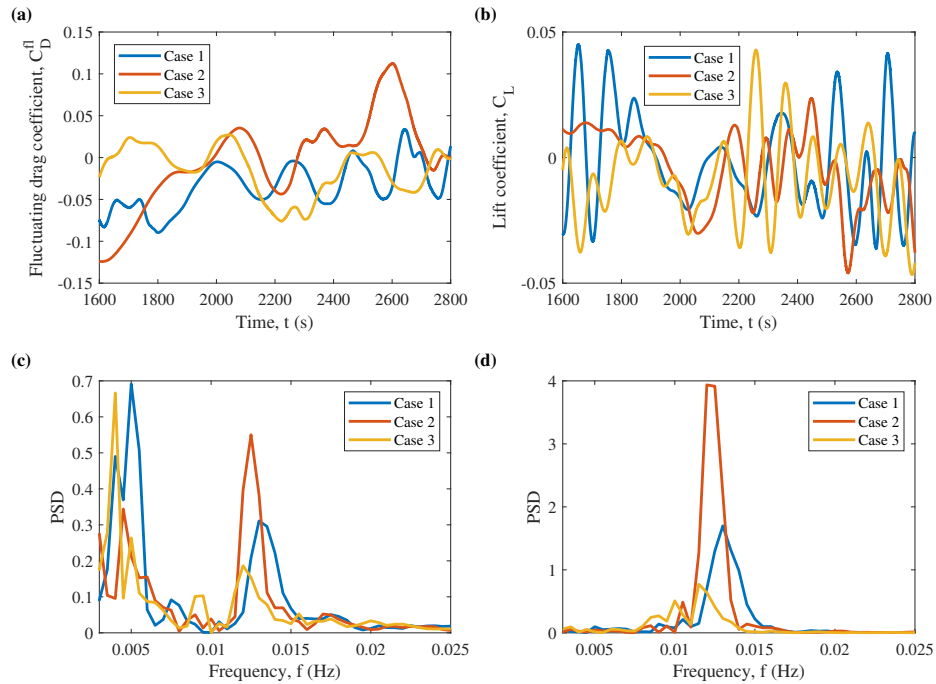


Figure 6. Fluid force coefficients for cylinder 2 immersed in the linearly sheared flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

in the parabolic sheared flow, as displayed in Figs 8-10. Cylinder 1 experiences the highest mean drag coefficient of 0.81 in all the three considered cases, as

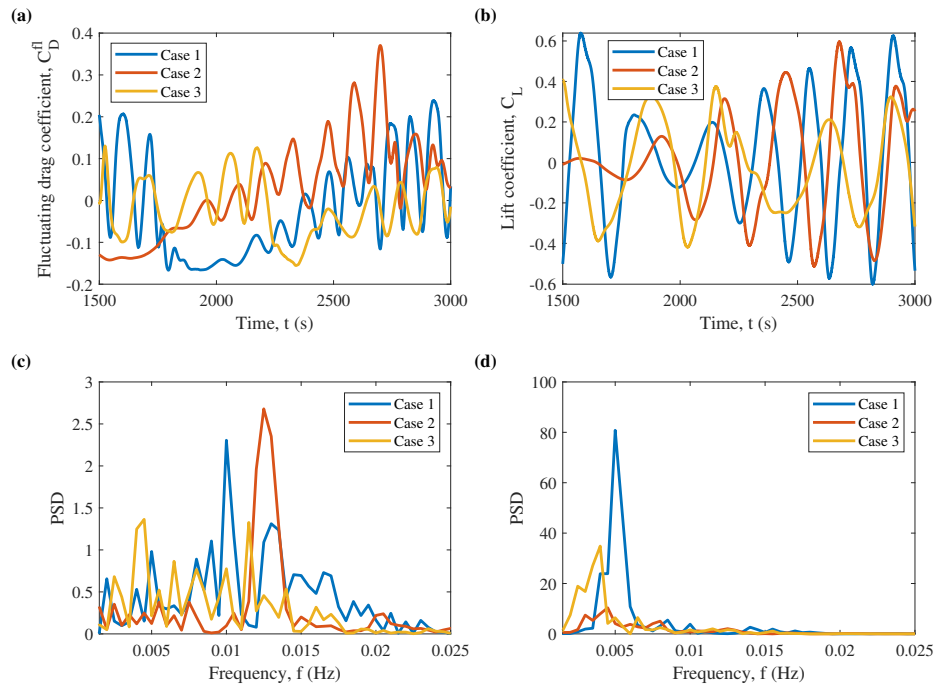


Figure 7. Fluid force coefficients for cylinder 3 immersed in the linearly sheared flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

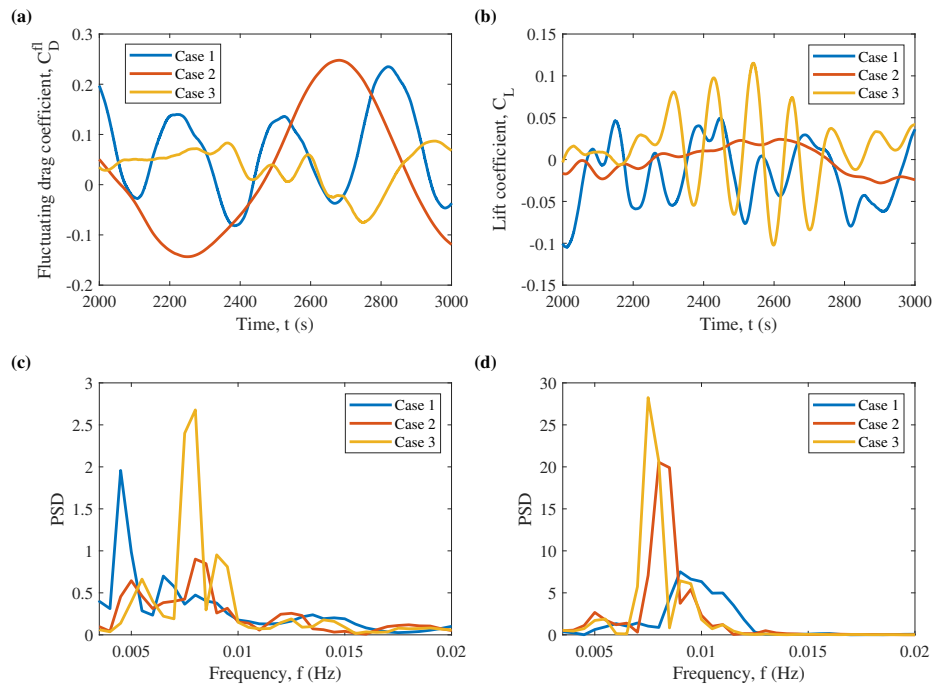


Figure 8. Fluid force coefficients for cylinder 1 immersed in the parabolic sheared flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

demonstrated in Fig. 8. Cylinder 3 experiences the least mean drag coefficient of 0.48. The highest fluctuating drag coefficient and the maximum amplitude of

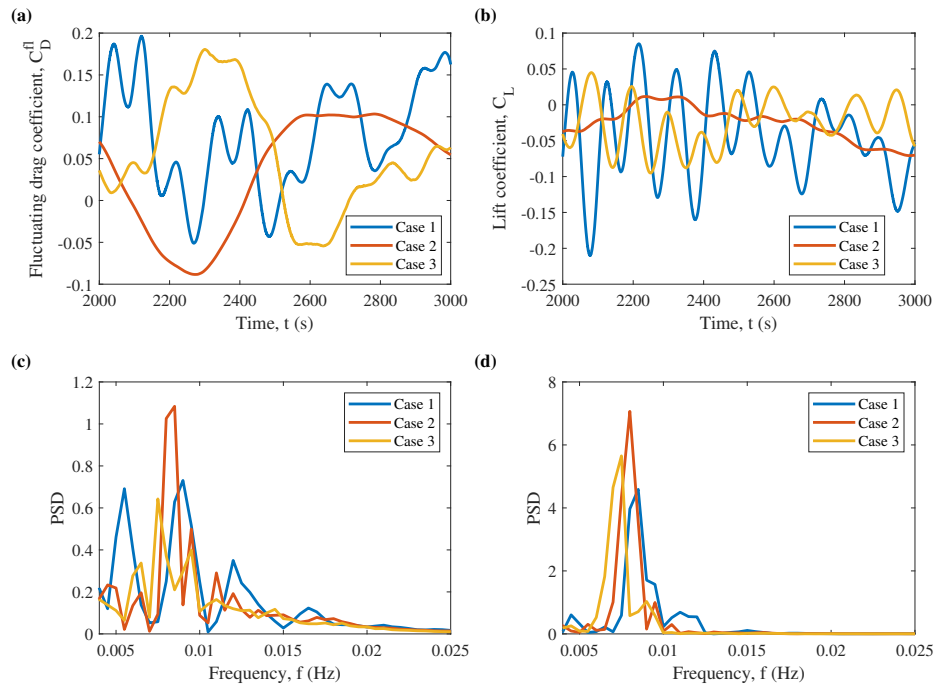


Figure 9. Fluid force coefficients for cylinder 2 immersed in the parabolic sheared flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

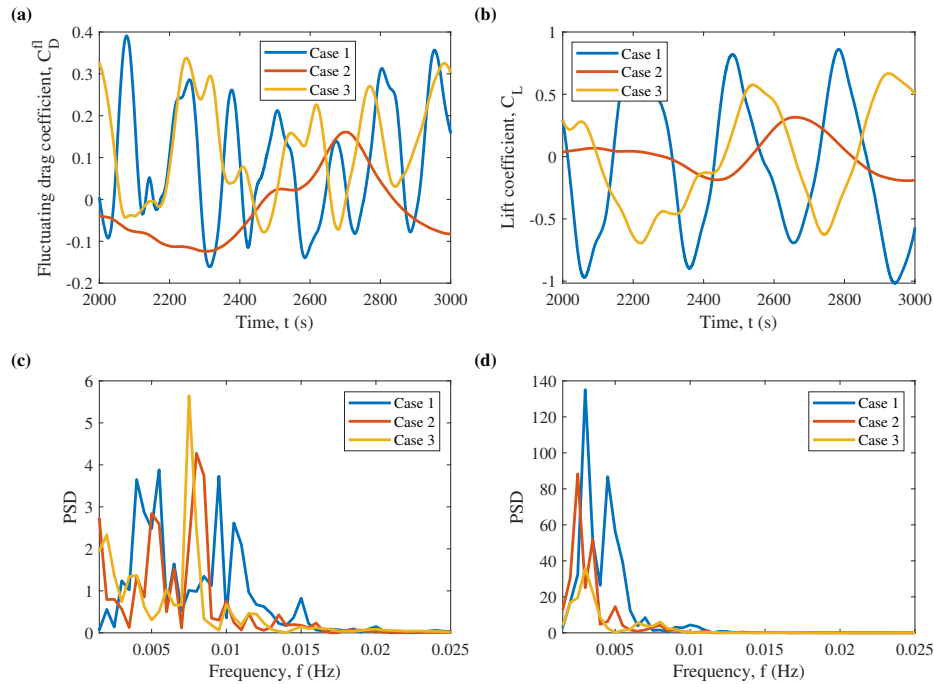


Figure 10. Fluid force coefficients for cylinder 3 immersed in the parabolic sheared flow: (a) time history of the fluctuating drag coefficient; (b) time history of the lift coefficient; (c) the fluctuating drag coefficient FFT; (d) the lift coefficient FFT.

the lift coefficient signal is experienced by cylinder 3 in all the three considered cases. Low frequency oscillations are consistent with the results for the uniform

and linearly sheared flow. However, the average drag coefficient acting on each cylinder for the parabolic sheared flow is higher than that of the linearly sheared flow and uniform flow. The fluctuating drag coefficient for the parabolic sheared flow is also much higher than that of the uniform flow and linearly sheared flow.

Case 8 with the medium position of the group of structures leads to the $2P$ vortex shedding from the group of smaller subsea structures, where three wakes merge into a single vortex street, as shown in Fig. 11(a). At the same time, a similar $2P$ vortex shedding regime is observed behind the squared cylinder. Vortex formation in this case occurs with similarly low shedding frequencies for both vortex streets, and the relative position of the group of smaller structures influences the difference in a phase of the vortex shedding cycle. For this reason, vortices shed from the smaller cylinders in a half-cycle towards the larger squared cylinder overlay and merge with vortices shed during one of the half-cycles of the squared cylinder. Vortices following the larger squared structure are, respectively, greater in size than vortices associated with the smaller structures. Two vortex streets in all considered cases merge into a single wake some distance past the set of structures considered.

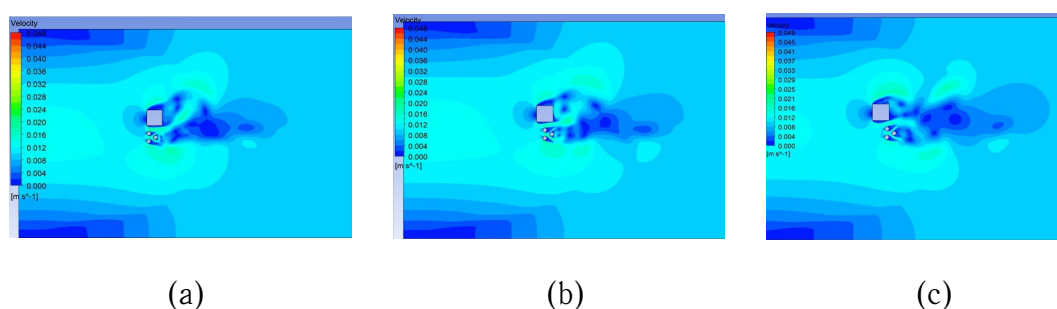


Figure 11. Velocity field indicating vortex shedding features: (a) Case 7; (b) Case 8; (c) Case 9.

In Cases 7 and 9, the squared structure demonstrates a rather asymmetric vortex shedding, while the group of smaller cylinders retains the $2P$ mode, as appears in Fig. 11. In Case 7, displayed in Fig. 11(b), the vortex street from the larger structure appears unstable during the simulation time with the shedding mode closer to $2P+2S$. The cylinder 2 periodically contributes a separate vortex to the vortex pair from the cylinder 3 with their further coalescence. The arrangement in Case 9 leads to an asymmetric shedding from the squared cylinder, illustrated in Fig. 11(c), where the half-cycle in the direction away from the group of circular cylinders produces a $P+S$ combination of vortices, while the following half-cycle results in a vortex pair that immediately merges with the vortex street from the smaller structures.

The pressure distribution along the circumference, in terms of the angle from the centreline parallel to the X axis, is displayed in Fig. 12 for three structures in different flow conditions and with respect to the angle Θ . Here, $\Theta = 0$ is the upstream point on the cylinder centreline. The pressure $P = 0$ corresponds to the

average pressure in the fluid away from structures. Fig 12(a) shows the distribution of the pressure along the surface of cylinder 1. Here, the magnitude of the pressure becomes zero at $\Theta = 121^\circ$ and $\Theta = 175^\circ$, while reaches its maximum positive value at $\Theta = 150^\circ$ (the stagnation point). The maximum negative values are observed at $\Theta = 81^\circ$ and $\Theta = 203^\circ$ for the uniform flow. For the linearly sheared flow, the magnitude of the pressure becomes zero at $\Theta = 120^\circ$ and $\Theta = 179^\circ$, reaches its maximum positive value at $\Theta = 150^\circ$, and reaches its maximum negative values at $\Theta = 85^\circ$ and $\Theta = 210^\circ$ and for the parabolic sheared flow the magnitude of the pressure becomes zero at $\Theta = 121^\circ$ and $\Theta = 182^\circ$, reaches its maximum positive value at $\Theta = 150^\circ$, and reaches its maximum negative values at $\Theta = 86^\circ$ and $\Theta = 212^\circ$.

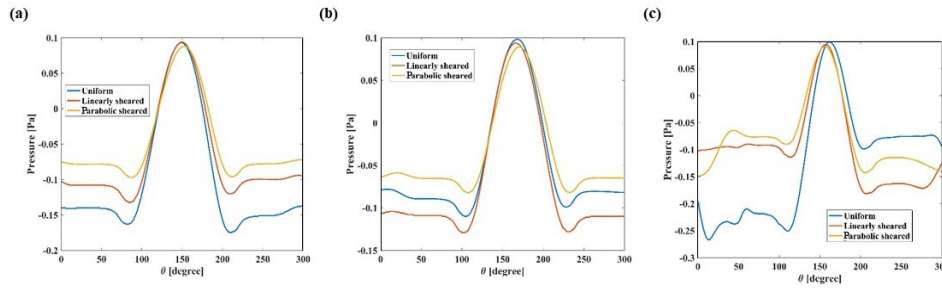


Figure 12. Pressure distribution on structures in Cases 3, 6 and 9, for three considered flow types, in comparison: (a) along cylinder 1, (b) along cylinder 2, (c) along cylinder 3.

4. Conclusions

Numerical simulations are performed in this work for three identical staggered stationary cylinders, forming an equilateral triangle, at the average Reynolds number of 3900. The structures are placed in a close proximity to a squared cylinder, representing a larger piece of the subsea equipment, and fluctuations of the vortex-induced forces are evaluated for the uniform, linearly sheared and parabolic sheared flow profiles. The $k-\omega$ SST turbulence model is used in order to obtain predictions for these nine cases for 3100 s of the physical time. Three different positions of the staggered circular cylinders relatively the larger structure are considered, and the hydrodynamic coefficients, pressure distribution around the cylinders, frequency of the drag and lift coefficient signals and vortex shedding patterns are obtained.

Among the cases considered, the least mean drag coefficient is registered for the cases 3, 6 and 9, for all velocity profiles. The larger mean drag coefficients, amplitudes of the fluctuating drag coefficient and lift coefficient are generally observed for the parabolic sheared flow profile. For each considered inlet velocity profile, cylinder 1, the closest to the piece of the subsea equipment, experiences effects from the drag force with the increased mean drag coefficient and amplitude of the fluctuating drag coefficient, as well as a larger amplitude of the lift force compared to the other two structures. Considered turbulent flows at the average Reynolds

number of 3900 lead to the very low frequency oscillations of both lift and drag coefficients, reflected in the slow process of the vortex formation. Results obtained in the current work generally continue the line of published research findings for the groups of four structures, located in proximity to each other.

Vortex streets in the wake from the group of smaller cylinders in the cases considered appear to combine into a single vortex street. At the same time, a separate vortex street with larger vortices appears to form in the wake of the squared structure. Future work in this direction should, therefore, focus on studying the effects from variation of distances among the structures, their relative sizes and positions in order to observe the evolution of vortex-induced forces and vortex formation processes.

Acknowledgments

The authors would like to acknowledge the support of the National Project "Science and Universities" of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant number FEWN-2021-0012.

REFERENCES

1. Zdravkovich M.M. Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements // *ASME Journal of Fluids Engineering*. 1977. No. 99. P. 618–633.
2. Breuer M. A challenging test case for large eddy simulation: High Reynolds number circular cylinder flow // *International Journal of Heat Fluid Flow*. 2000. No. 21. P. 648–654.
3. Shuyang C., Shigehira O., Yukio T., Yaojun G., Hironori K. Numerical simulation of Reynolds number effects on velocity shear flow around a circular cylinder // *Journal of Fluids and Structures*. 2010. No. 26. P. 685–702.
4. Xu W., Haokai W., Kun J., Enhao W. Numerical investigation into the effect of spacing on the flow-induced vibrations of two tandem circular cylinders at subcritical Reynolds numbers // *Ocean Engineering*. 2021. No. 236. P. 1–19.
5. Sumner D., Richards M.D., Akosile O.O. Two staggered circular cylinders of equal diameter in cross-flow // *Journal of Fluids and Structures*. 2005. No. 20. P. 255–276.
6. Wang E., Xu W., Yu Y., Zhou L., Incecik A. Flow-induced vibrations of three and four long flexible cylinders in tandem arrangement: An experimental study // *Ocean Engineering*. 2019. No. 178. P. 170–184.
7. Xu W., Zhang S., Ma Y., Liu B. Fluid forces acting on three and four long side-by-side flexible cylinders undergoing flow-induced vibration (FIV) // *Marine Structures*. 2021. No. 75. 102877.
8. Yuhang Z., Rui W., Yaoran C., Yan B., Zhaolong H., Dai Z., Huan P., Shixiao F., Yongsheng Z. Three-dimensional wake transition in the flow over four square cylinders at low Reynolds numbers // *AIP Advances*. 2020. No. 10. 015142.
9. Beaudan P., Moin P. Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at a sub-critical Reynolds number, Report No. TF-62, Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, USA, 1994.

10. Norberg C. Effects of Reynolds number and low-intensity free-stream turbulence on the flow around a circular cylinder, Publ. No. 87/2, Department of Applied Thermoscience and Fluid Mechanics, Chalmers University of Technology, Sweden, 1987.
11. Wornom S., Ouvrard H., Salvetti M. V., Koobus B., Dervieux A. Variational multiscale large-eddy simulations of the flow past a circular cylinder: Reynolds number effects // Computers and Fluids. V. 1, No. 47. P. 44–50.
12. Franke J., Frank W. Large eddy simulation of the flow past a circular cylinder at $Re = 3900$ // Journal of wind engineering and industrial aerodynamics. 2002. V. 10, No. 90. P. 1191–1206.

АНАЛИЗ ВИХРЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ГРУППУ ПОДВОДНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВБЛИЗИ ОБОРУДОВАНИЯ ПРИ $Re=3900$

Г.Ф. Аннапе¹

Лаборант, Лаборатория вибрационного и гидродинамического моделирования,,
e-mail: kinghenry939@gmail.com

В.А. Курушина^{1,2}

Заведующий лабораторией, Лаборатория вибрационного и гидродинамического
моделирования; научный сотрудник, e-mail: v.kurushina@outlook.com

¹Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

²Университет Ньюкасла, Ньюкасл-на-Тайне, Великобритания

Аннотация. Колебания сил жидкости, связанные с вихреобразовательным процессом, оцениваются в данной работе для группы подводных трубопроводов, расположенных вблизи более крупного подводного оборудования и подверженных равномерному и неравномерному течению. Моделирование методом вычислительной динамики флюидов (CFD) производится для среднего числа Рейнольдса 3900 с помощью турбулентной модели $k-\omega$ SST. В работе рассмотрены три различных положения конструкций меньшего диаметра в шахматном порядке, и исследуются равномерный, линейно-неравномерный и параболический неравномерный профили потока. Результатами моделирования являются временная история колебаний гидродинамических коэффициентов, анализ частот FFT, данные по давлению на меньшие конструкции и данные по скорости потока. Результаты моделирования параболического нелинейного потока показывают увеличение среднего коэффициента гидродинамического сопротивления, рост амплитуд колеблющихся коэффициентов сопротивления и подъёмной силы, по сравнению с величинами, которые наблюдаются в равномерном потоке и линейном неравномерном потоке.

Ключевые слова: вихреобразовательные силы, равномерный поток, неравномерный поток, цилиндры в шахматном порядке, подводные трубопроводы, гидродинамические коэффициенты.

Дата поступления в редакцию: 02.11.2022

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИНОК В АНИЗОТРОПНО СОПРОТИВЛЯЕМОЙ СРЕДЕ

Р.Э. Мамедли

к.ф.-м.н., доцент кафедры ИМПИ, e-mail: prog-nv@mail.ru

Нижевартовский государственный университет, Нижневартовск, Россия

Аннотация. В статье исследуется устойчивость двухслойных прямоугольных пластинок, изготовленных из различных неоднородно упругих изотропных материалов, находящихся в анизотропно сопротивляемой среде. Предполагается, что упругие характеристики материала слоев являются непрерывными функциями координат толщины пластинки. Используя гипотезу Кирхгофа–Лява для всей толщины элемента пластинки в общем виде получены выражения для усилия и моментов, определены обобщённые жёсткостные характеристики пластинки и получены системы уравнений устойчивости относительно прогиба и функции напряжения. Здесь для упругого основания принималась модель анизотропно сопротивляемой среды. Подробно исследована устойчивость пластинки при одностороннем сжатии. В случае шарнирного закрепления краёв пластинки построено решение задачи и найдена формула для определения критической нагрузки. В случае квадратной пластинки при различных значениях физических и геометрических параметров произведены численные расчёты и построены характерные графики. .

Ключевые слова: двухслойный, неоднородные изотропные пластинки, гипотеза Кирхгофа–Лява, устойчивость, критическая сила.

Введение

Конструктивные элементы в виде тонких однослойных и многослойных пластин и покрытий из изотропных однородно-упругих материалов находят широкое применение в различных областях техники. Различные типы задач устойчивости этих конструкций широко исследованы в научной литературе. В этой литературе обычно рассматриваются простые процессы нагружения, и при постановке задач используются классические теории. Но в большинстве случаев конструкции типа двухслойных пластин изготавливаются из неоднородных упругих изотропных материалов и находятся в сложном сопротивляющемся упругом состоянии, испытывая воздействие различных комплексных нагрузок. Однако, используя классические математические модели, можно снизить сложность задач по сравнению с другими способами, но при этом возможны серьёзные ошибки при определении критических параметров конструкций. Поэтому

для решения этих задач требуются более адекватные и новые методы. Проблемы надёжности и устойчивости этих пластин в литературе изучены недостаточно.

Поэтому в данной работе исследуется устойчивость неоднородных двухслойных прямоугольных пластин в условиях сопротивления анизотропии, состоящих из различных неоднородных материалов.

Проанализируем устойчивость неоднородных двухслойных прямоугольных пластин из различных неоднородных материалов в условиях сопротивления анизотропии.

Система координат представлена ниже: оси OX и OY лежат в плоскости, разделяющей слои пластины; Ось OZ перпендикулярна плоскости. (рисунок 1).

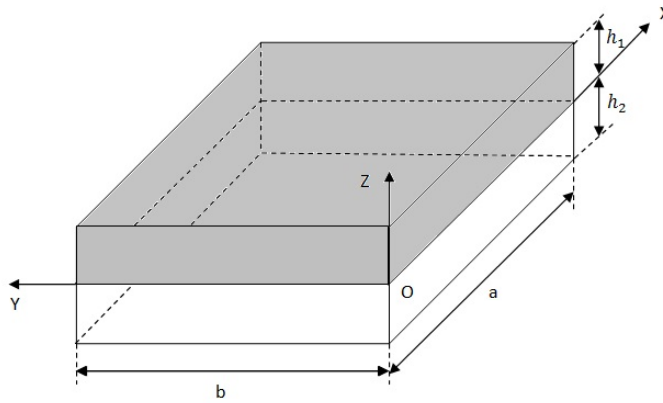


Рис. 1. Система координат

Предполагается, что слои пластины состоят из различных неоднородных изотропных упругих материалов, а упругие характеристики составляющих материалов являются непрерывными функциями координат толщины и изменяются следующим образом:

$$\lambda_{ij}^k = \lambda_{ij}^{k'} \cdot a_i^k(z) \quad (1)$$

Согласно закону Гука соотношение между компонентами деформационного напряжения определяется следующим образом:

$$\sigma_{11}^i = \lambda_{11}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{12}^i \varepsilon_{22}, \sigma_{22}^i = \lambda_{21}^i \varepsilon_{11} + \lambda_{22}^i \varepsilon_{22}, \sigma_{12}^i = \lambda_{33}^i \varepsilon_{12} (i = 1, 2) \quad (2)$$

Принято, что гипотеза Кирхгофа–Лява справедлива для всей толщины пластин, т. е.:

$$\varepsilon_{11} = l_{11} - z\chi_{11}, \varepsilon_{22} = l_{22} - z\chi_{22}, \varepsilon_{12} = l_{12} - z\chi_{12} \quad (3)$$

где l_{11} , l_{22} , l_{12} и χ_{11} , χ_{22} , χ_{12} — бесконечно малая деформация и изгиб срединной плоскости пластины.

Следующие уравнения используются для определения составляющих силы и момента:

$$T_{ij} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{ij}^2 dz + \int_0^{h_1} \sigma_{ij}^1 dz, M_{ij} = \int_{-h_2}^0 \sigma_{ij}^2 dz + \int_0^{h_1} \sigma_{ij}^1 dz \quad (4)$$

где h_1 и h_2 — толщина соответствующих слоев. После подстановки формул (1)–(3) в (4) получаются следующие общие выражения для силы и момента:

$$T_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^0 l_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 A_{12}^0 l_{22} - - - \bar{\lambda}_{11}^2 \bar{A}_{11}^1 \chi_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \bar{A}_{12}^1 \chi_{22}, \dots \quad (5)$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}_{11}^2 A_{11}^1 l_{11} + \bar{\lambda}_{12}^2 A_{12}^1 l_{22} - \bar{\lambda}_{11}^2 \bar{A}_{11}^2 \chi_{11} - \bar{\lambda}_{12}^2 \bar{A}_{12}^2 \chi_{22}, \dots \quad (6)$$

Где применяются следующие определения:

$$A_{11}^k = \int_{-h_2}^0 a_1^2(z) z^k dz + \frac{\bar{\lambda}_{11}^1}{\bar{\lambda}_{11}^2} \int_0^{h_1} a_1^1(z) z^k dz, \quad (7)$$

$$A_{12}^k = \int_{-h_2}^0 a_1^2(z) z^k dz + \frac{\bar{\lambda}_{12}^1}{\bar{\lambda}_{12}^2} \int_0^{h_1} a_1^1(z) z^k dz, (k = 0, 1, 2)$$

Уравнения устойчивости

Система уравнений балансировки пластины выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0, \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 T_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K(w) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (10)$$

Где анизотропная модель определяется для упругого состояния, как показано ниже:

$$K(W) = K_0 W - K_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (11)$$

Здесь K_0 , K_1 , K_2 — анизотропные коэффициенты упругого состояния.

Как видно из уравнения (8), если функцию напряжения ввести следующим образом:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, T_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

система становится эквивалентной, как и в предыдущем случае.

Для достижения соответствующего вида уравнений (9) и (10) их определяют через изгибную и силовую составляющие с помощью выражения (5), тогда:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= C_{11}T_{11} - C_{12}T_{22} + \chi_{11}(C_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - C_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \chi_{22}(C_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - C_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1), \\ \lambda_{22} &= C_{21}T_{11} - C_{22}T_{22} + \chi_{11}(C_{21}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - C_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \chi_{22}(C_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - C_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1), \\ \lambda_{12} &= C_{33}T_{12} - 2C_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1 \chi_{22}\end{aligned}\quad (13)$$

Коэффициенты из уравнений могут быть выражены через общие характеристики жёсткости (7). Заменяя значения выражения (13) на (6), моменты можно представить в виде:

$$\begin{aligned}M_{11} &= r_{11}^1 T_{11} + r_{12}^1 T_{22} + R_{11}^1 \chi_{11} + R_{12}^1 \chi_{22}, \\ M_{22} &= r_{21}^1 T_{11} + r_{22}^1 T_{22} + R_{21}^1 \chi_{11} + R_{22}^1 \chi_{22}, \\ M_{12} &= r_{33}^1 T_{12} + R_{33}^1 \chi_{12}\end{aligned}\quad (14)$$

где применяются следующие определения:

$$\begin{aligned}r_{11}^1 &= c_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 + c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1, \\ r_{12}^1 &= c_{12}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1, \\ R_{11}^1 &= \bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) - \bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^2, \\ R_{12}^1 &= \bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) + \bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) - \bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^2, \\ R_{21}^1 &= \bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) + \bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1) - \bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^2, \\ R_{12}^1 &= \bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1 (c_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) + \bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1 (c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1) - \bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^2, \\ r_{33}^1 &= c_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1, \\ R_{33}^1 &= 2\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1 \cdot c_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1 - \bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1,\end{aligned}\quad (15)$$

Приведённая ниже система уравнений получается после подстановки выражений (13) и (14) в (9) и (10):

$$\begin{aligned}D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{21}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + D_{23}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\ + T_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2T_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + T_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K_0 w - K_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\end{aligned}\quad (16)$$

$$d_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + d_{13}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{12}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + d_{21}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_{23}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + d_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0\quad (17)$$

где применяются следующие определения:

$$\begin{aligned}
 d_{11} &= c_{22}, d_{12} = c_{11}, \\
 d_{13} &= c_{12} + c_{21} - 2c_{33}, \\
 d_{21} &= c_{21}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1, \\
 d_{22} &= c_{11}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1, \\
 d_{23} &= c_{22}\bar{\alpha}_{11}^2 A_{11}^1 - c_{12}\bar{\alpha}_{21}^2 A_{21}^1 + c_{21}\bar{\alpha}_{12}^2 A_{12}^1 - c_{22}\bar{\alpha}_{22}^2 A_{22}^1 - 4c_{33}\bar{\alpha}_{33}^2 A_{33}^1, \\
 D_{11} &= R_{11}^1, D_{12} = R_{22}^1, \\
 D_{13} &= R_{12}^1 + R_{21}^1 + 2R_{33}^1, \\
 D_{21} &= r_{12}^1, D_{22} = r_{22}^1 = 1, \\
 D_{23} &= r_{11}^1 + r_{22}^1 - 2r_{33}^1
 \end{aligned} \tag{18}$$

Как видно, общее уравнение устойчивости двухслойных прямоугольных пластин из неоднородных изотропных упругих материалов в условиях анизотропного сопротивления указано в (16) и (17). Если добавить предельные условия вне пластин, можно получить математическое представление задачи.

Решение проблемы

Теперь разберём ту же задачу об устойчивости этой же пластины при сжатии сверху вниз. ($T_{12} = 0$). В этом случае система уравнений устойчивости (16) и (17) несколько упрощается.

$$\begin{aligned}
 D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + D_{21} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + D_{23} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \\
 + T_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + T_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + K_0 w - K_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

Изгиб i действителен, как и в приведённом ниже уравнении, если края пластин повернуты.

$$\begin{aligned}
 w &= w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \\
 \Phi &= \Phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Здесь a, b — соответствующие длина и ширина пластины, а m, n — количество полуволн в соответствующих направлениях.

Подставляя (20) в (19):

$$\begin{aligned}
 \Phi_{mn} &= -w_{mn} D_{mn}^0 \\
 D_{mn}^0 &= \frac{d_{21} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + d_{23} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + d_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}{d_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + d_{13} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + d_{12} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4}
 \end{aligned} \tag{21}$$

После подстановки выражений (20) в (21) и выполнения некоторых операций получается следующее характеристическое уравнение для определения комбинации критических нагрузок:

$$T_{11}(1 + \eta^2 \alpha) = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \{D_{11} - D_{mn}^0 D_{21} + \eta^2(D_{13} - D_{mn}^0 + D_{23}) + \\ + \eta^4(D_{12} - D_{mn}^0 \cdot D_{22})\} + K_0 \left(\frac{a}{\pi m}\right)^2 + K_1 + K_2 \eta^2 \quad (22)$$

где применяются следующие определения:

$$\eta = \frac{na}{mb}, \alpha = \frac{T_{22}}{T_{11}}$$

Если форма пластины квадратная, то в зависимости от (22) достигается, что ($m = n = 1$, $a = b$):

$$T_{11}(1 + \alpha) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \{D_{11}D_{11} + D_{13} + D_{12} - D^0(D_{21} + D_{23} + D_{22})\} + \\ + K_0 \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + K_1 + K_2 \quad (23)$$

Здесь

$$D^0 = \frac{d_{21} + d_{23} + d_{22}}{d_{11} + d_{13} + d_{12}}$$

Численные расчёты

Для проведения численных расчётов неоднородные функции $\alpha_i^k(z)$ представляются как линейная функция координаты толщины, т. е.:

$$\alpha_1^1(z) = 1 + \mu_1 \frac{z}{h_1}; \alpha_1^2(z) = 1 + \mu_2 \frac{z}{h_2} \quad (24)$$

Расчеты проводились по различным значениям параметров и, следовательно, доказана зависимость критической силы от геометрических параметров пластины. Результаты расчетов представлены на рис. 2. Решение существующей однородной задачи показано скрытыми линиями. Результаты показывают, что без учёта однородности могут возникать строгие ошибки, поэтому значения критических параметров могут меняться в зависимости от значений параметров из (22). В этом случае неоднородность снижает критическое значение на 8–12%.

$$K_0 = 6.48 \cdot 10E4KN/m^3, K_1 = K_2 = 2250.0KN/m$$

$$----- \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$----- \mu_1 = 0.5; \mu_2 = 1$$

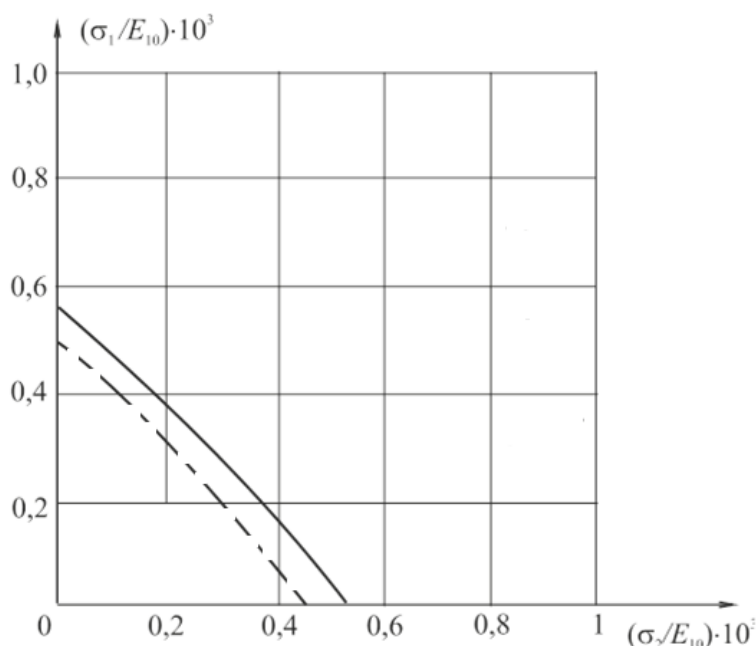


Рис. 2. Результаты расчётов

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел М. : Изд.-во МГУ, 1978. 432 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивости деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
4. Мамедли Р.Э. Устойчивость неоднородных трёхслойных стержней при неравномерном поле температуры в нелинейно упругой среде // Математические структуры и моделирование. 2018. Т. 2, № 46. С. 33–38.
5. El-Zafrany A., Fadhil S. A modified Kirchhoff theory for boundary element analysis of thin plates resting on two-parameter foundation // Eng. Structures. 1996. V. 18, No. 2. С. 102–114.
6. Gulkan P., Alemdar B.N. An exact finite element for a beam on a twoparameterelastic foundation //Structural Engineering and Mechanics. 1999. V. 7, No. 3. С. 259–276.
7. Panda S.K, Ramachandra L.S. Buckling and postbuckling Behavior Cross-Ply Composite Plate Subjected to Nonuniform in-Plane loads // Journal of Engineering Mechanics. 2011. V. 137(9). С. 589–597.
8. Rahman T., Ijsselduinden S.T., Abdalla M.M., Jansen E.L. Postbucklink analysis of variable stinffnesscomposite plates using a finite element-based perturb bationmethod // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2011. V. 11, No. 3. С. 411–429.
9. Dao Van Dung, Le Kha Hoa. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure // J. Thin-Walled Structures. 2013. V. 63. С. 117–124.

THE STABILITY OF NON-HOMOGENOUS TWO-LAYERED PLATES IN ANISOTROPY RESISTING CONDITION

R.E. Mamedli

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: prog-nv@mail.ru

Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. In this article, the stability of non-homogenous two-layered rectangular plates in anisotropy resisting condition made from different non-homogenous materials is explored. It is assumed that the characteristics of resilient layers are continuous functions of thickness coordinate. Considering Kirchhoff–Lyow hypothesis to be valid for the entire thickness of the plate elements, generalized form of the correct expression of moments and general strength and stiffness properties have been determined and voltage stability of the system of equations has been taken by the function. Here resisting elastic anisotropy model was adopted for the environment. A slab-sided state of contraction was examined in detail. Despite the edges of the plate matter of dissolving, the critical force was assigned. To achieve numerical computations, non-homogeneous functions were accepted to be linearly dependent on the thickness coordinate. Calculations were made in the report and appropriate graphics was established.

Keywords: two-layered, nonhomogenous isotropic plates, Kirchof–Lyow hypothesis, stability, critical force..

Дата поступления в редакцию: 20.11.2022

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Р.Э. Мамедли

к.ф.-м.н., доцент кафедры ИМПИ, e-mail: prog-nv@mail.ru

Нижевартовский государственный университет, Нижневартовск, Россия

Аннотация. В статье исследуется задача о собственных колебаниях двухслойных неоднородных прямолинейных стержней в упругой среде. Предполагается, что слои стержня изготовлены из различных неоднородно упругих материалов и модули упругости материала слоев являются непрерывными функциями координат толщины и длины. При постановке задачи предполагается, что гипотеза плоских сечений справедлива для всей толщины элемента стержня и для упругого основания принимается модель Винклера. В общем виде получены выражения для приращений усилий и момента, а также определена обобщённая жёсткостная характеристика стержня и получено уравнение движения стержня. При шарнирном закреплении концов стержня полученное уравнение движения с переменными коэффициентами решено методом Бубнова–Галеркина и найдена формула для определения частоты собственных колебаний стержня. Подробно исследован случай, когда функции неоднородности материала слоев являются линейными функциями координат толщины и длины и произведены численные расчёты.

Ключевые слова: двухслойный стержень, неоднородный, гипотеза плоских сечений, упругое основание, собственные колебания, частота колебаний.

Введение

В научной литературе подробно изучены вопросы устойчивости и колебаний таких элементов конструкций, как тонкостенные стержни, пластины и крышки [1–3]. В этих исследованиях материалы конструкций обычно предполагаются однородными и гибкими.

Однако во многих случаях слоистые стержневые конструкции изготавливаются из композиционных материалов, подвергаются различным нагрузкам и находятся в упругой среде. При изучении вопросов устойчивости и вибраций таких конструкций необходимо использовать реальные физико-механические характеристики. механические характеристики их материалов.

В представленной статье исследуется вопрос вибрации двухслойных стержней из различных неоднородных упругих материалов на упругом основании.

Постановка задачи

Рассмотрим специфику поведения прямых двухслойных неоднородных стержней постоянного сечения с двумя осями симметрии в упругой среде.

Система координат выбирается следующим образом:

OX и OY — оси расположены в плоскости, разделяющей слои стержня; OZ — ось направлена по толщине.

Предположим, что слои стержня рассчитаны из различных неоднородных упругих материалов, а модули упругости материалов зависят от координат длины (x) и толщины следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{10}f(x)f_1(z) \\ E_2 &= E_{20}f(x)f_2(z) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $E_{10} = Const$, $E_{20} = Const$ — модули упругости соответствующих однородных материалов слоев; $f(x), f_1(z), f_2(z)$ — являются непрерывными функциями соответствующих координат.

Соотношение между увеличением напряжения и деформации в каждом слое выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma^1 &= E_{10}f(x)f_1(z)\Delta\varepsilon, & 0 \leq z \leq h_1 \\ \Delta\sigma^2 &= E_{20}f(x)f_2(z)\Delta\varepsilon, & -h_2 \leq z \leq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь h_1, h_2 — толщины слоев.

Предположим, что принцип плоских сечений верен для всей толщины стержня:

$$\Delta\varepsilon = l_0 + z\kappa \quad (3)$$

где l_0 — дополнительная деформация оси стержня, κ — кривизна.

Приращения сил и моментов рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \int_{-h_2}^0 \Delta\sigma^2 b(z) dz + \int_0^{h_1} \Delta\sigma^1 b(z) dz \\ \Delta M &= \int_{-h_2}^0 \Delta\sigma^2 b(z) z dz + \int_0^{h_1} \Delta\sigma^1 b(z) z dz \end{aligned} \quad (4)$$

где $b(z)$ — ширина поперечного сечения стержня.

Получим выражения (2), (3), записав их в (4):

$$\begin{aligned} \Delta P &= E_{20}f(x)[\lambda_0(\alpha_2^0 + \lambda_{12}\alpha_1^0) + \kappa(\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1)] \\ \Delta M &= E_{20}f(x)[\lambda_0(\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1) + \kappa(\alpha_2^2 + \lambda_{12}\alpha_1^2)] \end{aligned} \quad (5)$$

В этих формулах были сделаны следующие замены.

$$a_1^i = \int_0^{h_1} f_1(z)b(z)z^i dz$$

$$l_{12} = E_{10}/E_{20} \quad (6)$$

$$a_2^i = \int_{-h_2}^0 f_2(z)b(z)z^i dz, \quad (i = 0, 1, 2)$$

Уравнения движения стержней

Здесь, если принять модель Винклера с коэффициентом пласта C_0 для упругой среды, уравнения движения рассматриваемого стержня будут иметь следующий вид

$$\Delta P = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta M) + C_0 v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

где v — прогиб оси стержня, m — полная масса на единицу длины. Мы получаем (6), записывая также (7):

$$\lambda_0 = -\frac{\alpha_2^1 + \lambda_{12}\alpha_1^1}{\alpha_2^0 + \lambda_{12}\alpha_1^0} \varkappa \quad (9)$$

Учтём (9) и (5):

$$\Delta M = K_2 I f(x) \varkappa \quad (10)$$

Здесь произведены следующие замены:

$$K_2 I = E_{20} \left\{ \alpha_2^2 + \lambda_{12} \alpha_1^2 - \frac{(\alpha_2^1 + \lambda_{12} \alpha_1^1)^2}{\alpha_2^0 + \lambda_{12} \alpha_1^0} \right\} \quad (11)$$

Запишем выражение (10) вместо уравнения (7):

$$K_2 I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[f(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + C_0 v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

или

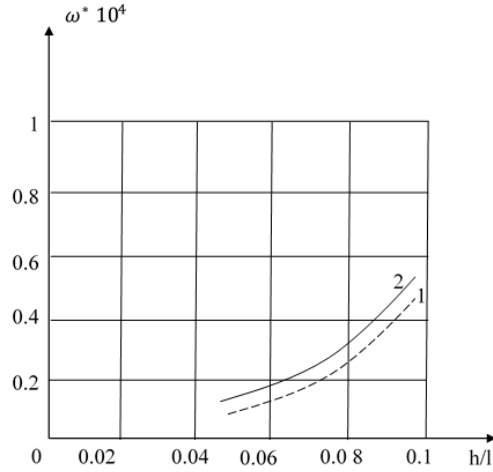
$$K_2 I \left[f(x) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + C_0 v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

Двухслойные неоднородные стержни были получены в виде уравнения движения на упругом основании (13).

Метод решения проблемы

Для решения уравнения (13) необходимо привести очевидные выражения входящих сюда неоднородных функций. Чтобы получить конкретные результаты, рассмотрим следующий случай неоднородности

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 + a \frac{x}{l} \\
 f_1(z) &= 1 + \gamma_1 \frac{z}{h_1} \\
 f_2(z) &= 1 + \gamma_2 \frac{z}{h_2}
 \end{aligned} \quad (14)$$



1. $\alpha = 0$; $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = 0$; 2. $\alpha = 1$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$
 $\frac{C_0}{E_0 \pi^2} = 0.001$; $h/b = 0.5$; $\ell_{12} = 0.8$; $\delta_{12} = 0.6$

Рис. 1. Результаты расчётов

В этом случае уравнение колебаний (13) получается следующим образом:

$$K_2 I \left[\left(1 + \alpha \frac{x}{l}\right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2 \frac{a}{l} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] + C_0 v + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

Здесь $K_2 I$ определяется по формуле (11).

Найдём решение этого уравнения в виде $V(x, t) = V(x) \cos \omega t$:

$$K_2 I \left[\left(1 + \alpha \frac{x}{l}\right) V^{IV}(x) + 2 \frac{a}{l} V^{III}(x) \right] + (C_0 - m \omega^2) V(x) = 0 \quad (16)$$

Если концы стержня закрепить шарнирами, принимая форму прогиба как: $V(x) = V_0 \sin \frac{\pi x}{\lambda}$, то для определения удельной частоты колебаний из (16) с помощью метода Бубнова–Галеркина получим следующее выражение:

$$\omega^2 = \omega_{01}^2 \cdot \gamma_1^1 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) + C_0^1 \quad (17)$$

Здесь произведены следующие замены.

$$\omega_{01}^2 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \cdot \frac{E_{20}bh_2^3}{m},$$

$$C_0^1 = \frac{C_0}{m} \quad (18)$$

$$\varphi_1^1 = \left\{ \frac{1}{3} - \frac{\gamma_2}{4} + \lambda_{12}\delta_{12}^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{\gamma_1}{4} \right) - \frac{\left[-\frac{1}{2} - \frac{\gamma_2}{3} + \lambda_{12}\delta_{12}^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\gamma_1}{3} \right) \right]^2}{\left[1 - \frac{\gamma_2}{2} + \lambda_{12}\delta_{12} \left(1 + \frac{\gamma_1}{2} \right) \right]} \right\}$$

Результаты проведённых расчётов представлены на рисунке 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел М. : Изд.-во МГУ, 1978. 432 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивости деформируемых систем. М. : Наука, 1967. 984 с.
3. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М. : Машиностроение, 1984. 264 с.
4. Мамедли Р.Э. Устойчивость неоднородных трёхслойных стержней при неравномерном поле температуры в нелинейно упругой среде // Математические структуры и моделирование. 2018. Т. 2, № 46. С. 33–38.
5. El-Zafrany A., Fadhil S. A modified Kirchhoff theory for boundary element analysis of thin plates resting on two-parameter foundation // Eng. Structures. 1996. V. 18, No. 2. С. 102–114.
6. Hu Ding, LI-Qun Chen. Galerkin method for natural frequencies of high-speed axially moving Beams // Journal of Sound and Vibration. 2010. V. 329, No. 17. С. 3484–3494.
7. Panda S.K., Ramachandra L.S. Buckling and postbuckling Behavior Cross-Ply Composite Plate Subjected to Nonuniform in-Plane loads // Journal of Engineering Mechanics. 2011. V. 137(9). С. 589–597.
8. Rahman T., Ijsselmuiden S.T., Abdalla M. M., Jansen E.L. Postbuckling analysis of variable stiffness composite plates using a finite element-based perturbation method // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2011. V. 11, No. 3. С. 411–429.
9. Dao Van Dung, Le Kha Hoa. Nonlinear buckling and post-buckling analysis of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells under external pressure // J. Thin-Walled Structures. 2013. V. 63. С. 117–124.
10. Shooshtari A., Rafiee M. Nonlinear forced vibration analysis of clamped functionally graded beams // J. Acta Mechanica. 2011. V. 222. С. 23–38.

FREE VIBRATION TWO-LAYER NONHOMOGENEOUS RODS IN ELASTIC FOUNDATION**R.E. Mamedli**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: prog-nv@mail.ru

Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. In this paper we study the problem of free vibrations of two-layer nonhomogeneous straight rods in elastic foundation. Considering that the layers of the rod are made of different materials and nonhomogeneous elastic modulus of elasticity are continuous functions of the coordinates of the thickness and length. For the elastic foundation of linear model Vinkler is accepted and it is assumed that the hypothesis of plane sections is valid for the entire thickness of the element of the rod. In general, increment of force and momentum and rigged characteristics are defined and obtained motion of the rod equation. Hinged ends of the rod with variable coefficients formula result are obtained by the Bubnov–Galerkin method and the formula for determining the free vibration frequency of the rod. In this paper however of the inhomogeneity of the material layers are linear functions of the coordinates of the thickness and length deep investigated and made numerical calculations.

Keywords: two-layer rod, nonhomogeneous, the hypothesis of plane sections, elastic foundation, free vibration, vibration frequency..

Дата поступления в редакцию: 21.11.2022

ФОРМИРОВАНИЕ ПРИЗНАКОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

С.Н. Чуканов¹

д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, e-mail: ch_sn@mail.ru

И.С. Чуканов²

студент, e-mail: chukanov022@gmail.com

С.В. Лейхтер³

старший преподаватель, e-mail: leykhter@mail.ru

¹Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск, Россия

²Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

³Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Использование традиционных методов алгебраической топологии для получения информации о форме объекта связано с проблемой формирования малого количества информации: чисел Бетти и характеристик Эйлера. Центральным инструментом топологического анализа данных является метод персистентной гомологии, который суммирует геометрическую и топологическую информацию в данных с использованием персистентных диаграмм и баркодов. На основе методов персистентной гомологии может быть выполнен анализ топологических данных для получения информации о форме объекта. Построение персистентных баркодов и персистентных диаграмм в вычислительной топологии не позволяет построить гильбертово пространство со скалярным произведением. Возможность применения методов топологического анализа данных основана на отображении персистентных диаграмм в гильбертово пространство; одним из способов такого отображения является метод построения персистентного ландшафта. Его преимущества заключаются в том что он обратим, поэтому он не теряет никакой информации, и имеет свойства персистентности. В работе рассматриваются математические модели и функции представления объектов персистентного ландшафта на основе метода персистентной гомологии. Рассмотрены методы преобразования персистентных баркодов и персистентных диаграмм в функции персистентного ландшафта.

Ключевые слова: распознавание образов, многопараметрический персистентный ландшафт, гильбертово пространство, топологический анализ данных.

Введение

В последние годы возрос интерес к использованию методов алгебраической топологии для топологического анализа данных [1] и применению в различных областях знаний. Целью топологического анализа данных является определение информативных топологических свойств и использование их в качестве дескрипторов.

Ключевым математическим инструментом в топологическом анализе данных является метод персистентных гомологий, который используется для извлечения топологической информации из данных. Рассмотрим способ формирования персистентной гомологии из точек данных в евклидовом пространстве. Целью является получение топологии из конечных данных. Рассмотрим r -шары (радиуса r) для реконструкции топологии. Ожидается, что модель r -шаров может представлять основные топологические структуры. Если r мал, то объединение всех r -шаров состоит из непересекающихся r -шаров. Если радиусы r -шаров слишком большие, то объединение становится одним пространственным компонентом. Персистентная гомология [2] рассматривает все значения одновременно и обеспечивает выражение для топологических свойств.

Персистентная гомология может быть визуализирована персистентной диаграммой $D = \{(b_i, d_i) \in \mathbb{R}^2 | i \in I, b_i \leq d_i\}$. Каждая точка $(b_i, d_i) \in D$, которая называется генератором персистентной гомологии, представляет топологическое свойство, появляющееся при X_{b_i} и исчезающее при X_{d_i} в модели шаров с изменяющимся радиусом r ; здесь b_i – диаметр шара при появлении (birth) i -й персистентной гомологии; d_i – диаметр шара при исчезновении (death) i -й персистентной гомологии. Топологическое свойство с большим значением $d_i - b_i$ может рассматриваться как структура с высокой персистентностью, в то время как топологическое свойство с низкой персистентностью может рассматриваться как шум. Персистентные диаграммы кодируют топологическую и геометрическую информацию о точках данных.

Применение методов для получения информации о форме объекта для сложных систем большой размерности затруднено из-за методов адекватного представления функций, так как формирование баркодов не обеспечивает функциональную зависимость [3, 4]. Геометрический анализ характеризует локальную структуру, но приводит к сложности представления данных. Элементы, полученные из топологических моделей определяют глобальную внутреннюю структурную информацию, но редуцируют много локальной структурной информации [5].

Метод персистентных гомологий разработан для многомасштабного представления топологических признаков [1, 2, 6]; метод персистентных гомологий обеспечивает связь между топологическими и геометрическими методами. Основная идея персистентных гомологий – применение фильтрации для присвоения каждому топологическому признаку геометрической размерности. Процесс фильтрации генерирует серии симплициальных комплексов, кодируемых со структурной информацией различных масштабов. Персистентная гомология может быть представлена персистентным баркодом или персистентной диаграм-

мой.

Персистентные гомологии могут быть использованы для анализа топологических данных. Существуют подходы к формированию персистентных гомологий, основанные на построении персистентных диаграмм. Однако, стандартные меры для персистентных диаграмм (например, расстояние Вассерштейна) не подходят для топологического анализа данных из-за большого количества вычислительных операций. Одним из подходов к топологическому анализу данных является отображение персистентных диаграмм в гильбертово пространство на основе формирования функций персистентного ландшафта (landscape functions) [7, 8].

В работе представлено расширение результатов для модулей персистентности с одним параметром на многопараметрические модули персистентности. Многопараметрический персистентный ландшафт сводится к семейству ландшафтов персистентности с одним параметром. В пространстве Лебега измеримых функций L^p многопараметрических ландшафтов можно построить функции расстояния; естественная структура внутреннего произведения ландшафтных функций порождает положительно определенное ядро. Использование многопараметрических функций персистентного ландшафта повышает разнообразие параметров, характеризующих форму объекта, точность определения расстояния между изображениями объектов.

1. Персистентные гомологии

Предположим, что $k + 1$ точек $u_0, \dots, u_k \in \mathbb{R}^k$ аффинно независимы. Тогда симплекс это множество точек:

$$C = \left\{ \mu_0 u_0 + \dots + \mu_k u_k \mid \sum_{i=0}^k \mu_i = 1; \mu_i \geq 0, i = 0, \dots, k \right\}.$$

Симплициальный комплекс K — это множество симплексов, удовлетворяющее условиям: 1) каждая грань K принадлежит K ; 2) $[(\sigma_1 \cap \sigma_2) \in \sigma_1] \wedge [(\sigma_1 \cap \sigma_2) \in \sigma_2]$.

Функцию на симплициальном комплексе K $f : K \rightarrow \mathbb{R}; f(\sigma) \leq f(\tau); \tau \in K$, для любой грани $\sigma \in \tau$. Множество подуровней $K(a) = f^{-1}(-\infty, a); \forall a \in \mathbb{R}$ является подкомплексом в K , и упорядочение значений f на симплексах K индуцирует фильтрацию $\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_n = K$. Включение $K_i \rightarrow K_j; 0 \leq i \leq j \leq n$ индуцирует гомоморфизм $f_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$ на симплициальных группах гомологий для каждой размерности p . p -е персистентные группы гомологий являются образами этих гомоморфизмов; p -е числа Бетти являются рангами этих групп [2].

Персистентные гомологии можно представить в виде топологических генераторов (баркодов) — пар появления (BT — birth time) и исчезновения (DT — death time) баркодов, которые можно обозначить как $l_j^k = \{b_j^k, d_j^k\}, j \in \{1, 2, \dots, N_k\}$, где N_k — общее число k -мерных топологических генераторов [9]. Определим множество баркодов k -го измерения: $L_k =$

$\{l_j^k = \{b_j^k, d_j^k\}_{j \in \{1, 2, \dots, N_k\}}\}$. Топологическая персистентность может быть представлена персистентным баркодом (каждый l_j^k рассматривается как баркод) или персистентной диаграммой (каждый l_j^k рассматривается как двумерная точка с координатой $l_j^k = (b_j^k, d_j^k)$) [10].

Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество точек в метрическом пространстве (M, d_M) . Чтобы проанализировать топологические свойства X , рассмотрим модель $X_r = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; r)$, состоящую из шаров $B(x_i; r) = \{x \in M \mid d_M(x_i, x) \leq r\}$ с радиусом r , где $d_M(x_i, x)$ – метрическое расстояние от точки x_i до точки x , и используем гомологии $H_q(X_r)$ для описания топологии X_r . Здесь для топологического пространства S его q -я гомология $H_q(S)$, $q = 0, 1, \dots$ определяется как векторное пространство. Так как $X_r \subset X_s$ для $r \leq s$ множество $X = \{X_r \mid r \geq 0\}$ становится фильтрацией. При изменении радиуса новый генератор $a_i \in H_q(X_r)$ появляется на каком-то радиусе $r = b_i$ (birth) и исчезает на радиусе $r = d_i$ (death) большем чем b_i . Собирая все a_i ($i \in I$) в фильтрации X , получаем множество пар $\underline{D}_q(X) = \{(b_i, d_i) \in \mathbb{R}^2 \mid i \in I\}$ в виде мультимножества. Персистентная диаграмма $D_q(X)$ определяется несвязным объединением $\underline{D}_q(X)$ и диагонального множества $\Delta = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, учитываемого с бесконечной кратностью. Точку $x = (b, d) \in D_q(X)$ называют генератором персистентной диаграммы. Персистентность точки s равна: $\text{pers}(x) = d - b$.

Желательно, чтобы персистентные диаграммы были устойчивыми при возмущении данных. Мерой для изучения сходства между двумя персистентными диаграммами D и E является расстояние bottleneck $d_B(D, E) = \inf_{\gamma} \sup_{x \in D} \|\gamma(x) - x\|_{\infty}$, где γ это различные биекции от D до E : $(x \in D) \rightarrow (\gamma(x) \in E)$. В качестве расстояния между конечными множествами X, Y в метрическом пространстве M можно использовать расстояние Хаусдорфа, определяемое формулой:

$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d_M(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d_M(x, y) \right\}. \quad (1)$$

Для представления топологической информации были предложены различные функции, основанные на результатах обработки баркодов. Непрерывная персистентная функция Бетти определяется как [11]:

$$f(x; L_k) = \sum_j \exp \left(- \left(x - \frac{b_j^k + d_j^k}{2} \right) (w_j (d_j^k - b_j^k))^{-1} \right), \quad (2)$$

где w_j – значения весов.

Для каждого отдельного баркода можно определить кусочно-линейную функцию $f(x, l_j^k)$ [7]:

$$f(x, l_j^k) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin (b_j^k, d_j^k), \\ x - b_j^k & \text{if } x \in \left(b_j^k, \frac{b_j^k + d_j^k}{2} \right], \\ -x + d_j^k & \text{if } x \in \left(\frac{b_j^k + d_j^k}{2}, d_j^k \right). \end{cases} \quad (3)$$

2. Персистентные ландшафты

Персистентный ландшафт k -мерного баркода L_k – это последовательность функций: $\lambda_m^{PL} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, где $\lambda_m(x)$ – m -е наибольшее значение $\{f(x, l_j^k)\}_{j=1}^{N_k}$. Для баркодов $B = \{I_j\}$ можно определить функцию персистентного ландшафта как:

$$\lambda(k, t) = \sup(h \geq 0 \mid [t - h, t + h] \subset I_j, \text{ for } \geq k \text{ different } j).$$

Определим функцию для персистентных диаграмм: $D = \{(b_i, d_i)\}$, $b_i < d_i$: $f_{(b,d)}(t) = \max(0, \min(b + t, d - t))$; тогда $\lambda(k, t) = k\max\{f(b_i, d_i)(t)\}_{i \in I}$, где $k\max$ обозначает k -й наибольший элемент.

Пусть задано множество S . Функция $F : S \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, называется функцией отображения признаков. Ядро на S является таким симметричным отображением $K : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, что для любого n и всех $x_1, \dots, x_n \in S$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$: $\sum_{i,j=1}^n a_i a_j K(x_i, x_j) \geq 0$.

RKHS (Reproducing kernel Hilbert space) на множестве S – это гильбертово пространство функций на S , где точечная оценка – непрерывный линейный функционал. Для заданного отображения характеристик существует ассоциированное ядро, определяемое формулой:

$$K(x, y) = \langle F(x), F(y) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

С ядром K связано гильбертово пространство RKHS $\mathcal{H}_K$, которое является пополнением множества функций $K_x : S \rightarrow \mathbb{R}$, заданных формулой: $K_x(y) = K(x, y)$, $\forall x \in S$, относительно скалярного произведения: $\langle K_x, K_y \rangle = K(x, y)$.

Поскольку функция персистентного ландшафта является отображением характеристик из множества персистентных диаграмм в $L^2(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$, то с ней ассоциируется ядро персистентного ландшафта:

$$K(D^{(1)}, D^{(2)}) = \langle \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_k^{(1)}(t) \lambda_k^{(2)}(t) dt, \quad (4)$$

Для персистентного ландшафта сформируем p -норму:

$$\|\lambda\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda_k(t))^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и: $\|\lambda\|_{\infty} = \sup_{k,t} \lambda_k(t)$, $p = \infty$.

Ядро можно рассматривать как ассоциированное отображение признаков: $D \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(D)$, которое формирует отображение в гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t) g_k(t) dt. \quad (5)$$

Расстояния между персистентными ландшафтами можно определить с помощью нормы L^∞ :

$$\|\lambda^{PL} - \lambda'^{PL}\|_\infty = \sup_{k,t} |\lambda_k^{PL}(t) - \lambda'_k{}^{PL}(t)|,$$

или нормы [12, 13] :

$$\|\lambda^{PL} - \lambda'^{PL}\|_p = \left[\sum_k \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda_k^{PL}(t) - \lambda'_k{}^{PL}(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty. \quad (6)$$

Пример. Аппроксимируем контур 2D изображения House пятью точками одинаковой яркости и одинакового цвета в нотации Matlab:

$$qq_x = [-1, 1, 1, -1, 0]; qq_y = [0, 0, 2, 2, 3].$$

Используя пакет JavaPlex [12, 13], определим баркоды размерности 0: $2 \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1,4142 \end{smallmatrix} \right)$, $2 \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \end{smallmatrix} \right)$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \infty \end{smallmatrix} \right)$; и размерности 1: $\left[\begin{smallmatrix} 2 & 2,82825 \end{smallmatrix} \right)$; см. таблицу 1.

Таблица 1. Баркоды изображения House

Barcode	dim	birth	peak	death
bar1,2	0	(0,0)	(0.707, 0.707)	(1.41,0)
bar3,4	0	(0,0)	(1,1)	(2,0)
bar5	1	(2,0)	(2.414,0.414)	(2.828,0)

Получим функции персистентного ландшафта изображения (см. (3)) для размерности 0:

$$\lambda^{House}(1, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 1]) + (2 - t) \cdot st(t, (1 \dots 2]),$$

$$\lambda^{House}(2, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 0.707]) + (1.414 - t) \cdot st(t, (0.707 \dots 1.414]),$$

где $st(t, (a \dots b])$ – ступенчатая функция:

$$st(t, (a \dots b]) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \in (a \dots b], \\ 0 & \text{if } t \notin (a \dots b]. \end{cases}$$

Аппроксимируем контур 2D изображения House1 пятью точками одинаковой яркости и одинакового цвета в нотации Matlab:

$$qq_x = [-1, 1, 1, -1, 0]; qq_y = [0, 0, 2, 2, 4].$$

Используя пакет JavaPlex [12, 13], определим баркоды размерности 0: $3 \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2.0 \end{smallmatrix} \right)$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2.233 \end{smallmatrix} \right)$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \infty \end{smallmatrix} \right)$; и размерности 1: $\left[\begin{smallmatrix} 2.0 & 2.828 \end{smallmatrix} \right)$; см. таблицу 2.

Таблица 2. Баркоды изображения House1

Barcode	dim	birth	peak	death
bar1,2,3	0	(0,0)	(1.0, 1.0)	(2.0,0)
bar4	0	(0,0)	(1.116, 1.116)	(2.233,0)
bar5	1	(2,0)	(2.414,1.298)	(2.828,0)

Получим функции персистентного ландшафта изображения (см. (3)) для размерности 0:

$$\lambda^{House1}(1, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 1.116]) + (2.233 - t) \cdot st(t, (1.116 \dots 2.233]),$$

$$\lambda^{House1}(2, t) = t \cdot st(t, (0 \dots 1]) + (2 - t) \cdot st(t, (1 \dots 2]).$$

Определим расстояние между изображениями на основании нормы L^2 , используя соотношение (6) и методы топологического анализа данных: $\|\lambda^{House} - \lambda^{House1}\|_2 = 0.5451$.

Использование методов традиционной алгебраической топологии не позволяет различить изображения House и House1, так как они имеют одинаковые числа Бетти. $\square$

Выводы по разделу 2. В разделе рассмотрен метод отображения персистентных диаграмм в гильбертово пространство на основе построения функций персистентного ландшафта. Его преимущества в том что он обратим, поэтому он не теряет никакой информации, и имеет свойства персистентности. Нахождение расстояния между объектами (изображениями) с использованием функций персистентного ландшафта (по формуле (6)) значительно уменьшает объем вычислительных операций по сравнению методом нахождения расстояния по формуле Л. Вассерштейна [2].

3. Многопараметрические персистентные ландшафты

Пусть X – топологическое пространство и $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, называемая фильтрующей функцией. Можно связать семейство топологических подпространств, индексированных векторами $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, индуцированными F : $X_{\mathbf{a}} = \{x \in X : f(x)_i < a_i \forall i = 1, \dots, n\}$; это известно как фильтрация множества подуровней. Для любого $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ такого, что $\{\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \mid a_i \leq b_i, \forall i = 1, \dots, n\}$, имеем отображение включения $X_{\mathbf{a}} \mapsto X_{\mathbf{b}}$. Если H – функтор гомологий, то применение этого функтора к набору $\{X_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n}$ и соответствующим отображениям включения приведёт к семейству векторных пространств $\{H(X_{\mathbf{a}})\}_{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n}$ и линейных отображений $\{H(X_{\mathbf{a}}) \rightarrow H(X_{\mathbf{b}})\}_{\mathbf{a} \leq \mathbf{b}}$, известному как многопараметрический персистентный модуль с множеством подуровней [14, 15].

Пусть M – многопараметрический персистентный модуль, тогда при $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ функция $\beta(\cdot, \cdot)$, задающая соответствующее число Бетти, является ранговым инвариантом M :

$$\beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \dim(\text{Im}(M_{\mathbf{a}} \rightarrow M_{\mathbf{b}})).$$

Многопараметрическая ранговая функция $\text{rk} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ задается формулой:

$$\text{rk}(\mathbf{b}, \mathbf{d}) = \begin{cases} \beta(\mathbf{b}, \mathbf{d}) & \text{if } \mathbf{b} \leq \mathbf{d}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

Перемасштабированная ранговая функция $r : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$r(\mathbf{m}, \mathbf{h}) = \begin{cases} \beta(\mathbf{m} - \mathbf{h}, \mathbf{m} + \mathbf{h}) & \text{if } \mathbf{h} \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Многопараметрический персистентный ландшафт рассматривает максимальный радиус, в котором k признаков сохраняются в каждом (положительном) направлении через $\mathbf{x}$ в пространстве параметров $\lambda : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda(k, \mathbf{x}) = \sup \{ \varepsilon \geq 0 : \beta(\mathbf{x} - \mathbf{h}, \mathbf{x} + \mathbf{h}) \geq k, \forall \mathbf{h} \geq 0, \|\mathbf{h}\|_\infty \leq \varepsilon \}. \quad (8)$$

Пусть $\mathbf{w} \in \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : u_i > 0, \|\mathbf{u}\|_\infty = 1\}$ – весовой вектор, соответствующий перемасштабированию пространства параметров $\mathbb{R}^n$. Определим $\mathbf{w}$ -взвешенную норму $\|\mathbf{h}\|_\infty^{\mathbf{w}}$: $\|\mathbf{h}\|_\infty^{\mathbf{w}} = \|(\mathbf{w} \odot \mathbf{h})\|_\infty$. $\mathbf{w}$ -взвешенный персистентный ландшафт представляет собой функцию $\lambda_{\mathbf{w}} : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda_{\mathbf{w}}(k, \mathbf{x}) = \sup \{ \varepsilon > 0 : \beta(\mathbf{x} - \mathbf{h}, \mathbf{x} + \mathbf{h}) \geq k, \forall \mathbf{h} \geq 0, \|\mathbf{h}\|_\infty^{\mathbf{w}} \leq \varepsilon \}. \quad (9)$$

Декартово произведение функций p -ландшафта соответствует использованию функции персистентного ландшафта по каждой координате и последующему применению p -нормы, $\lambda_p : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lambda_p(k, \mathbf{x}) = \|(\sup \{ h_i \geq 0 : \beta(\mathbf{x} - h_i e_i, \mathbf{x} + h_i e_i) \geq k \})_i\|_p.$$

Определим ландшафтное q -расстояние:

$$d_{\lambda_p}^{(q)}(M, M') = \|\lambda_p(M) - \lambda_p(M')\|_q, \quad (10)$$

где M, M' – многопараметрические персистентные модули.

Выводы по разделу 3. В разделе представлены методы формирования инвариантов для многопараметрических модулей персистентности, которые расширяют результаты для модулей персистентности с одним параметром на многопараметрические модули персистентности. Использование многопараметрических функций персистентного ландшафта повышает разнообразие параметров, характеризующих форму объекта, точность определения расстояния между изображениями объектов.

Заключение

Для повышения производительности моделей топологического анализа данных необходимо ввести функциональные возможности, способные сохранить внутреннюю информацию данных и уменьшить размерность данных. Использование традиционных методов алгебраической топологии для получения информации о форме объекта связано с проблемой формирования малого количества информации. Основным инструментом топологического анализа данных является метод персистентной гомологии, который суммирует геометрическую и топологическую информацию в данных. Использование метода персистентной

гомологии по отношению к традиционным методам алгебраической топологии даёт дополнительную информацию о форме объекта. Применение методов топологического анализа данных для сложных систем большой размерности затруднено из-за методов адекватного представления функций, так как формирование баркодов не обеспечивает функциональную зависимость. Использование стандартных метрик для персистентных диаграмм затрудняет выполнение вычислительных операций. Построение персистентных баркодов и персистентных диаграмм в вычислительной топологии не позволяет построить гильбертово пространство со скалярным произведением. Возможность применения методов топологического анализа данных основано на отображении персистентных диаграмм в гильбертово пространство; одним из способов такого отображения является метод построения персистентного ландшафта.

В работе рассматриваются математические модели персистентных гомологий и функции персистентных ландшафтов представления признаков в методах топологического анализа данных. Функции персистентных ландшафтов отображают диаграммы персистентности в гильбертово пространство. Рассмотрена структура ядра для анализа персистентных диаграмм. Представлены инварианты для многопараметрических модулей персистентности, которые расширяют результаты для модулей персистентности с одним параметром на многопараметрические модули персистентности. Использование многопараметрических функций персистентного ландшафта повышает разнообразие параметров, характеризующих форму объекта, точность определения расстояния между изображениями объектов.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН I.5.1., проект № 0314-2019-0020 и Российского научного фонда, грант № 22-21-00035.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carlsson G. Topology and data // Bulletin of the American Mathematical Society. 2009. V. 46, No. 2. P. 255–308.
2. Edelsbrunner H., Harer J.L. Computational topology: an introduction. American Mathematical Society. 2010.
3. Kusano G., Hiraoka Y., Fukumizu K. Persistence weighted Gaussian kernel for topological data analysis // International conference on machine learning — PMLR. 2016. V. 3. IEEE. P. 2004–2013.
4. Hofer C., Kwitt R., Niethammer M., Uhl A. Deep learning with topological signatures // Advances in neural information processing systems. 2017. V. 30.
5. Hatcher A. Algebraic Topology. Cambridge UP, 2005.
6. Zomorodian A.J. Topology for computing. V. 16. Cambridge UP, 2005.
7. Bubenik P. The persistence landscape and some of its properties / Topological Data Analysis. Springer, Cham, 2012. P. 97–117.

8. Pun C.S., Xia K., Lee S.X. Persistent-Homology-based Machine Learning and its Applications – A Survey. arXiv preprint arXiv:1811.00252. 2018.
9. Ghrist R. Barcodes: the persistent topology of data // Bulletin of the American Mathematical Society. 2008. V. 45, No. 1. P. 61–75.
10. Mischaikow K., Nanda V. Morse theory for filtrations and efficient computation of persistent homology // Discrete & Computational Geometry. 2013. V. 50, No. 2. P. 330–353.
11. Xia K. A quantitative structure comparison with persistent similarity. arXiv preprint arXiv:1707.03572. 2017.
12. Chukanov S. N. Comparison of objects' images based on computational topology methods // Informatics and Automation. 2019. V. 18, No. 5. P. 1043–1065.
13. Chukanov S. N. The Comparison of Diffeomorphic Images based on the Construction of Persistent Homology // Automatic Control and Computer Sciences. 2020. V. 54, No. 7. P. 758–771.
14. Vipond O. Multiparameter Persistence Landscapes // J. Mach. Learn. Res. 2020. V. 21, No. 61, P. 1–38.
15. Botnan M. B., Lesnick M. An introduction to multiparameter persistence. arXiv preprint arXiv:2203.14289. 2022.

FORMATION OF MACHINE LEARNING FEATURES BASED ON COMPUTATIONAL TOPOLOGY METHODS

S.N. Chukanov¹

Professor, Dr.Sc. (Technical), Leading Researcher, e-mail: a@a.ru

I.S. Chukanov²

Student, e-mail: chukanov022@gmail.com

S.V. Leykhter³

Senior Lecturer, e-mail: leykhter@mail.ru

¹Sobolev Institute of Mathematics, Omsk branch, Russia

²Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,
Ekaterinburg, Russia

³Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The use of traditional methods of algebraic topology to obtain information about the shape of an object is associated with the problem of forming a small amount of information: Betti numbers and Euler characteristics. The central tool for topological data analysis is the persistent homology method, which summarizes the geometric and topological information in the data using persistent diagrams and barcodes. Based on persistent homology methods, analysis of topological data can be performed to obtain information about the shape of an object. The construction of persistent barcodes and persistent diagrams in computational topology does not allow one to construct a Hilbert space with a scalar product. The possibility of applying the methods of topological data analysis is based on the mapping of persistent diagrams into the Hilbert space; one of the ways of such mapping is the method of constructing a persistent landscape. Its advantages are that it is reversible, so it does not lose any information, and it has persistence properties. The paper considers mathematical

models and functions for representing persistent landscape objects based on the persistent homology method. Methods for converting persistent barcodes and persistent diagrams into persistent landscape functions are considered. Associated with persistent landscape functions is a persistent landscape kernel that forms a mapping into a Hilbert space with a dot product. A formula is proposed for determining the distance between persistent landscapes, which allows you to find the distance between images of objects. The persistent landscape functions map persistent diagrams to Hilbert space. Examples of determining the distance between images based on the construction of persistent landscape functions for these images are given. Representations of topological characteristics in various models of computational topology are considered. Extended results for single-parameter persistence modules to multi-parameter persistence modules.

Keywords: pattern recognition, multi-parameter persistent landscape, Hilbert space, topological data analysis.

Дата поступления в редакцию: 20.11.2022

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ПРОКТОРИНГА ДЛЯ ПЛАТФОРМЫ GOOGLE ФОРМЫ

А.Л. Голованов

аспирант, e-mail: agolovanov@yahoo.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работе представлено описание разработанных автором программных модулей для организации системы автоматизированного прокторинга при онлайн-тестировании. Приводится анализ созданного с помощью разработанных программ датасета о прохождении тестирований и описание использованных методов для автоматического определения нечестности прохождения тестирования.

Ключевые слова: онлайн прокторинг, программное обеспечение, сбор данных, анализ данных.

Введение

В современном мире в связи с широким развитием скорости и доступности Интернета ему находят всё новые применения. Сейчас всё чаще различные мероприятия, такие как лекции, встречи, выступления, практические занятия, проходят онлайн. Такими же привычными стали тестирования, собеседования, соревнования по программированию, проходящие удалённо.

Однако в удалённом формате большой проблемой оказывается проверка того, выполнял ли тестируемый задания самостоятельно, не пользовался ли он посторонним материалом. Наблюдение за тестируемым во время выполнения заданий не даёт гарантий того, что попыток списывания не будет или того, что человек сможет их заметить. Также такое наблюдение может оказывать психологическое давление на сдающего, что может сказаться на итоговом результате работы [1]. Проверка записанного сеанса сдачи в свою очередь влечёт за собой большие затраты по времени и также имеет человеческий фактор. Одним из вариантов контроля, который поможет избежать озвученных проблем, является некоторая автоматизированная система прокторинга.

Настоящая работа посвящена реализации нескольких программных модулей, предназначенных для отслеживания и сбора данных о действиях пользователя во время онлайн-теста и последующий их анализ для определения вероятности списывания.

В качестве платформы для проведения тестов в работе используется сервис «Google Формы». Такой выбор обусловлен сразу несколькими его преимуществами:

- **Обширная функциональность.** Несмотря на название, Google Формы предоставляют широкие возможности для кастомизации тестовых заданий. Тест может содержать поля для краткого и подробного письменного ответа, вопросы с выбором одного или нескольких правильных ответов, сетку множественного выбора ответа, поля для загрузки файлов. Также тестовое задание может включать в себя изображения и видео, которые могут использоваться для формулировки вопроса, есть возможность создать тест из нескольких разделов. Администраторская функциональность также включает возможность делать тест доступным только на определённый период времени, дать или запретить возможность повторных попыток, просматривать присланные ответы и получать статистические данные по ним;
- **Регистрация.** Для создания форм достаточно иметь Google-аккаунт, а заполнять их можно даже без аккаунта;
- Google не взимает никакой оплаты за проведение тестирования на их платформе и не показывает какой-либо рекламы;

В дальнейшем, к разработанной системе прокторинга можно добавлять новые платформы, на которых может происходить тестирование.

1. Программный сбор данных о действиях пользователя

Первым компонентом программного комплекса для прокторинга является модуль сбора данных о действиях пользователя. Так как сервис «Google Формы» доступен для работы с ним в любом веб-браузере, модулем сбора данных будет являться разработанное расширение для браузера. Расширения для браузера позволяют расширить функциональность браузера или сайта. С их помощью можно изменять содержимое сайта, получать доступ к информации о браузере, а также некоторой информации о компьютере пользователя. Для разработки расширений используются стандартные веб-технологии, такие как JavaScript, HTML и CSS. Таким образом, с помощью специального расширения можно реализовать сбор данных и отправку их на сервер.

Перед его реализацией были составлен список признаков, которые будут максимально информативны и смогут показать наиболее подробно те действия, которые совершал пользователь во время тестирования. Список событий и собираемая информация выглядит следующим образом:

1. Открытие и обновление информации во вкладке браузера:

- URL-адрес страницы;
- название вкладки;
- порядковый номер вкладки;
- дата и время случившегося события;

- флаг того, что работает ли сейчас со вкладкой пользователь;
 - флаг того, что вкладка открыта в режиме «инкогнито»;
 - статус загрузки вкладки;
2. Переключение на какую-либо вкладку браузера:
- URL-адрес страницы;
 - название вкладки;
 - порядковый номер вкладки;
 - дата и время переключения;
3. Перемещение курсора мыши за пределы окна браузера:
- дата и время выхода;
4. Возвращение курсора мыши в окно теста:
- дата и время входа;
5. Выбор ответа в вопросе с одним вариантом ответа:
- текст вопроса;
 - текст ответа;
 - номер ответа;
 - дата и время ответа;
6. Выбор ответа в вопросе с несколькими вариантами ответов:
- текст вопроса;
 - текст ответа;
 - номер ответа;
 - дата и время ответа;
7. Побуквенное заполнение текста в поле краткого или подробного ответа на вопрос:
- текст вопроса;
 - текст ответа;
 - дата и время ответа;
8. Завершение теста:
- дата и время завершения;
 - название теста;
 - данные о пользователе (имя тестируемого);

9. Очистка формы от заполненных ответов:

- дата и время события;

10. Переход на страницу новой попытки решения:

- дата и время события;

2. Серверная часть программного комплекса

Для реализации серверного приложения был использован фреймворк Flask, написанный на языке Python. Выбор этого языка и фреймворка позволил избежать проблем с вызовом Python-программы для анализа собранных данных из другого языка программирования.

Для хранения данных о прохождении тестов использована база данных MongoDB, так как она позволяет сохранять данные в формате JSON документов без лишней обработки и получать их по запросу.

3. Сбор данных для датасета

Для реализации методов автоматизированного определения списывания необходим специальный датасет, в котором будут присутствовать все выбранные признаки. Датасет был собран с помощью студентов Новосибирского Государственного Технического Университета, проходивших на курсе по операционным системам периодическое тестирование с целью выявить качество остаточных знаний после лекции. Для этих целей были применены разработанные программные модули по сбору и сохранению данных. Перед массовым объявлением о тестировании двое студентов проверили работоспособность подготовленных программ и качество подготовленной инструкции.

В начале лекции студентам предоставлялось время на прохождение теста по теме предыдущей лекции. Тем, кто согласился на участие в эксперименте, было установлено разработанное расширение для сбора данных, автоматически запускавшееся при открытии формы с нужным тестом. По завершению теста отслеживание останавливалось. В ходе эксперимента были собраны данные о прохождении 4 тестов группой примерно из 20 человек.

В базе данных содержится больше 40 различных сессий с записью действий тестируемых студентов, собранных во время проводимых экспериментов. Действия содержат либо исключительно выполнение заданий, либо не связанные с прямым выполнением теста. Это не означает, что любые события, не относящиеся к отправке ответов, являются недопустимыми, так как тестируемый теоретически может совершать любые действия, не направленные на списывание.

Очевидно, нечестным выполнением теста будет являться сессия, содержащая запись с поисками похожей темы, что и просматриваемый сейчас вопрос. Ниже продемонстрирован пример того, каким будет сообщение при поисковом запросе во время прохождения тестирования.

```
{
  "_id": "6217305dec45c7bcac5c2ea0",
  "testSessionId": "H6xSYwyjtvvjA0LKq8hIq",
  "testId": "...",
  "createdAt": "2022-02-24T07:14:36.003Z",
  "type": "TAB_EVENT",
  "event": {
    "url": "https://yandex.ru/search/?clid=2341036-605...",
    "title": "Критическая секция - Яндекс: нашёлся 1 млн рез...",
    "active": true,
    "incognito": false,
    "index": 4,
    "status": "complete"
    "audible" false,
    "selected" true
  }
}
```

Для лучшего понимания устройства датасета и его содержимого, будет приведён подробный пример записи одного из сеансов по прохождению теста. Идентификатор рассматриваемой записи: Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ.

Время начала выполнения теста считается с момента отправления первого сообщения о событии. На листинге ниже продемонстрировано это событие об обновлении вкладки браузера с тестом на сайте «Google Формы», описания содержимого сообщений приведено ниже.

```
{
  "_id": "62172f69ec45c7bcac5c2a4c",
  "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
  "testId": "...",
  "createdAt": "2022-02-24T07:10:34.482Z",
  "type": "TAB_EVENT",
  "event": {
    "url": "https://docs.google.com/forms/d/e/.../viewform",
    "title": "Тест №2",
    "active": true,
    "incognito": false,
    "index": 42,
    "status": "complete"
    "audible" false,
    "selected" true
  }
},
{
  "_id": "62172f69ec45c7bcac5c2a4e",
  "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
  "testId": "...",
  "createdAt": "2022-02-24T07:10:34.595Z",
  "type": "MOUSE_ENTER_EVENT",
  "event": {
    "isTrusted": true
  }
},
```

В данном случае следующим событием оказалось событие о том, что курсор мыши пользователя вошёл в границы экрана браузера. В дальнейшем, все события о входе и выходе курсора считаются парными, то есть после выхода курсора за пределы экрана курсор обязательно вернётся, то есть будет отправлено сообщение о входе в экран.

Когда экзаменуемый отвечает на вопрос, имеющий один или несколько вариантов ответа, и отмечает выбранный вариант, формируется сообщение. В нём будет содержаться информация о вопросе и ответе, аналогичное сообщение будет отправлено при изменении выбранного ответа. Пример сообщений приведён ниже.

```
{
  "_id": "62172f69ec45c7bcac5c2aa6",
  "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
  "testId": "...",
  "createdAt": "2022-02-24T07:11:04.674Z",
  "type": "SOLUTION_CHECKBOX_EVENT",
  "event": {
    "taskNumber": 1,
    "taskTitle": "1. Критическая секция",
    "taskType": "checkbox",
    "answerNumber": 3,
    "answerTitle": "предотвращает одновременное использование..."
  }
},
{
  "_id": "62172f69ec45c7bcac5c2afd",
  "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
  "testId": "...",
  "createdAt": "2022-02-24T07:11:21.522Z",
  "type": "SOLUTION_CHECKBOX_EVENT",
  "event": {
    "taskNumber": 2,
    "taskTitle": "2. В режиме ядра",
    "taskType": "checkbox",
    "answerNumber": 1,
    "answerTitle": "выполняется код ядра ОС"
  }
},
```

В какой-то момент тестируемый столкнулся с вопросом, на который он не знает ответа. Это видно по тому, что в фрагменте записи прохождения теста, показанной на рисунке, появилось сообщение о поисковом запросе в Google и открытая страница, где он хотел найти верный ответ.

```
{
  "_id": "62172f69ec45c7bcac5c329d",
  "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
  "testId": "...",
  "createdAt": "2022-02-24T07:19:31.591Z",
  "type": "TAB_EVENT",
  "event": {
```

```

        "url": "https://www.google.com/search?q=%D0%BF%D1%80%D0...",
        "title": "промежуточная таблица записей процессов - Поиск...",
        "active": true,
        "incognito": false,
        "index": 3,
        "status": "complete"
        "audible" false,
        "selected" true
    }
},
{
    "_id": "62172f69ec45c7bcac5c32cc",
    "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
    "testId": "...",
    "createdAt": "2022-02-24T07:19:42.053Z",
    "type": "TAB_EVENT",
    "event": {
        "url": "https://docstore.mik.ua/bach/glava_11.htm",
        "title": "2.2 ВВЕДЕНИЕ В ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СИСТЕМЫ",
        "active": true,
        "incognito": false,
        "index": 3,
        "status": "complete"
        "audible" false,
        "selected" true
    }
},

```

Тест завершается, когда итоговая форма была отправлена, о чём также приходят сразу несколько сообщений: уведомление о завершении, название теста. Также в данном случае было отправлено сообщение об автоматической перезагрузке вкладки с тестом. Это произошло из-за того, что на стороне расширения завершение тестируемого до конца не успело обработаться.

```

{
    "_id": "62172f69ec45c7bcac5c3273",
    "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
    "testId": "...",
    "createdAt": "2022-02-24T07:29:54.416Z",
    "type": "FORM_SOLUTION_SENT_EVENT",
    "event": {
        "isTrusted" true
    }
},
{
    "_id": "62172f69ec45c7bcac5c3276",
    "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
    "testId": "...",
    "createdAt": "2022-02-24T07:29:54.417Z",
    "type": "FORM_TEST_TITLE_EVENT",
    "event": {
        "testTitle": "Тест №2",
        "testDescription": "основные понятия ОС Unix",
    }
}

```

```
    },
    {
      "_id": "62172f69ec45c7bcac5c3c75",
      "testSessionId": "Z4oSpPxLXwtv17Vt1WDvJ",
      "testId": "...",
      "createdAt": "2022-02-24T07:29:54.420Z",
      "type": "TAB_EVENT",
      "event": {
        "url": "https://docs.google.com/forms/d/e/.../viewform",
        "title": "Тест №2",
        "active": true,
        "incognito": false,
        "index": 0,
        "status": "complete"
        "audible" false,
        "selected" true
      }
    },
  ],
```

4. Определение списывания

Разработка модуля по определению списывания производилась с помощью языка программирования Python 3.8 и множества различных библиотек и фреймворков для машинного обучения и нейронных сетей, о которых более подробно будет написано ниже.

Задача по определению списывания была разделена на несколько подзадач по типу событий и тому, как можно воспользоваться полученной информацией. Это позволило применить разные подходы и алгоритмы для получения нужного результата.

События по выходу курсора за пределы окна браузера и его возвращению объединены в один список. Это позволяет построить последовательность, отсортированную по времени с начала теста для пользователя и до его завершения. Первым элементом в списке данных всегда является событие о выходе за пределы окна, так как при старте теста курсор находится внутри окна. Последним элементом — событие о возвращении курсора в окно браузера.

Для определения подозрительной активности тестируемого было решено рассмотреть данную задачу как задачу о кластеризации промежутков времени, во время которых курсор мыши был вне теста. Для этого список событий был разделён на события о выходе и возвращении курсора. Строковое представление даты и времени в формате ISO 8601 в обоих списках заменяется на целочисленную сумму минут, секунд и миллисекунд с нужными коэффициентами. В качестве выборки для кластеризации взят модуль разницы между двумя промежутками времени.

Полученная выборка передаётся в алгоритм кластеризации, разбивающий все точки на два кластера: «нормальные» и «подозрительные». В кластер «нормальные» должны попадать точки близкие к координатной прямой, что говорит о краткосрочности потери фокуса. В кластер «подозрительные» должны попасть

самые большие промежутки, находящиеся на самом значительном расстоянии от координатной прямой.

Проверка того, сколько и какие точки попадали классифицировались как «нормальные» и «подозрительные», проводилась с помощью графиков с изображениями точек классов и их принадлежности данным в датасете. Для этого бралась случайная сессия из датасета, её события о выходе и входе курсора и время появления этого события.

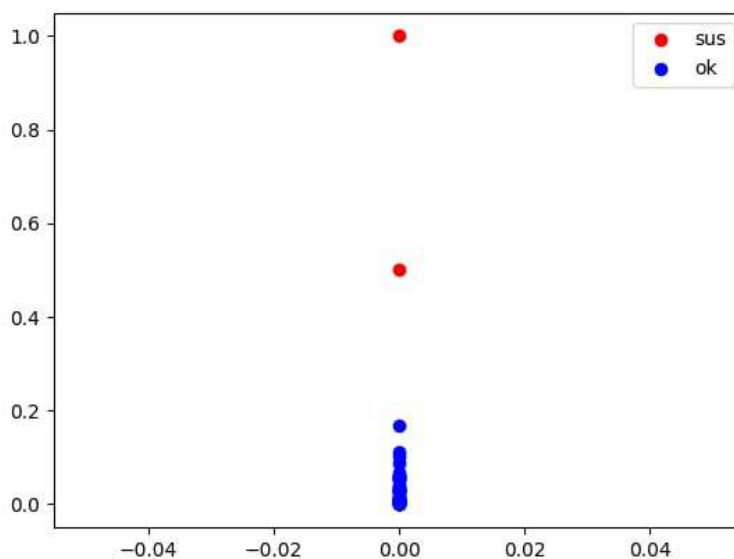


Рис. 1. Пример кластеризации промежутков отвлечения, когда тестируемый отводил курсор более двух раз

В примере на рисунке 1 видно, что всего две точки были определены в класс «подозрительные» (отмечены красным цветом на рисунке) из-за наибольшей продолжительности отвлечения от теста. Остальные же были определены в класс «нормальные» (отмечены синим цветом) из-за крайне короткого промежутка отсутствия курсора внутри браузера.

В записи сеанса тестирования, проверенного на рисунке 2, количество выходов курсора за пределы браузера уже намного больше. Особенно тех, которые были приняты за подозрительные. Здесь, как и в прошлом примере, важнейшим фактором является размер промежутка отсутствия, что влияет на итоговую оценку честности.

Следующими данными для обработки были события по обновлению вкладок браузера и данные о выполненных заданиях. В этих данных проверялся следующий факт: если пользователь выполнял задание честно, то в истории его вкладок не должны присутствовать формулировки вопросов заданий или формулировки ответов.

Делать такую проверку «наивно» нельзя, поиск полной фразы из формулировки задания не сможет распознать тот факт, что тестируемый мог перефразировать вопрос, же искать какую-то часть фразы из вопроса.

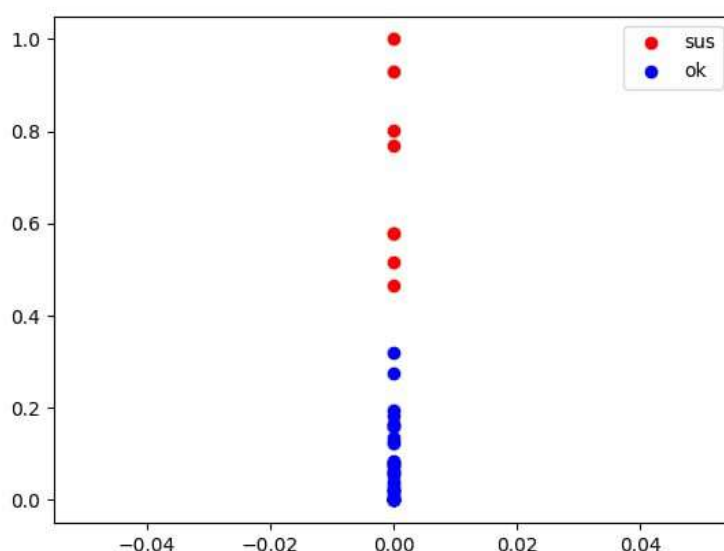


Рис. 2. Пример кластеризации промежутков отвлечения, когда тестируемый часто убирал курсор за пределы браузера

Правильная проверка должна заключаться в проверке названия поискового запроса или названия вкладки браузера на схожесть с текстом вопроса. Для этого необходимо реализовать или же воспользоваться методом проверки строк на схожесть.

Для реализации проверки на схожесть названия вкладки с формулировкой задания была использована библиотека `sklearn` и имеющийся в ней модуль векторизации данных `TfidfVectorizer`. В нём реализован достаточно эффективный метод векторизации слов, основанный на преобразовании слов в эмбединги — числовые вектора. Существуют разные способы построения таких векторов, но `TfidfVectorizer` основан на частоте повторения слов в переданном словаре (исходном тексте) [3].

Этот способ векторизации был применён таким образом, что из формулировок вопросов, на которые ответил тестируемый, строится словарь. Затем, пошагово проверяются тексты всех открываемых в момент теста вкладок на схожесть с имеющимся словарём. В тех случаях, когда результат сравнения выдаёт высокое значение схожести, найденный запрос сохраняется отдельно для запоминания его соответствия с вопросом теста (см. табл. 1).

Однако, некоторые испытуемые могут искать ответ на необходимый вопрос на английском языке. Возникновение такой ситуации крайне вероятно при прохождении тестов на технические темы, когда значительная часть актуальной и точной информации написана на английском языке. На такой случай проверка в проверку на схожесть формулировок заданий и запросов был добавлен второй этап. Во время него формулировки вопросов и ответов сначала переводятся на английский язык с помощью NLP библиотеки `translate` для языка Python, а затем проверка на схожесть с помощью `TfidfVectorizer` проводится ещё раз.

Последним рассмотренным типом событий было событие о вписывании от-

Таблица 1. Пример одной итерации сравнения поискового запроса с частью формулировок вопросов и ответов теста

No	texts	similar
1	1. Критическая секция процесса	0.816497
2	доступна только тем процессам, созданным ядром ОС	0.000000
3	предотвращает одновременное использование неск...	0.000000
4	2. В режиме ядра	0.000000
5	выполняется код ядра ОС	0.000000
6	3. Механизм квантования времени реализует	0.000000
7	подсистема управления процессами	0.000000
8	4. Смена контекста выполняется	0.000000
9	при переходе из режима ядра в заблокированное...	0.000000
10	при переходе из заблокированного состояния в....	0.000000

вета в область краткого или развёрнутого ответа. Было выдвинуто предположение, что участник, выполняющий задания нечестно, может воспользоваться подходом «копировать-вставить», когда ответ на вопрос не набирается на клавиатуре посимвольно, а вставляется сразу полностью из буфера обмена компьютера. Частое присутствие такого типа событий среди хронологии выполнения теста может говорить о том, что тестируемый каким-то образом смог найти подходящий, по его мнению, ответ и выдать его за свой.

Так как расширение для браузера для вопросов с письменным ответом отправляет сообщения на каждое нажатие клавиши клавиатуры, определить одномоментно появившуюся строку с ответом можно с помощью комбинирования проверки на последовательное изменение текста ответа и проверки нового значения на схожесть со старым при резком изменении ответа.

При нахождении не поэтапного набора текстового ответа на вопрос и его значительном отличии от предыдущего, вопрос, на котором это произошло, а также введённый ответ сохраняются.

После проверки всего списка событий, которые были сгенерированы проверяемым во время онлайн-тестирования, создаётся отчёт в виде JSON объекта, в который включаются данные о проводимом тесте и тех действиях, которые были восприняты разработанной системой как «подозрительные». Такой вид результата обработки позволит защитить тестируемого на появление каких-либо непредвиденных ошибок или возможных ложных срабатываний, которых всё же полностью невозможно избежать. Проверяющий же в таком случае сможет сам увидеть, на каких вопросах какое поведение или ответ посчитала подозрительным и вынести свой окончательный ответ о полученном результате.

Заключение

Результатом работы является разработанный программный комплекс, позволяющий внешне дополнить функциональность сервиса «Google Формы» средством автоматизированного прокторинга на основе действий пользователя во время прохождения онлайн-тестирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Conijn R., Kleingeld A., Matzat U., Snijders, C. The fear of big brother: The potential negative side-effects of proctored exams // Journal of Computer Assisted Learning. 2022. P. 1521-1534. doi: 10.1111/jcal.12651.
2. Воронцов К.В. Лекции по алгоритмам кластеризации и многомерного шкалирования. URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/Clustering.pdf> (дата обращения: 25.05.2022).
3. TfidfVectorizer — scikit-learn 1.1.1 documentation. URL: https://scikit-learn.org/stable/modules/generated/sklearn.feature_extraction.text.TfidfVectorizer.html (дата обращения 25.05.2022).

DEVELOPMENT OF AN AUTOMATED PROCTORING SYSTEM FOR GOOGLE FORMS

A.L. Golovanov

Ph.D. Student, e-mail: agolovanov@yahoo.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The paper presents a description of software modules developed by the author to create a system of automated proctoring for online testing. The analysis of the data set created with the help of the developed programs and the description of the methods used to automatically determine the dishonesty of testing is given.

Keywords: online proctoring, software, data collection, data analysis.

Дата поступления в редакцию: 20.11.2022

ПРОТОКОЛ ОБМЕНА КРИПТОГРАФИЧЕСКИМИ КЛЮЧАМИ В МУЛЬТИМАРШРУТНОЙ СРЕДЕ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

А.А. Богаченко¹

студент, e-mail: bogachenko03@mail.ru

Н.Ф. Богаченко²

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

Д.Д. Лаврова²

студент, e-mail: drlvrv@gmail.com

Д.Н. Лавров²

к.т.н., доцент, e-mail: dmitry.lavrov72@gamil.com

¹Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

²Омский государственный университет им. Ф.М.Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье предлагается принципиально новый протокол обмена криптографическими ключами, использующий наличие нескольких альтернативных маршрутов передачи данных в сети с коммутацией пакетов, при условии, что не все маршруты контролируются потенциальным противником.

Ключевые слова: протокол обмена, криптографические ключи, сеть с коммутацией пакетов, защита информации.

1. Мотивация

Современные распределённые компьютерные сети представляют собой сложную систему узлов (компьютеров и активного сетевого оборудования), которая описывается семиуровневой эталонной моделью взаимодействия открытых систем [1].

Как правило сети реализуются на технологии коммутации каналов или пакетов. В обоих случаях подразумевается наличие одного установленного канала или маршрута между взаимодействующими узлами.

Тем не менее, существуют технологии, которые позволяют предавать данные по нескольким путям одновременно, например [2]. Как правило, цель этих технологий — это увеличение потока передаваемых данных и повышение отказоустойчивости канала связи (с точки зрения доставки данных).

Интересным направлением является построение собственных сетей связи поверх существующей инфраструктуры публичных сетей. Осуществляться это за счёт разных технологий, в том числе технологии VPN [3] (реализуемые на разных уровнях модели OSI со 2 по 4), так и сетей Dark Internet типа

I2P [4] или TOR [5]¹.

В нашей статье мы покажем что такие мультимаршрутные сети можно использовать для повышения уровня конфиденциальности передаваемых данных.

В предыдущих статьях [7–11] рассматривались вопросы передачи с защитой передаваемой информации на основе различных вариантов протокола разделения секрета. Основным недостатком использования классических вариантов разделения секрета является тот факт, что размеры теней, как правило равны размерам самого сообщения. В дальнейшем в нашей статье мы рассмотрим вариант с существенно меньшей избыточностью.

С другой стороны для обеспечения конфиденциального канала передачи данных, необходим обмен криптографическими ключами между адресатом и отправителем. Для этого используют протоколы на основе асимметричной криптографии. Для взлома асимметричной системы шифрования используется знание открытого ключа, который, как правило, передаётся по открытому же каналу связи. Считается, что это сложная задача для современной вычислительной техники. В тоже время, в последние годы активно ведутся работы по достижению, так называемого «квантового превосходства», идёт гонка за первенство в построении квантового вычислителя. В связи с этим возникает угроза взлома криптосистем на основе асимметричного ключа с помощью алгоритма Шора [6]. Возникает проблема «взлома из будущего»: взлом ранее перехваченных данных обмена ключами. Под угрозой взлома вся современная криптографическая инфраструктура распределения ключей.

Мы предлагаем использовать мультимаршрутные сети для повышения защищённости процедуры передачи открытого ключа шифрования и защиты как от перехвата передачи, так и от «взлома из будущего» при соблюдении определённых условий.

2. Постановка задачи

Имеется мультимаршрутная сеть, в которой между отправителем и получателем можно построить n независимых маршрутов (т.е. не имеющих общих участков). Потенциальный противник может контролировать часть из них, но не все.

Требуется передать сообщение, содержащее информацию о ключе, получателю через мультимаршрутную сеть так, чтобы перехватив часть фрагментов сообщения потенциальный противник не был в состоянии восстановить по ним ключ.

Одним из подходов к решению данной задачи может быть использование алгоритмов разделения секрета [1]. Ранее мы уже упоминали, что основным недостатком такого подхода является избыточность: размер каждой тени (части секрета) равен размеру всего сообщения. Предлагаем иной подход.

¹В момент написания статьи проект TOR заблокирован Роскомнадзором на территории РФ, URL: <https://habr.com/ru/news/t/596507/>

3. Идея алгоритма

Идея алгоритма основана на результатах [8]. Суть алгоритма обмена ключами в многоканальной среде передачи данных заключается в следующем:

Шаг 1. Формируем ключ истинно случайным образом (с соблюдением требований безопасности конкретной асимметричной криптосистемы).

Шаг 2. Разбиваем ключ K на число фрагментов равное количеству используемых каналов $K_1, \dots, K_n$.

Шаг 3. Формируем данные для передачи по i -му каналу:

$$D_i = K_i \oplus K_{i+1}, i = \overline{1, n-1}$$

Шаг 4. Формируем данные для передачи по последнему n -му каналу:

$$D_n = K_n \oplus (K_1 \gg 1).$$

Для усиления безопасности вместо циклического сдвига можно использовать произвольную не тождественную перестановку, о которой взаимодействующие стороны должны договориться заранее.

Действия на принимающей стороне.

Шаг 1. Получаем $D_1, \dots, D_n$.

Шаг 2. Вычисляем $P = \bigoplus_{i=1}^n D_i = K_1 \oplus (K_1 \gg 1)$.

Шаг 3. Полагая первый бит заданным заранее в K_1 , решаем уравнение с предыдущего шага и находим K_1 .

Шаг 4. Восстанавливаем оставшиеся части ключа

$$K_i = D_i \oplus K_{i-1}, \text{ для } i = \overline{2, n-1};$$

$$K_n = D_n \oplus (K_1 \gg 1).$$

В случае если злоумышленник контролирует все каналы передачи, то он способен перехватить открытый ключ и сложность взлома будет определяться сложностью вскрытия используемой открытой шифросистемы. Во всех остальных случаях информация о ключе не доступна напрямую. Рассмотрим случай, когда злоумышленник контролирует k каналов передачи информации, тогда мощность пространства перебираемых ключей сокращается с 2^m до $2^{m \cdot (n-k+1)/n}$.

Поясним работу алгоритма на примере при $k = 3$. Пусть $m = 9$, договорённость о первом бите ключа — всегда единица.

Шаг 1. Сгенерирован случайный ключ $K = 101110010$ (за исключением первого бита)

Шаг 2. $K_1 = 101, K_2 = 110, K_3 = 010$.

Шаг 3. $D_1 = K_1 \oplus K_2 = 101 \oplus 110 = 011$ $D_2 = K_2 \oplus K_3 = 110 \oplus 010 = 100$.

Шаг 4. $D_3 = K_3 \oplus (K_1 \gg 1) = 010 \oplus (101 \gg 1) = 010 \oplus 110 = 100$.

На принимающей стороне

Шаг 1. Получены $D_1 = 011, D_2 = 100, D_3 = 100$.

Шаг 2. $D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 = 011 \oplus 100 \oplus 100 = 011$.

Шаг 3. Решаем уравнение для бит $K_1 = \overline{x_1 x_2 x_3} \ 110 = \overline{x_1 x_2 x_3} \oplus \overline{x_3 x_1 x_2}$. Считая $x_1 = 1$, получаем

$$1 \oplus x_3 = 0$$

$$x_2 \oplus 1 = 1$$

$$x_3 \oplus x_2 = 1$$

Следовательно, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$, а $K_1 = 101$.

Шаг 4. Восстанавливаем оставшиеся части ключа. $K_2 = D_1 \oplus K_1 = 011 \oplus 101 = 110$; $K_3 = D_2 \oplus K_2 = 100 \oplus 110 = 010$.

Заключение

Надёжность данного протокола в случае отсутствия контроля злоумышленником всех каналов передачи данных обусловлена фундаментальным результатом К. Шеннона об совершенной криптостойкости шифра Вернама в режиме работы одноразового блокнота. Действительно, основной операцией вычисления фрагментов секрета является операция исключающего ИЛИ, а гамма, накладываемая на фрагмент сообщения, — истинно случайна и повторно никогда не используется.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ Р ИСО/МЭК 7498-1-99. ВОС. Базовая эталонная модель. Часть 1. Базовая модель.
2. Балансировка нагрузки между каналами связи используя протокол EIGRP на маршрутизаторах CISCO. URL: https://nettips.ru/article/cisco_eigrp_balans.html (дата обращения: 26.11.2022).
3. Куртуков Е. IPSec всемогущий // Хабр. URL: <https://habr.com/ru/post/504484/>
4. I2P. Проект The Invisible Internet. URL: <https://geti2p.net/ru/>
5. TOR Project. URL: <https://www.torproject.org/> (дата обращения: 26.11.2022).
6. Shor P.W. Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // Foundations of Computer Science : Conference Publications. 1997. P. 1484–1509.
7. Ефимов В.И., Файзуллин Р.Т. Система мультиплексирования разнесенного TCP/IP трафика // Математические структуры и моделирование. 2002. № 10. С. 170–171.
8. Лавров Д.Н. Схема разделения секрета для потоков данных маршрутизируемой сети // Математические структуры и моделирование. 2002. № 10. С. 192–197.
9. Лавров Д.Н., Дулькейт В.И., Михайлов П.И., Свенч А.А. Анализ надёжности алгоритма разделения секрета в сетевых потоках // Математические структуры и моделирование. 2003. № 12. С. 146–154.
10. Гусс С.В., Лавров Д.Н. Подходы к реализации сетевого протокола обеспечения гарантированной доставки при мультимаршрутной передаче данных // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 95–101.
11. Лавров Д.Н. Принципы построения протокола гарантированной доставки сообщений // Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 139–146.
12. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. М : ТРИУМФ, 2002. 816 с.

PROTOCOL FOR THE EXCHANGE OF CRYPTOGRAPHIC KEYS IN A MULTIPATH DATA TRANSMISSION MEDIA

Bogachenko A.A.¹

Student, e-mail: bogachenko03@mail.ru

Bogachenko N.F.²

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

Lavrova D.D.²

Student, e-mail: drlvrv@gmail.com

Lavrov D.N.²

Ph.D.(Eng.), Associate Professor, e-mail: dmitry.lavrov72@gamil.com

¹ITMO University, St. Petersburg, Russia

²Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The article proposes a fundamentally new cryptographic key exchange protocol that uses the presence of several alternative data transmission routes in a packet-switched network, provided that not all routes are controlled by a potential adversary.

Keywords: exchange protocol, cryptographic keys, packet-switched network, information security.

Дата поступления в редакцию: 27.11.2022

СХЕМА РАЗДЕЛЕНИЯ СЕКРЕТА МЕЖДУ ИЕРАРХИЧЕСКИ СВЯЗАННЫМИ УЧАСТНИКАМИ

Н.Ф. Богаченко

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье рассматривается расширение протокола разделения секрета, учитывающее заданное на множестве участников отношение порядка. Порог схемы определяется узлами иерархии, потомки которых образуют полный набор листовых узлов. Алгоритм разделения секрета основан на вычисляемых ключевых материалах.

Ключевые слова: разделение секрета, иерархическая схема, вычисляемые ключи доступа.

Введение

Идея распределения секрета среди некоторой группы участников заложена в схему разделения секрета. При этом вводится понятие (k, n) -пороговой схемы: секрет делится между n участниками так, чтобы любые k и более участников могли восстановить секрет, но никакое меньшее число участников не могло бы получить никаких сведений о секрете. Наиболее известные протоколы разделения секрета — это схема Блэкли, основанная на свойствах пересечения $k - 1$ -мерных гиперплоскостей в k -мерном пространстве [1, 2], и схема Шамира, в основе которой лежит тот факт, что для интерполяции многочлена степени $k - 1$ требуется k точек [1, 3].

В классических схемах разделения секрета считается, что все субъекты, между которыми делится секрет, равноправны. Предположим теперь, что множество участников протокола (множество субъектов) V является частично упорядоченным. Заданное отношение порядка порождает орграф $G = (V, E)$, описывающий иерархию субъектов. Множество узлов этого орграфа определяется множеством субъектов V , а на множество дуг E накладывается требование отсутствия ориентированных циклов (в силу антисимметричности отношения порядка).

Примером такой иерархии может являться иерархия ролей в ролевой политике разграничения доступа [4, 5]. В этом случае каждый участник протокола — элемент множества V — будет представлять группу пользователей или роль. Другие источники, порождающие иерархию субъектов, — это служба каталогов Active Directory или структура распределённой компьютерной информационной системы [6].

Основная идея использования отношения порядка в схеме разделения секрета заключается в следующем: чем выше в иерархии участники протокола, тем меньшее их число необходимо для восстановления секрета. Впервые этот подход был описан в работе [3], при этом предполагалось, что чем выше субъект в иерархии, тем больше долей секрета (теней) он получает. Подобное решение поставленной задачи было расширено до многоуровневой схемы разделения секрета [7], предлагалось делить секрет на несколько теней по числу ярусов в иерархии, а затем каждую тень разбивать на подтени и раздавать на своём уровне. Так называемые совершенные схемы разделения секрета рассмотрены в обзорной работе [8]: задаётся структура доступа в виде графа, который определяет участников, имеющих возможность узнать секрет, если соберутся вместе. При этом ребром соединяются вершины, которые могут восстановить секрет, а любое независимое множество вершин не получает о секрете никаких знаний. В статье [9] представлен протокол разделения секрета, использующий схему Шамира и учитывающий иерархию участников за счёт вычислимых ключевых материалов. В данной работе также используются вычисляемые ключи доступа, подобно алгоритму распределения криптографических ключей, представленному в работе [10].

1. Протокол разделения секрета для древовидной структуры

Пусть требуется разделить секрет S между участниками множества V , на котором задано отношение порядка, определяемое ориентированным деревом $T = (V, E)$. Пусть L — это множество листовых вершин ориентированного дерева T : $L = \{v_{l_1}, \dots, v_{l_m}\}$ и $|L| = m$. Схема разделения секрета для древовидной иерархии участников протокола состоит из следующих шагов.

1. Ориентированному дереву T сопоставляется помеченное ориентированное дерево T_D по правилу: каждому узлу v_i ориентированного дерева T приписывается метка — уникальный идентификатор D_i . Далее ориентированное дерево T_D называется деревом доступа.
2. Выбирается классическая схема разделения секрета. На её основе реализуется (m, m) -пороговый протокол: секрет S разделяется на m теней $S_1, \dots, S_m$. При этом для восстановления секрета S требуется собрать все m построенных теней.
3. Выбирается симметричный криптографический алгоритм: $\mathbf{E}$ — функция шифрования, $\mathbf{D}$ — функция расшифрования. В дальнейшем каждая тень секрета S_i будет зашифрована этим алгоритмом.
4. Для корня v_1 дерева доступа T_D выбирается секретный ключ K_1 — ключ доступа.
5. Для каждого узла v_i ($i > 1$) дерева доступа T_D ключ доступа K_i вычисляется. Правило вычисления K_i следующее: если дуга (v_j, v_i) принадлежит множеству дуг E дерева доступа T_D , то $K_i = \mathbf{h}(K_j \circ D_i)$. Здесь $\mathbf{h}$ — криптографическая хеш-функция, $\circ$ — конкатенация ключа доступа K_j

и идентификатора D_i . В силу свойств ориентированного дерева, в каждый узел, отличный от корня, входит ровно одна дуга, а значит алгоритм вычисления ключей доступа однозначно рассчитает ключи для всех узлов.

6. Тени $S_1, \dots, S_m$ шифруются на ключах доступа $K_{l_1}, \dots, K_{l_m}$. Эти ключи доступа вычислены для листовых узлов дерева доступа T_D . Итогом этого шага протокола является набор зашифрованных теней: $\mathbf{E}(K_{l_1}, S_1), \dots, \mathbf{E}(K_{l_m}, S_m)$.
7. Каждому участнику протокола разделения секрета v_i выдаются следующие материалы: дерево доступа T_D , ключ доступа K_i и зашифрованные доли секрета $\mathbf{E}(K_{l_1}, S_1), \dots, \mathbf{E}(K_{l_m}, S_m)$.

Пусть теперь $V_k = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ — участники протокола, собравшиеся для восстановления секрета. Процедура восстановления секрета S описывается следующей схемой:

1. Для каждого узла $v_i \in V_k$, зная ключ K_i и дерево доступа T_D , вычисляются ключи доступа для листовых узлов, достижимых из узла v_i . Обозначим это множество листовых узлов $L(v_i)$, а получившиеся ключи доступа K_{i_j} , $j \in \{l | v_l \in L(v_i)\}$.
2. Для каждого узла $v_i \in V_k$ расшифровывается набор теней $S_{i_j} = \mathbf{D}(K_{i_j}, \mathbf{E}(K_{i_j}, S_{i_j}))$, $j \in \{l | v_l \in L(v_i)\}$.
3. Тени всех узлов $v_i \in V_k$ объединяются для восстановления секрета S .

Заметим, что если $V_k = \{v_{i_1}\}$, то в силу определения ориентированного дерева о достижимости всех листовых узлов из корня, $L(v_1) = L$. Это означает, что участник протокола, находящийся в вершине иерархии, сможет расшифровать все тени и восстановить секрет. Если $V_k = L$, то известны все ключи доступа $K_{l_1}, \dots, K_{l_m}$ и участники протокола также смогут расшифровать все тени и восстановить секрет. В общем случае очевидна справедливость следующего утверждения.

Предложение 1. Восстановить секрет S возможно тогда и только тогда, когда

$$L = \bigcup_{v_{i_j} \in V_k} L(v_{i_j}).$$

Доказательство. Восстановить секрет S возможно тогда и только тогда, когда известны все доли секрета $S_1, \dots, S_m$. Это, в свою очередь, возможно тогда и только тогда, когда известны ключи доступа листовых узлов дерева T_D $K_{l_1}, \dots, K_{l_m}$. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие предложения. ■

2. Произвольная иерархическая структура

Пусть теперь иерархия, порождаемая отношением порядка на множестве V , описывается произвольным орграфом $G = (V, E)$ без ориентированных циклов.

Для реализации представленного протокола разделения секрета необходимо перейти от произвольной иерархии к древовидной. Идея алгоритма перехода от произвольного орграфа к ориентированному дереву следующая. Каждый

узел v исходного графа, полустепень захода которого $d^+(v) > 1$, расщепляется на $d^+(v)$ узлов. К каждому узлу присоединяется дубликат поддерева, порождённого узлами, достижимыми из узла v в исходном орграфе. Запускать процесс расщепления узлов необходимо от узлов наиболее удалённых от вершины иерархии. Алгоритм подробно описан в работе [11]. При этом ограничением на исходный орграф, помимо отсутствия ориентированных циклов, является наличие в орграфе единственного источника. Очевидно для случая нескольких источников ограничение легко достигается добавлением к иерархии фиктивного узла, который дугами соединяется со всеми источниками.

Пусть согласно описанному алгоритму исходному орграфу G сопоставлено ориентированное дерево T_G . Каждому узлу v в орграфе G соответствует множество узлов $T(v)$ в ориентированном дереве T_G . Очевидно, что мощность множества $T(v)$ больше или равна 1.

Тогда схема разделения секрета для иерархии, представленной орграфом G , будет состоять из следующих шагов.

1. Орграфу G сопоставляется помеченный орграф G_D аналогично шагу 1 протокола разделения секрета, описанного в разделе 1.
2. За счёт расщепления узлов с числом входящих дуг большим единицы, орграфу G_D сопоставляется ориентированное дерево T_{G_D} .
3. Для ориентированного дерева T_{G_D} выполняются шаги 2–7 описанного в разделе 1 протокола разделения секрета. На шаге 7 отличие заключается в том, что каждый участник протокола v_i получает несколько ключей доступа, соответствующих узлам множества $T(v_i)$ в ориентированном дереве T_{G_D} .

Заключение

Описанный в работе криптографический протокол можно отнести к классу пороговых схем разделения секрета. Но в классических (k, n) -пороговых схемах параметр k является постоянным. В представленном протоколе, напротив, число участников, необходимое для восстановления секрета, является переменной величиной. Параметр k варьируется на отрезке $[1, m]$, где m – число листовых узлов иерархии участников протокола. Таким образом, восстановить секрет может либо один участник, находящийся в вершине иерархии, либо m участников, являющихся листовыми узлами, либо некоторое промежуточное число участников, потомки которых образуют покрытие множества листовых узлов.

Возвращаясь к интерпретации иерархии участников протокола как иерархии ролей или меток безопасности некоторой политики разграничения доступа, представленный подход можно применить для реализации коллективного разграничения доступа: доступ к ресурсам может получить группа пользователей, занимающих определённый уровень в иерархии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шнайер Б. Прикладная криптография. Протоколы, алгоритмы, исходные тексты на языке Си. М. : Триумф, 2002. 816 с.
2. Blakley G.R. Safeguarding cryptographic keys (англ.) // Proceedings of the 1979 AFIPS National Computer Conference. Montvale: AFIPS Press, 1979. P. 313–317.
3. Shamir A. How to share a secret // Communications of the ACM. 1979. V. 22, Iss. 11. P. 612–613.
4. Ferraiolo D.F., Kuhn D.R. Role-Based Access Controls // 15th National Computer Security Conference. Baltimore MD, 1992. P. 554–563.
5. Sandhu R.S., Coynek E.J., Feinstein H.L., Youmank C.E. Role-Based Access Control Models // IEEE Computer. February 1996. V. 29, No. 2. P. 38–47.
6. Богаченко Н.Ф. Разграничение доступа на основе вычислимых криптографических ключей // Омские Научные чтения [Электронный ресурс] : материалы Всероссийской научно-практической конференции (Омск, 11–16 декабря 2017 г.). Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2017. С. 312–315.
7. Nojoumian, M., Stinson, D.R. Sequential Secret Sharing as a New Hierarchical Access Structure // J. Internet Serv. Inf. Secur. 2015. V. 5. P. 24–32.
8. Парватов Н.Г. Совершенные схемы разделения секрета // Прикладная дискретная математика. 2008. № 2(2). С. 50–57.
9. Belim S.V., Bogachenko N.F. Hierarchical Scheme for Secret Separation Based on Computable Access Labels // Automatic Control and Computer Sciences. 2020. V. 54, No. 8. P. 773–778.
10. Belim S.V., Bogachenko N.F. Distribution of Cryptographic Keys in Systems with a Hierarchy of Objects // Automatic Control and Computer Sciences. 2016. V. 50(8). P. 777–786.
11. Bogachenko N.F. Local Optimization of the Role-Based Access Control Policy // CEUR Workshop Proceedings. 2017. V. 1965.

SScheme for sharing a secret between hierarchically related participants**N.F. Bogachenko**

Ph.D.(Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The article considers an extension of the secret sharing protocol that takes into account the order relation specified on the set of participants. The schema threshold is determined by the hierarchy nodes whose descendants form a complete set of leaf nodes. Secret sharing algorithm based on calculated key materials.

Keywords: secret sharing, hierarchical scheme, computed access keys.

Дата поступления в редакцию: 05.12.2022

ВАРИАЦИИ ИСТОРИИ И МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: aguts@mail.ru

Международный инновационный университет, Сочи, Россия

Аннотация. Внимательное изучение истории рано или поздно приводит исследователя к выводу, что многие исторические факты, источники, события противоречат друг другу. Учебники истории замалчивают это, а альтернативные изложения истории, как правило, всё сводят к субъективным пристрастиям авторов учебников или к политическим заказам. В статье говорится о необходимости говорить об объективной многовариантности истории, о многовариантности Прошлого.

Ключевые слова: История, противоречия, многовариантность, понимание.

В истории самое непонятное – это непонимание.

Мамардашвили «Кантианские вариации».

1. Введение

Изучению истории в любом государстве придаётся большое значение. В России, видимо, императрица Екатерина II сформулировала задачу написания «Истории Российского государства». Писали. Князь Щербатов, к примеру. Но успеха не имели. Успех имел Николай Карамзин, написавший 12 томов. В наше время «ходит» 4-х томник, содержащий текст, который в 12-ти томах написан, скажем так, крупным шрифтом. Остальное – это «нотицы», заметки, выдержки из летописей, подчас со странным для читателя краткого 4-х томника содержанием [1].

Любитель истории, а автор относит себя к таковым, с восторгом читает и запоминает всё то, что изложено в многочисленных учебниках истории. Но с возрастом и в связи с тем, что почти всё «официальное» прочитано, а страсть познавать и *понимать*, именно *понимать* страницы Прошлого, остаётся, заставляет искать что-то новое, ещё непознанное, непонятое.

И здесь любителя истории, и, увы, не профессионала от истории с историческим дипломом (они читают только учебники своих шефов), ждет масса неприятных сюрпризов. По мере познания непознанного разваливается стройная, на первый взгляд, картина, написанная профессионалами-профессорами от истории.

Желающий с ними ознакомиться легко найдёт их на Youtube. Море неожиданного раскрыли перед любителями, гордившимися своими историческими познаниями, А.Т. Фоменко и Г. Носовский. Появляется чувство, что существуют

различные *вариации* на тему «Всемирная История», признанные и непризнанные, и никто не знает правды, и то, что «суют» в учебники отобрано или по принципу «и так сойдёт, огрехи не заметят и их устраним позже», или «вроде неплохо получилось, вполне годится для воспитания подрастающего поколения». Хуже когда объявляют, что сие и есть священная скрижаль.

Цель этой заметки обратить внимание на то, что картины Истории столь противоречивы и многовариативны по *объективным причинам* – так устроен Внешний мир. То есть дело здесь совсем не в субъективных воззрениях историков, или в стремлениях той или иной власти представить историю, Прошлое, в выгодном для них свете. Давайте оставим в стороне психологию, политику и поговорим еще раз об объективных вариациях Истории [2].

2. Вариации

История, согласно «Большой советской энциклопедии», – это рассказ о прошлых событиях, повествование о том, что узнано, исследовано.

В более общем понимании, история – это «всякий процесс развития в природе и обществе. В этом смысле можно говорить об И. мироздания, И. Земли, И. отдельных наук – физики, математики, права и т. д.»

Наконец, «история – это наука, изучающая прошлое человеческого общества во всей его конкретности и многообразии, которое познаётся с целью понимания его настоящего и перспектив в будущем».

Вариация в переводе с латыни (*variatio*) означает изменение, разнообразие. Вариация в музыке¹ – «муз. форма, в к-рой тема (иногда две темы и более) излагается повторно с изменениями в фактуре, ладе, тональности, гармонии, соотношении контрапунктирующих голосов, тембре (инструментовке) и др. (от лат. *variatio* – изменение) – муз. форма, суть к-рой в изменяемых повторях темы. В инструмент. музыке темой В. обычно является одnogолосная песенная мелодия или небольшая пьеса».

Близким к термину «вариация» является термин «вариант», означающий видоизменение, разновидность, возможную комбинацию. Вариант происходит от латинского *variantis* – изменяющийся.

Такими образом, вариации истории – это пересказы событий прошлого, представляющих собой некоторую *тему*, но с изменениями в «фактуре, ладе, тональности, гармонии и т. д.»

Поскольку тема относиться к некоему прошлому, то его мелодия в действительности в точности неизвестна (или не существует?!). Историки видят смысл своей деятельности в восстановлении темы, или, как они говорят, в скрытии исторической правды.

Прошлое – это то, что было, что отошло, минуло. Но знаем ли мы досконально, что на самом деле было? Увы, нет, не знаем. Наука история как раз и пытается нащупать, записать тему по вариациям.

¹Музыкальная энциклопедия.

«Было» – глагол прошедшего времени. Его используют, когда хотят подчеркнуть, что подлежащее относится к некой сущности, именуемой Прошлым.

Что можно сказать о Прошлом? Прежде всего то, как мы почему-то уверены, что его нет. Вещи, находящиеся в нем, нельзя потрогать, в него нельзя вернуться, с людьми, обитающими в нем, нельзя поговорить.

Прошлое бывает ближним, мы его помним, дальним – о нем помнили наши родители и их родители, и древним – о нем написано в книгах.

Мы не сомневаемся, что ближнее, недалёкое прошлое когда-то было столь же реальным, как и то, с чем имеем дело в данный момент, называемым настоящим. Поскольку в ближайшем прошлом были наши дедушка и бабушка, то их ближайшее прошлое, которое мы не знали, мы также считаем когда-то бывшим реальным, т. е. объективно, независимо от людей, существовавшим.

Следовательно, доказательства того, что Прошлое было, сводятся:

- к нашей памяти,
- к вещам наших предков,
- письменным документам наших предков.

Но! Память ошибается в деталях, что-то почему-то забывается, вещи, в принципе, могут и не быть вещами наших предков, а уж за написанное кем-то и когда-то трудно ручаться.

Выходит, что у нас нет строгих точных доказательств того, что прошлое было столь же реальным как наше настоящее.

В нашем распоряжении лишь вариации некой темы, а сама тема нам недоступна. Так не держится ли наша уверенность в былой реальности прошлого только на культурной традиции нашей цивилизации?

Эта традиция состоит в том, что мы без каких-либо сомнений считаем, что в некой текущей сущности, которую мы называем временем, развивается окружающий нас Внешний мир и мы сами, в частности. Это развитие во времени, проявляющееся как изменения вещей – помечаемое термином «процесс» – и есть История. История состоит из событий. Все события делятся на прошлые, настоящие и будущие.

События настоящего реальны, материальны, их можно ощущать, на них можно воздействовать, подвергать изменениям.

Прошлые события не материальны, их нельзя ощущать, на них нельзя воздействовать, подвергать изменениям. Они не реальны². Но они были материальными и реальными для тех людей, которые в них участвовали.

Наконец, мы уверены, что в каждый миг, момент, происходит некоторое множество событий, образующих Настоящее. События всех моментов времени – это Всемирная история нашей земной цивилизации. Это проигрываемая тема. А вариации этой темы, т. е. вариации истории – всего лишь субъективные изложения Всемирной истории, принадлежащие историкам, группам историков, принадлежащих тем или иным научным школам.

Другими словами, реальна, материальна лишь сама История, а ее вариации идеальны, существуют лишь в статьях, книгах, трудах историков.

²Так мы уверены, таков наш сиюминутный жизненный опыт, но общая теория относительности Эйнштейна намекает нам на реальность Прошлого.

Вполне допустима, что какая-то вариация очень близка к теме, к подлинной Истории, и задача науки истории состоит в бесконечном писании различных вариаций истории, быть может доводя до совершенства одну из них, которая в идеале поможет восстановить тему. Правда, видимо, с точки зрения музыканта такая вариация, почти идентичная теме, музыкально малосодержательна.

Но мы занимаемся не музыкой, а историей. Поэтому «мало», появившееся выше, следует просто убрать, и желательно говорить об успешности такой вариации. Но как можно говорить об успешности вариации, если никто не слышал самой темы?

Хотя возможно уточнить понятие вариации, сделать его более общим и абстрактным, логичным. Иначе говоря, *заменяющим тему*, поскольку оно будет продуктом логики, сопутствующей объективному материальному изменению Внешнего мира, в силу этого будет самой темой.

Впрочем, и логика, к которой мы обратимся для порождения понятия «вариация истории», неизбежно должна быть *модальной*, а это прямое торжество *многовариативности* (многовариантности), как говорит семантика Крипке. Круг замыкается: никому не дано услышать тему, даже если она и была. И это означает, что и сам Внешний мир, полностью соответствуя логике, – это море вариаций, без основной темы, даже если она и была.

Вариация – это различия индивидуальных значений характерного признака, факта, у изучаемого исторического события.

Например, признаком может быть возраст царя, фактом – численность армии, родственные отношения правителей. Различие вариаций могут кардинально менять *наше* представление о прошлом.

Действительно, был ли Борис Годунов братом или сыном царицы Ирины приводит к двум принципиально разным, можно сказать, непримиримым вариациям, поскольку в последнем случае говорится о том, что Борис Годунов был законным наследником престола династии Рюриковичей. И если кому-то такая вариация покажется смехотворной, то смех не есть метод науки – в науке любая гипотеза, если она поддержана фактами-документами, должна быть серьёзно исследована и самое главное – *понята*, а не спрятана под ковёр.

Как показывает опыт естественных наук подчас две принципиально различные теории, опирающиеся на один и тот же набор наблюдаемых данных, могут существовать параллельно, не сдавая своих позиций, и одна из них просто в силу определённых качеств, подчас чисто исторических и субъективных, наиболее распространена среди учёной среды. В исторической науке эта процедура преобладает над всем иным и её прикрывают якобы *логикой* (какой? их сотни...) самого исторического процесса, вскрытой серьёзными учёными, опирающимися на некую меру достоверности и на историческую правду. И такая практика типична при воспитании каждого следующего поколения историков.

3. А что историки?

Цитата из статьи одного историка: «У историков есть общий принцип – мера достоверности выводов из исторических источников никогда не быва-

ет абсолютной. Историки хорошо чувствуют что такое – мера достоверности некоторого исторического факта, (понимая под этим систематизированный набор доводов, свидетельствующих о достоверности этого факта) и прекрасно понимают, что это отнюдь не вероятность этого события. А большинство математиков всякий раз, когда речь идёт о неопределённости, отождествляют её с вероятностью, что совсем неадекватно».

Подражая Энгельсу, хочется спросить: «Где он откопал такое «большинство» глупых математиков?»

Иначе говоря, у историков нюх на достоверность в условиях неопределённости, и математикам не стоит лезть в историческую науку: нюха у них нет – путают неопределённость с вероятностью.

Цитата из работы психолога, который говорит, увы, не об объективности многовариантности, а скорее о субъективности ее истоков, но хорошо о «достоверности»: «Не так давно историю ведь считали вообще единственной наукой среди гуманитарных. Но история всегда была безумно далека от метода действия, но вот появились опыты реконструкции, понятия хронотопа, ролевой исторической игры, где неизбежно используются элементы импровизации. Поклонникам достоверности тут нечего делать, а ведь всякое событие допускает многовариантность, субъективность со-бытия» ³

Это стандартное объяснение многовариантности через субъективность. В событии много участников, они СОучастники БЫТИЯ события, т. е. событие = СО-БЫТИЕ. Каждый участник события видит (знает) только свой кусок со-бытия. Отсюда субъективность со-бытия или многовариантность события.

4. Заключение

Не претендуя на завершённость в решении проблемы исторического образования, хочется закончить стихами, говорящими о богатстве видения истории через вариации:

Среди гостей, в одной рубашке
Стоял задумчиво Петров.
Молчали гости. Над камином
Железный градусник висел.
Молчали гости. Над камином
Висел охотничий рожок.
Петров стоял. Часы стучали.
Трещал в камине огонёк.
И гости мрачные молчали.
Петров стоял. Трещал камин.
Часы показывали восемь.
Железный градусник сверкал.

³Золотовицкий Р. Трехединая система Морено и перспективы нашего движения. – <http://www.psychology.ru/romek/psychodrama/zolo02.htm>

Среди гостей, в одной рубашке
Петров задумчиво стоял.
Молчали гости. Над камином
Рожок охотничий висел.
Часы таинственно молчали.
Плясал в камине огонёк.
Петров задумчиво садился
На табуретку. Вдруг звонок
В прихожей бешено залился,
И щёлкнул английский замок.
Петров вскочил, и гости тоже.
Рожок охотничий трубит.
Петров кричит: <<О Боже, Боже!>>
И на пол падает убит.
И гости мечутся и плачут.
Железный градусник трясут.
Через Петрова с криком скачут
И в двери страшный гроб несут.
И в гроб закупорив Петрова,
Уходят с криками: <<готово>>.

Даниил Хармс <<Вариации>> 15 августа 1936 года.

Почему вдруг стихи? Просто по той причине, что помимо рационального исследования Внешнего мира, есть и эмоциональный, присущий философам, писателям, поэтам. Они часто заранее чувствуют и *видят* то, до чего не дозрел рациональный научный ум.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Карамзинская история и «История» Карамзина // Вестник Омского университета. 2006. Вып.2. С.73–76.
2. Гуц А.К. Многовариантная история России. СТ/СПб.: ПОЛИГОН, 2000. 381 с.

THE HISTORY VARIATIONS AND MODAL LOGIC**A.K. Guts**

Dr. Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: aguts@mail.ru

International Innovation University, Sochi, Russia

Abstract. Careful study of history sooner or later leads to the researcher to the conclusion that many historical facts, sources, events contradict each other. The textbooks of history gloss over this, and alternative accounts of history, as a rule, are subjective bias of textbook authors or politicians order. The article talks about the need Objective multivariance of history, on multivariance of the past.

Keywords: History, contradictions, multivariance, understanding.

Дата поступления в редакцию: 04.12.2022

РОЛЬ ПИФАГОРА И ЕГО ШКОЛЫ В ФИЛОСОФСКОМ ИДЕАЛЕ НОВОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЗНАНИЯ

В.А. Еровенко¹

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: erovenko@bsu.by

Н.В. Михайлова²

к.ф.н., доцент, e-mail: n.mikhajlova@bsuir.by

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

²Институт информационных технологий Белорусского государственного университета
информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

Аннотация. Работа посвящена философско-историческому анализу становления нового идеала математики Пифагора и его школы. Важнейшей научной заслугой Пифагора является систематическое введение доказательства в греческую математику. На основе положения об органичном родстве и существенной близости математического и философского знания пифагорейцы считали математику и философию единым и неразличимым знанием.

Ключевые слова: Пифагор как математик, пифагорейский идеал математического знания, философия математики.

Общепризнано, что математические достижения древних греков составляют одно из величайших интеллектуальных достижений античной культуры, отличающееся по мировоззренческому характеру от достижений предшественников Эллады. Несомненная заслуга в этом принадлежит древнегреческому математику Пифагору Самосскому (ок. 580 – ок. 500 до н.э.), который создал и организовал свою школу, действовавшую почти тридцать лет. Школа Пифагора, или как её ещё называют «пифагорейский союз», была одновременно философской школой и религиозным братством и каждый, кто вступал в этот союз, отказывался от личной собственности в пользу союза и обязан был беречь тайну учения своего учителя. Возможно, это было связано с тем, что Пифагор проходил основательное первоначальное обучение в Египте и Месопотамии у «жрецов» и «халдеев», а свою мистику чисел они позаимствовали у египетских жрецов, кроме того по мнению пифагорейцев именно числа управляют миром. В числах пифагорейцы усматривали много сходного с тем, что существует, но главными историческими предшественниками новой эллинской математики были Египет, Вавилон и Финикия. В это же время «потаённое знание», долго дремавшее в тайниках древнеегипетских храмов и древневавилонских хранилищах, достигнув своей критической массы, выплёскивается наружу, способствуя великим озарениям греческих философов и математиков.

Геометрия была впервые принесена Фалесом в Грецию после его египетского путешествия, а также известен тот факт, что именно благодаря этому, раскрепощённый ум, чувство свободы в познании и собственного достоинства способствовали «взрывоподобному всплеску» интеллектуальных сил Древней Греции. В греческой математике того времени появились принципиально важные для всего ее дальнейшего развития новые качества, связанные с аксиоматизацией и обоснованием, характерным для теоретической математики, которых в других цивилизациях тогда ещё не было. «Пифагорейское мировосприятие принципиально отличается от картины мира новоевропейского естествознания тем, что последнее с помощью математики стремится упорядочить и тем самым охватить бесконечное и само по себе неохватное многообразие феноменов. Новоевропейское исчисление есть не что иное, как способ обозрения и охвата. Пифагорейская математика тоже способ понимания, но он лишён желания охвата» [1, с. 39]. Даже, когда мы называем греческую геометрию и египетские вычисления «математикой», то имеем в виду, вообще говоря, разные абстрактные и прикладные области знаний. Но наличие в Древнем Египте строений пирамидальной формы оказалось по существу внешней по отношению к математике предпосылкой, благодаря которой впоследствии появилась возможность зарождения аксиоматического метода в Элладе. Но между осознанием древними египтянами свойств равенства углов граней пирамиды, а затем и построением древними греками математической науки о свойствах геометрических фигур, лежит историческая дистанция «огромного размера».

1. Математическое знание Пифагора

Принято считать, что не только математика, но и вся наука, понимаемая как единая система знаний и как отдельная сфера человеческой деятельности, стремящаяся к получению новых знаний, даже не обязательно непосредственно связанных с практической деятельностью, возникла в Древней Греции. То, что было до греков, называют иногда «протонаукой», в смысле предшествующее науке и из чего она развилась, но в полной мере наукой ещё не являлось. Протонаука зародилась в Древнем Египте и Древней Месопотамии. Сами греки считали родиной науки Египет, с которым у них были налажены хорошие связи, но скромное количество математических текстов, которые оказались доступными для изучения историками науки, не дают возможности оценить общий уровень развития математических наук в Древнем Египте. Теперь уже известно, что математика независимо возникла и в Месопотамии, причём уровень развития вавилонян был в некоторых отношениях даже выше. Отличие пифагорейского учения состоит в том, что, предавшись математическим занятиям, пифагорейцы считали, что началом всего являются числа, в которых как первичных элементах они находили много сходства с тем, что реально существует. Поэтому основная философская направленность Пифагора была нацелена на философию числа. Так во времена Пифагора арифметическое понятие числа подверглось глубочайшей теоретической переработке с точки зрения философского осмысления его предметного содержания. Хотя даже, несмотря

на философскую трактовку понятия числа как мировоззренческой категории, пифагорейское учение не следует квалифицировать как «математическую философию» или «философию математики» в её современном понимании.

Интересно отметить, что в разных вариантах античных преданий встречаются разные семёрки мудрецов, а в некоторых из них встречается имя Пифагора. Важнейшей математической заслугой Пифагора является систематическое введение доказательства в математику, в частности в геометрию. Культуролог и специалист по античной математике А.В. Волошинов отмечает: «Так вот, заслуга Пифагора и состояла в том, что он, по-видимому, первым пришёл к следующей мысли: в геометрии, во-первых, должны рассматриваться абстрактные идеальные объекты (точки – «то, что не имеет частей», линии – «длина без ширины», поверхности – «то, что имеет только длину и ширину» и т. д.) и, во-вторых, свойства этих идеальных объектов должны устанавливаться не с помощью измерений на конечном числе объектов, а с помощью рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов» [2, с. 159]. Не менее гениальная методологическая догадка Пифагора состояла в его положении о том, что в геометрии можно выбрать лишь конечное число первоначальных истин, на основе которых можно логически выводить неограниченное число математических утверждений. Благодаря философскому пониманию математической аргументации и принципов математического доказательства, древнегреческая математика начала по сути осознавать себя как теоретическая наука. Непредубеждённо рассмотрев основные точки соприкосновения математики и философии, мы вынуждены признать методологическую полезность философии для математики и полезность математики для философии. Такая убеждённость основана на невероятной приложимости идеальных математических построений к областям окружающей реальности, что также неизменно привлекало и привлекает внимание философов и математиков. Полагая, что «математика есть философия», а «философия есть математика», пифагорейцы реально считали математику и философию единым и неразличимым знанием.

Первой философской концепцией математики был «пифагореизм», в котором математика опирается не на чувства, а на разум. Пифагореизм впервые выдвинул и тщательно разработал две фундаментальные идеи, которые оказали серьёзное воздействие на судьбу самой философии и на актуальную проблему взаимодействия математического и философского знания. Во-первых, это тезис об особом, исключительном месте математического знания в системе научного познания в целом и, во-вторых, положение об органичном родстве и существенной близости математического и философского знания. В закономерном процессе на пути к единству знания математика оказывается одним из «мостов», объединяющих философское и естественнонаучное мышление, поскольку хорошо развитое теоретическое мышление характеризуется умением находить связи между явлениями, недоступными обыденному взгляду. Пифагорейцы не просто развили математику, они ещё дали название этой науке, а долговечность математических образов связана с тем, что они состоят из идей. Различая математику и философию, следует исходить не из смутных представлений о сущности математического и философского знания, а из понятийного аппарата

науки и способах решения научных проблем, которые являются для нас все же более определёнными. Понятийный аппарат хорошей математической теории расширяет наши интеллектуальные возможности при решении, казалось бы, несвязанных между собой задач. Поэтому «онтологию математических понятий» можно охарактеризовать как проблему связи их содержания с существованием прототипа или соответствующей интерпретации во внешнем мире. Со времён пифагорейцев онтологическая важность математических понятий изначально была присуща математике вследствие особенностей их представления. Мировоззренческие и философские убеждения пифагорейцев были основаны на том, что, занявшись математическими науками, они продвинули их вперёд и стали считать их «началами всех вещей».

Две фундаментальные идеи пифагорейцев не только послужили исходным пунктом размышлений Платона о сущности философского и математического знания, но и получили своеобразное воплощение в его философии. Платон был главным адептом пифагорейского убеждения о значимости геометрии в философии. Согласно его учению, специфика математического мышления связана с изначальной опорой на образы, тогда как подлинное философское умозрение отличается от математического познания тем, что оно не является образным. Молодым ученикам, способным к учению, Пифагор объяснял сущность науки и доказательства. Он пытался применить математику для нужд своей философской системы. «Таким образом, математика, по Пифагору, – это когда не просто принимаешь на веру учёные рассуждения, а постигаешь умом доказательства их истинности. Умение рассуждать, проверять на истинность некоторое данное кем-то знание – очень сильный способ в дальнейшем преодолеть неопределённость этого знания» [3, с. 141]. Математизация мира доходила у пифагорейцев до такой степени, что даже сам сложный и разнообразный мир они пытались подогнать под свою философскую концепцию. Взгляды пифагорейцев, согласно которым числовые свойства выражают сущность явлений, на многие будущие столетия определили взаимосвязь философии и математики. Пифагорейская математика и философия проникнуты понятием «гармонии», которое стало у пифагорейцев математическим понятием. Они понимали внутреннюю гармонию как выражение гармонии числовых отношений и пропорций, ставшую эвристическим принципом истинности. Гениальность первых греческих математиков проявилась еще в осознании того, что математические предложения нуждаются в доказательстве. Но, насколько известно, древнегреческие историки науки не отмечали качественного отличия возникшей у них науки от «протонауки Древнего Востока». Возможно, они не осознавали главного интеллектуального достижения своих соотечественников, которые впервые начали разрабатывать аксиоматическую трактовку геометрии, а также то, что обоснование аксиоматического метода стало характеризовать фундаментальность методологических подходов в математике. Этот подход оказался плодотворным, так как в последующие времена именно математические образы порождали адекватные физические модели.

Нелинейное отображение восприятия реального мира в «воображаемый мир» приводит к определённой независимости в подходах к пониманию ста-

новления математики. В связи с этими трудностями сами философы пытаются «смягчить» жёсткость принципа рациональности, отождествляемого исключительно с дедуктивно-аксиоматическим методом, обращаясь к содержательным методам исследования математики. Математика не сводится только к дедукции, но без дедукции нет математики. Пифагорейцы отделяли математику от других наук не только по предмету, но и по методу, так как математические утверждения опираются не на показания чувств, а на умозрения, то есть на разум. Одна из заслуг учения Пифагора состоит в том, что, дав доказательство своей теореме, он по существу отделил геометрию от «искусства измерения». Формулы, которые связывают между собой длины отрезков, называют метрическими соотношениями и самое знаменитое из таких соотношений – это теорема Пифагора, устанавливающая простую зависимость между сторонами прямоугольного треугольника: «Квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов». Так хорошо известно, что существуют тройки натуральных чисел, в которых сумма квадратов двух из них равна квадрату третьего, то есть натуральные числа x, y, z удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = z^2$. Согласно утверждению обратному теореме Пифагора, такие числа позволяют построить прямоугольный треугольник с целочисленными длинами сторон. Такие тройки чисел называют «пифагоровыми», хотя на самом деле такого рода соотношения были известны древним математикам за много веков до Пифагора. В Древнем Египте наиболее известный частный случай – «египетский треугольник» со сторонами 3, 4, 5, для которого $3^2 + 4^2 = 5^2$, применялся для разметки прямых углов на местности. Однако в современной истории математики считается, что именно Пифагор дал первое логически строгое доказательство. В античном мире соответствующим «пифагоровым треугольникам» придавали мистические свойства, а «пифагоровы числа» сейчас уже все известны.

Напомним, что древние греки увидели в математике выражение «глубинной сущности мира», связанной с истиной и «неизменной природой вещей». Так сущность мира Пифагор видел не в земле, воде, воздухе и огне, то есть в чем-то «чувственно-данном», а в числах. Огромное значение в школе Пифагора придавалось символам, в частности, для пифагорейцев слова и числа – это символы мысли, даже символы универсального значения, которые пронизывают всю человеческую жизнь. «Однако число стало для пифагорейцев не только первоначалом мира, оно было возведено у них в базовый принцип познания, так как благодаря числу человек может мыслить «нечто» как определённое, имеющее границу, предел» [4, с. 48]. Но, рассматриваемый мир в буквальном смысле не является миром чисел Пифагора, хотя, когда он пытался объяснить мир, то первопричину его гармонии и устройства он отыскивал в числе. Мир чисел как единый организующий принцип стал основой всей философской системы Пифагора. Его последователи считали, что математика – это идеал знания и всеми возможными способами отыскивали методы исследования, близкие к идеалу, согласно которому «все вещи суть числа», поскольку во всех явлениях пифагорейцы стремились найти числовое выражение. В этом смысле выражение, приписываемое Пифагору: «Числу все вещи подобны» для него истинно, поскольку Пифагору именно число служит средством выражения сущности

всех вещей. Так наиболее важным открытием, связанным с первым кризисом математики, которое приписывают Пифагору и его школе, как поворотным пунктом в истории, является открытие несоизмеримых отрезков, противоречащее учению пифагорейцев, согласно которому с помощью отношений между целыми числами можно выразить любую величину, что стало для них эмоциональным потрясением. Сейчас уже можно сказать, что триумф древнегреческой мысли при доказательстве теоремы Пифагора обернулся трагедией для самих пифагорейцев в виде когнитивного диссонанса несоизмеримых отрезков. Геометрический образ иррациональной величины, обнаруженный пифагорейцами, является их величайшим достижением, а проблема несоизмеримости оказала сильнейшее влияние на развитие математики.

Её значение для математического знания состояло в том, что оно привело к одной из высочайших вершин понимания математики. В процессе математизации научного знания античного периода наследие Пифагора, который считал, что началом всех начал является число, занимает в философии особое место. Платон тоже считал, что необходимо класть в основу всего число. В диалоге «Филеб» Платон анализирует исходные принципы пифагорейцев, устанавливая связь науки о числе с понятиями своей философии. Его роднит с пифагорейцами ещё то, что подобно тому, как они рассматривают числа, Платон рассматривает «единое», а более широком контексте «мира идей». Поэтому в своём учении о «едином и многом» Платон оказывается приверженцем пифагорейского учения, но в отличие от пифагорейцев он воспринимает положение о числе как «единстве предела и беспредельного». Отметим, что центральная философская идея концепции обоснования математики опирается на концептуальное и методологическое единство математики. Но заметно ли по дошедшим до нас источникам влияние философии пифагорейцев на их математику? Пифагорейские математики не интересовались «числовой философией», а те, кого она занимала, ничего конкретного и выдающегося не достигли собственно в греческой математике. Для того, чтобы философия могла хоть в какой-то степени влиять на математику даже в древности, она, по крайней мере, должна глубоко профессионально интересоваться теми объектами, которыми непосредственно занята конкретная математика. Сказанное отнюдь не отрицает некоторые возможности влияния философии на математическую науку античности, хотя при рассмотрении таких важных для проблемы становления математики вопросов надо влияние философии на науку не постулировать, а аргументировать и доказывать в каждом конкретном случае, поскольку именно такого рода независимость демонстрирует античная математика. В частности, основной функцией занятия геометрией в школе Пифагора, а позднее в Академии Платона, было не усвоение метафизики, а практическое формирование способности к логическому мышлению и рассуждению.

Интересно отметить, что по существу даже Платон выступает наследником Пифагора, хотя, несмотря на интерес Платона к пифагорейской мудрости, о самом Пифагоре он упоминает всего один раз и ещё один раз о пифагорейцах в целом. Открыто Платон нигде не причислялся к пифагорейцам и вроде бы он не имел возможности изучать труды Пифагора, так как от него самого не

осталось никаких сочинений, но есть указания на источники, где Платон мог бы почерпнуть эту мудрость. Так, например, если Прокл говорит о «божественном назначении» пифагорейской математики, то для Платона она оставалась лишь завесой для прикрытия «посвящения в таинства» божественных учений. В таком контексте мысль и слово неразрывны по своей природе, так как силу слова признают все религии, а в христианстве Слово считают началом сотворения Мира. Греки настолько мистифицировали математику, что это нашло отражение в философском учении Пифагора и его школы его последователей, в котором Пифагор выразил свой основной тезис пифагореизма всего лишь одной, но зато какой ёмкой фразой: «Все есть число», утверждая, что число есть источник порядка и гармонии в мире. Числа для Пифагора – это ещё и законы соотношений между вещами, поведение которых явно подчинено законам арифметики и геометрии. Поэтому в мире чисел Пифагора «представлены только такие особенности реального материального мира, которые могут быть охарактеризованы числовым способом» [5, с. 929]. Что касается философских взглядов на математику Пифагора и его школы, то по своей сути математика пифагорейцев была теологией в сокровенном смысле слова, занятия которой были «божественным делом», связанным с непосредственным ощущением духовного мира. Математика по сути считалась всеобъемлющим знанием, представляя собой особый род науки, находящийся на вершине философско-познавательной иерархии. Поэтому Пифагор и его ученики рассматривали математику как точнейшую из всех известных наук, и он требовал от своих учеников знания арифметики, астрономии и геометрии. Это объяснялось тем, что пифагорейцы объявляли арифметику «матерью всех математических наук», доказывая, что геометрия, астрономия и музыка зависят от неё.

Необходимость философии математики Платона как формы духовного творчества заключается в том, что мифологическая вольность его произведений требует специального математического обоснования для его философских положений. Важнейший шаг в сторону понимания философского учения Платона заключался в том, что его концепция «мира идей» стала представляться первичной, исходной и ясной в отношении тех абстрактных понятий, которыми оперирует математика. Античные математики впервые выявили шаткость теоретических оснований математики, что ещё свидетельствует об их исключительной смелости и самокритичности. Взгляд Платона на природу математических объектов со временем становится в своей сущности неизбежным при обращении к математике. Отметим, что платоновско-пифагорейский подход к математике был господствующим в античной философии. Пифагореизм – это первая философская теория математики, которая рассматривала математическое знание как основу всякого другого знания в качестве наиболее истинной её части. Специфика теоретико-математических методов исследования определила особенность истинности математического утверждения, которая не основывается только лишь на практике, хотя в прикладной математике практика может характеризовать эффективность математического аппарата и знания. Притягательность математики для философии связана, прежде всего, с феноменальной устойчивостью на протяжении многих веков математических

результатов, обладающих необходимостью и востребованной для разума силой. Обнаружив отсутствие общей меры у стороны и диагонали квадрата, греки фактически выявили, что рациональных чисел недостаточно для практических измерений. Только математикам удалось придать теоретическим конструкциям общепризнанный и неопровержимый характер. В целом трудно обозреть всю математику, в которой, как гласит пословица «за деревьями леса не видно». Всякое точное и строгое объяснение, понимание и обоснование того или иного природного явления «математично», а математическое описание такого явления – это описание на подходящем языке математики.

Весь мир давно уже неузнаваемо изменился, но даже «компьютерные виртуальные миры» – это в своей сути числа и ещё раз числа, а также, безусловно, математические операции над ними. Но слава античной культуры продолжает по-прежнему направлять математику и философию по двум столбовым дорогам – дорогам Пифагора и Платона, по которым идут современные философы математики, опираясь на мудрость Пифагора, Платона и энциклопедичность Евклида, пытаясь уже более двух тысячелетий понять непостижимый феномен «греческого чуда». Современные математики заняты решением задач, требующих все более сложных рассуждений и вычислений, которые не имеют ничего общего с духовной проблематикой. Но в античные времена дела обстояли иначе. Платоновско-пифагорейская линия была ведущей линией в развитии математики. Она не потеряла значения и сейчас. Можно также предположить, что в «Апологии Сократа» Платон представляет его как пифагорейца. «Точно так же внешний вид Сократа и прочих обитателей его школы весьма напоминают описания «пифагористов» у позднейших авторов: именно бедность и вынудила представителей пифагорейской школы обратиться к преподаванию и предать гласности часть скрываемого учения» [6, с. 82]. Для Платона всеобъемлющая строгость математических рассуждений, математических законов и воплощаемая в них гармония природы представлялась божественным сочетанием духа и разума, в виде становления математики как науки. Уже в античные времена признавалась необходимость знания как математики, так и философии. Но если отбросить некоторые детали, то философия – это общая наука о содержании, а математика – это общая и точная наука о форме. В философском идеале нового математического знания Пифагора математика становится важнейшим инструментом познания картины мира, а за математикой у него следует философия в контексте распространения накопленного специального математического знания на всю область мировоззрения. Математика мыслилась самим Пифагором как знание, доступное любому юному возрасту, которому можно научить. Формулируя предмет своих занятий, он заменил мудрость на «любовь к мудрости», доступной в отличие от самой мудрости любому возрасту и выражаемой в стремлении к полноте истины с помощью изучения математики. Конечно в наше прагматичное время без мудрости прожить можно, как говорится, «было бы на что». Но мы говорим не об этом, так как, учитывая инновационный характер математического познания, стремление к мудрости для Пифагора означало еще и необходимость, невзирая на любой возраст, постоянно учиться. Кроме того, для пифагорейцев математика и философия были едины. Полагая, что «матема-

тика есть философия», а «философия есть математика», пифагорейцы считали математику и философию единым и неразличимым знанием, а их философские убеждения были основаны на том, что, занявшись математическими науками, они не только продвигали их вперёд, но и стали считать их «началами всех вещей». Заметим, что при Пифагоре различные представления о доказательстве уступают место чисто логическим заключениям и независимости от опыта теоретических положений математики, что послужило источником античной концепции необходимости математических истин, согласующейся с философией математики в духе платонистских интерпретаций. Поэтому, вовсе не случайно важнейшей заслугой Пифагора признается систематическое введение в математику процедуры доказательства, причём прежде всего в геометрию. Строго говоря, с этого момента математика на протяжении двух с половиной тысяч лет начинает восприниматься и существовать как наука, а не как некое собрание древнеегипетских и древневавилонских практических рецептов.

2. Заключение

Историки озадачивают вопросом, а где была «греческая мысль», когда древние греки исчезли, а новый адресат ещё не появился? Не следует думать, что человек во все времена только шёл вперёд и никогда не задерживался или не отступал назад. Научная заслуга Пифагора состояла в том, что он ввёл доказательство в математику. Кроме того, он пришёл к следующему важному выводу, что в геометрии должны рассматриваться абстрактные идеальные объекты и их свойства должны устанавливаться не с помощью измерений на конечном числе объектов, а из рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов. Ещё одной гениальной догадкой Пифагора, повлиявшей на дальнейшую методологию становления идеала нового математического знания, было то, что в геометрии достаточно выбрать лишь конечное число первоначальных истин, из которых выводится неограниченное число геометрических утверждений. Благодаря этому в пифагорейской школе впервые возник аксиоматический метод в математике, а грандиозная программа аксиоматизации геометрии была успешно завершена в «Началах». Евклида. Однако историк математики Л.Я. Жмудь считает необходимым отграничивать понятие «пифагорейская школа» от понятия «пифагореец», аргументируя это следующим образом: «К пифагорейской школе принадлежат лишь те пифагорейцы, которые оставили след в философии, науке или медицине. Пифагорейцы – это более общее понятие, включающее в себя и тех, кто был членом пифагорейских политических сообществ (гетерий) и/или носителем пифагорейского образа жизни» [7, с. 10]. Хотя можно также говорить о пифагорейско-платоновской традиции в физическом познании, по которому шли Платон и пифагорейцы, которые стремились установить простые формулировки сложных законов природы, что хорошо согласуется с «религией пифагорейцев».

Рефлексивная реконструкция методов исследования, которыми пользуется математика и которые отражают специфику математического познания, позволяет считать пифагорейскую математику философским идеалом познания, как

образца системы достоверного знания. Учитывая арифметизацию математики во второй половине XIX века, Пифагор оказался прав, кроме того математизация знания стала ведущим методологическим принципом мышления. Сократовский парадокс о мышлении состоит в том, что если мы хотим что-то узнать, то мы заранее должны знать то, что хотели бы узнать. Эта мифметафора поясняет, что в мышлении мы обращаемся к мыслям, которые возникают у нас, то есть «мыслить за другого невозможно». Содержание этого мифа раскрывает мировоззренческую роль математики в познании и помогает нам проникать в суть окружающих нас явлений, происходящих в «мире непознанного». Почему, наконец, нам иногда очень трудно, как это делал Сократ, понять изначальный смысл многого из того что мы делаем сами или что делают другие? Возможно потому, что красота математики и ее смысл разлиты вокруг нас, даже если мы их пока не видим. Выдающийся математик современности, академик И.Р. Шафаревич вспоминал, как его убеждали, что понятие «смысла» или «цели» так же неприменимо к математике, как, например, к человеческой истории или даже органической жизни, которая течёт не «куда-то», а просто потому, что некогда возникла. Смысл математического познания в контексте мировой культуры состоит в его некоторой недоговорённости или так и неразгаданной загадке «непостижимой эффективности математики», но указанная эффективность обусловлена тем, что в сферу математических объектов входят все те формы, которые только могут существовать в мире.

Безусловно, математика как область обоснованного знания возникла задолго до пифагорейства, когда основными его хранителями и носителями тысячелетиями были египетские жрецы, применявшие её в сакральных целях. Тем не менее, Пифагор занимает особое место в философии и истории математики, так как в школе Пифагора была впервые выявлены философские аспекты математики. В истории философии математики пифагорейцы стали первыми выразителями метафизической трактовки математического знания, выходящего за пределы чувственно-данного восприятия в философской интерпретации сущности вещей. Хотя в школе Пифагора не рассматривались практические приложения, Пифагор превратил геометрию в настоящую науку. Заметим, что новый пифагорейский идеал математического знания в современной математике успешно реализовался в геометрических методах функционального анализа, рассматривающий абстрактный формальный объект через совокупность выполняемых им функций. Любая формализация задачи – это интеллектуальная возможность мировоззренческого видения, являющаяся философско-методологическим ключом к её решению, хотя формальное понятие доказательства не удовлетворяет социокультурным и психологическим аспектам математического творчества. Без нас в мире не будет новых идеальных сущностей, не будет гармонии, истины и красоты. А окончательного ответа на многие вопросы философии современной математики нет, как не было и нет объективного критерия на все времена для методологических новшеств развития математики. Можно даже упрекнуть пифагорейцев в абсолютизации чисел и геометрических фигур, но без этого не возникла бы сама математика как теоретическая наука, без древнегреческой математики не возникло бы и философское мышление как высшее

проявление абстрактного мышления, которое именно Пифагором было названо «философией».

ЛИТЕРАТУРА

1. Шапошникова Ю.В. Пифагорейское учение о числе и математический характер естествознания Нового времени // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 6. 2014. Вып. 1. С. 36–40.
2. Волошинов А.В. Пифагор: Союз истины, добра и красоты. 2-е изд. М. : Издательство ЛКИ, 2007. 224 с.
3. Ковешников Е.В. Математическая сущность природы по Пифагору и Платону // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2011. № 4. С. 140–145.
4. Яшин Б.Л. Пифагореизм и платонизм в математике: история и современность // Философская мысль. 2018. № 5. С. 47–61.
5. Бочаров В.А. Пифагореизм, платонизм, математика и логика // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. 2010. № 3. С. 84–94.
6. Шичалин Ю.А. Сократ-пифагореец – изобретение Платона? // Вестник православного Свято-Тихоновского гуманитарного университета. Серия 1. 2012. Вып. 3. С. 76–86.
7. Жмудь Л.Я. Пифагор и ранние пифагорейцы. М. : Русский фонд содействия образованию и науке, 2012. 445 с.

PYTHAGORAS'S ROLE AND HIS SCHOOLS IN PHILOSOPHICAL IDEAL OF NEW MATHEMATICAL KNOWLEDGE

V.A. Erovenko¹

Dr.Sci., professor, e-mail: erovenko@bsu.by

N.V. Michailova²

Ph.D., asso professor, e-mail: n.mikhajlova@bsuir.by

¹Belarus State University, Minsk, Belarus'

²Institute of Information Technologies of the Belarusian State University of Informatics and Radio Electronics, Minsk, Belarus'

Abstract. The article considers the philosophical and historical analysis of formation of a new ideal of Pythagoras's mathematics and his school. The most important scientific merit of Pythagoras is systematic introduction of the proof to the Greek mathematics. On the basis of the provision on organic relationship and essential proximity of mathematical and philosophical knowledge Pythagoreans considered mathematics and philosophy complete and indiscernible knowledge.

Keywords: Pythagoras as mathematician, Pythagorean ideal of mathematical knowledge, philosophy of mathematics.

Дата поступления в редакцию: 28.11.2022

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ GEOGEBRA ПРИ ОБУЧЕНИИ КОМПЬЮТЕРНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

Л.Ю. Уразаева¹

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: delovoi2004@mail.ru

Н.В. Манюкова²

к.п.н., доцент, e-mail: manukovanv@mail.ru

¹Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
Санкт-Петербург, Россия

²Нижевартовский государственный университет, г. Нижневартовск, Россия

Аннотация. В работе раскрыты и описаны возможности применения программного средства GeoGebra для организации обучения по компьютерному моделированию. Программное средство является свободным, имеет веб-интерфейс, однако пока литературы по использованию программного продукта недостаточно. В качестве преимуществ работы с программой можно назвать возможность создания собственных расширений функционала программы, разработки алгоритмов решения прикладных задач математического моделирования с помощью этого средства. Авторами предложены ранее не описанные в литературе возможные решения типовых задач моделирования в среде GeoGebra.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, математическая модель, линейное программирование, графический метод решения, составление модели управления запасами, моделирование гармонических колебаний, GeoGebra.

Введение

Интерактивность процесса обучения, визуализация зависимостей и графическая поддержка процесса решения – важнейшие инструменты повышения эффективности освоения учебного материала, тем более в условиях самостоятельного обучения в рамках дистанционного обучения [19–21]. Вопросы компьютерного моделирования с использованием прикладных программных пакетов рассматриваются во многих работах [1–35].

Анализ исследований, посвящённых инструментальным средствам компьютерного моделирования, позволяет выявить важную проблему необходимости выбора наиболее удобного и эффективного средства графического и динамического моделирования в процессе обучения. В то же время реализация компьютерного моделирования в программном средстве пока недостаточно освещена, и авторы своей задачей видят раскрытие основных возможностей программного

сервиса GeoGebra для компьютерного моделирования при решении прикладных задач.

1. Краткое описание основных возможностей GeoGebra

GeoGebra — это бесплатный многоязычный пакет математического программного обеспечения с открытым исходным кодом, созданный международным сообществом программистов в 2001 году. Математический сервис GeoGebra разработан специально для целей изучения различных математических дисциплин, включая геометрию, алгебру, математический анализ, теорию вероятностей, математическую статистику и компьютерное моделирование. Программа написана на кроссплатформенном языке Java, что позволяет использовать ее на компьютерах различных типов и на большинстве операционных систем [1].

Идея GeoGebra заключается в интерактивном сочетании геометрического, алгебраического и числового представления. Такое сочетание позволяет создавать конструкции с точками, линиями, векторами, математическими функциями с возможностью их дальнейшего изменения. Таким образом, полученными объектами обучающиеся могут легко манипулировать в пространстве, реализовывать интерактивные геометрические объекты (2D и 3D), работать с электронной таблицей, системой компьютерной алгебры (CAS), реализовывать вероятностное моделирование и статистическую обработку данных и прочее.

Общество пользователей сервиса постоянно развивает функционал GeoGebra, размещают материалы с новыми возможностями. Однако некоторые вопросы до сих пор не разработаны, авторы статьи решили компенсировать этот недостаток и предложить решение ряда типовых задач компьютерного моделирования средствами GeoGebra. Рассмотрим возможности GeoGebra при решении задач линейного программирования.

1.1. Пример 1. Линейное программирование

Задача линейного программирования важнейших инструмент решения социально-экономических и иных задач.

Для получения представления об особенностях решения этой задачи, знакомства с компьютерным моделированием полезно использование возможностей сервиса GeoGebra для иллюстрации графического метода решения задач линейного программирования.

Пусть дана задача линейного программирования об оптимальной производственной программе, в которой математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} f = 3x + 4y \rightarrow \max, \\ 5x + 6y \leq 30, \\ 4x + 8y \leq 32, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

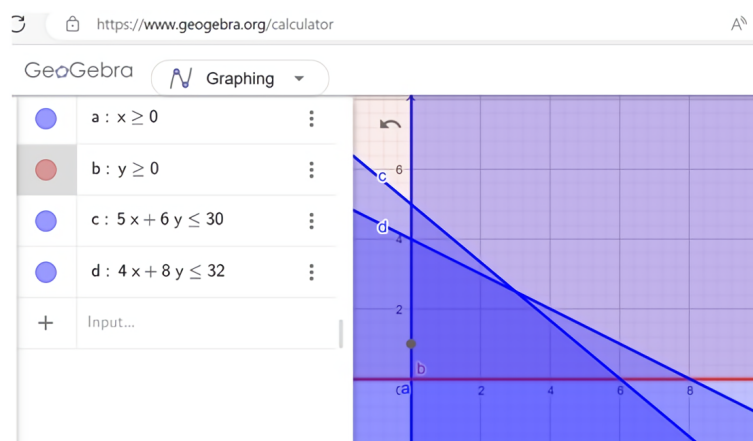


Рис. 1. Создание области допустимых решений команды и результат

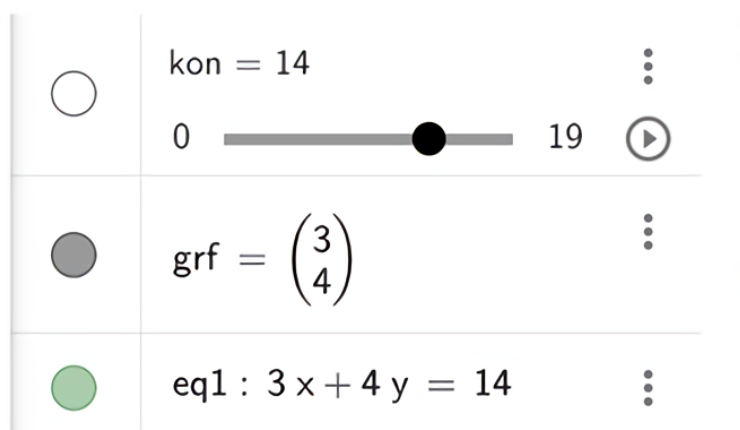


Рис. 2. Создание слайдера для автоматического передвижения линии уровня целевой функции и команда для построения вектора градиента

Реализуем решение и компьютерное моделирование в GeoGebra.

Построим область допустимых решений задачи (рис. 1), используя классический калькулятор GeoGebra.

Создадим слайдер (ползунок) kon для автоматизации движения прямой — уровня целевой функции параллельно самой себе (рис. 2). Построим вектор градиента grf для целевой функции, для определения направления наискорейшего возрастания выручки (прибыли).

Рассмотрим некоторые настройки слайдера (рис. 3)

Для определённости найдём вершины области допустимых решений, которая выделена более насыщенным цветом. В этой области все штриховки совпадают. Для определения координат точек пересечения прямых зададим прямые с помощью уравнений прямых и используем команду `intersect` для получения координат точек пересечения прямых (рис. 4).

Для иллюстрации сути графического решения запускаем работу слайдера и наблюдаем за параллельным переносом линии уровня в направлении градиента

Basic **Slider** Color Position Advanced Algebra

Scripting

Min
0

Max
19

Increment
1

☐ Fixed ☐ Random Horizontal ▾

Speed
1

Repeat

Рис. 3. Настройки слайдера: максимальное и минимальное значение, шаг

	eq2 : $x = 0$	⋮
	f : $y = 0$	⋮
	eq3 : $5x + 6y = 30$	⋮
	eq4 : $4x + 8y = 32$	⋮
	A = Intersect(eq2, eq4) → (0, 4)	⋮
	B = Intersect(eq3, eq4) → (3, 2.5)	⋮
	C = Intersect(eq3, f) → (6, 0)	⋮

Рис. 4. Получение точек пересечения прямых — вершин многоугольника допустимых решений

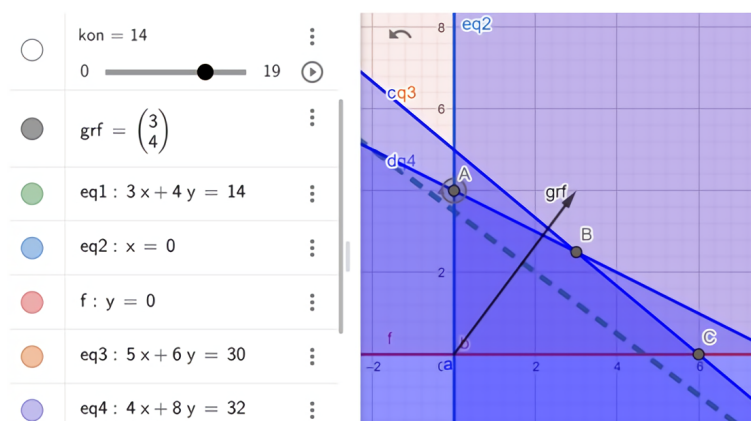


Рис. 5. Положение линии уровня при значении целевой функции, равном 14

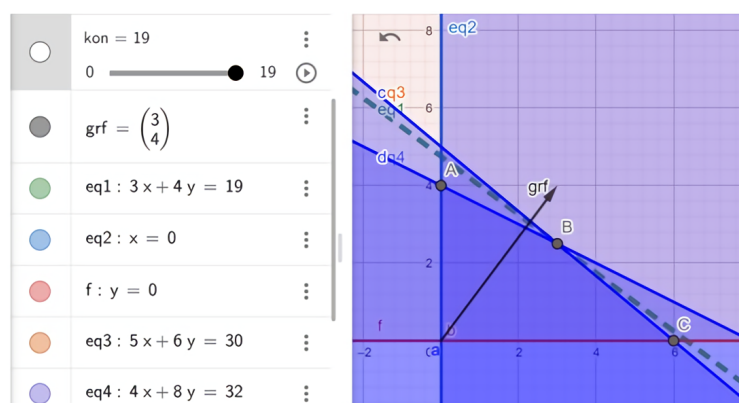


Рис. 6. Положение линии уровня при оптимальном значении целевой функции, равном 19

до пересечения с крайней вершиной В (рис. 5 и рис. 6).

Проведём компьютерный эксперимент для исследования влияния изменения запасов ресурсов на оптимальное решение. Введём параметр – слайдер, для правой части ограничения в виде неравенства по первому ресурсу и для границы области, определяемой уравнением (рис. 7).

Ниже показаны объекты (рис. 8), зависящие от изменения параметра parametr.

Аналогично можно исследовать влияния цен на оптимальное решение.

1.2. Пример 2. Модель управления запасами

Модели управления запасами были одними из первых моделей, разработанных математиками для управления производственными процессами. Постепенно эти модели стали также использоваться и в сфере управления финансами, например, модель Баумеля.

Простейшей моделью теории управления запасами является модель детерминированного спроса для однономенклатурного запаса. В этой модели счита-

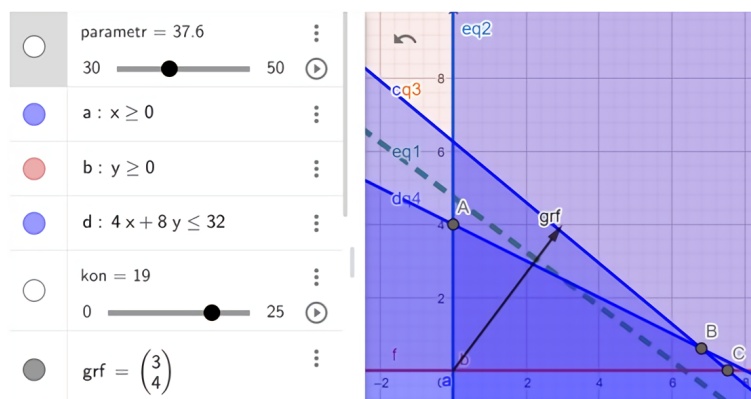


Рис. 7. Изменение параметра и связанное изменение положения точки В

	eq3 : $5x + 6y = 37.6$
	B = Intersect(eq3, eq4) → (6.8, 0.6)
	C = Intersect(eq3, f) → (7.52, 0)
	c : $5x + 6y \leq \text{parametr}$ → $5x + 6y \leq 37.6$

Рис. 8. Зависимые от параметра parametr объекты

ется, что известны общая за период потребность в ресурсе (периодом может быть год, месяц), затраты на доставку одной партии, затраты на хранение единицы запаса за весь период. Общие затраты складываются в результате суммирования затрат на доставку и затрат на хранение.

Модели управления запасами в простейшем случае относятся к задачам безусловной нелинейной оптимизации. С помощью аппарата дифференциального исчисления или графически можно определить размер оптимального заказа, при котором общие затраты будут минимальными. Зная величину оптимального заказа, можно определить число заказов, временной промежуток между заказами.

Задачи управления запасами можно использовать при обучении компьютерному моделированию. Приведём пример компьютерной реализации этой модели средствами веб-сервиса Графический калькулятор GeoGebra (рис. 9).

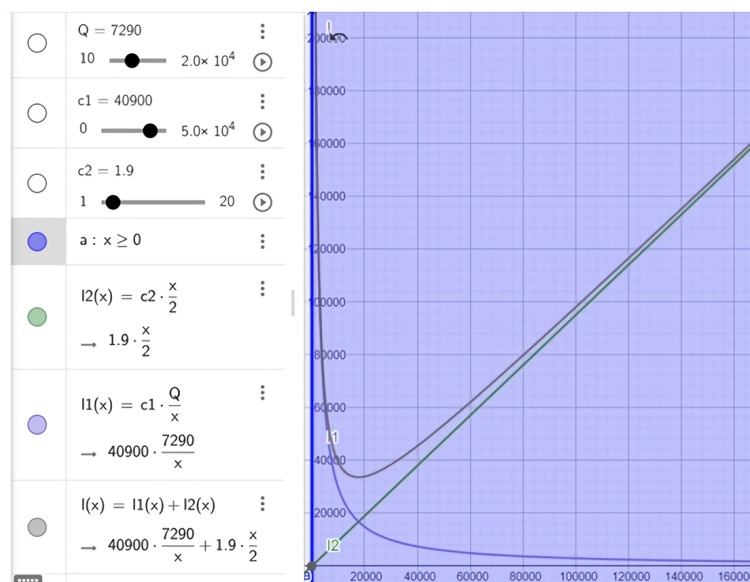


Рис. 9. Окно команд и графики функций затрат на доставку, на хранение и общих суммарных затрат

Для исследования влияния изменений входных параметров используются слайдеры для изменения общей потребности в ресурсе, для изменения затрат на доставку одной партии, затрат на хранение за весь период. Вводятся функции: затраты на хранение, затраты на доставку, общие затраты. Точка минимума общих затрат определяет оптимальный размер партии, при котором общие затраты минимальны.

Изменяя значения входных параметров, можно анализировать возможное значение оптимального размера партии, при котором общие затраты будут минимальными.

1.3. Пример 3. Моделирование гармонических колебаний

Периодические изменения физической величины в зависимости от времени, происходящие по закону синуса или косинуса, называют гармоническими колебаниями.

Рассмотрим графическое представление уравнения гармонического колебания: $y = x_0 \cos(w_0 x)$. На рисунке 10 представлено исследование влияния параметров гармонических колебаний на график колебательного процесса.

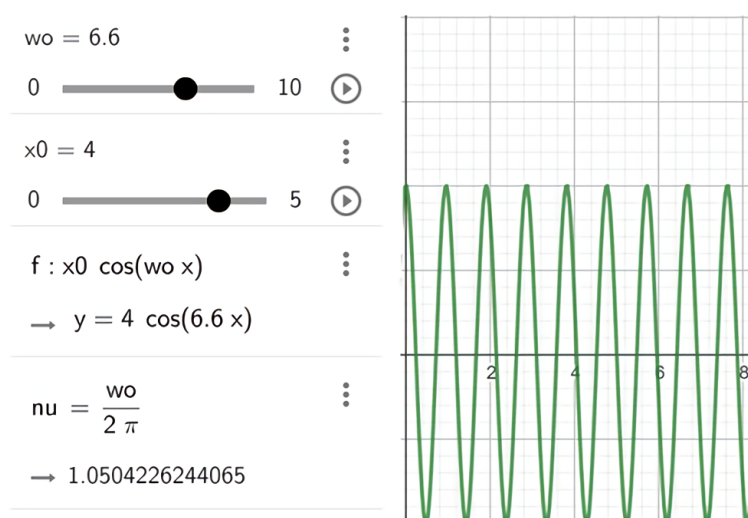


Рис. 10. Окно команд и график колебательного процесса

1.4. Пример 4. Задача об образовании двух новых веществ, при разложении исходного вещества

Пусть из исходного вещества массой a образуются два новых вещества x_1, x_2 . Скорость образования новых веществ пропорциональна массе неразложившегося исходного вещества с коэффициентами k_1, l . В начальный момент времени $x_{10} = 0, x_{20} = 0$. Требуется промоделировать процесс образования новых веществ на отрезке времени $[0, 20]$ секунд.

Для решения задачи составим математическую модель. Имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1(a - x_1 - x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = l(a - x_1 - x_2), \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Используем возможности веб-сервиса по численному решению задачи Коши первого порядка для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, применим процедуру NSolveODE, основанную на применении численных методов семейства Рунге–Кутты.

Подготовим для моделирования запись уравнений системы и исходных параметров в соответствии с правилами синтаксиса использования NSolveODE. В нашей реализации параметр l фиксирован, но зато можно изменять начальные значения и параметр k_1 , также a -массу исходного вещества (рис. 11, рис. 12).

$l = 7$	⋮
$a = 4.84$	⋮
1 <input type="range"/> 5 ▶	
$k_1 = 2.48$	⋮
0 <input type="range"/> 5 ▶	
$x_1'(t, x_1, x_2) = k_1 (a - x_1 - x_2)$ $\rightarrow 2.48 (4.84 - x_1 - x_2)$	⋮
$x_2'(t, x_1, x_2) = l (a - x_1 - x_2)$ $\rightarrow 7 (4.84 - x_1 - x_2)$	⋮

Рис. 11. Настройка параметров и запись уравнений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Затем вызовем процедуру NSolveODE для численного решения системы с начальными условиями.

Графическое представление результата приведено на рисунке 13.

Программное средство позволяет многократно проводить решения, для выбора самого оптимального режима работы системы.

Видно, что с некоторого момента времени процесс образования новых веществ практически прекращается, из-за почти полного расходования исходного вещества, массы новых веществ с определённого момента практически не меняются. Ползунки слайдеры позволяют анализировать влияние изменения ряда входных параметров на интенсивность процесса образования новых веществ.

Использование возможностей веб-сервиса даёт возможность проводить интерактивное компьютерное моделирование, иллюстрировать различные сценарии развития при изменении входных параметров модели. Преимуществом ис-

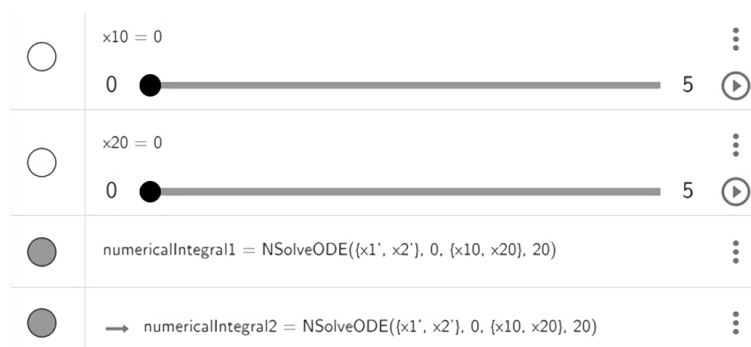


Рис. 12. Вызов процедуры численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

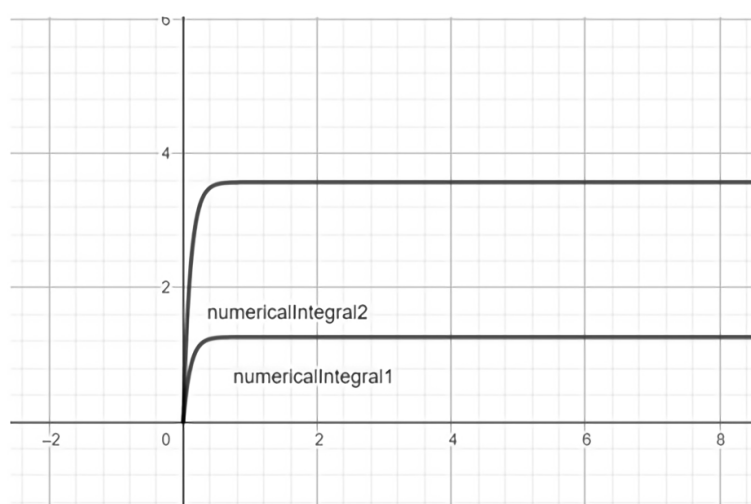


Рис. 13. Графическое представление результата численного решения

пользования является возможность графической поддержки при визуальном отражении основных закономерностей при моделировании.

Использование визуализации повышает уровень восприятия процедуры моделирования и используемых моделей, развивает навыки компьютерного моделирования.

2. Заключение

Таким образом, мы рассмотрели возможности применения графического метода решения задачи линейного программирования, модели управления запасами, компьютерного моделирования физико-химических процессов. Очевидно, преимущество применения GeoGebra или подобных программных средств с точки зрения развития навыков исследовательской деятельности и выработки наглядных представлений о сущности решаемых задач.

В целом, внесение анимационной наглядности существенно пополняет арсенал средств обучения компьютерному моделированию, что, несомненно, спо-

способствует повышению уровня понимания и прочного усвоения компьютерных и математических знаний. Эта новая составляющая современной методики обучения компьютерному моделированию является технологическим проявлением цифровизации образования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акишин Б.А., Воронцова В.А. Решение типовых математических задач с помощью программы GEOGEBRA // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике. 2017. Т. 3, № 1(2). С. 275–280.
2. Алиева С.А., Воробьева И.А. Интерактивная геометрическая среда GEOGEBRA и ее применение на уроках математики // Вопросы педагогики. 2022. № 3–2. С. 17–20.
3. Войтенко Т.Ю., Фирер А.В. Цифровая визуализация геометрических вероятностей в GEOGEBRA // Педагогическая информатика. 2021. № 2. С. 121–127.
4. Горзиннежад М.Р. Эффективность использования компьютерной программы GEOGEBRA 4 в обучении геометрии // Вестник Таджикского национального университета. Серия естественных наук. 2015. № 1–2. С. 69–72.
5. Губская И.О. Применение GEOGEBRA на уроках математики // Современное образование Витебщины. 2017. № 4(18). С. 69–74.
6. Елькина Ю.С. Применение среды GEOGEBRA к решению задач с параметрами в условиях дистанционного обучения // Студенческий вестник. 2020. № 20–2(118). С. 18–21.
7. Дронова Е.Н., Захарова Д.С. Актуальность использования программы GEOGEBRA при изучении школьного курса геометрии // Решение. 2017. Т. 1. С. 33–34.
8. Калыбекова Ж.А. Математика в высших учебных заведениях с применением программы GEOGEBRA // Новости науки Казахстана. 2018. № 1(135). С. 61–67.
9. Караказьян С.А., Уразаева Л.Ю. Возможности обработки данных с помощью программного продукта PAST // Наукосфера. 2020. № 11–2. С. 185–191.
10. Кислякова М.А., Деньгуб И.А. Методическая модель изучения функциональной линии в малых группах с применением программы GEOGEBRA // Учёные заметки ТОГУ. 2019. Т. 10, № 3. С. 17–23.
11. Клековкин Г.А. Моделирование контуров листьев растений в среде GEOGEBRA // Математическое образование. 2021. № 3(99). С. 48–57.
12. Колпакова Д.С. GEOGEBRA как средство визуализации решения задач на уроках геометрии в 7 классе // Молодой учёный. 2018. № 11(197). С. 164–167.
13. Куклин С.А., Адамович Н.О. Использование программного комплекса "GEOGEBRA" при исследовании механизмов // Наука, техника и образование. 2020. № 8(72). С. 17–21.
14. Косьянов П.М., Манюкова Н.В. Проектирование компьютерной модели эксплуатации нескольких пластов одной нагнетательной скважины // Математические структуры и моделирование. 2021. № 4(60). С. 94–108.
15. Курушин П.Д. Пример использования GEOGEBRA Для изучения квадратичной функции в старших классах // Вестник научных конференций. 2020. № 12–1(64). С. 80–82.

16. Ларин С.В. Алгебра и математический анализ с GEOGEBRA // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1(23). С. 236–240.
17. Ларин С.В., Майер В.Р. Задачи на построение, неразрешимые циркулем и линейкой, и их решение в компьютерной среде // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. № 1(23). С. 223–227.
18. Малышева Я.В. Обучение математике с использованием интерактивной геометрической среды GEOGEBRA // Современная наука: тенденции развития. 2017. № 17. С. 98–100.
19. Манюкова Н. В. Повышение эффективности управления учебной деятельностью учащихся на уроках разного типа: дис. ... канд. пед. наук. Омск, 2002. 194 с.
20. Манюкова Н.В. Современный взгляд на структуру ИКТ-компетентности // Проблемы и перспективы развития регионов и предприятий в условиях глобализации экономики. Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова, уфимский институт (филиал), Дрезденский технический университет, Словацкий технологический университет, Институт экономики УрО РАН. М., 2014. С. 164–168.
21. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю. Методология проектирования и разработки обучающих программных комплексов / В сборнике: Современное программирование. Материалы II Международной научно-практической конференции. Отв. редактор Т.Б. Казиахмедов. 2019. С. 112–116.
22. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю., Дацун Н.Н. Особенности программирования в пакете Gretl / В сборнике: Современное программирование. Материалы II Международной научнопрактической конференции. Отв. редактор Т.Б. Казиахмедов. 2019. С. 52–56.
23. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю., Мамедли Р.Э. Математическое моделирование в преподавании информационных технологий // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 118–133.
24. Мещерякова К.С. Дидактические возможности компьютерных программ КОМПАС-3D, GEOGEBRA, MAPLE при решении геометрических задач // Информация и образование: границы коммуникаций. 2021. № 13(21). С. 91–93.
25. Мордашева Т.Ю. Использование приложения GEOGEBRA на уроках математики // Педагогический опыт: теория, методика, практика. 2016. № 4(9). С. 170–173.
26. Нестерук О.В. Использование программы GEOGEBRA при изучении школьного математического материала // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. 2018. № 13. С. 102–107.
27. Пронина Е.В. Особенности использования математического пакета GEOGEBRA при изучении темы «Кривые второго порядка» // Наука и образование: новое время. Научно-методический журнал. 2020. № 3(21). С. 10–16.
28. Серба М.Д., Кравчун М.В. Концепция разработки учебных материалов средствами GEOGEBRA // Молодой ученый. 2019. № 47 (285). С. 51–54.
29. Ситникова Т.В., Малева А.А. Использование системы динамической геометрии GEOGEBRA для работы с графами // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2, № 5–2(10–2). С. 258–261.
30. Тагаева Е.А. Использование программной среды GEOGEBRA при изучении темы «Производная функции» в средней школе // Учебный эксперимент в образовании. 2018. № 3(87). С. 40–44.

31. Уразева Л.Ю., Манюкова Н.В., Мамедли Р.Э. Математическое моделирование миграционных процессов // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 83–92.
32. Уханова Л.В. Использование среды GEOGEBRA при решении задач с параметрами // Школьная педагогика. 2018. № 3(13). С. 40–44.
33. Albano G., Dello Iacono U. GEOGEBRA in e-learning environments: a possible integration in mathematics and beyond // Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing. 2018.5.63.
34. Kusumah Y.S., Herman T., Kustiawati D. The effect of GEOGEBRA in three-dimensional geometry learning on students' mathematical communication ability//International Journal of Instruction. 2020. V. 13, No. 2. P. 895–908.
35. Latifi M., Hattaf K., Achtaich N. The effect of dynamic mathematics software GEOGEBRA on student' achievement: the case of differential equations // Journal of Educational and Social Research. 2021. V. 11, No. 6. P. 211–221.

USING GEOGEBRA IN TEACHING COMPUTER MODELING

L.U. Urazayeva¹

Ph.D.(Phys.Math.), Associate Professor, e-mail: delovoi2004@mail.ru

N.V. Manyukova²

Ph.D. (Ped.), Associate Professor, e-mail: manukovanv@mail.ru

¹ Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia

² Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. The paper discloses and describes the possibilities of using the GeoGebra software tool for organizing training in computer modeling. The software tool is free, has a web interface, but so far there is not enough literature on the use of the software product. The advantages of working with the program include the ability to create your own extensions of the program's capabilities, the development of algorithms for solving applied problems of mathematical modeling using this tool. The authors proposed possible solutions to typical modeling problems in the GeoGebra environment that were not previously described in the literature.

Keywords: computer modeling, mathematical model, linear programming, graphical solution method, compilation of inventory management model, modeling of harmonic oscillations, GeoGebra.

Дата поступления в редакцию: 13.11.2022

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета $\text{\LaTeX}$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор $\text{\LaTeX}$, так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры и моделирование

№4 (64)

Главный редактор
А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор
Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор
Н.Ф. Богаченко

Перевод на английский язык в авторской редакции

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,
Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



Подписано в печать 14.12.2022. Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 18,14. Тираж 25 экз. Заказ № 230.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005

22064 >

