

## АЛГОРИТМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ НАПРАВЛЕННОСТИ ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТОК

**А.В. Еремеев**

д.ф.-м.н., доцент, e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru

**Н.Н. Тюнин**

аспирант, e-mail: n.n.tyunin@gmail.com

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, Омск

**Аннотация.** Задача оптимизации направленности фазированных антенных решёток для радиосвязи коротковолнового диапазона сформулирована как невыпуклая задача квадратичного программирования. С учётом специфики рассматриваемой задачи предложен гибридный алгоритм, основанный на методе дифференциальной эволюции, методе штрафных функций и градиентной оптимизации. Корректировка недопустимых решений осуществляется посредством их масштабирования. Штрафной коэффициент выбирается адаптивно в процессе работы алгоритма. Проведён вычислительный эксперимент, в котором предложенный алгоритм сравнивается с коммерческим решателем BARON, основанном на многократном применении алгоритма локального поиска и методе ветвей и границ, а также с решателем ANTIGONE и градиентным алгоритмом. Кроме того, исследован эффект от учёта симметрий рассматриваемой задачи. По результатам эксперимента можно сделать вывод о конкурентоспособности предложенного гибридного алгоритма, в особенности на задачах большой размерности.

**Ключевые слова:** задача оптимизации, фазированная антенная решётка, квадратичное программирование, коротковолновый диапазон, дифференциальная эволюция.

### Введение

В настоящее время одной из актуальных задач в области разработки и анализа эффективных систем радиосвязи является задача оптимизации направленности фазированных антенных решёток (ФАР), представляющих собой антенные системы, распределение фаз и амплитуд на элементах которых позволяет получать направленное излучение. Будучи собранными в антенную систему и разведёнными в пространстве, излучатели формируют диаграмму направленности, которая зависит от расположения и конструкции излучателей, а также выбора фаз и амплитуд сигналов, подаваемых на вход излучателей.

В диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) задачи оптимизации фаз и амплитуд излучателей, как правило, решаются с использованием некоторых упроща-

ющих предположений [1–3]. Однако, в диапазоне высоких частот (ВЧ) задача оптимизации направленности ФАР оказывается более сложной, и потому менее изучена [4, 5]. При ограничении суммарной мощности, подаваемой на антенную систему, задача выбора фаз и амплитуд на излучателях может быть решена аналитически [6]. Однако, при ограничении на мощность по каждому входу антенной системы требуется решение невыпуклых задач квадратичного программирования [7]. Вообще говоря, задачи квадратичного программирования являются NP-трудными [8]. Для решения таких задач могут применяться методы ветвей и границ [9], отсечений [10], DC-программирования [11], полуопределённой релаксации [7], эволюционных вычислений [12, 13], локального поиска [14] и др.

Настоящая работа посвящена разработке алгоритмов решения задачи оптимизации направленного излучения ФАР ВЧ диапазона с использованием градиентного подъёма и эволюционных вычислений. В разделе 1. вводятся основные обозначения, даётся математическая формулировка задачи и описывается её сведение к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций. С учётом специфики рассматриваемой задачи в разделе 2. предложен гибридный алгоритм, основанный на методе дифференциальной эволюции и градиентной оптимизации. Корректировка недопустимых решений осуществляется посредством их масштабирования. Штрафной коэффициент выбирается адаптивно в процессе работы алгоритма. В разделе 3. приводятся результаты вычислительного эксперимента, в котором предложенный алгоритм сравнивается с коммерческим решателем BARON, основанном на многократном применении алгоритма локального поиска и методе ветвей и границ, а также с решателем ANTIGONE и градиентным алгоритмом. Кроме того, исследован эффект от учёта симметрий рассматриваемой задачи. В разделе 4. содержатся заключения.

## 1. Основные обозначения

Математическая постановка задачи оптимизации направленности ФАР формулируется из физических соображений в виде выпуклого квадратичного функционала при невыпуклых квадратичных ограничениях [6]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^+ \mathbf{A} \mathbf{u} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{u}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{u} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{u}^+ \mathbf{B}^{(N)} \mathbf{u} \leq 1. \\ \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $n$  – количество излучателей в системе. Матрица  $\mathbf{A}$  описывает влияние каждого элемента системы на ее излучение вдоль заданного направления. Ограничения, описываемые матрицами  $\mathbf{B}_k, k = \overline{1, N}$ , накладываются на мощность, которую генератор сигнала способен подать на каждый излучатель. Вектор  $\mathbf{u}$  представляет собой вектор-столбец комплексных напряжений.

Для построения алгоритмов анализа и решения данной задачи был предложен переход от постановки в комплексных числах к постановке в вещественных [15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(N)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2n}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь матрица  $\mathbf{G}$  вычисляется по матрице  $\mathbf{A}$ , а матрицы  $\mathbf{H}_k, k = \overline{1, N}$  – по матрицам  $\mathbf{B}_k, k = \overline{1, N}$ .

Ранее было показано [15], что задача (1) имеет тривиальную симметрию  $\mathbf{u} \rightarrow e^{j\phi} \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{j}$  – мнимая единица,  $\phi$  – фазовый сдвиг, одинаковый во всех компонентах вектора  $\mathbf{u}$ . При исследовании структуры локальных оптимумов в указанной работе было отмечено, что, возможно, задача (1) имеет и другие симметрии.

Также, в работе [15] для отыскания локального оптимума использовался многократный запуск градиентного подъёма. Здесь для этих целей предлагается гибридный алгоритм, сочетающий элементы градиентного метода и дифференциальной эволюции.

При этом, задача (2) сводится к задаче безусловной оптимизации методом внешней точки в виде (3)

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n \left( \min \left( 0, \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) + \min \left( 0, 1 - \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \right) \right)^a \rightarrow \max, \quad (3)$$

где  $r$  и  $a$  – настраиваемые параметры. Далее в настоящей работе полагаем  $a := 2$ .

## 2. Дифференциальная эволюция

### 2.1. Базовый вариант алгоритма

Эволюционные алгоритмы (ЭА) – один из наиболее широко используемых методов решения многоэкстремальных задач оптимизации, применяемый во многих областях информатики, экономики, инженерии и др. Дифференциальная эволюция (ДЭ) [16] – один из наиболее эффективных ЭА непрерывной оптимизации. В частности, ДЭ была признана стратегией-победителем нескольких конкурсов по оптимизации [17]. Подобно другим эволюционным алгоритмам, ДЭ вдохновлён естественным процессом эволюции и включает в себя применение мутаций, рекомбинации и селекции. Основная особенность ДЭ заключается в том, что в этом алгоритме при построении особей-потомков учитываются разницы между векторами, присутствующими в популяции. В этом смысле он похож на алгоритм Нелдера–Мида [18].

ДЭ – рандомизированный алгоритм, основанный на популяционном поиске, в котором на каждой итерации вычисляется новый набор пробных решений (векторов). В базовом варианте ДЭ для каждого члена популяции (их называют целевыми векторами) создаётся новый мутантный вектор. Затем мутантный вектор комбинируют с целевым вектором для создания пробного вектора. Наконец, применяется фаза селекции для выбора особей следующей популяции. Таким образом, итерации ДЭ продолжаются, пока не будет достигнут критерий остановки. В поколении  $G$   $i$ -й вектор популяции обозначается как  $\mathbf{X}_{i,G} = [x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, \dots, x_{D,i,G}]$ . Ниже приведены более подробные сведения о каждой фазе ДЭ.

Эксперименты показывают [19], что в целом эволюция популяции такова, что в случае попадания популяции в некоторый «овраг», популяция ориентируется вдоль этого оврага и математическое ожидание разности двух случайных векторов оказывается направленным вдоль оврага. Это обеспечивает быстрое движение вдоль узких оврагов, тогда как для градиентных методов в аналогичных условиях характерна колебательная динамика «от стенки к стенке». Приведённые эвристические соображения иллюстрируют наиболее важную и привлекательную особенность алгоритма ДЭ – способность динамически адаптироваться к особенностям рельефа оптимизируемой функции. Именно этим объясняется способность алгоритма быстро проходить сложные овраги, обеспечивающая его способность к поиску оптимальных или близких к оптимуму решений.

**Инициализация.** ДЭ обычно начинает процесс оптимизации со случайно инициализированной популяции, состоящей из  $D$  векторов. Поскольку информация о перспективности различных областей пространства решений, как правило, отсутствует, для инициализации ДЭ применяются равномерные генераторы случайных векторов в параллелепипеде с некоторыми границами  $a_i$ ,  $b_i$  по каждой координате  $j$ , т. е.  $j$ -я компонента  $i$ -го вектора инициализируется как  $x_{j,i,0} = a_j + rand_{i,j}(b_j - a_j)$ , где величина  $rand_{i,j}$  выбрана с равномерным распределением между 0 и 1.

**Мутация.** Для каждого целевого вектора создаётся мутантный вектор. В настоящее время известно несколько вариантов этого оператора. В классическом варианте ДЭ применяется стратегия  $rand/1$ . В этом случае мутантный вектор  $\mathbf{V}_{i,G}$  создаётся следующим образом:

$$\mathbf{V}_{i,G} = \mathbf{X}_{r_1,G} + F \cdot (\mathbf{X}_{r_2,G} - \mathbf{X}_{r_3,G}), \quad r_1 \neq r_2 \neq r_3, \quad (4)$$

где  $r_1, r_2, r_3$  – попарно различные целые числа, случайно выбранные из множества  $\{1, \dots, D\} \setminus i$ . Разница между векторами масштабируется множителем  $F$ , который называется *силой мутации* и обычно определяется в интервале  $[0.4, 1]$ .

**Рекомбинация.** Для объединения информации о различных пробных решениях и с целью увеличения разнообразия в популяции применяется оператор кроссинговера (рекомбинации). Каждый целевой вектор  $\mathbf{X}_{i,G}$  рекомбинируется с соответствующим ему мутантным вектором  $\mathbf{V}_{i,G}$  для создания пробного решения  $\mathbf{U}_{i,G} = [u_{1,i,G}, u_{2,i,G}, \dots, u_{D,i,G}]$ . Наиболее типичный вариант кроссинговера в ДЭ действует следующим образом:

$$\mathbf{u}_{j,i,G} = \begin{cases} v_{j,i,G}, & \text{если } rand_{i,j} \leq CR \text{ или } j = j_{rand}, \\ x_{j,i,G} & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

где  $rand_{i,j}$  – равномерно на  $[0, 1]$  распределённое случайное число,  $j_{rand}$  – случайно выбранный индекс. При этом гарантируется, что  $\mathbf{U}_{i,G}$  наследует хотя бы одну компоненту от  $\mathbf{V}_{i,G}$ . Параметр  $CR \in [0, 1]$  называется *интенсивностью кроссинговера*.

**Селекция.** Наконец, выполняется отбор для определения следующего поколения. Каждый пробный вектор сравнивается с соответствующим ему целевым вектором, и выживает лучший из них:

$$\mathbf{X}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{U}_{i,G}, & \text{если } \tilde{F}(\mathbf{U}_{i,G}) \leq \tilde{F}(\mathbf{X}_{i,G}) \\ \mathbf{X}_{i,G} & \text{иначе.} \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, каждый член популяции либо становится лучше по целевой функции, либо остаётся с тем же значением целевой функции в следующем поколении.

## 2.2. Гибридный вариант алгоритма дифференциальной эволюции

Будучи применённым к различным примерам из [15], описанный выше базовый вариант алгоритма дифференциальной эволюции зачастую не мог обнаружить даже допустимых решений за все отведённое ему время. Чтобы избежать этой тенденции, в данной работе предложен гибридный вариант ДЭ с использованием градиентного метода, масштабированием решений в допустимую область и адаптацией штрафа, учитывающий специфику решаемой задачи.

Комбинация ДЭ с градиентным подъёмом реализуется следующей процедурой, выполняемой перед переходом к следующему поколению  $G + 1$ :

Пусть  $G_0$  – номер поколения, когда было последнее улучшение рекорда,  $Grad(X)$  – результат применения градиентного подъёма с начальным решением  $X$ ,  $X_G$  – лучшая особь популяции на итерации  $G$ .

Если  $G > D$  и  $G > 2G_0$ , то положить

$$X' := Grad(X_G).$$

Если  $X' = X_G$ , то завершить выполнение алгоритма, выдать решение  $X_G$ .

Иначе положить

$$X_G := X',$$

$$G_0 := G.$$

Условие  $G > 2G_0$  показывает отсутствие улучшения рекордного значения целевой функции за то же число итераций, которое было затрачено на получение этого рекорда. Условие  $G > D$  гарантирует, что на начальных итерациях ДЭ не будет принято решение о запуске градиентного алгоритма [20, 21]. Здесь и далее под улучшением рекордного значения понимается увеличение лучшего найденного значения целевой функции в очередном поколении  $G$  не менее, чем на  $\varepsilon$ , где параметр  $\varepsilon$  тот же, что и в критерии останова градиентного алгоритма (по минимальному допустимому приращению целевой функции) [15].

**Масштабирование решений.** Для рассматриваемой задачи существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области любое решение  $\mathbf{x}$ , которое нарушает только неравенства задачи (3) вида  $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$ :

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad (7)$$

где  $\alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=1, \dots, n} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}$ . Поскольку как целевая функция, так и ограничения представлены квадратичными формами, применение такой операции приведёт к пропорциональному уменьшению в  $\alpha(\mathbf{x})$  раз значений каждой из квадратичных форм. Другими словами, если в некоторой точке  $\mathbf{x}$  значения каждой из квадратичных форм, задающих ограничения, больше 0, причём значения некоторых из них больше 1, то по формуле (7) можно определить множитель, умножение которого на вектор  $\mathbf{x}$  ведёт к тому, что наибольшее из значений квадратичных форм, задающих ограничения, будет равно 1. Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования каждого нового решения перед оценкой его качества в алгоритме ДЭ и после завершения градиентного подъёма. При этом, если решение до масштабирования имело большие нарушения ограничений, то после масштабирования его целевая функция существенно изменяется (как правило, в сторону снижения качества). На этом принципе основано адаптивное правило подбора штрафного коэффициента  $r$ , описываемое далее.

Пусть  $G$  – номер текущей итерации,

$G_0$  – номер итерации, на которой было получено улучшение рекорда,

$G_1$  – номер итерации, на которой произошло предыдущее увеличение штрафа,

$r$  – текущее значение штрафного коэффициента.

Если  $G > D$  и  $G > 1.5G_0$  и  $G > 2G_1$ , то положить

$$r := 2r$$

$$G_1 := G.$$

Таким образом, при отсутствии существенных улучшений качества решений на протяжении  $G_0/2$  итераций, ещё до вызова градиентного алгоритма и до окончания работы ДЭ делается попытка улучшить найденный результат за счёт увеличения штрафа. Условие  $G > D$  гарантирует, что на начальных итерациях не будет принято решение об увеличении штрафа. Условие  $G > 2G_1$  вводится для того, чтобы штрафной коэффициент не увеличивался слишком часто. С

учётом масштабирования особей в допустимую область, описанный механизм увеличения штрафа, как правило, приводит к выживанию особей с меньшим нарушением ограничений и позволяет улучшить качество получаемых решений.

### 3. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был поставлен для задач, рассмотренных в [15, 22]. В данной статье ШВИК, ШВДК, СВДК обозначают решётки кольцевой структуры. Далее следует указание количества элементов (8 или 16). Через тире – расстояние (метры) от центра излучателя до центра решётки (15, 20, 25, 30, 37). Для ШВД приводится плотность противовесов (например, 3:3). Поскольку современные ЭВМ на аппаратном уровне поддерживают вычисление в параллельном режиме, рассматриваемый здесь алгоритм ДЭ был адаптирован под эту особенность: за один запуск алгоритма производится 4 параллельных выполнения, а на выход подаётся лучшее решение. Это позволяет использовать возможности современных ЭВМ для получения более качественных решений. В таблице 1 результаты, полученные с помощью градиентного подъёма из [15] и гибридного алгоритма дифференциальной эволюции (ДЭ), сравниваются с результатами коммерческого решателя BARON версии 18.11.12 из пакета GAMS. Все сравниваемые алгоритмы имеют ограничение по времени счета 1000 с (эта длительность выбрана из практических соображений, т. к. она сопоставима с временем построения исходных данных с использованием системы NEC, и совпадает с ограничением по времени, выбранным в [15]). В случае нескольких запусков ДЭ за отведённое время, за окончательное решение принимается лучшее из найденных за 1000 с. Для оценки среднего значения целевой функции на выходе ДЭ производилась серия из 10 независимых испытаний по 1000 с в каждом. Эксперимент с гибридным алгоритмом ДЭ проводился при выборе типичных значений настраиваемых параметров (популяция из 100 особей,  $F = 0.6$ ,  $CR = 0.6$ ). Значения целевой функции в таблице округлены до целых. Полужирным шрифтом выделены случаи, когда указанное значение целевой функции не менее, чем на 1% выше, чем у других алгоритмов. Вычисления производились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота: 2.8ГГц), ОЗУ: 16Гб.

Аналогичные испытания производились и с помощью решателя ANTIGONE версии 39.1.0 в пакете GAMS, однако, было выявлено, что в режиме по умолчанию данный решатель на всех задачах выдал нулевое решение, кроме СВД 2x2, где решение по целевой функции совпадало с результатом BARON. Также, в результате проведённых экспериментов было обнаружено, что динамическая адаптация штрафного коэффициента позволяет ДЭ достичь более качественных решений, что особенно заметно в тех случаях, когда результаты ДЭ и BARON близки по качеству.

С целью изучения возможности ускорения работы решателей за счёт учёта специфики задачи были проведены дополнительные исследования структуры рассматриваемых примеров с точки зрения линейных симметрий этих задач [23]. Ранее было отмечено (см. [15]), что решения рассматриваемой задачи

Таблица 1. Результаты градиентного подъема, гибридного алгоритма ДЭ и BARON

Тип	град. подъем	ДЭ	BARON	
	$\tilde{F}$	$\tilde{F}$	$\tilde{F}$	t, с
ШВИ 2x2	138	139	139	0.12
ШВИ 3x3	576	580	580	0.34
ШВД 2x2	460	463	463	0.27
ШВД 3x3	915	924	925	0.34
СВД 2x2	357	361	361	0.16
СВД 3x3	1138	1163	<b>1261</b>	0.38
СВД 5x5	5318	<b>7132</b>	6716	1000
СВД' 2x2	233	198	<b>253</b>	0.25
СВД' 3x3	664	834	<b>1153</b>	1.4
СВД' 5x5	1382	<b>2755</b>	33	217.94
ШВИК 8-15(3:3)	217	218	218	0.23
ШВИК 16-15(3:7)	727	732	734	1.37
ШВИК 8-15(2:3)	1536	<b>1664</b>	-	14.62
ШВДК 8-20	1454	1454	1455	2.78
ШВДК 8-30	2422	2422	2422	1.47
СВДК 8-25	740	740	740	0.23
СВДК 8-37	1487	1487	1487	0.23

эквивалентны с точностью до сдвига фаз во всех излучателях на равную величину. Учёт данной симметрии (для краткости называемой «фазовой симметрией») может быть реализован фиксацией в ноль одной из переменных задачи, например,  $x_1 = 0$ . В результате добавления такого ограничения к условиям задачи число переменных сокращается на единицу и можно предположить, что это сократит время вычислений для известных алгоритмов. Нами поставлены вопросы о том, действительно ли происходит сокращение времени вычислений и о существовании других семейств симметрий, которые могли бы ещё более сократить пространство поиска решаемой задачи.

Для ответа на первый вопрос на всех тестовых примерах был найден коэффициент ускорения решателя BARON, получаемый от фиксации  $x_1 = 0$ . Результаты представлены на рисунке 1 (здесь отсутствует задача СВД' 5x5, где алгоритм с фиксацией затратил существенно большее время, но при этом нашёл решение с большим на 10% значением целевой функции, а также задача ШВИК 8-15(2:3), в которой решения не были найдены в обоих случаях). большинстве примеров фиксация переменной привела к ускорению работы алгоритма, среднее ускорение по представленным здесь задачам составило 0.95,



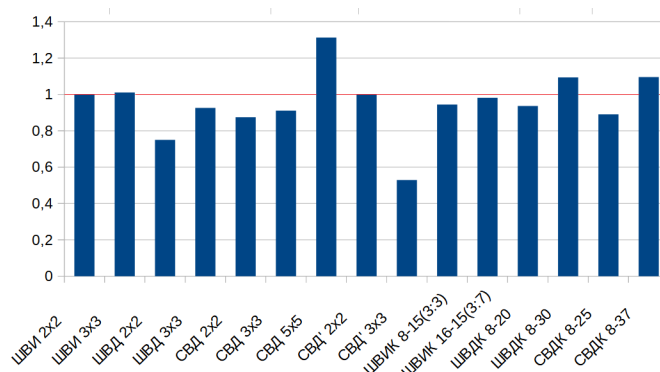


Рис. 1. Отношение длительности вычислений с фиксацией первой координаты к исходной длительности вычислений

что говорит о целесообразности фиксации в ноль одной из переменных при использовании решателя. Аналогичный эксперимент с алгоритмом ДЭ и решателем ANTIGONE не показал существенного улучшения качества решений или их ускорения в результате фиксации  $x_1$ .

Для ответа на второй вопрос был проведён поиск непрерывной группы линейных симметрий в рассматриваемых примерах, как описано в [23]. В результате было установлено, что других непрерывных семейств линейных симметрий в рассматриваемых примерах не существует. Вопрос о поиске дискретных симметрий остаётся открытым.

Из проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- 1) разработанный в рамках данной работы гибридный вариант ДЭ показывает конкурентоспособные результаты по сравнению с коммерческим решателем BARON в режиме его настроек по умолчанию, при этом преимущество ДЭ наблюдается на задачах с наибольшей размерностью (50 и 16 переменных);
- 2) решатель ANTIGONE в режиме его настроек по умолчанию в большинстве тестовых примеров давал нулевое решение;
- 3) учёт фазовых симметрий задачи (1) в большинстве случаев позволяет ускорить работу решателя BARON.

#### 4. Заключение

В рамках данной работы был разработан гибридный вариант алгоритма дифференциальной эволюции с использованием градиентного алгоритма и адаптацией штрафа. Показано, что разработанный вариант ДЭ демонстрирует конкурентоспособные результаты, в особенности на задачах большой размерности. Произведено сравнение гибридного алгоритма и коммерческих решателей с учётом фазовой симметрии, имеющейся в рассматриваемой задаче, и без неё. В ходе эксперимента, учёт симметрии в большинстве случаев приводил к ускорению работы решателя BARON.

## Благодарности

Авторы благодарны А.С. Юркову за постановку задачи и полезные замечания. Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0020).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Indenbom M., Izhutkin V., Sharapov A., Zonov A. Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters // IX International Conference on Optimization and Applications (OPTIMA 2018). 2018. P. 273–285.
2. Щелкунов С.А., Фрис Г. Антенны: Теория и практика. Советское радио, Москва, 1955.
3. Фаняев И.А, Кудин В.П. Синтез амплитудного распределения на входах излучателей фазированной антенной решётки над цилиндрической поверхностью методом роя частиц // Доклады БГУИР. 2017. С. 89–96.
4. Фаняев И.А., Кудин В.П. Фазированная антенная решётка кругового обзора над проводящей цилиндрической поверхностью из излучателей вертикальной поляризации // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер.: Естественные науки. 2014. С. 191–198.
5. Юрков А.С. Максимизация направленности фазированных антенных решёток коротковолнового диапазона // Научно-технический сборник «Техника радиосвязи». Омск : ОНИИП, 2016. № 2, С. 46–53.
6. Юрков А.С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решёток декаметрового диапазона длин волн. Омск : ОНИИП, 2014.
7. Fuchs V. Application of convex relaxation to array synthesis problems // IEEE Transactions on Antennas and Propagation 62(2). 2014. P. 634–640.
8. Murty K. Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming // Mathematical Programming. North Holland 39. 1987. P. 117–129.
9. Нечаева М.С., Хамисов О.В. Метод ветвей и границ для задачи минимизации невыпуклой квадратичной функции при выпуклых квадратичных ограничениях // Дискретн. анализ и исслед. опер. 2000. № 7(2). С. 74–88.
10. Horst R., Pardalos P.M. Handbook of global optimization. Springer Science & Business Media, 2013. V. 2.
11. Стрекаловский А.С. О минимизации разности выпуклых функций на допустимом множестве // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 43, № 3. 2003. С. 399–409.
12. Boriskin A.V., Balaban M.V., Galan O.Yu., Sauleau R. Efficient approach for fast synthesis of phased arrays with the aid of a hybrid genetic algorithm and a smart feed representation // IEEE International Symposium on Phased Array Systems and Technology. 2010. P. 827–832.
13. Rao A., Sarma N. Synthesis of reconfigurable antenna array using differential evolution algorithm // IETE Journal of Research 63(3). 2017. P. 827–832.
14. Кочетов Ю.А. Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 48, № 5. 2008. С. 747–763.
15. Тюнин Н.Н. Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решёток // Дискретный анализ и исследование операций. Т. 28, № 3. 2021. С. 65–89.

16. Storn R., Price K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // *Journal of Global Optimization*. 1997. V. 11(4). P. 341–359.
17. Das S., Suganthan P.N. Differential evolution: A survey of the state-of-the-art // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 15(1). 2011. P. 4–31.
18. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // *The Computer Journal*. 1965. V. 7(4). P. 308–311.
19. Price K. V., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization*. Springer, 2005.
20. Balas E., Niehaus W. Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // *Journal of Heuristics*. 1998. V. 4(2). P.107–122.
21. Hampson S., Kibler D. Plateaus and plateau search in Boolean satisfiability problems: When to give up searching and start again // *Proceedings of the second DIMACS Implementation Challenge “Cliques, Coloring and Satisfiability”*. American Mathematical Society. 1996. P.437–456.
22. Тюнин Н.Н. Об оптимизации направленности коротковолновых фазированных антенных решеток кольцевой структуры // *Научно-технический сборник «Техника радиосвязи»*. Омск : ОНИИП, 2022 (в печати).
23. Ereemeev A.V., Yurkov A.S. On symmetry groups of some quadratic programming problems // *Proceedings of Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2020 (Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020)*. Springer, LNCS 12095. 2020. P.35–48.

## **DIFFERENTIAL EVOLUTION FOR DIRECTIVITY OPTIMIZATION OF SHORT-WAVE PHASED ANTENNA ARRAYS**

**A.V. Ereemeev**

Dr. Sci. (Phys.-Math.), e-mail: [eremeev@ofim.oscsbras.ru](mailto:eremeev@ofim.oscsbras.ru)

**N.N. Tyunin**

p.g., e-mail: [n.n.tyunin@gmail.com](mailto:n.n.tyunin@gmail.com)

Sobolev Institute of Mathematics  
SB RAS, Omsk department, Omsk, Russia

**Abstract.** The problem of optimization of the directivity of phased antenna arrays for shortwave radio communication is formulated as a nonconvex quadratic programming problem. Taking into account the specifics of the problem under consideration, a hybrid algorithm based on the method of differential evolution, the method of penalty functions and gradient optimization is proposed. Correction of invalid solutions is carried out by means of their scaling. The penalty coefficient is chosen adaptively during the algorithm execution. A computational experiment was carried out, where the proposed algorithm is compared with the commercial solver BARON, based on repeated application of the local search algorithm and branch and bound method, as well as with the ANTIGONE solver and the gradient algorithm. In addition, the effect of accounting for symmetries of the considered problem is studied. According

to the results experiment, we can conclude that the proposed hybrid algorithm is competitive, especially on problems of higher dimension.

**Keywords:** Optimization problem, phased antenna array, quadratic programming, shortwave, differential evolution.

*Дата поступления в редакцию: 06.06.2022*