Математические
структуры и моделирование
2022. № 2(62). С. 76–107

УДК 514.113.5
DOI 10.24147/2222-8772.2022.2.76-107

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ГАУССА–АЛЕКСАНДРОВА ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ НЕВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ С ВЫПУКЛЫМИ ГРАНЯМИ

Л.А. Антипова
старший преподаватель, e-mail: pridoroga31@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В статье определено сферическое изображение многогранного угла однородного невыпуклого ориентируемого многогранника, введено понятие кривизны реализации такого угла и доказана теорема о равенстве площади сферического изображения многогранного угла с особенностью «складка» его кривизне реализации.

Ключевые слова: Однородный ориентируемый невыпуклый многогранник, многогранный угол с особенностью «складка», сферическое изображение, кривизна реализации многогранного угла..

1. Введение

Л.А. Антипова

В работах [1], [2], [3] приводится перечень однородных невыпуклых многогранников в евклидовом трёхмерном пространстве и доказывается его полнота, перечисляются некоторые их числовые и комбинаторные характеристики.

В пособии [4] А.Л. Вернер совместно с автором настоящей статьи доказали, что из 17 типов невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями семь типов ориентируемых, не считая октатетраэдра, некоторые грани которого содержат его. Октатетраэдр является многогранной реализацией плоского тора, что также продемонстрировано в пособии [4]. Его геометрия хорошо изучена. Далее мы его не рассматриваем. К семи типам ориентируемых однородных многогранников относятся: два правильных невыпуклых многогранника Пуансо, большой битригональный икосододекаэдр (ББТИД), большой ромбокубооктаэдр (БРКО), малый кубокубооктаэдр (МККО), малый додекоикосододекаэдр (МДИД) и

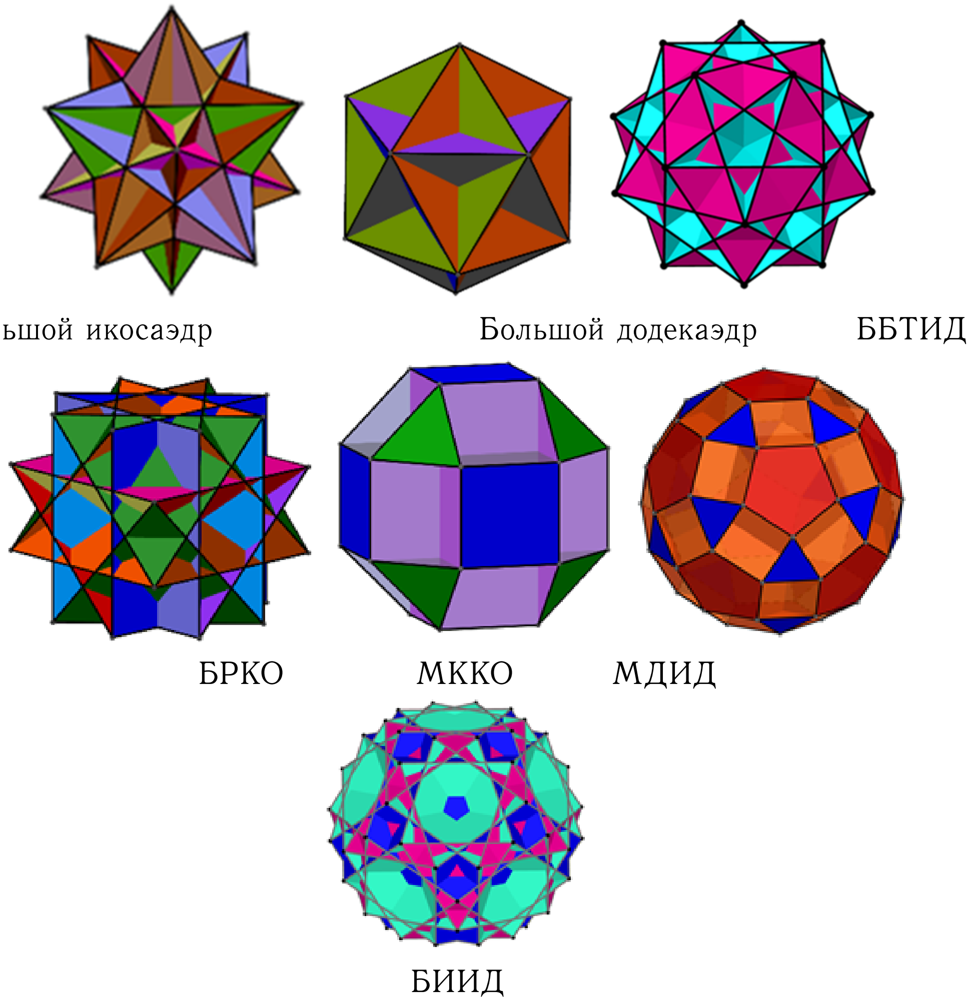
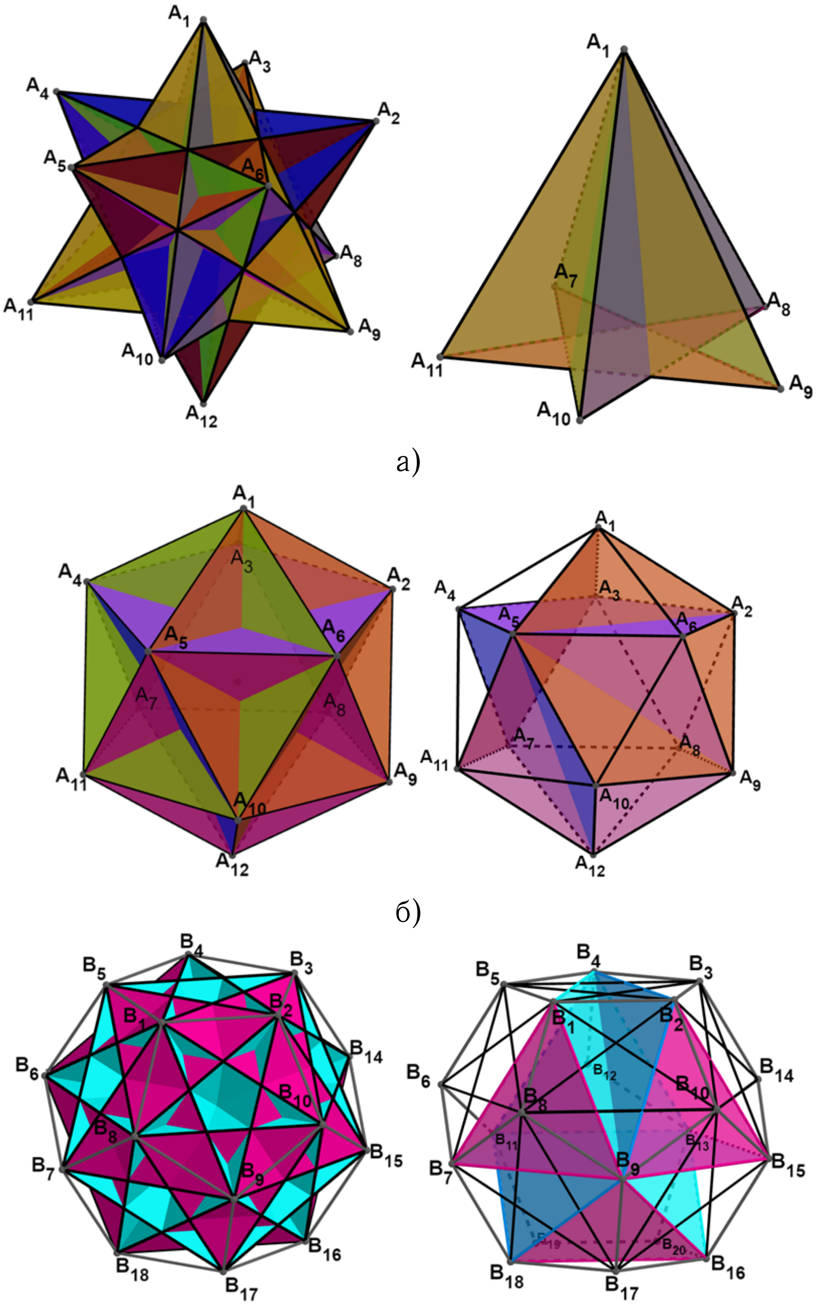


Рис. 1. Невыпуклые ориентируемые однородные многогранники с выпуклыми гранями

большой (БИИД) (рис. 1).

В монографии [5] А.Д. Александров дал понятие сферического изображения выпуклого многогранника и доказал равенство площади сферического изображения и кривизны многогранника. Поскольку понятие сферического изображения выпуклого многогранника строится с помощью опорных плоскостей, то чтобы обобщить это понятие на любые однородные ориентируемые многогранники с выпуклыми гранями, потребовалось найти такое определение сферического изображения, которое не опиралось бы на понятие опорной плоскости. А также потребовалось сформулировать понятие кривизны реализации многогранного угла. В мае 2021 года на Петербургском геометрическом семинаре им. А.Д. Александрова автором статьи был сделан совместный с А.Л. Вернером доклад на тему «Аналог теоремы Гаусса-Александрова для однородных невыпуклых ориентируемых многогранников».

Ориентируемые невыпуклые многогранники с выпуклыми гранями по типу своих многогранных углов в вершинах распадаются на две группы. Первая состоит из трёх типов многогранников. Это два многогранника Пуансо и



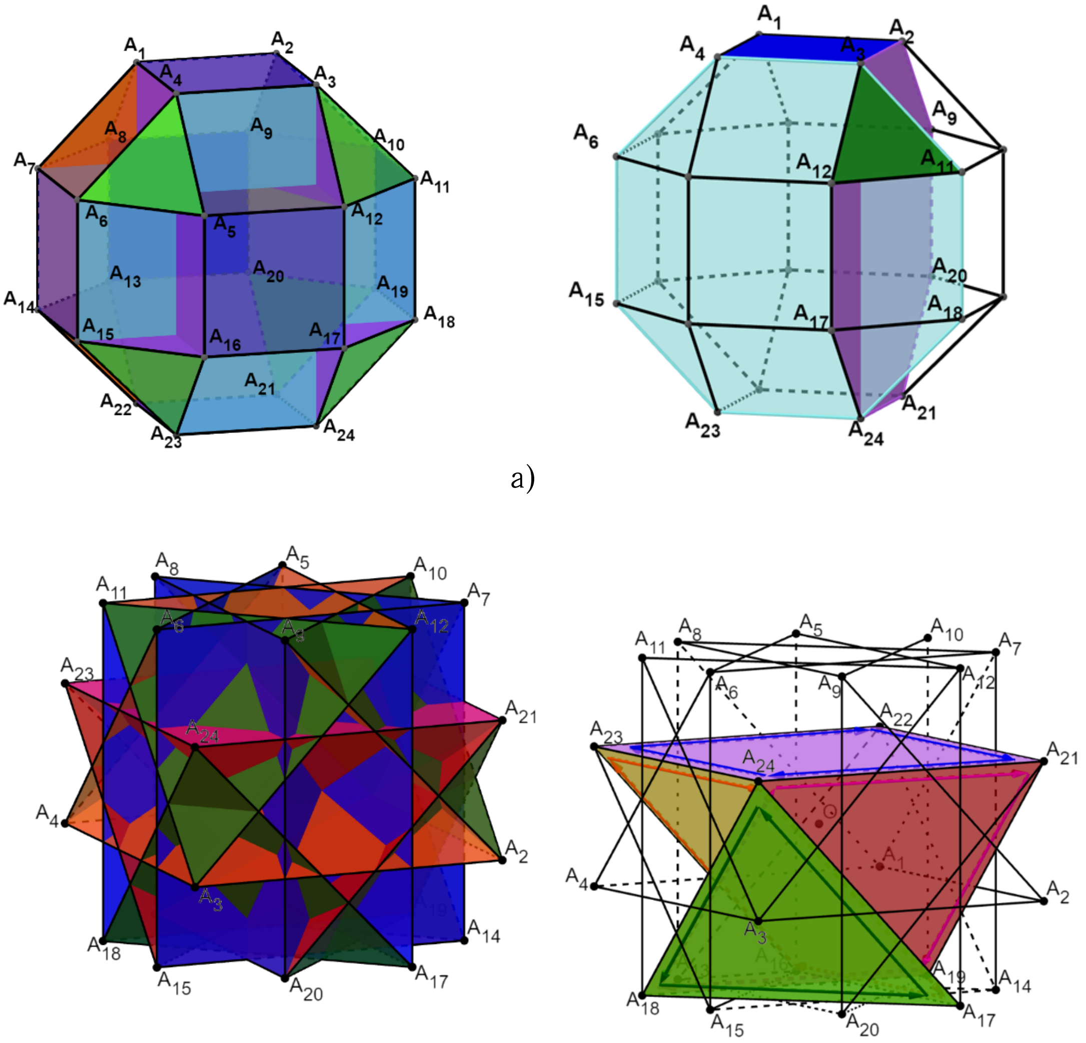
а)

б)

в)

Рис. 2. а) Большой икосаэдр и его многогранный угол в вершине A_1. б) Большой додекаэдр и его многогранный угол в вершине A_5. в) Большой битригональный икосододекаэдр и его многогранный угол в вершине B_9.

большой битригональный икосододекаэдр (ББТИД). Многогранники первой группы имеют в вершинах невыпуклые углы без особенностей (рис. 2а, 2б, 2в). Аналог теоремы Гаусса–Александрова для таких углов был представлен в ноябре 2021 года в Москве на конференции «Классическая и современная геометрия» [6]. Статья по теме доклада взята к опубликованию в журнале «Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры».



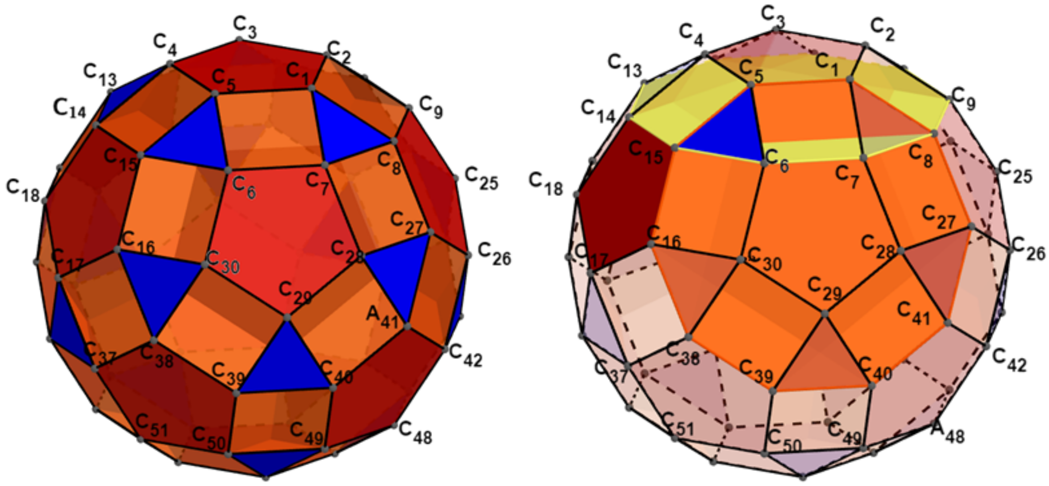
а)

б)

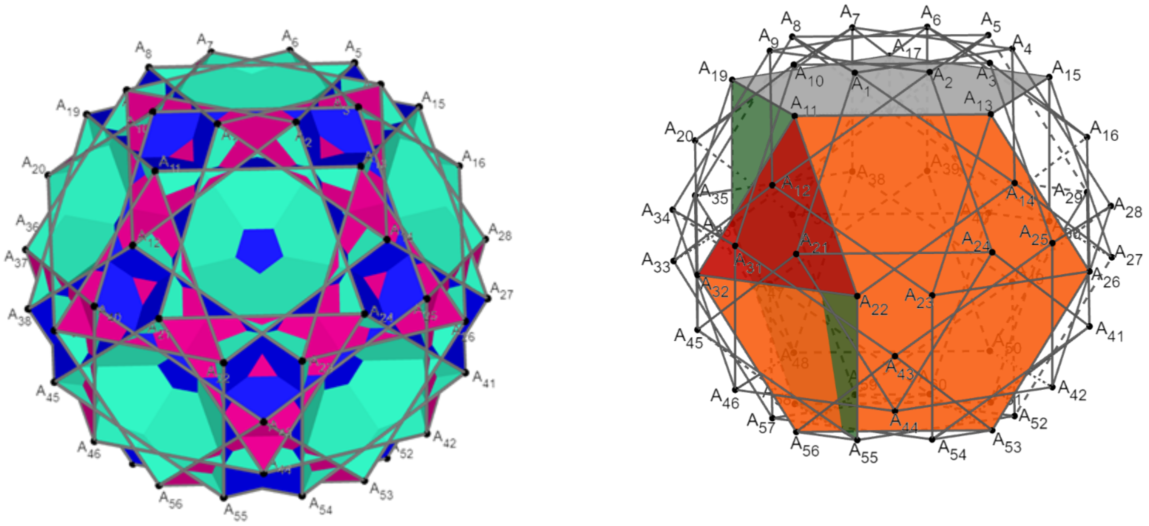
Рис. 3. а) Малый кубокубооктаэдр и его многогранный угол в вершине A_3. б) Большой ромбокубооктаэдр и его многогранный угол в вершине A_{24}. в) Малый додекоикосододекаэдр и его многогранный угол в вершине C_{15}. г) Большой икосоикосододекаэдр и его многогранный угол в вершине A_{11}.

Вторая группа многогранников состоит из четырёх типов: малый кубокубооктаэдр (МККО), большой ромбокубооктаэдр (БРКО), малый додекоикосододекаэдр (МДИД) и большой икосоикосододекаэдр (БИИД).

Многогранные углы этих многогранников являются четырёхгранными и обладают особенностью, которую будем называть «складка» (рис. 3а, 3б, 3в, 3г).



в)



г)

Рис. 3. в) Малый додекоикосододекаэдр и его многогранный угол в вершине C_{15}. г) Большой икосоикосододекаэдр и его многогранный угол в вершине A_{11}.

В данной работе даны понятия многогранного угла с особенностью и без особенностей, сформулировано определение сферического изображения многогранного угла ориентируемого однородного многогранника с выпуклыми гранями, определена кривизна реализации такого угла и доказана теорема о равенстве площади сферического изображения и кривизны реализации.

2. Определение многогранного угла с особенностью. Понятие кривизны реализации многогранного угла многогранника

Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве введена декартова система координат x, y, z с базисными ортами e_1, e_2, e_3 и началом координат в точке O. Будем считать, что выбранная система координат – правая. Рассмотрим вписанный в единичную сферу S однородный ориентируемый многогранник M с выпуклыми гранями, центр которого совпадает с началом координат. Под многогранным углом многогранника M в вершине B будем понимать фигуру, состоящую из всех граней многогранника M, инцидентных вершине B. Пусть грани G_1, G_2, $\ldots$, G_n многогранного угла V занумерованы в циклическом порядке, соответствующем одному из обходов вокруг точки B, их центры обозначены Z_1, Z_2, $\ldots$, Z_n соответственно.

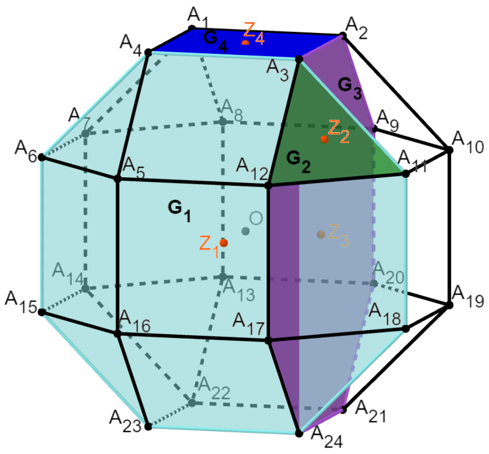


Рис. 4. Четырёхгранный угол МККО в вершине A_3.

Рассмотрим проекцию угла V многогранника M на сферу S. Проекцию грани G_i обозначим G'_i, проекцию центра Z_i грани G_i обозначим Z'_i.

Для всякой точки K сферы S вектор $\overrightarrow{OK}$ будем называть вектором внешней нормали к сфере S в точке K. Выберем одну из ориентаций многогранника M. Ориентации граней многогранника определят согласованные ориентации их проекций на сфере.

Каждой грани G_i поставим в соответствие число β_i, равное радианной мере плоского угла этой грани, взятой со знаком «плюс» или «минус». При этом берётся знак «плюс», если единичная нормаль ориентации проекции G'_i, отложенная от точки O, совпадает с внешней нормалью к сфере S в точке Z'_i и знак «минус» в противном случае. Многогранный угол с такой дополнительной структурой будем называть *углом без особенностей*, если все его грани одного знака. В противном случае – *углом с особенно-*

стями. Будем говорить, что *многогранный угол обладает особенностью «складка»*, если среди его граней существует такая тройка последовательных граней G_{i-1}, G_i, G_{i+1}, что плоскость средней грани является опорной плоскостью данного многогранного угла, а две крайние грани G_{i-1} и G_{i+1} имеют знак противоположный знаку средней грани G_i. Такую тройку последовательных граней будем называть *складкой.*

На рис. 5 изображён многогранный угол с особенностью «складка». Многогранный угол большого додекаэдра, являющийся углом без особенностей, изображён на рис. 6.

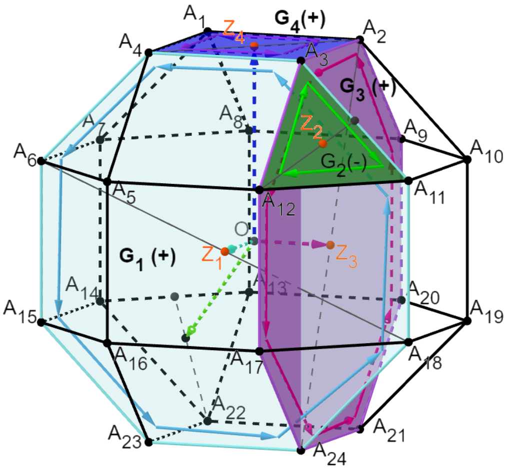


Рис. 5. Многогранный угол в вершине A_3 МККО.

Грани $G_1 = A_3A_4A_6A_{15}A_{23}A_{24}A_{18}A_{11}$, $G_2 = A_3A_{11}A_{12}$, $G_3 = A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9A_2$ – образуют складку.

Заметим, что наличие или отсутствие у многогранного угла особенностей не зависит от выбора ориентации угла.

Если M – многогранник одного из семи типов, V – его многогранный угол в вершине B, то число оборотов многогранного угла V вокруг прямой OB будем обозначать $\mathrm{rot}(V)$.

Кривизной реализации угла V многогранника M назовём число равное

$$2\pi \cdot rot\,(V) - \left|\sum \beta_i\right|.$$

Для доказательства следующих двух лемм определим внутреннее и внешнее прилегания для двух ориентированных многоугольников на сфере, имеющих общую сторону.

Пусть на ориентированном сферическом многоугольнике M общая с ориентированным сферическим многоугольником P сторона имеет ориентацию AB, а на многоугольнике P её ориентация BA, т. е. согласованные ориентации их общей стороны. Тогда в том случае, если существует окрестность стороны AB

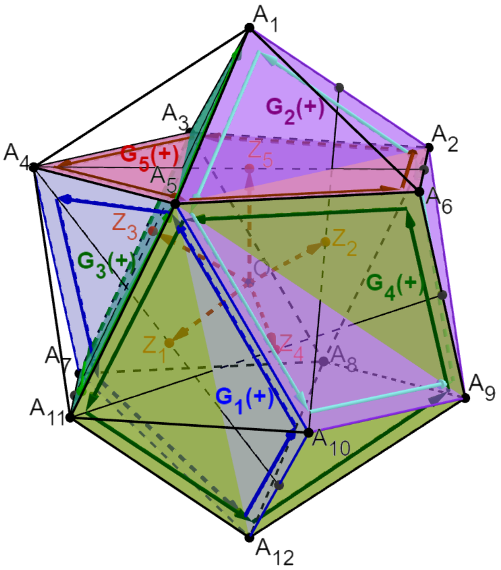


Рис. 6. Многогранный угол в вершине A_5 большого додекаэдра

на сфере такая, что пересечения её с многоугольниками M и P лежат по одну сторону от AB будем говорить об их *внутреннем прилегании* (рис. 7), иначе будем говорить об их *внешнем прилегании* (рис. 8). Заметим, что в случае внешнего прилегания ориентации многоугольников определяют нормали к сфере, направленные по одну от неё сторону. В случае внутреннего прилегания – нормали ориентаций направлены по разные стороны от сферы.

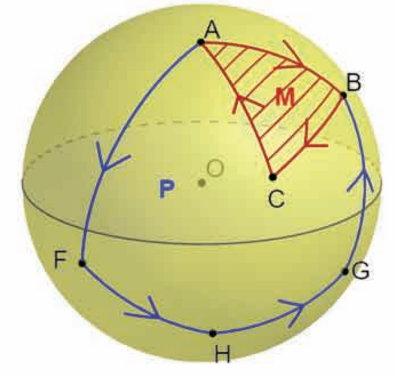


Рис. 7. Внутреннее прилегание

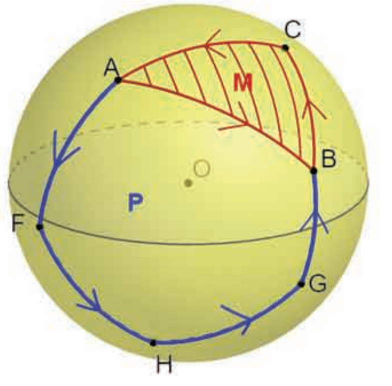


Рис. 8. Внешнее прилегание

Напомним, что в соответствии с классификацией однородных многогранников существует восемь типов ориентируемых невыпуклых многогранников с выпуклыми гранями. Один из этих типов – октатетраэдр – многогранник, некоторые грани которого содержат центр описанной около него сферы. Такой многогранник рассматривать не будем. Три типа многогранников: большого икосаэдра (БИ), большого додекаэдра (БД) и большой битригональный икосододекаэдр (ББТИД), назовем многогранниками первой группы (рис. 2а, 2б, 2в). Четыре типа многогранников: малый кубокубооктаэдр (МККО), большой ромбокубооктаэдр (БРКО), малый додекоикосододекаэдр (МДИД) и большой икосоикосододекаэдр (БИИД), назовем многогранниками второй группы (рис. 3а, 3б, 3в).

Лемма 1. *Если M – выпуклый многогранник или один из трёх многогранников первой группы, то все числа β_i граней его многогранного угла имеют одинаковый знак.*

Доказательство. Легко видеть, что центр данного многогранника принадлежит всем внутренним областям его двугранных углов. Из чего следует, что проекции G'_i, G'_{i+1} двух соседних граней G_i, G_{i+1} имеют внешнее прилегание, а следовательно, их согласованные ориентации определяют нормали, направленные по одну сторону от сферы. Что и доказывает утверждение леммы.

■

Лемма 2. *Если M – многогранник второй группы, то одна из граней его многогранного угла имеет знак противоположный знакам остальных граней.*

Доказательство. Многогранный угол невыпуклого многогранника второй группы является четырёхгранным и обладает особенностью «складка». На рис. 9 изображены многогранные углы всех четырёх многогранников второго типа. Для каждого из них треугольная грань G_2 является центральной гранью складки G_1, G_2, G_3 и имеет знак противоположный знакам остальных граней угла. Действительно, треугольная грань G_2 и центр сферы точка O лежат по разные стороны от плоскостей граней G_1 и G_3. Следовательно, проекция треугольной грани G_2 на сферу S будет иметь общие внутренние точки с каждой из проекций граней G_1 и G_3. Это означает наличие внутреннего прилегания сферических многоугольников G'_1, G'_2 и G'_2, G'_3. Согласованные ориентации сферических многоугольников G'_1, G'_2 определяют нормали, расположенные по разные стороны от сферы. Аналогично для проекций G'_2, G'_3. Это доказывает, что треугольная грань многогранного угла многогранника второй группы имеет знак противоположный знакам смежных с ней граней, т. е. что последовательность граней G_1, G_2, G_3 образует «складку».

■

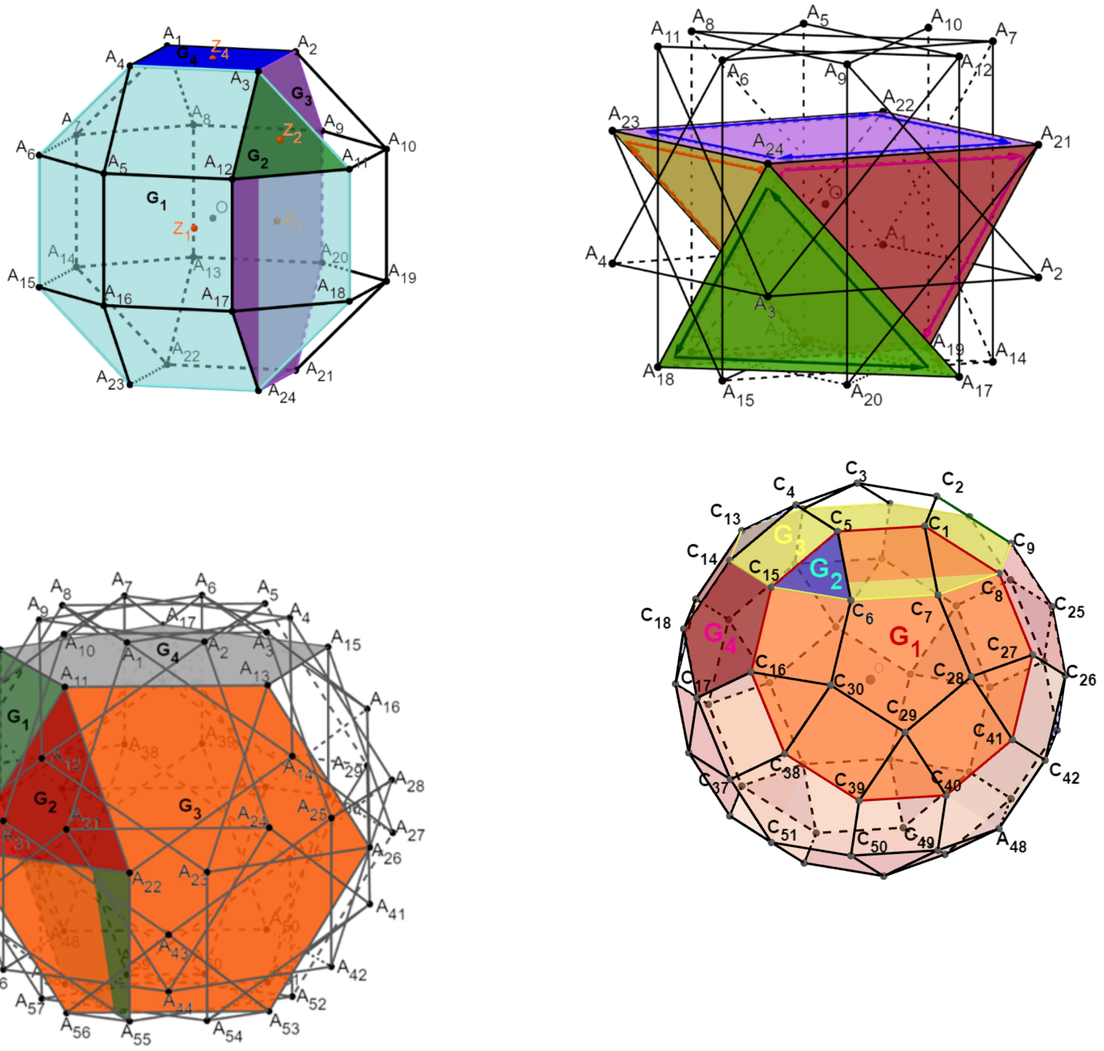


Рис. 9. Четырехгранные углы многогранников второй группы с особенностью «складка»

3. Определение полярного образа многогранного угла многогранника

Определим полярный образ многогранного угла V с вершиной в точке B многогранника M. Пусть точка P_i образ плоскости грани G_i при полярном отображении относительно сферы S. *Полярным образом многогранного угла V многогранника M* назовем фигуру, полученную объединением треугольников P_1BP_2, P_2BP_3, ..., $P_{n-1}BP_n$, P_nBP_1. Заметим, что ломаная $P_1P_2 \ldots P_n$ является плоской замкнутой ломаной, расположенной в касательной к сфере S плоскости, проходящей через точку B (рис. 10а, 10б).

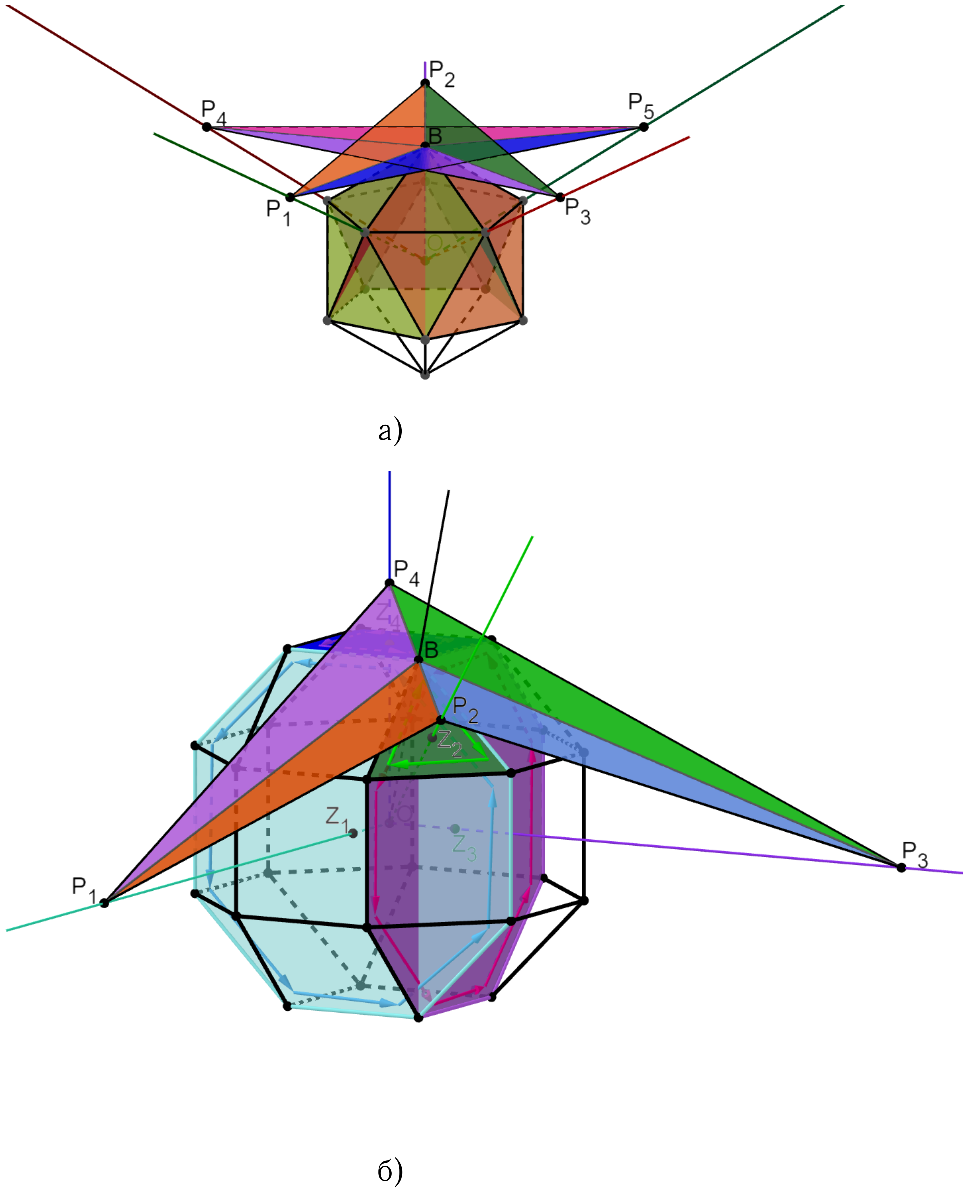
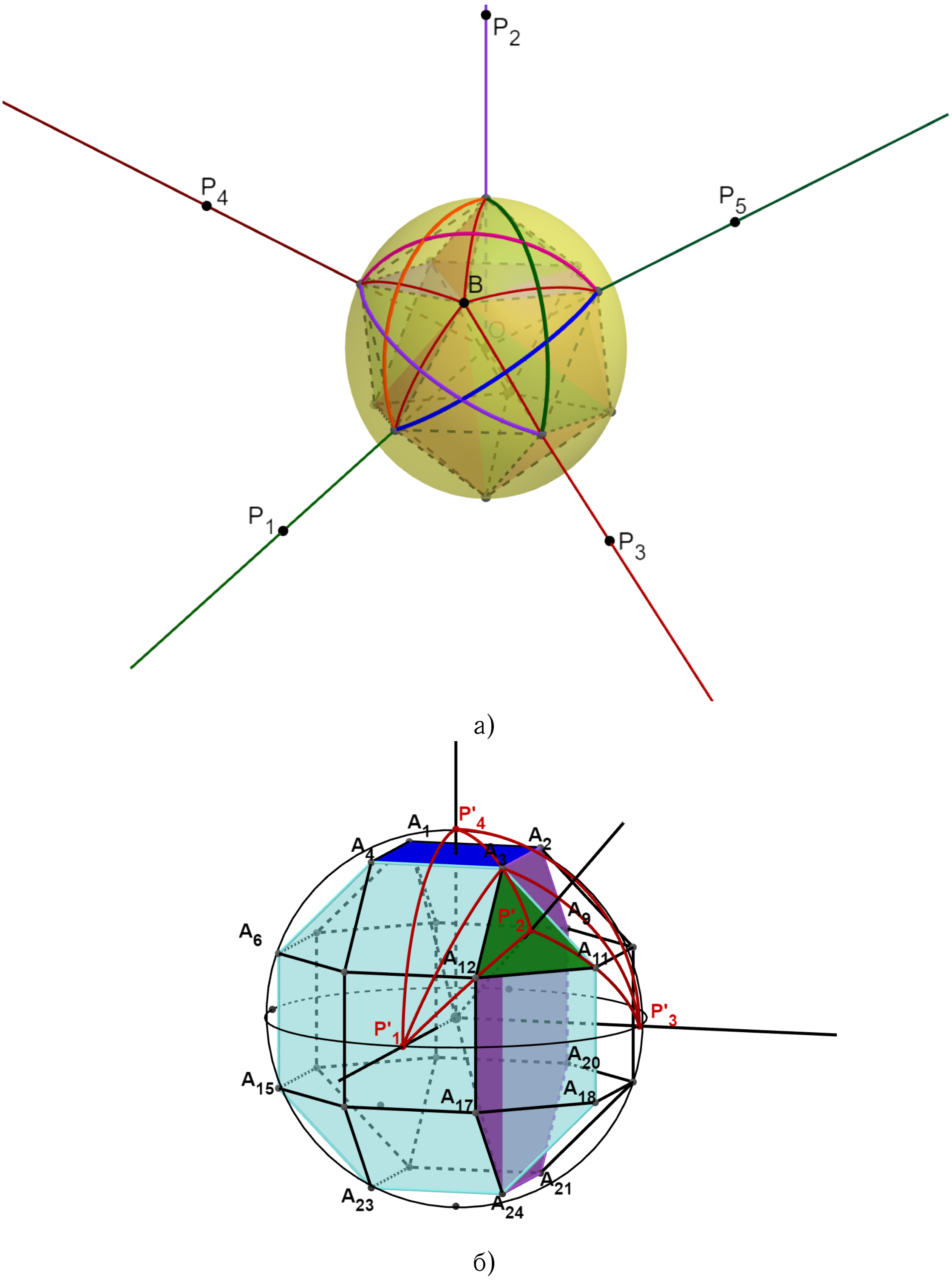


Рис. 10. а) Полярное изображение многогранного угла в вершине B большого додекаэдра. б) Полярное изображение многогранного угла МККО в вершине A_3

4. Определение сферического изображения многогранного угла многогранника и его площади

Сферическим изображением многогранного угла V многогранника M назовём проекцию полярного образа угла V на сферу S. Заметим, что сферическое изображение представляет собой объединение сферических треугольников $P'_1BP'_2$, $P'_2BP'_3$, ..., $P'_{n-1}BP'_n$, $P'_nBP'_1$, где P'_i – проекция точки P_i на сферу S (рис.11а, 11б).

Площадью сферического изображения многогранного угла V многогранника M назовём сумму площадей сферических треугольников $P'_1BP'_2$, ...,



а)

б)

Рис. 11. а) Сферическое изображение многогранного угла большого додекаэдра в вершине B. б) Сферическое изображение многогранного угла МККО в вершине A_3.

$P'_nBP'_1$.

Теорема 1. *Для любого ориентируемого однородного многогранника* M*,* *вписанного в единичную сферу S, площадь сферического изображения его многогранного угла равна кривизне реализации этого угла.*

Для выпуклого однородного многогранника утверждение теоремы следует из результатов, полученных А.Д. Александровым [5]. Действительно, кривизна реализации многогранных углов таких многогранников равна $2\pi \cdot rot\,(V) - |\sum \beta_i| = 2\pi - \sum \alpha_i$ и равна кривизне вершины, определённой Александровым. Как сказано в пункте 4 «Полярные многогранники» параграфа 5 монографии [5], сферическое изображение многогранного угла, определённое с использованием опорных плоскостей, совпадает с проекцией полярного изображения данного многогранного угла. Таким образом, теорема Александрова о равенстве площади сферического изображения многогранного угла выпуклого многогранника и его кривизны доказывает сформулированную нами теорему для выпуклых многогранников.

Для невыпуклых однородных многогранников первой группы утверждение теоремы следует из леммы 1 и доказанной нами в статье [4] теоремы о равенстве кривизны реализации и площади сферического изображения для любого многогранного угла без особенностей.

5. Доказательство теоремы для многогранников второй группы

5.1. Доказательство теоремы для малого кубокубооктаэдра

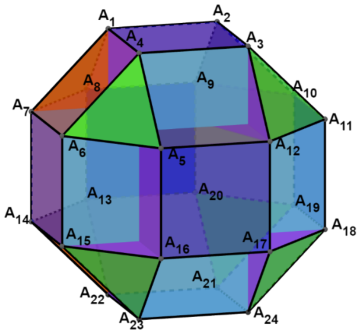


Рис. 12. МККО

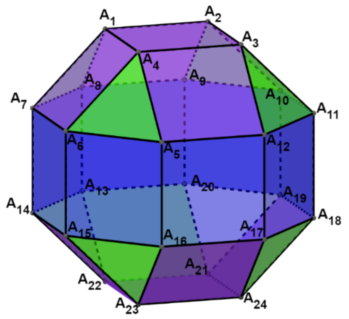


Рис. 13. Ромбокубооктаэдр

Легко понять, как перестроен выпуклый ромбокубооктаэдр РКО в малый кубокубооктаэдр МККО. У РКО удалены 12 «косых» квадратных граней, а к оставшимся восьми треугольным граням и шести «прямым» квадратным граням подклеено шесть правильных граней (на рис. 10 они закрашены голубым, фиолетовым и оранжевым цветами). Получаем многогранник МККО, у которого 24 вершины, 48 рёбер и 20 граней. Схема рёбер многогранников РКО и МККО изображена на рис. 14:

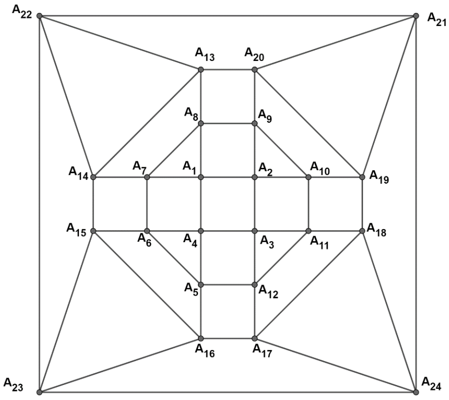


Рис. 14. Система рёбер многогранников РКО и МККО

Зададим ориентацию МККО, ориентировав его грани согласованно с ориентацией квадратной грани $A_1A_4A_3A_2$: $A_1\to A_4\to A_3\to A_2$ (рис. 15)

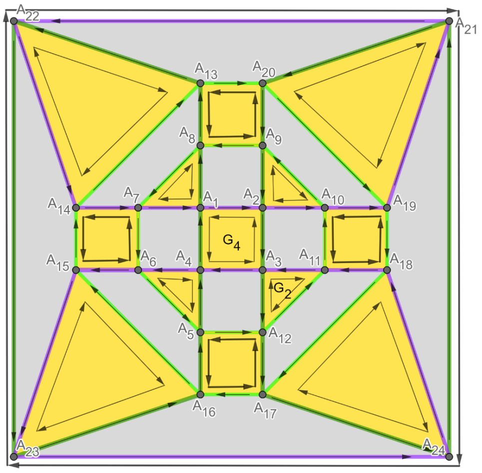


Рис. 15. Ориентация многогранника МККО

В вершине A_3 сходятся две восьмиугольные грани $G_1 = A_3A_4A_6A_{15}A_{23}A_{24}A_{18}A_{11}$, $G_3 = A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9A_2$, одна квадратная грань $G_4 = A_3A_2A_1A_4$ и одна треугольная грань $G_2 = A_3A_{11}A_{12}$ (рис. 16).

По лемме 2 три последовательные грани G_1, G_2, G_3 образуют складку. На рисунке 15 проиллюстрировано, что выбранные ориентации граней $G_1 = A_3A_4A_6A_{15}A_{23}A_{24}A_{18}A_{11}$, $G_3 = A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9A_2$ задают внешнюю нормаль к сфере, а согласованная с ними ориентация грани $G_2 = A_3A_{11}A_{12}$ – внутреннюю нормаль к сфере. Таким образом, восьмиугольные грани G_1, G_3 и квадратная грань G_4 имеют положительные ориентации, а треугольная грань – отрицательную.

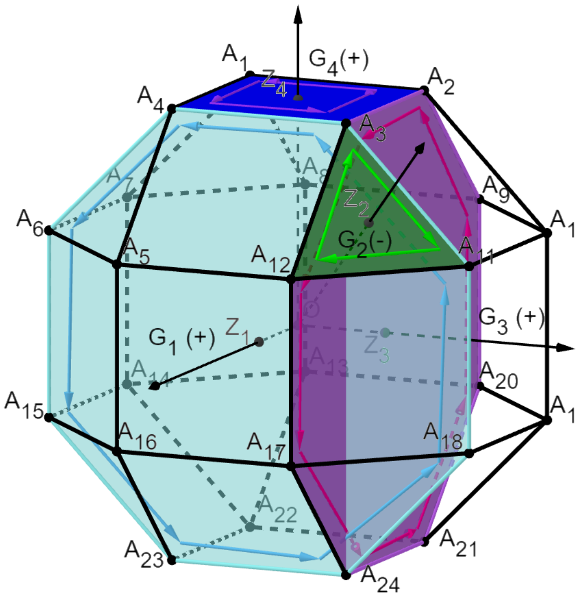


Рис. 16. Ориентируемый многогранный угол МККО в вершине A_3

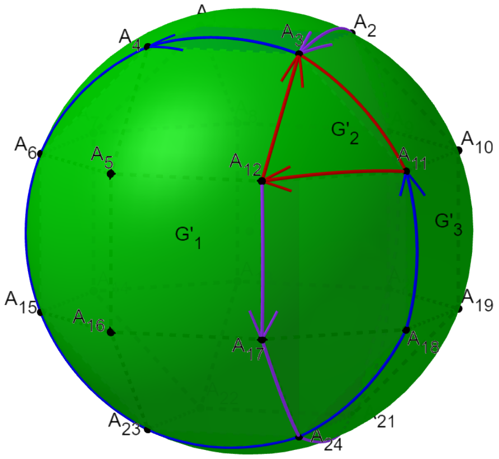


Рис. 17. Ориентации проекций граней G_1=$A_3A_4A_6A_{15}A_{23}A_{24}A_{18}A_{11}$, G_3=$A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9A_2$, G_2=$A_3A_{11}A_{12}$ на сфере S.

Каждой грани G_i многогранного угла МККО в вершине A_3 соответствует число β_i, равное радианной мере её плоского угла, взятой со знаком:

восьмиугольным граням G_1=$A_3A_4A_6A_{15}A_{23}A_{24}A_{18}A_{11}$ и G_3=$A_3A_{12}A_{17}A_{24}A_{21}A_{20}A_9A_2$ соответствуют числа $\beta_1 = \beta_3 = \frac{3\pi}{4}$,

квадратной грани G_4=$A_3A_2A_1A_4$ – число $\beta_4 = \frac{\pi}{2}$,

треугольной грани G_2=$A_3A_{11}A_{12}$ – число $\beta_2 = -\frac{\pi}{3}$.

Число оборотов многогранного угла V многогранника МККО вокруг оси OA_3 равно $\mathrm{rot}(V) = 1$. Тогда кривизна реализации равна:

$$2\pi \cdot 1 - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

На рис. 18 изображен четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$, являющийся полярным образом многогранного угла многогранника МККО в вершине A_3. Вершины четырехугольника являются полярными образами соответствующих граней. Поскольку плоскость треугольной грани G_2, является опорной к множеству точек многогранного угла, то её полярный образ P_2 содержится в выпуклой оболочке полярных образов P_1, P_3, P_4 остальных граней угла. Таким образом, полярный образ многогранного угла МККО представляет собой невыпуклый четырехугольник в виде стрелки.

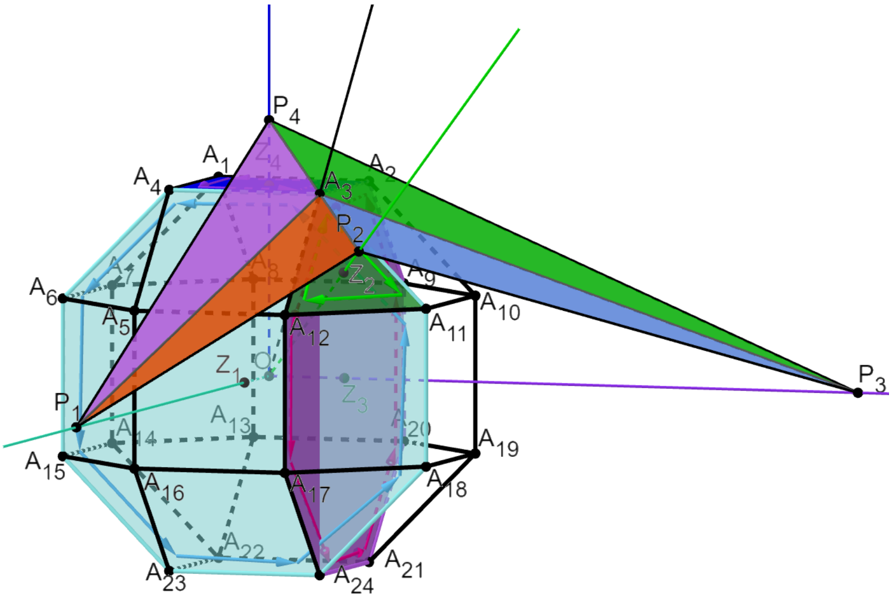


Рис. 18. Полярное изображение многогранного угла МККО в вершине A_3

Сферическим изображением многогранного угла в вершине A_3 многогранника МККО является объединение сферических треугольников $P'_1A_3P'_2$, $P'_2A_3P'_3$, $P'_3A_3P'_4$, $P'_4A_3P'_1$ (рис. 19) .

Сумма площадей полученных сферических треугольников равна площади сферического четырехугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$, которая равна разности площадей сферических треугольников $P'_1P'_4P'_3$ и $P'_1P'_2P'_3$, т. е равна разности восьмой и двадцать четвёртой частей площади сферы, т. е. $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) 4\pi = \frac{\pi}{3}$.

Таким образом, теорема для МККО о равенстве площади сферического изображения и кривизны реализации доказана.

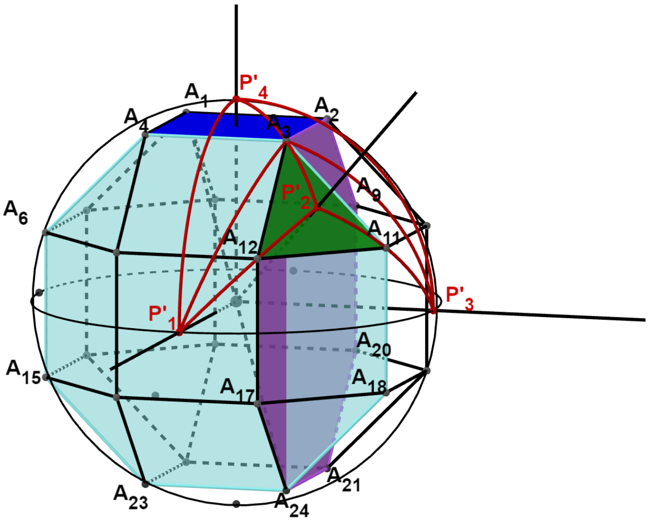


Рис. 19. Сферическое изображение многогранного угла МККО в вершине A_3

5.2. Доказательство теоремы для большого ромбокубооктаэдра

В учебном пособии [4, с. 22] доказывается изометричность большого ромбокубооктаэдра и выпуклого ромбокубооктаэдра. На рис. 20 изображены эти многогранники и сеть их рёбер.

Зададим ориентацию БРКО, ориентировав его грани согласованно с ориентацией квадратной грани $A_1A_4A_3A_2$: $A_1 \to A_4 \to A_3 \to A_2$. На плоскости сети рёбер БРКО ориентация грани $A_1A_4A_3A_2$: $A_1 \to A_4 \to A_3 \to A_2$ задаёт ориентацию против часовой стрелки.

В вершине A_{24} сходятся четыре ориентированные грани: три квадратные грани G_1: $A_{24} \to A_{17} \to A_{16} \to A_{23}$, G_3: $A_{24} \to A_{21} \to A_{19} \to A_{18}$, G_4: $A_{24} \to A_{23} \to A_{22} \to A_{21}$ и одна треугольная грань G_2: $A_{24} \to A_{18} \to A_{17}$ (рис. 21).

По лемме 2 три последовательные грани G_1, G_2, G_3 образуют складку. На рис. 22 проиллюстрировано, что выбранные ориентации граней G_1: $A_{24} \to A_{17} \to A_{16} \to A_{23}$ G_3: $A_{24} \to A_{21} \to A_{19} \to A_{18}$ задают внутреннюю нормаль к сфере, а согласованная с ними ориентация грани G_2: $A_{24} \to A_{18} \to A_{17}$ – внешнюю нормаль к сфере. Таким образом, квадратные грани G_1, G_3 и G_4 имеют отрицательные ориентации, а треугольная грань – положительную.

Каждой грани G_i многогранного угла БРКО в вершине A_{24} соответствует число β_i, равное радианной мере её плоского угла, взятой со знаком:

квадратным граням G_1: $A_{24} \to A_{17} \to A_{16} \to A_{23}$ G_3: $A_{24} \to A_{21} \to A_{19} \to A_{18}$, G_4: $A_{24} \to A_{23} \to A_{22} \to A_{21}$ соответствуют числа $\beta_1 = \beta_3 = \beta_4 = -\frac{\pi}{2}$,

треугольной грани G_2: $A_{24} \to A_{18} \to A_{17}$– число $\beta_2 = \frac{\pi}{3}$.

Число оборотов многогранного угла V *многогранника МККО вокруг оси* OA_3 равно $\mathrm{rot}(V) = 1$. Тогда кривизна реализации равна:

$$2\pi \cdot 1 - \left| \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right| = \frac{5\pi}{6}.$$

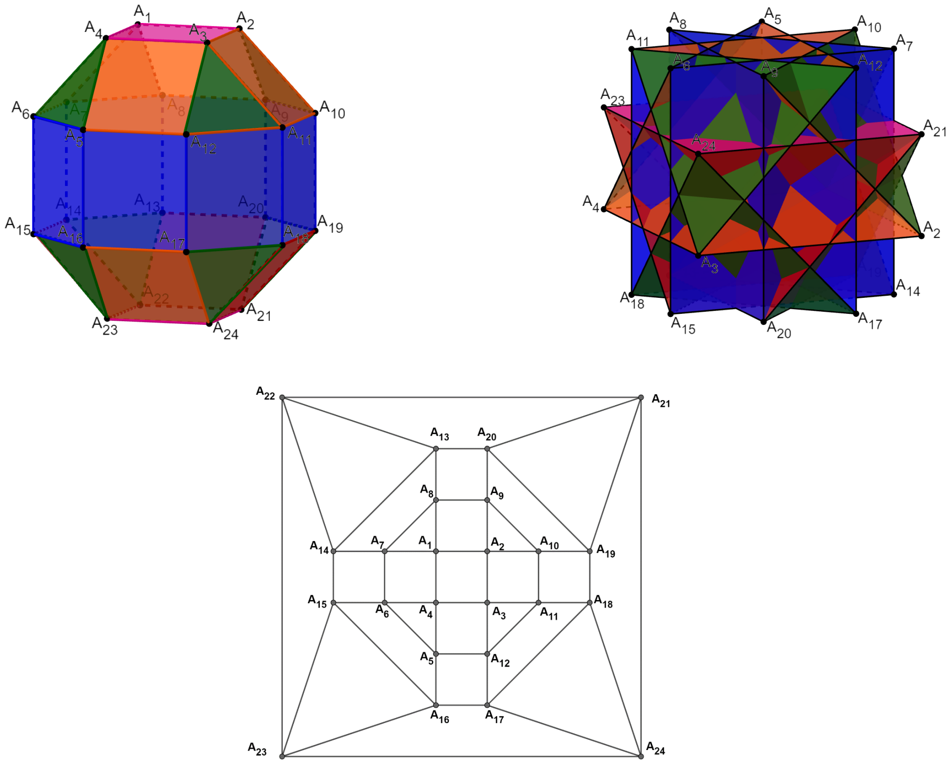


Рис. 20. Выпуклый ромбокубооктаэдр, большой ромбокубооктаэдр и сеть их рёбер

На рис. 23 изображен четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$, являющийся полярным образом многогранного угла многогранника БРКО в вершине A_{24}. Вершины четырехугольника являются полярными образами соответствующих граней. Аналогично МККО плоскость треугольной грани G_2 многогранника БРКО является опорной к множеству точек соответствующего многогранного угла, а значит, полярный образ P_2 треугольной грани содержится в выпуклой оболочке полярных образов P_1, P_3, P_4 остальных граней угла. Таким образом, полярный образ многогранного угла БРКО, как и в случае многогранного угла МККО, представляет собой невыпуклый четырехугольник в виде стрелки.

Сферическим изображением многогранного угла в вершине A_{24} многогранника БРКО является объединение сферических треугольников $P'_1A_{24}P'_2$, $P'_2A_{24}P'_3$, $P'_3A_{24}P'_4$, $P'_4A_{24}P'_1$ (рис. 24).

Сумма площадей полученных сферических треугольников равна площади сферического четырехугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$, которая равна разности площади двуугольника с вершинами O_2, P'_4 и площади сферического четырехугольника $P'_1P'_2P'_3O_2$ (рис. 25), что есть разность четвертой и двадцать четвёртой частей площади сферы, т. е. $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) 4\pi = \frac{5\pi}{6}$.

Таким образом, теорема для БРКО о равенстве площади сферического

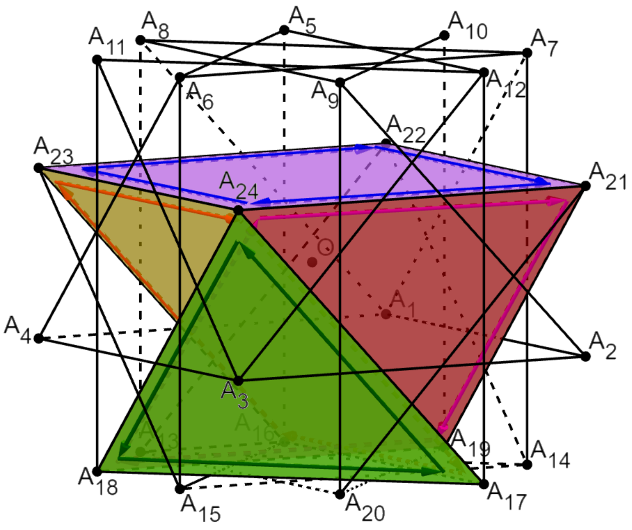


Рис. 21. Ориентированный многогранный угол БРКО в вершине A_{24}

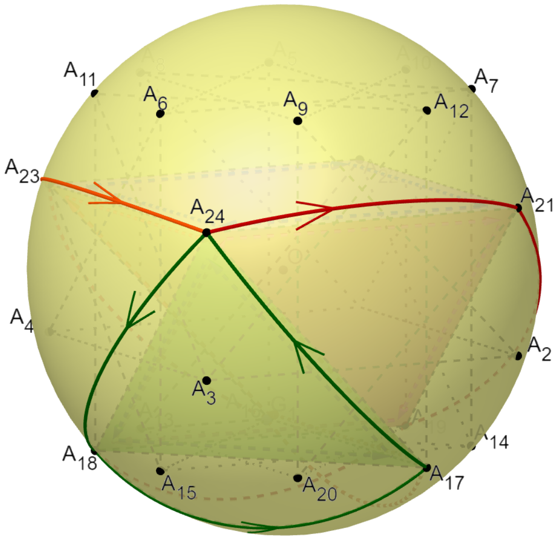


Рис. 22. Ориентации проекций граней G_1: $A_{24}\to A_{17}\to A_{16}\to A_{23}$, G_2: $A_{24}\to A_{18}\to A_{17}$, G_3: $A_{24}\to A_{21}\to A_{19}\to A_{18}$ на сферу S

изображения и кривизны реализации доказана.

5.3. Доказательство теоремы для малого додекоикосододекаэдра

Малый додекоикосододекаэдр МДИД имеет ту же сеть рёбер, что и ромбоикосододекаэдр РИД, но у него удалены все квадратные грани РИД (рис. 27),

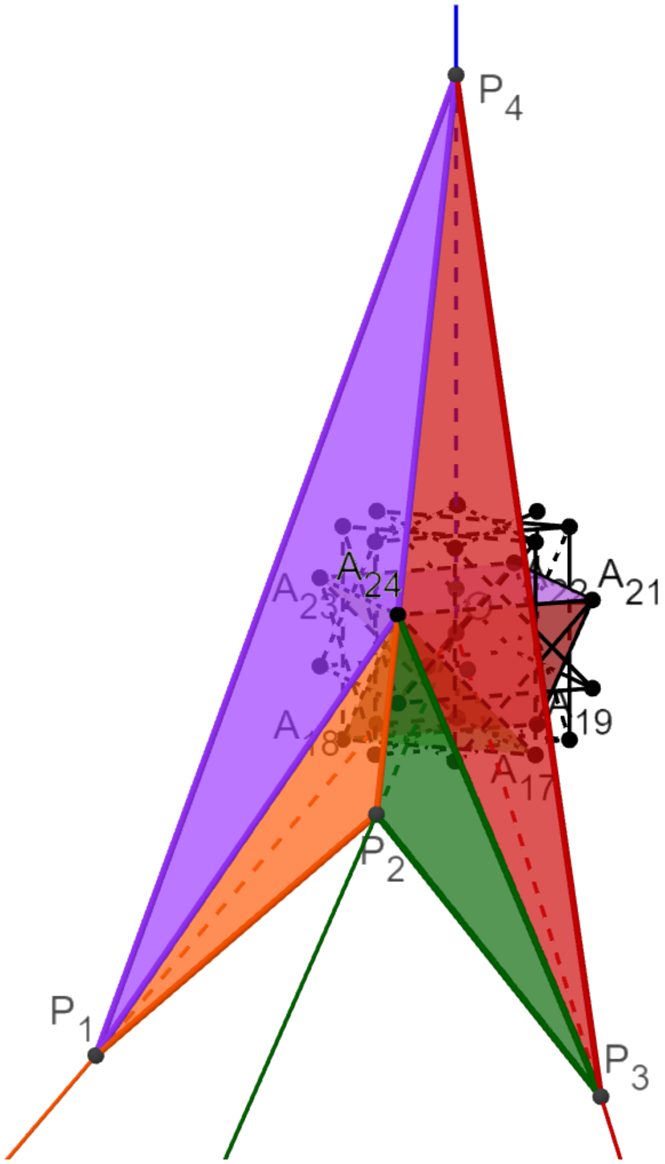


Рис. 23. Полярное изображение многогранного угла БРКО в вершине A_{24}

а вместо них к оставшимся пятиугольникам и треугольникам подклеены десятиугольники, охватывающие пятиугольные грани.

Зададим ориентацию МДИД, ориентировав его грани согласованно с ориентацией треугольной грани $C_{15}C_5C_6$: $C_{15}\to C_5\to C_6$.

Многогранный угол малого додекоикосододекаэдра состоит из четырех граней (рис. 28) и является также, как многогранные углы предыдущих двух многогранников, многогранным углом с особенностью «складка». В вершине C_{15} сходятся четыре ориентированные грани: две десятиугольные грани $G_1=C_{15}\to C_6\to C_7\to C_8\to C_9\to C_{10}\to C_{11}\to C_{12}\to C_{13}\to C_{14}$, $G_3=C_{15}\to C_{16}\to C_{38}\to C_{39}\to C_{40}\to C_{41}\to C_{27}\to C_8\to C_1\to C_5$,

одна пятиугольная грань $G_4 = C_{15}\to C_{14}\to C_{18}\to C_{17}\to C_{16}$

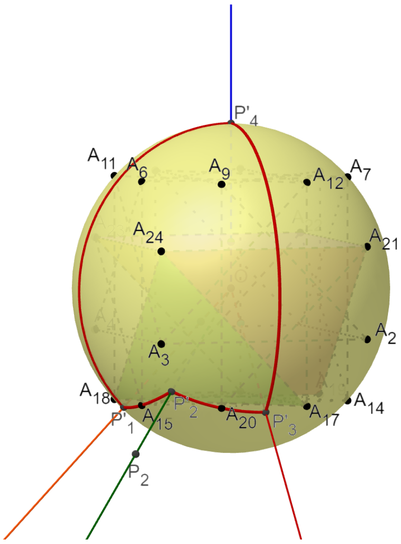


Рис. 24. Сферическое изображение многогранного угла БРКО в вершине A_{24}

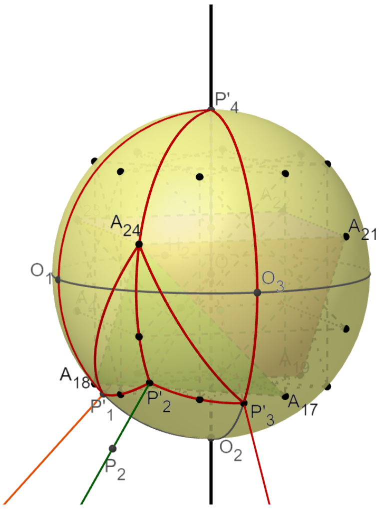


Рис. 25. Подсчет площади сферического изображения многогранного угла БРКО в вершине A_{24}

и одна треугольная грань $G_2 = C_{15}\to C_5\to C_6$.

Каждой грани G_i многогранного угла МДИД в вершине C_{15} соответствует число β_i, равное радианной мере её плоского угла, взятой со знаком:

десятиугольным граням G_1=$C_{15}C_6C_7C_8C_9C_{10}C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}$, G_3=$C_{15}C_{16}C_{38}C_{39}C_{40}C_{41}C_{27}C_8C_1C_5$ соответствуют числа $\beta_1 = \beta_3 = \frac{4\pi}{5}$,

треугольной грани G_2=$C_{15}C_5C_6$ – число $\beta_2 = -\frac{\pi}{3}$.

Число оборотов многогранного угла V многогранника МККО вокруг оси OA_3 равно $\mathrm{rot}(V) = 1$. Тогда кривизна реализации равна:

$$2\pi \cdot 1 - \left| \left(\frac{4\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{3} \right) \right| = \frac{2\pi}{15}.$$

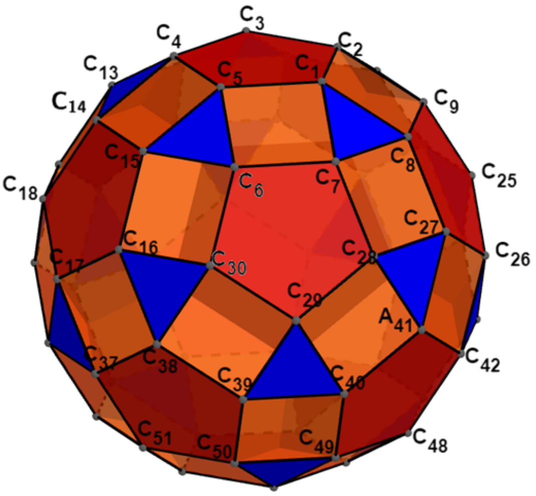


Рис. 26. Малый додекоикосододекаэдр

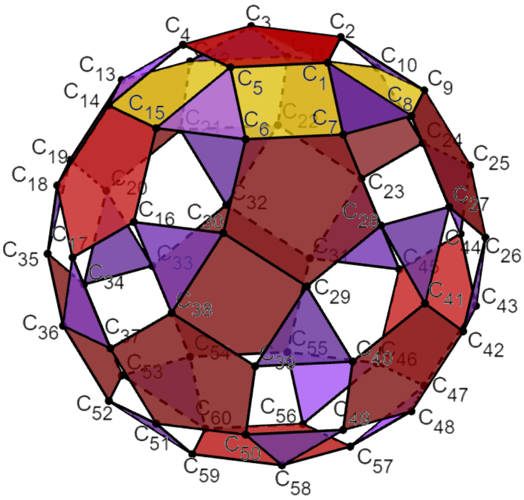


Рис. 27. Треугольные и пятиугольные грани РИД и одно его десятиугольное сечение $Г_1 = C_{15}C_6C_7C_8C_9C_{10}\ C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}$, охватывающее пятиугольную грань $C_1C_2C_3C_4C_5$.

На рис. 29 изображён четырёхугольник $P_1P_2P_3P_4$, являющийся полярным образом многогранного угла многогранника МДИД в вершине C_{15}. Вершины этого четырёхугольника являются полярными образами соответствующих граней. Аналогично предыдущим двум многогранникам полярный образ P_2 треугольной грани содержится в выпуклой оболочке полярных образов P_1, P_3, P_4 остальных граней угла. Таким образом, полярный образ многогранного угла МДИД, как и в случаях многогранных углов МККО и БРКО, представляет собой невыпуклый четырёхугольник в виде стрелки.

Сферическим изображением многогранного угла в вершине A_{24} многогранника БРКО является объединение сферических треугольников $P'_1C_{15}P'_2$, $P'_2C_{15}P'_3$, $P'_3C_{15}P'_4$, $P'_4C_{15}P'_1$ (рис. 30).

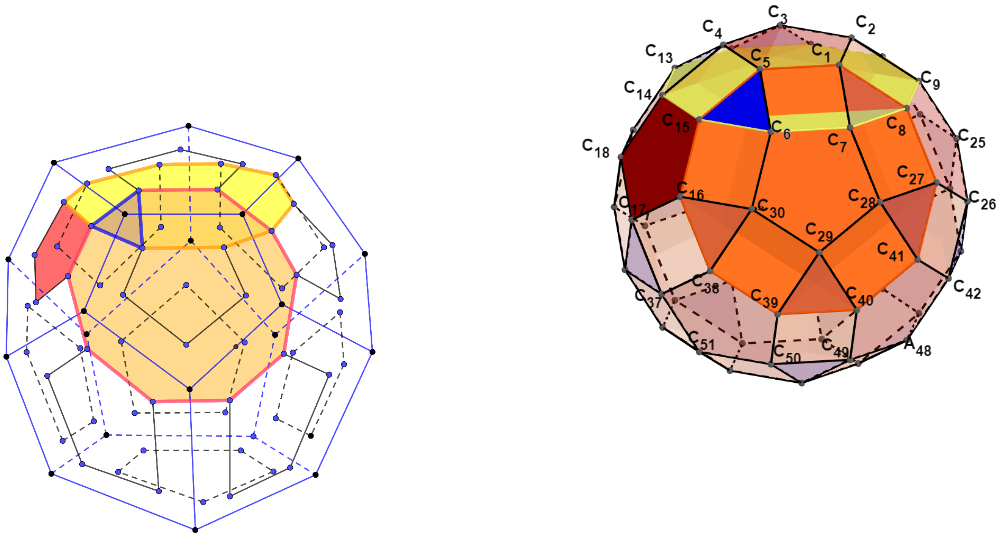


Рис. 28. Многогранный угол МДИД в вершине C_{15} и его грани в додекаэдре

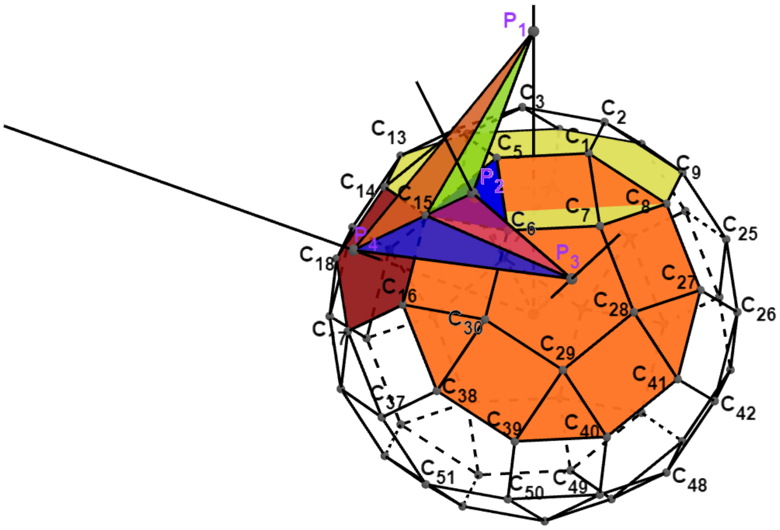


Рис. 29. Полярное изображение многогранного угла МДИД в вершине C_{15}

Сумма площадей полученных сферических треугольников равна площади сферического четырёхугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$. Вершины P'_1, P'_3, P'_4 являются вершинами вписанного в сферу S правильного икосаэдра. Площадь сферической проекции грани икосаэда составляет двадцатую часть площади всей сферы. Поскольку площадь сферического четырёхугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$ равна двум третьим площади сферического треугольника $P'_1P'_3P'_4$, то площади сферического четырёхугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$, равна тридцатой части площади сферы, т. е. $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{20}\right)4\pi = \frac{2\pi}{15}$. Теорема для МДИД доказана.

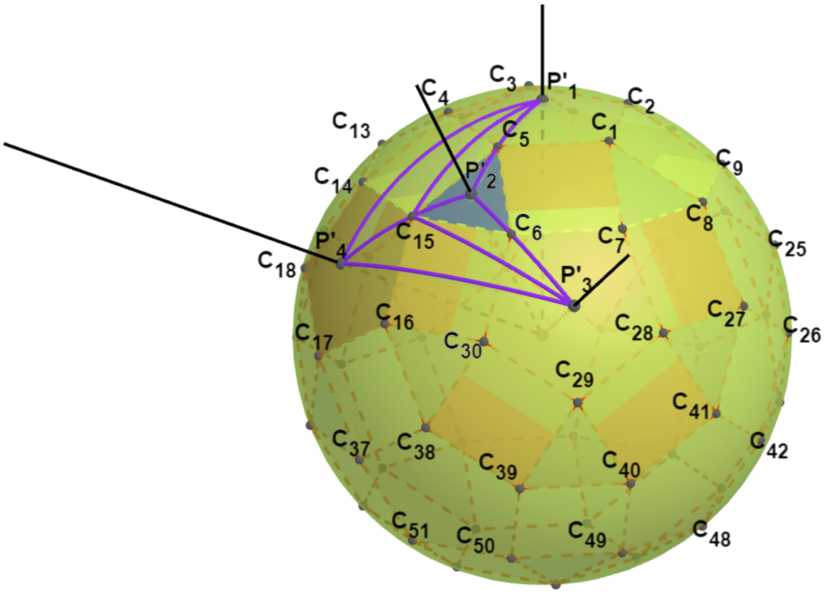


Рис. 30. Сферическое изображение многогранного угла МДИД в вершине C_{15}

5.4. Доказательство теоремы для большого икосоикосододекаэдра

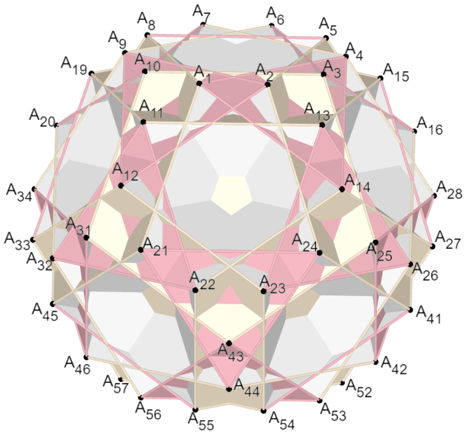


Рис. 31. Большой икосоикосододекаэдр (БИИД)

Выпуклой оболочкой вершин большого икосоикосододекаэдра БИИД является усечённый додекаэдр (рис. 32).

Рёбрами БИИД являются диагонали десятиугольных граней усечённого додекаэдра, которые параллельны сторонам граней, но не являются их диаметрами. На рис. 33 изображены эти диагонали для передних граней усечённого додекаэдра.

В каждой вершине многогранника БИИД сходятся по четыре его ребра

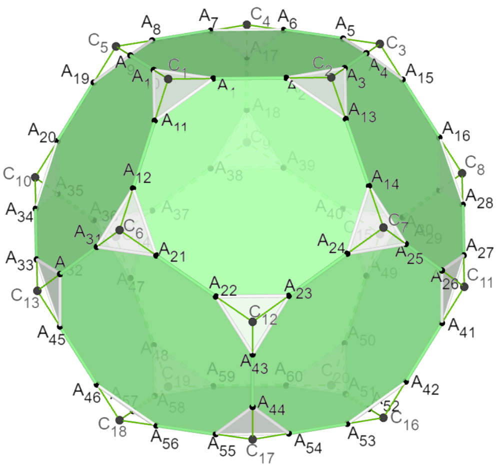


Рис. 32. Усечённый додекаэдр

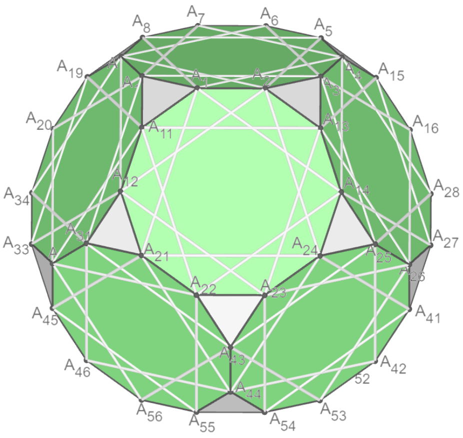


Рис. 33. Усечённый додекаэдр и сеть рёбер БИИД на нём

и четыре грани. Рассмотрим, например, вершину A_{11}. В ней сходятся рёбра $A_{11}A_{13}$, $A_{11}A_{22}$, $A_{11}A_{19}$, $A_{11}A_{32}$ и четыре грани: две шестиугольные $G_1{=}A_{11}A_{19}A_{36}A_{58}A_{55}A_{22}$ и $G_3 = A_{11}A_{32}A_{56}A_{53}A_{26}A_{13}$, одна пятиугольная $G_4{=}A_{11}A_{13}A_{15}A_{17}A_{19}$, и одна треугольная $G_2 = A_{11}A_{22}A_{32}$ (рис.34).

Треугольная грань G_2 является гранью складки многогранного угла БИИД в вершине A_{11}. Очевидно, что кривизна реализации угла будет равна

$$2\pi \cdot 1 - \left| \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{3} \right) \right| = \frac{2\pi}{5}.$$

На рис. 35 изображён четырёхугольник $P_1P_2P_3P_4$, являющийся полярным образом многогранного угла многогранника БИИД в вершине A_{11}. Вершины

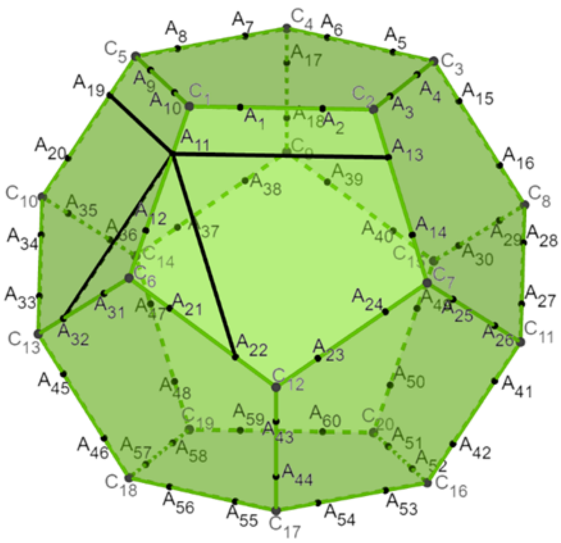


Рис. 34. Ребра и грани многогранника БИИД сходящиеся в вершине A_{11}

четырёхугольника являются полярными образами соответствующих граней.

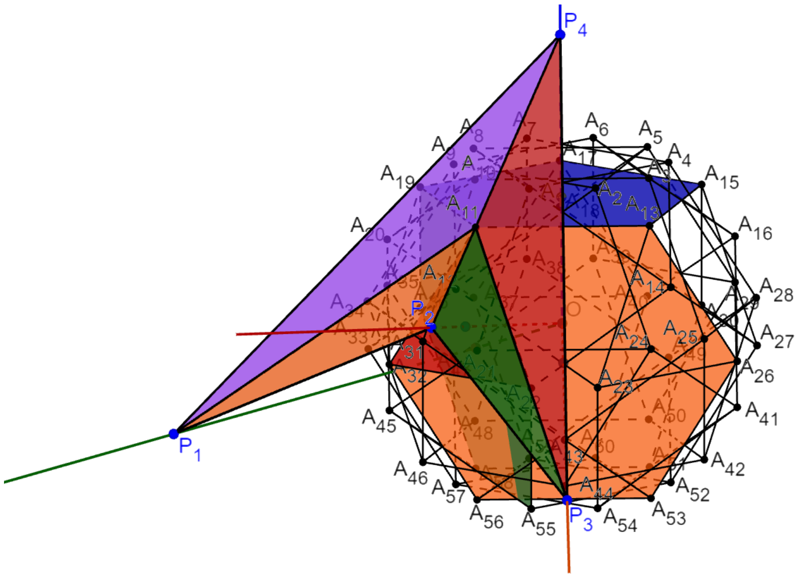


Рис. 35. Полярное изображение многогранного угла БИИД в вершине A_{11}

Сферическим изображением многогранного угла в вершине A_{11} многогранника БИИД является объединение сферических треугольников $P'_1A_{11}P'_2$, $P'_2A_{11}P'_3$, $P'_3A_{11}P'_4$, $P'_4A_{11}P'_1$ (рис. 36).

Сумма площадей полученных сферических треугольников равна площади сферического четырёхугольника $P'_1P'_2P'_3P'_4$. Для определения его площади рассмотрим проекции рёбер икосаэдра I, вписанного в сферу S, и проекции

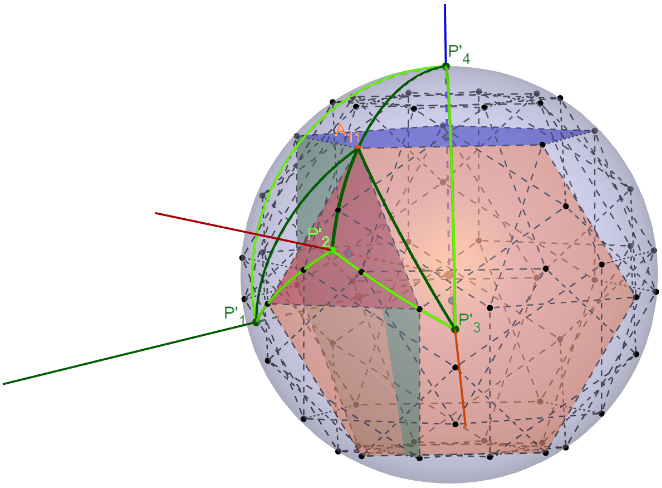


Рис. 36. Сферическое изображение многогранного угла БИИД в вершине A_{11}

рёбер двойственного ему додекаэдра D. Построение классических сетей на сфере можно посмотреть в пособии [7, с. 79]. На рис. 35 изображены вершины $L_1, L_2, \ldots, L_{12}$ вписанного в сферу S икосаэдра I и проекции его рёбер. Точки $B_1, B_2, \ldots, B_{20}$ – проекции вершин, а дуги, соединяющие их, проекции рёбер додекаэдра D, полярного икосаэдру I.

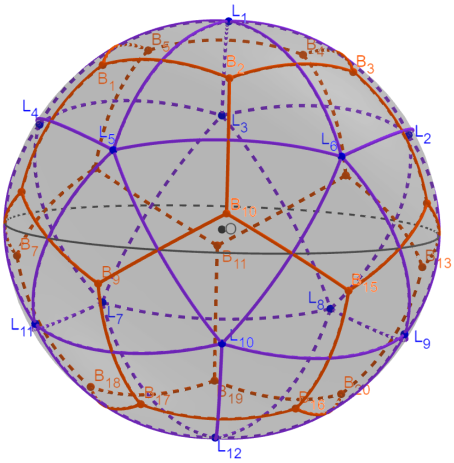


Рис. 37. Проекция сети рёбер икосаэдра I и проекция сети рёбер двойственного ему додекаэдра

Заметим, что сферический четырёхугольник $P'_1P'_2P'_3P'_4$ равен сферическому четырёхугольнику $L_1B_9B_{10}B_{15}$ (рис. 38). Площадь последнего равна площади проекций двух граней икосаэдра $L_1L_5L_6$ и $L_{10}L_5L_6$.

Таким образом, площадь сферического изображения многогранного угла БИИД равна $\left(2 \cdot \frac{1}{20}\right) 4\pi = \frac{2\pi}{5}$, что совпадает с его кривизной реализации. Тео-

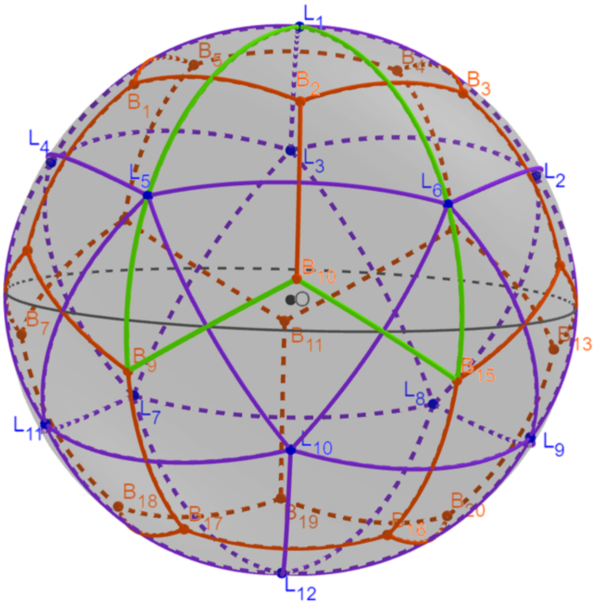


Рис. 38. Сферический четырёхугольник $L_1B_9B_{10}B_{15}$

рема о равенстве площади сферического изображения многогранного угла БИИД и кривизны его реализации доказана.

6. Дополнение

1. Обратим внимание, что при вычислении площадей сферических изображений многогранных углов многогранников второй группы мы пользовались известной связью между их вершинами и узлами классических сетей на сфере, таких как сети проекций ребер икосаэдра и додекаэдра.
2. Поскольку все рассматриваемые нами многогранники однородные, то рассуждения и построения, проведённые для одного угла многогранника, можно продолжить на все остальные. Это позволяет определить площадь сферического изображения многогранника как произведение количества его вершин на площадь сферического изображения одного угла. Тогда верно утверждение, что площадь сферического изображения многогранника равна произведению площади сферы и плотности данного многогранника.

Малый кубокубооктаэдр:

Полная площадь сферического изображения МККО равна $\frac{\pi}{3}\cdot 24 = 8\pi$, т. е. равна произведению 4π и плотности МККО, которая равна 2.

Большой ромбокубооктаэдр:

Полная площадь сферического изображения БРКО равна $5\pi up/6\cdot 24 = 20\pi$, т. е. равна произведению 4π и плотности многогранника БРКО, которая равна 5.

Малый додекоикосододекаэдр:

Если умножить площадь сферического изображения одного угла $\frac{2\pi}{15}$ на 60 – число вершин малого додекоикосододекаэдра, то получим, что полная площадь сферического изображения малого додекоикосододекаэдра равна 8π, т. е. равна произведению 4π и плотности МДИД, которая равна 2.

Большой икосоикосододекаэдр:

Полная площадь сферического изображения большого икосоикосододекаэдра равна $\frac{2\pi}{5}\cdot 60 = 24\pi$, т. е. равна произведению 4π и плотности большого икосоикосододекаэдра, которая равна 6.

1. Полярным образом многогранного угла многогранника является плоский многоугольник. Если рассмотреть объединение полярных образов всех многогранных углов ориентируемого однородного многогранника, то получим многогранник, вершинами которого будут полярные образы граней данного многогранника, а гранями – полярные образы многогранных углов. На рис. 39 изображён выпуклый многогранный угол многогранника, полярного к большому ромбокубооктаэдру.

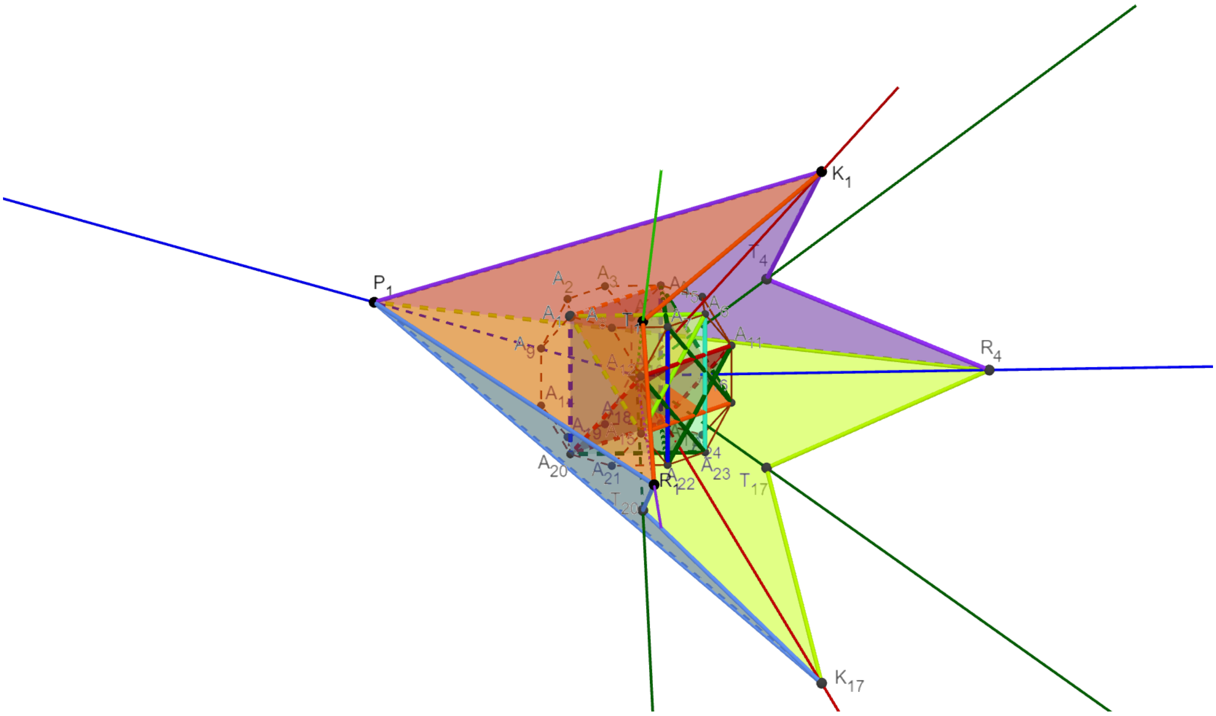


Рис. 39. Многогранный угол в вершине P_1, являющийся полярным изображением четырёх вершин квадратной грани БРКО

Заметим, что полярный многогранник уже не будет однородным – его многогранные углы будут различными. На рис. 40 изображена ещё одна грань многогранника, полярного к БРКО, которая наглядно иллюстрирует невыпуклость многогранного угла в вершине.

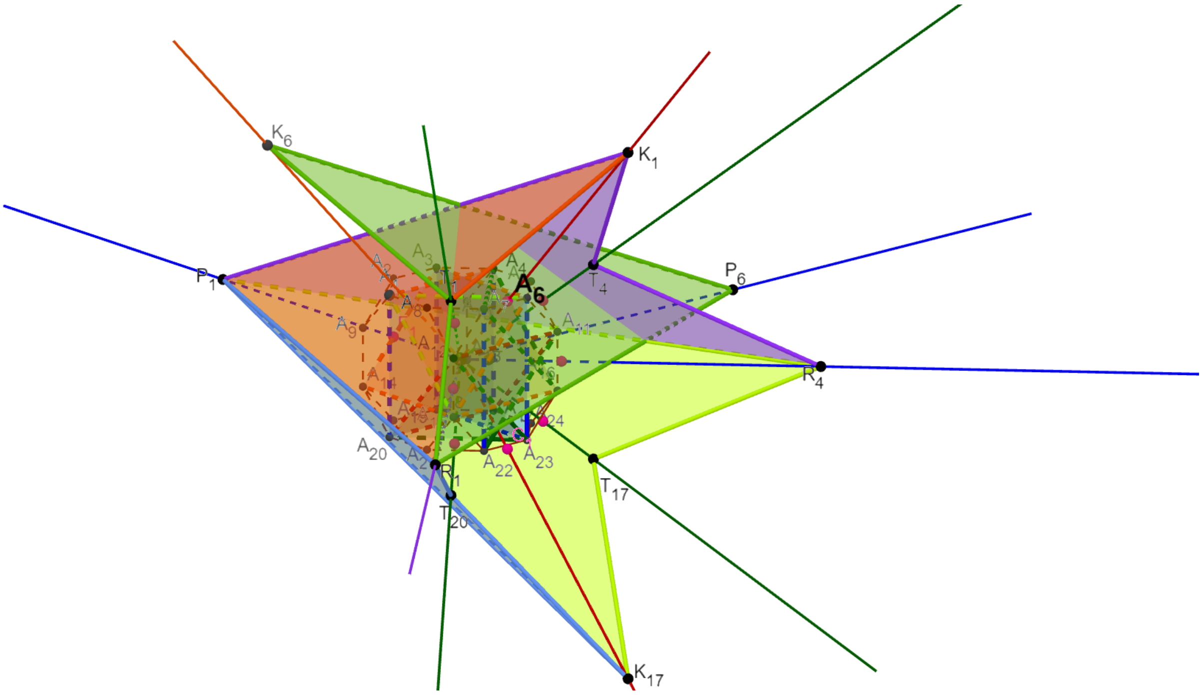


Рис. 40. Полярные образы пяти многогранных углов БРКО

4) Для ориентируемых однородных многогранников с выпуклыми гранями определено понятие плотности. Ещё Артур Кэли установил, что плотность проекции на сферу у большого икосаэдра равна семи, а у большого додекаэдра равна трём. Значения плотности остальных многогранников приведены (без доказательств) в обзорной статье [1].

Для многогранников первой группы (БИ, БД, ББТИД) плотность считается без поправок, как кратность накрытия сферы при центральном проектировании. Проекции вершин – это точки ветвления этого накрытия.

Для большого битригонального икосододекаэдра ББДИТ плотность $d = 6$, а индексы точек ветвления $k = 2$.

В геометрической теории функций комплексной переменной хорошо известна формула Римана–Гурвица [7, с.598] для рода g’ накрывающей поверхности, рода g накрываемой поверхности и индекса k точек ветвления:

$$2g' - 2 = d(2g - 2) + \Sigma(k_i - 1). \qquad (*)$$

Проверим, что эта формула выполняется для всех рассматриваемых многогранников. В нашем случае род g сферы равен нулю, а потому формула (*) упрощается:

$$2(g' + d - 1) = \Sigma(k_i - 1). \qquad (**)$$

Сначала проверим это равенство для «тройки». Для них $k = 2$.

1. Большой икосаэдр: g’ $= 0$, $d = 7$, $k_i = 2$, 12 вершин.

Тогда 2(7-1)=12. Равенство справедливо.

1. Большой додекаэдр: g'=4, d=3, k_i =2, 12 вершин.

Тогда 2(4+3-1)=12. Равенство справедливо.

1. Большой битригональный икоододекаэдр: g'=5, d=6, k_i =2, 20 вершин.

Тогда: 2(5+6-1)=20. Равенство справедливо.

Обратимся теперь к многогранникам второй группы (МККО, БРКО, МДИД, БИИД).

Проекция на сферу каждой треугольной грани имеет внутреннее прилегание (рис. 41).

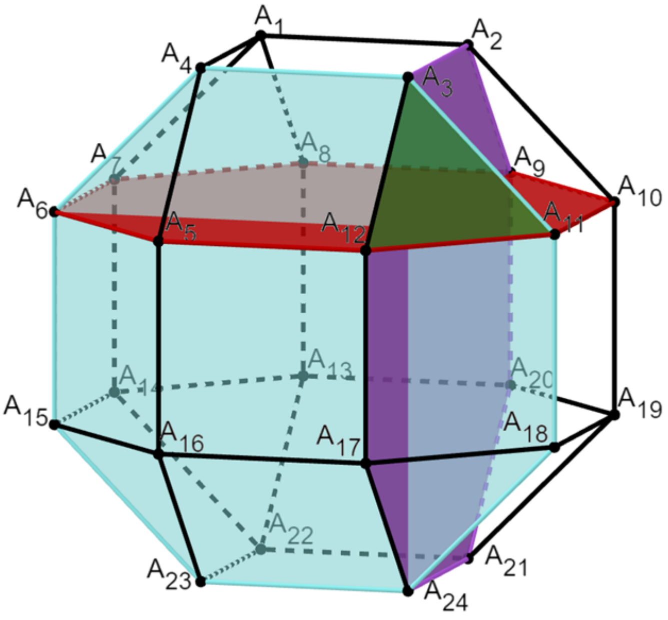


Рис. 41. Треугольная грань МККО

и смежные ей три восьмиугольные грани

Если этот сферический треугольник рассматривать как точку ветвления с индексом 2, то формула Римана-Гурвица тоже будет выполняться. Убедимся в этом.

1. Малый кубокубооктаэдр: g'=3, d=2, k_i =2, 8 треугольников.

Тогда 2(3+2-1)=8. Равенство справедливо.

1. Малый додекоикосододекаэдр: g'=9, d=2, k_i=2, 20 треугольников. Тогда 2(9+2-1)=20. Равенство справедливо.
2. Большой ромбокубооктаэдр: g'=0, d=5, k_i =2, 8 треугольников. Тогда 2(0+5-1)=8. Равенство справедливо.

3. Большой икосоикосододекаэдр: g'=5, d=6, k_i=2, 20 треугольников. Тогда 2(5+6-1)=20. Равенство справедливо.

Итак, на треугольную складку можно смотреть как на пространственную точку ветвления.

Выражаю благодарность своему научному руководителю Алексею Леонидовичу Вернеру за ценные советы, которые способствовали формированию статьи, а также Татьяне Георгиевне Ходот за полезные комментарии к статье.

Литература

1. Coxeter H.S.M., Longuet-Higgins M.S., Miller J.C.P. Uniform Polyhedra // Phill.Trans. 1954. N. 246A. P. 401–450.
2. Сопов С.П. Доказательство полноты перечня элементарных однородных многогранников // Украинский геометрический сборник. 1970. Вып. 8. С. 139–156.
3. Messer Peter W. Closed-Form Expressions for Uniform Polyhedra and Their Duals // Discrete & Computational Geometry. 2002. Is. 27. P. 353–375.
4. Вернер А.Л., Антипова Л.А. Строение невыпуклых однородных многогранников с выпуклыми гранями: учебное пособие. Санкт-Петербург : Издательство Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена, 2021. 62 с.
5. Александров А.Д. Избранные труды. Том 2. Выпуклые многогранники. Новосибирск : Наука, 2007. 492 с.
6. Антипова Л.А. Аналог теоремы Гаусса о площади сферического изображения для невыпуклого многогранного угла без особенностей // Классическая и современная геометрия : материалы международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения Л.С. Атанасяна, Москва, 01–04 ноября 2021 года / Московский педагогический государственный университет. Москва, 2021. С. 37. URL: `https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47225081` (дата обращения: 07.03.2022).
7. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М. : Наука, 1968. 618 с.

ANALOGUES OF THE GAUSS–ALEXANDROV THEOREM FOR UNIFORM ORIENTED NONCONVEX POLYHEDRA WITH CONVEX FACES

L.A. Antipova
Assistant Professor, e-mail: pridoroga31@yandex.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The paper defines the spherical image of a polyhedral angle of a uniform oriented nonconvex polyhedron, introduces the concept of curvature of realization of such an angle and proves the theorem about the equality of the area of the spherical image of a polyhedral angle with the feature "fold" to its realization curvature.

Keywords: Uniform oriented nonconvex polyhedron, polyhedral angle with the feature "fold", spherical image, curvature of realization of polyhedral angle..

Дата поступления в редакцию: 08.03.2022