

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И СПИНОРНАЯ СТРУКТУРА

В.В. Варламов

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

Аннотация. Показывается, что все состояния спектра материи из различных когерентных подпространств физического гильбертова пространства могут быть построены из фундаментальных состояний (двухкомпонентных спиноров) посредством операций слияния и удвоения.

Ключевые слова: фермионы, спиноры, нейтрино, гильбертово пространство, слияние, удвоение, аннигиляция.

1. Введение

Никто до конца не понимает спиноры. Их алгебра формально понятна, но их геометрическое значение загадочно

Майкл Атья [1, с. 430]

Общеизвестно, что поиск элементарных составляющих материи является главной мотивирующей идеей фундаментальной теоретической физики. Фейнман отмечал, что атомная гипотеза представляет собой наиболее важную и информативную часть научного знания. Основная посылка атомизма и редукционизма заключается в представлении о том, что материя есть некий агрегат, состоящий из фундаментальных (неделимых) субъединиц. С другой стороны, Гейзенберг неоднократно подчёркивал, что принцип «состоит из» не работает в области микромира, поскольку одна и та же так называемая элементарная частица может распадаться на различные частицы несколькими способами.

Современной реализацией гипотезы Демокрита является модель кварков, в которой предпринята попытка составного описания адронной части спектра материи в виде двухкваркового $q\bar{q}$ -состава для мезонов и трёхкваркового qqq -состава для барионов. Наряду с экспериментальным открытием состояний, не укладывающихся в стандартные $q\bar{q}$ - и qqq -схемы (экзотические адроны, тетракварки и пентакварки), модель кварков сталкивается с рядом серьёзных трудностей как теоретического, так и экспериментального характера: ошибочные предсказания барионного спектра на базе $SU(6) \otimes O(3)$ -симметрии, отсутствие аналитического понимания механизма конфайнмента в рамках квантовой хромодинамики, кризис протонного спина (более подробно см. [2]). Кроме того, лептоны находятся вне рамок описания кварковой модели, что автоматически

лишает кварки статуса универсальных субъединиц материи. Согласно стандартной модели (СМ), включающей в себя модель кварков как составную часть, имеем следующий список из 17 «фундаментальных частиц»: фермионы ($u, d, s, c, b, t, e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$) и бозоны (γ, g, Z, W, H). В этом списке семь фиктивных частиц (u, d, s, c, b, t, g), которые никогда не наблюдались в свободном состоянии. Пять частиц (μ, τ, Z, W, H) заведомо не элементарны, поскольку распадаются по многочисленным каналам. Три сорта нейтрино (ν_e, ν_μ, ν_τ) переходят друг в друга посредством нейтринных осцилляций, т. е. лептонное число для нейтрино не сохраняется. Вся эта разношёрстная компания (зоопарк) из 17 частиц в рамках стандартной модели связана динамической симметрией $G_{SM} = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ и 18 параметрами¹: массы ($m_e, m_u, m_d, m_\mu, m_s, m_c, m_\tau, m_b, m_t, M_W, M_H$), углы смешивания ($\theta_u, \theta_d, \theta, \delta$) и константы связи ($\alpha, \alpha_s, \alpha_W$). Легко видеть, что стандартная модель очень далека от идеала Демокрита о существовании универсального первоэлемента материи. Однако, если удалить из списка СМ фиктивные и распадающиеся частицы, то в итоге останутся три частицы (ν, e, γ), претендующие на роль такого первоэлемента.

Другим важным аспектом рассматриваемой проблемы (атомной гипотезы, корпускулярной картины) является вопрос об адекватности использования термина «частица» применительно к квантовому микрообъекту. Этим вопросом («что такое элементарная частица?») задавались Гейзенберг [3], Шрёдингер, Марков [4]. Этот термин, точнее говоря, наглядный пространственный образ, обычно ассоциируемый с понятием «частица», неосознанно транслируется на объекты микромира², которые, в общем случае, не подчиняются классическому пространственно-временному описанию. Как следствие возникает широкий спектр нечётких и размытых представлений о квантовом микрообъекте. В недавней статье [5] Вулховер суммирует эти представления. Перечислим некоторые из них: 1) частица как результат коллапса волновой функции; 2) частица как возмущение квантованного поля; 3) частица как неприводимое представление группы³; 4) частица как вибрация струны; 5) частица как

¹ Число параметров СМ не является жёстко фиксированным. Так, в связи с тем, что обнаружены нейтринные осцилляции, СМ нуждается в расширении, которое дополнительно вводит 3 массы нейтрино и как минимум 4 параметра PMNS-матрицы смешивания нейтрино (матрицы Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты), аналогичные СКМ-матрицы смешивания кварков, и, видимо, ещё 2 параметра, если нейтрино являются майорановскими частицами.

² Именно это транслирование (бессознательный перенос) Гейзенберг называл «дурной философией».

³ Эта интерпретация восходит к работе Вигнера [6], в которой элементарная частица описывается неприводимым представлением группы Пуанкаре $\mathcal{P}$. С другой стороны, в согласии с $SU(3)$ -теорией элементарная частица описывается *вектором* неприводимого представления группы $SU(3)$. Например, в так называемом «восьмеричном пути» Гелл-Манна [7] адроны представлены векторами восьмимерного регулярного представления $\text{Sym}_{(1,1)}^0$ группы $SU(3)$. С целью проложить мост между этими интерпретациями (между *представлениями* группы $\mathcal{P}$ и *векторами* представлений $\text{Sym}_{(1,1)}^0, \text{Sym}_{(1,4)}^0, \dots$) в [8] определяется $\mathbb{K}$ -гильбертово пространство состояний, где каждый циклический вектор этого пространства задаёт неприводимое представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ (см. также [9–11]). В данном подходе главенствующую роль приобретает понятие симметрии. Гейзенберг отмечал: «В начале была симметрия» – идея, безусловно, более правильная, чем демокритовский тезис «в начале была частица». Элементарные

деформация информационного океана⁴ («it from bit» Уилера). Последняя интерпретация восходит к Уг-гипотезе фон Вайцзеккера [14, 15], а также к гипотезе пространственно-временного кода Финкельштейна [16]. Согласно этим представлениям, фундаментальным первоэлементом является бит информации, а все материальные объекты есть некие «конструкты» информационного поля⁵.

Математическая структура бита информации тождественна двухкомпонентному спинору. В свою очередь, двухкомпонентный спинор описывает нейтрино. Вынесенное в эпиграф высказывание Атьи о «загадочности» спиноров наводит на мысль о том, что в поиске первоэлемента материи определяющую роль играет фундаментальное понятие спинора. В связи с этим рассмотрим истоки возникновения этого понятия, восходящие к кватернионам Гамильтона, а также *геометрическое* (Картан) и *алгебраическое* (Брауэр–Вейль) определения спинора.

Итак, теория алгебр Клиффорда берёт своё начало от *кватернионов* Гамильтона [17] и *теории протяжённости* Грассмана [18]. Алгебра, введённая Клиффордом [19], является обобщением алгебры кватернионов на случай многомерных пространств. Как следствие этого обобщения, в алгебре Клиффорда возникает кватернионная структура, являющаяся тензорным произведением алгебр кватернионов, т. е. тензорным произведением четырёхмерных алгебр (размерность алгебры кватернионов равна 4). Изучая вращения n -мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, Липшиц [20] установил, что группа вращений пространства $\mathbb{R}^n$ с определителем $+1$ двузначно изображается *спинорной группой*⁶. Как известно [21], группы движений n -мерных неевклидовых пространств S^n изоморфны группам вращений пространств $\mathbb{R}^{n+1}$. Поскольку алгебры Клиффорда изоморфны матричным алгебрам, *спинорные представления* движений пространств S^n можно рассматривать как представления этих движений линейными преобразованиями векторов в соответствующих пространствах. Векторы этих пространств называются *спинорами* пространств S^n . Понятие спинора

частицы являются воплощениями симметрий, их простейшими выражениями, однако они – лишь следствие симметрий» [12, с. 349].

⁴ Ассоциации океанического плана часто возникают, когда речь идёт о природе фундаментальной субстанции, заполняющей Вселенную, здесь достаточно вспомнить *море Дирака* или *нейтринное море Понтекорво–Смординского* [13].

⁵ Утверждая существование информационного поля (океана), последователи Уг-гипотезы фон Вайцзеккера («it from bit» Уилера) встают на зыбкую почву метафизических спекуляций, неизбежно возникающих по поводу так называемой «связи» между материей и информацией. По сути здесь имеет место очередная реинкарнация неоплатонизма, т. е. разделение реальности на мир идеальный и мир материальный (платонова «пещера») и последующее утверждение доминирования первого мира над вторым. Однако $it\ from\ bit \equiv bit\ from\ it$, откуда $it \equiv bit$, и существование двух миров есть фикция (иллюзия). Спиноза, вводя понятие *мыслящей субстанции*, отлично понимал эту ошибку Платона и искусственность противопоставления *res cogitans* и *res extensa* философии Декарта.

⁶ Для n -мерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ ($n = p + q$) группа Липшица $\Gamma_{p,q} = \{s \in \mathcal{O}_{p,q} \mid \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}, sx s^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}\}$ содержит спинорную группу $\mathbf{Spin}(p, q) = \{s \in \Gamma_{p,q}^+ \mid N(s) = \pm 1\}$, где $\Gamma_{p,q}^+ = \Gamma_{p,q} \cap \mathcal{O}_{p,q}^+$, $\mathcal{O}_{p,q}^+$ – чётная подалгебра алгебры Клиффорда $\mathcal{O}_{p,q}$ пространства $\mathbb{R}^{p,q}$. Группа $\mathbf{Spin}(p, q)$ содержит подгруппу $\mathbf{Spin}_+(p, q) = \{s \in \mathbf{Spin}(p, q) \mid N(s) = 1\}$.

было введено Картаном [22]. Ван дер Варден [23] отмечает, что название «спинор» было дано Эренфестом после появления известной статьи Гаудсмита и Уленбека [24] о вращающемся электро́не. Более точно, геометрический смысл спинорных представлений движений неевклидовых пространств S^n состоит в том, что координаты спиноров можно рассматривать как координаты плоских образующих максимальной размерности абсолютов⁷ этих пространств, а спинорные представления движения этих пространств совпадают с теми преобразованиями спиноров, которые соответствуют преобразованиям абсолютов при движениях. Так, в случае, важном для физики, известно, что связная группа движений трёхмерного неевклидова пространства $S^{1,2}$ (пространство Лобачевского) изоморфна связной группе вращений четырёхмерного псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{1,3}$ (пространство-время Минковского), совпадающей с группой преобразований Лоренца специальной теории относительности. Поэтому спинорное представление связной группы движений пространства $S^{1,2}$ (комплексными матрицами второго порядка с определителем $+1$) является в то же время спинорным представлением группы Лоренца. Отсюда следует, что каждому спинору пространства $S^{1,2}$ соответствует некоторая точка абсолюта⁸ пространства $S^{1,2}$, а каждой точке абсолюта пространства $S^{1,2}$ соответствует изотропная прямая пространства $\mathbb{R}^{1,3}$, проходящая через некоторую точку этого пространства. Изложенное геометрическое истолкование спиноров и спинорных представлений было предложено Картаном [25] (см. также [21]).

В своей книге [26] Шевалле отмечает, что концепция понятия спинора, данная Картаном, является довольно сложной, а более простое представление теории, основанное на использовании алгебр Клиффорда, было предложено в статье Брауэра и Вейля [27]. В своём изложении алгебраической теории спиноров Шевалле следует статье [27]. Так, наряду с геометрической интерпретацией Картана возник алгебраический подход к описанию спиноров и спинорных представлений, далее развитый в работах [28–30]. Продуктивность и развитость алгебраического подхода показывает, что спинор по преимуществу является объектом алгебраической природы. Согласно алгебраическому определению, спинор задаётся элементом минимального левого идеала алгебры Клиффорда⁹ $\mathcal{C}(V, Q)$, где V – векторное пространство, снабжённое невырожденной квадратичной формой Q . При n чётном минимальный левый идеал алгебры $\mathcal{C}(V, Q)$ соответствует *максимальному тотально изотропному подпространству*¹⁰ $U \subset V$ размерности $n/2$, т. е. изоморфен спинпространству $\mathbb{S}$ размерности $2^{n/2}$ [32].

Понятие спина неразрывно связано с природой того математического объек-

⁷ Абсолютом называется множество бесконечно удалённых точек неевклидова пространства.

⁸ Абсолют пространства Лобачевского $S^{1,2}$ гомеоморфен расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

⁹ Исторически первое рассмотрение спиноров как элементов минимального левого идеала алгебры Клиффорда было дано в работе [31].

¹⁰ Подпространство U пространства V называется тотально изотропным подпространством, если билинейная форма $B(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ для всех $\alpha_i, \alpha_j \in U$. Подпространство $U \subset V$ максимальной размерности с указанным выше свойством называется максимальным тотально изотропным подпространством.

та (спинора), геометрическое и алгебраическое определения которого мы рассмотрели выше. И именно здесь лежит «загадка», т. е. в *физическом* понимании спина, а не в геометрическом значении спиноров, как это утверждал Атья. Как известно, понятие спина ввёл Паули в 1925 г., объясняя дублетную структуру спектра щелочных металлов (аномальный эффект Зеемана): «Дублетная структура спектров щелочных металлов, а также нарушение теоремы Лармора согласно этой точке зрения объясняется своеобразной, классически не описываемой двузначностью квантовомеханических свойств излучающего электрона» [33, с. 644]. Ван дер Варден отмечает: «Эту неподдающуюся классическому описанию двузначность электрона ныне мы называем спином» [23, с. 236]. Как известно, все попытки классического (механического) описания спина электрона, начиная с работы Уленбека и Гаудсмита [24], не имели успеха¹¹. Первая теория спина, дающая корректную математическую формулировку «двузначности, не поддающейся классическому описанию», была предложена Паули в работе 1927 г. [36]. Избегая построения каких-либо наглядных кинематических моделей, Паули ввёл удвоенное гильбертово пространство $H_2 \otimes H_\infty$ (пространство волновых функций), векторами которого являются двухкомпонентные спиноры. Так впервые в физике появились двухкомпонентные спиноры и первое удвоение. Последующее удвоение (*биспиноры*, пространство $H_4 \otimes H_\infty$) было предложено Дираком в 1928 г. [37]¹². Ван дер Варден пишет: «Переход от однокомпонентной волновой функции к двухкомпонентной ψ более радикален, чем переход от двух компонент к четырём; переход от векторной алгебры к двузначным представлениям группы вращений совершить много труднее, чем расширить группу вращений до группы Лоренца» [23, с. 258]. Как известно, после работы Томаса [40] о величине дублетного расщепления Паули формально принял гипотезу о вращающемся электроны, однако остался при убеждении, что спин нельзя описать классической кинематической моделью, поскольку такая модель никогда не сможет привести к двузначным представлениям группы вращений. Таким образом в понятии о спине возник своего рода «теоретический компромисс», сущность которого Паули выразил следующими словами: «После короткого периода идейного разброда и разногласий, вызванных времен-

¹¹ В воспоминаниях Ю.Б. Румер пишет: «В свое время Паули сказал Кронику, что теория спина – это вздор, потому что математическая точка не может вокруг себя вращаться» [34, с. 56]. Точечность электрона является требованием специальной теории относительности, поэтому электроны в квантовой электродинамике, как и кварки в квантовой хромодинамике, представляются точечными фермионами спина 1/2. Более того, согласно кварковой модели, кварки совершают «внутри» адрона орбитальные и радиальные движения. При этом спин адрона ассоциируется с полным угловым моментом $\mathbf{J}$, являющимся суммой орбитального момента $\mathbf{L}$ и спина кварков $\mathbf{S}$: $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Очевидно, что это определение есть своего рода «механическая пародия» реального спина. Как утверждал Фок [35], *спин не является механическим понятием*.

¹² Принцип удвоения есть ведущий принцип физики микромира («удвоение симметрии» Паули, Гейзенберг [12, с. 342–343], см. также [38]). Следующее удвоение приводит к *гипертвисторам* в $\mathbb{K}$ -гильбертовом пространстве $H_8 \otimes H_\infty$. Гипертвисторы являются векторами фундаментального представления группы Румера–Фета $SO(2, 4) \otimes SU(2) \otimes SU(2)'$, дающей теоретико-групповую интерпретацию периодической системы элементов [39]. Спиноры, биспиноры и твисторы суть частные случаи гипертвистора.

ным ограничением “наглядности”, было достигнуто общее согласие, о замене конкретных образов абстрактными математическими символами, например ψ . В частности, конкретный образ вращения в трёхмерном пространстве был заменён на математические характеристики представления группы вращения. Эту группу Дирак скоро расширил до группы Лоренца» [42, с. 46]. В приведённой цитате особенно важно последнее предложение, поскольку полное описание спина достигается в рамках двузначных представлений группы Лоренца, а традиционное описание спина посредством группы $SU(2)$ является ограниченным представлением, исторически связанным с наглядным трёхмерным образом. $SU(2)$ -трактовка спина принята в стандартной модели, в $SU(6)$ -теории и её «орбитальном» расширении $SU(6) \otimes O(3)$, а также в понятии изотопического спина («вращение» в изопространстве). Очевидно, что редуцированное на трёхмерный образ (вследствие указанного Паули компромисса) $SU(2)$ -описание спина не отражает всех свойств этой важнейшей характеристики квантового микрообъекта (состояния). Так, при $SU(2)$ -описании невозможно объяснить наличие одинакового спина у состояний, имеющих различную массу (энергию). Это становится возможным при $SL(2, \mathbb{C})$ -описании, где спин $s = l - \bar{l}$, $l = k/2$, $\bar{l} = r/2$, k и r – степени спинтензорных факторизаций циклических векторов, задающих фермионные и бозонные состояния. $SL(2, \mathbb{C})$ -описание спина было дано в работах [10, 41].

Как уже отмечалось выше, общее понятие спина имело своим источником конкретное описание «двузначности, не поддающейся классическому описанию» электрона, *понимаемого как частица*. Однако частица – это классическое понятие. Ван дер Варден задаётся вопросом: «Почему Паули не приписал электрону момент количества движения $m_s = \pm 1/2$ и магнитный момент $2m_s?$ » [23, с. 243]. Может ли классическая частица обладать неклассическим свойством? Очевидно, что нет. Это и есть ответ на вопрос Ван дер Вардена. Ю. Румер и А. Фет пишут: «До сих пор мы считали, что *одна и та же частица* – например, электрон – может находиться в двух спиновых состояниях со спином $+1/2$ и $-1/2$. Однако электрон без определённого значения спина никогда не наблюдается и представляет собой лишь абстрактное понятие. Ввиду этого вполне закономерна другая точка зрения: можно считать, что существуют *две* элементарные частицы – электрон со спином $+1/2$ и электрон со спином $-1/2$, в то время как “просто электрон” в природе не встречается. При этом можно сохранить понятие об электроне как о некоторой абстрактной частице, энергия которой в магнитном поле всегда расщепляется на два возможных значения» [43, с. 161–162]. Согласно расхожему мнению («дурная философия» по Гейзенбергу) в пространстве-времени существуют некие объекты («просто электрон», «просто протон» и т. д.), которые понимаются как независимые друг от друга сущности, обладающие самостоятельным бытием и имеющие сразу все присущие им квантовые характеристики. Излишне напоминать, что такое представление не имеет ничего общего с реальностью, открытой в последних экспериментах по проверке неравенств Белла (опыты Фридмана–Клаузера, Аспэ, Гринберга–Хорна–Цайлингера и др.). Очевидно, что классическое понятие частицы несостоятельно на микроуровне, а также несостоятельны все меха-

нические модели, связанные с этим понятием. Абстрагируясь от наглядного образа (ментального шаблона), мы видим, что в основании понятия «частица» лежит представление о *дискретности*, заключающееся в предположении о существовании некоторой минимальной величины, неделимой далее до бесконечности, т. е. отрицание *континуума*. Прерывность и непрерывность (тезис и антитезис), квант и континуум (Демокрит и Эмпедокл). В отличие от чисто умозрительной процедуры деления до бесконечности, превращающей континуум в идеализацию, понятие кванта опирается на фундаментальный закон Планка о прерывности (дискретности) энергии. М.А. Марков в статье «О современной форме атомизма», анализируя эволюцию понятия «элементарная частица», приходит к выводу: «Если дано понятие поля, то дальше следует определение: элементарная частица – атом данного поля. Только в этом случае слово “атом” современной физики заменяется словом “квант”. Данная элементарная частица – это простейший элемент данного поля, или просто “квант данного поля”. Здесь действительно по праву, т. е. в соответствии с терминологическим смыслом можно употребить и слово “атом”» [4, с. 412]. Итак, согласно Маркову частица – это квант поля, *если дано понятие поля*. Увы, здесь мы видим определение одного тёмного понятия («частица») с помощью другого, пожалуй, ещё более тёмного понятия «поле». Сам Марков это видит и отмечает: «Но, к сожалению, с той же педагогической точки зрения нелегко объяснить содержание понятия поля» [4, с. 412]. И далее, Марков приводит весьма любопытную аналогию между четырьмя взаимодействиями современной физики и четырьмя стихиями древних греков, давая тем самым недвусмысленно понять, что современные представления не так уж далеко ушли от античной физики. Поле является необходимым атрибутом концепции близкодействия, определение поля требует наличия пространственно-временного континуума (для передачи взаимодействия от точки к точке). Однако понятие кванта возникло вне какой-либо связи с полевыми представлениями. Более того, дискретность энергии находится в противоречии с непрерывностью континуума. Согласно этой позиции, частица это не квант поля, а **квант энергии**.

Возвращаясь к спинорным представлениям группы Лоренца, мы видим, что *фундаментальное представление* этой группы над полем комплексных чисел $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ действует в двумерном спинпространстве, вектором которого является двухкомпонентный спинор. И далее, любое конечномерное неприводимое спинорное представление группы Лоренца может быть факторизовано в виде тензорного произведения двумерных фундаментальных представлений. В свою очередь, спинпространство фундаментального представления является минимальным левым идеалом кватернионной алгебры (алгебры бикватернионов $\mathbb{C}_2 \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ в случае поля $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ и алгебр кватернионов $\mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, $\mathcal{A}_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2)$, $\mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{R}(2)$ в случае поля $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, при этом с кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ для $\mathcal{A}_{0,2}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ для $\mathcal{A}_{1,1}$ и $\mathcal{A}_{2,0}$). Элементами минимальных левых идеалов четырёхмерных кватернионных алгебр являются двухкомпонентные спиноры. Здесь мы рассмотрели только один из путей возникновения $\mathbb{K}$ -структур (алгебр деления) в теоретической физике. В более широком контексте алгебраическая формулировка квантовой теории была впервые предложена Йорданом, фон

Нейманом и Вигнером [44, 45], а также Сигалом [46] (в терминах C^* -алгебр). Впоследствии алгебраические методы проникли в квантовую теорию поля и статистическую механику [47–49]. Авторы работ [44, 45] рассматривали $\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{H}$ -реализации квантовой теории на равных основаниях. Исторически это была первая реализация $\mathbb{K}$ -структур в физике. В 1962 г. Дайсон [50] предложил рассматривать все три $\mathbb{K}$ -реализации квантовой теории ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) в рамках единой структуры, названной им «троичный путь». Более точно, троичный путь Дайсона описывает, как определённые комплексные представления групп можно рассматривать как возникающие из вещественных или кватернионных представлений. И далее, в 2012 г. Баез [51] развивает троичный путь в рамках теории категорий и $\mathbb{K}$ -гильбертовых пространств. Теория $\mathbb{K}$ -гильбертовых пространств была ранее предложена в работе [52]. Ещё одно применение $\mathbb{K}$ -структур в физике связано с алгебраическим описанием стандартной модели (алгебра Диксона $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ [53], где $\mathbb{O}$ – алгебра октонионов¹³). Представление дискретных симметрий в виде автоморфизмов алгебр Клиффорда было предложено в [55–57] (PT - и CPT -группы). При этом существенную роль играет $\mathbb{K}$ -структура псевдоавтоморфизма алгебры Клиффорда, задающего зарядовое сопряжение C : кольцо деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$ соответствует заряженным состояниям (частицам), $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ – нейтральным состояниям, $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ соответствует истинно нейтральным (майорановским) состояниям. Определение фермионных и бозонных представлений группы Лоренца в терминах тензорных произведений двумерных спинпространств (минимальных левых идеалов четырёхмерных кватернионных алгебр) и действие соответствующих CPT групп для полей высшего спина были даны в [9, 41].

В настоящей статье, являющейся продолжением серии работ [2, 58, 59], рассматривается алгебраическая формулировка квантовой теории с двоичной структурой. Следуя Гейзенбергу, основной наблюдаемой на фундаментальном уровне (микроуровне) считается энергия, которой соответствует эрмитов оператор H . C^* -алгебра $\mathfrak{A}$ наблюдаемых состоит из оператора энергии H и присоединённых к H генераторов группы $SU(2, 2)$ (двулистной накрывающей конформной группы $SO_0(2, 4)$), образующих с H общую систему собственных функций. Спектр состояний (спектр материи) генерируется посредством конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала. Чистые сепарабельные состояния спектра материи задаются циклическими векторами $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (вещественные числа $\mathbb{R}$, комплексные числа $\mathbb{C}$ и кватернионы $\mathbb{H}$). В соответствии со спектром масс [60] чистые сепарабельные состояния ω образуют физическое $\mathbb{K}$ -гильбертово пространство $H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$, где каждый циклический вектор $|\psi\rangle \in H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ соответствует определённому наблюдаемому состоянию («частице»). Алгебраическое квантование, реализуемое ГНС-конструкцией в рамках концепции циклических векторов $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства и энергетической интерпретации C^* -алгебры, естественным образом приводит к пониманию состояния («частицы») как **кванта энергии**. При этом минимальный

¹³ Гюнайдин и Гюрши [54] рассмотрели алгебраическое представление кварковой модели в рамках октонионной группы автоморфизмов G_2 (G_2 является 14-мерной исключительной группой Ли, содержащей в качестве подгруппы группу $SU(3)$).

квант энергии соответствует фундаментальному состоянию C^* -алгебры (минимальный левый идеал алгебры кватернионов), а тензорные произведения фундаментальных состояний образуют *фермионные состояния* при нечётном числе сомножителей (кватернионных алгебр) и *бозонные состояния* при чётном. Показывается, что все состояния (фермионные и бозонные) из $\mathbb{K}$ -подпространств ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$) являются производными структурами, которые получаются из фундаментальных состояний посредством операций слияния и удвоения.

2. Слияние, удвоение и аннигиляция состояний

В рамках двоичной структуры для состояний с минимальной тензорной размерностью существуют три базовые операции¹⁴:

1) **Слияние.**

$$|q\rangle \otimes |\bar{q}\rangle = \left| \mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \overline{\mathbb{H}}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \mathbb{H} \otimes \overline{\mathbb{H}}, 0, 0, 1 \right\rangle = \left| \mathbb{R}, 0, 0, 1 \right\rangle = |\gamma\rangle.$$

2) **Удвоение.**

$$\begin{aligned} |e^-\rangle &= |q\rangle \oplus |\bar{q}\rangle = \left| \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \mathbb{C}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |e^+\rangle &= |q\rangle \ominus |\bar{q}\rangle = \left| \mathbb{H} \ominus i\mathbb{H}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \overline{\mathbb{C}}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

3) **Аннигиляция.**

$$\begin{aligned} |e^-\rangle \otimes |e^+\rangle &= \left| \mathbb{C}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \overline{\mathbb{C}}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \left| \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \mathbb{H} \ominus i\mathbb{H}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle + i \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle - \\ &\quad - i \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle + \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle = 2 \left| \mathbb{R}, 0, 0, 1 \right\rangle = 2 |\gamma\rangle. \end{aligned}$$

Последняя операция является алгебраическим аналогом процесса аннигиляции электрон-позитронной пары на два γ -кванта: $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$.

Покажем, что все циклические векторы физического $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства, представляющие чистые сепарабельные состояния спектра материи, могут быть определены посредством вышеперечисленных операций слияния и удвоения. С этой целью потребуются вспомнить некоторые сведения, касающиеся факторизации и периодичности алгебр Клиффорда.

Пусть $\mathcal{C}(V, Q)$ – алгебра Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, где V – векторное пространство, снабжённое квадратичной формой $Q = x_1^2 + \dots + x_p^2 - \dots - x_{p+q}^2$. Если $p + q$ чётно и $\omega^2 = 1$, то $\mathcal{C}(V, Q)$ называется *положительной*, и, соответственно, *отрицательной*, если $\omega^2 = -1$, т. е. $\mathcal{C}_{p,q} > 0$, если $p - q \equiv 0, 4 \pmod{8}$ и $\mathcal{C}_{p,q} < 0$, если $p - q \equiv 2, 6 \pmod{8}$.

¹⁴ Операция слияния была ранее определена в [2]

Теорема 1 (Каруби [61]). 1) Если $\mathcal{C}(V, Q) > 0$ и $\dim V$ чётна, то

$$\mathcal{C}(V \oplus V', Q \oplus Q') \simeq \mathcal{C}(V, Q) \otimes \mathcal{C}(V', Q').$$

2) Если $\mathcal{C}(V, Q) < 0$ и $\dim V$ чётна, то

$$\mathcal{C}(V \oplus V', Q \oplus Q') \simeq \mathcal{C}(V, Q) \otimes \mathcal{C}(V', -Q').$$

Используя теорему Каруби, получим для алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ ($p - q \equiv 0 \pmod{2}$) следующую факторизацию:

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \underbrace{\mathcal{C}_{s_i, t_j} \otimes \mathcal{C}_{s_i, t_j} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}_{s_i, t_j}}_{(p+q)/2 \text{ раз}}, \quad (1)$$

где $s_i, t_j \in \{0, 1, 2\}$.

Теорема 2. Все циклические векторы $|\psi\rangle$ физического $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства $H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$, задающие фермионные и бозонные состояния $\mathbb{R}$ -, $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{H}$ -подпространств, определяются посредством композиции операций слияния и удвоения из активных $|\mathbf{q}_a\rangle$ и инертных $|\mathbf{q}_s\rangle$ фундаментальных состояний.

Доказательство. Согласно теореме 3 в [58], фермионным состояниям F соответствуют циклические векторы $\tau_{\frac{k}{2}, 0}^k \otimes \tau_{0, \frac{r}{2}}^r |\omega\rangle$ с нечётным числом сомножителей $\tau_{\frac{1}{2}, 0}^1$ (соотв. $\tau_{0, \frac{1}{2}}^1$) в тензорном произведении. В свою очередь, бозонным состояниям B соответствуют циклические векторы с чётным числом сомножителей. Следовательно,

$$\underbrace{\tau_{\frac{1}{2}, 0}^1 \otimes \tau_{\frac{1}{2}, 0}^1 \otimes \cdots \otimes \tau_{\frac{1}{2}, 0}^1}_{m \text{ раз}} \bigotimes \tau_{0, \frac{1}{2}}^1 \otimes \tau_{0, \frac{1}{2}}^1 \otimes \cdots \otimes \tau_{0, \frac{1}{2}}^1 \Rightarrow \begin{cases} F, & m \equiv 1 \pmod{2}; \\ B, & m \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Двумерное гильбертово пространство $H_2(\mathbb{C})$, в котором действует фундаментальное циклическое представление $\tau_{\frac{1}{2}, 0}^1$ (соотв. $\tau_{0, \frac{1}{2}}^1$), т. е. «базовый строительный блок» структуры (2), эквивалентно спинпространству $S_2(\mathbb{C})$, которое, в свою очередь, является минимальным левым идеалом алгебры бикватернионов $\mathbb{C}_2$. С другой стороны, алгебра $\mathbb{C}_2$ изоморфна комплексификациям вещественных подалгебр $\mathcal{C}_{2,0}$, $\mathcal{C}_{1,1}$, $\mathcal{C}_{0,2}$. Соответственно, спинпространство $S_2(\mathbb{C})$ изоморфно комплексификациям минимальных левых идеалов вещественных подалгебр¹⁵: $S_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes I_{2,0}$, $S_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes I_{1,1}$, $S_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes I_{0,2}$. Кроме

¹⁵ Минимальный левый идеал подалгебры $\mathcal{C}_{2,0}$ имеет вид $I_{2,0} = \mathcal{C}_{2,0} f_{20}$, где $f_{20} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1)$ – примитивный идемпотент для $\mathcal{C}_{2,0}$, соответствующее кольцо деления $\mathbb{K} \simeq f_{20} \mathcal{C}_{2,0} f_{20} \simeq \{1\} \simeq \mathbb{R}$ изоморфно полю вещественных чисел. Для подалгебры $\mathcal{C}_{1,1}$ имеем $I_{1,1} = \mathcal{C}_{1,1} f_{11}$, где $f_{11} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{12})$, $\mathbb{K} \simeq f_{11} \mathcal{C}_{1,1} f_{11} \simeq \{1\} \simeq \mathbb{R}$. Аналогично, минимальный левый идеал подалгебры $\mathcal{C}_{0,2}$ задаётся выражением $I_{0,2} = \mathcal{C}_{0,2} f_{02}$, где $f_{02} = 1$, а кватернионное кольцо деления имеет вид $\mathbb{K} \simeq f_{02} \mathcal{C}_{0,2} f_{02} \simeq \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\} \simeq \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \simeq \mathbb{H}$. Следует отметить, что выбор примитивных идемпотентов алгебр $\mathcal{C}_{p,q}$ неоднозначен и определяется числом коммутирующих элементов алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$, образующих конечную группу порядка 2^k , где $k = q - r_{q-p}$, здесь r_{q-p} – числа Радона–Гурвица, значения которых образуют цикл с периодом 8: $r_{i+8} = r_i + 4$ (более подробно см. [30, 56]).

того, для алгебры $\mathbb{C}_2$ справедлив изоморфизм $\mathbb{C}_2 \simeq \mathcal{A}_{3,0}$, где $\mathcal{A}_{3,0}$ – алгебра Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ с комплексным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$ (тип $p - q \equiv 3 \pmod{8}$). В свою очередь, для алгебры $\mathcal{A}_{3,0}$ справедливо разложение $\mathcal{A}_{3,0} \simeq \mathcal{A}_{0,2} \oplus \mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ (частный случай общего изоморфизма $\mathcal{A}_{p,q} \simeq \mathcal{A}_{q,p-1} \oplus \mathcal{A}_{q,p-1}$ для нечётномерных алгебр, более подробно см. [10, 28]). Далее, поскольку максимальный базисный элемент $\omega = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ алгебры $\mathcal{A}_{3,0}$ принадлежит центру $\mathbf{Z}_{3,0} = \{1, \omega\} \in \mathcal{A}_{3,0}$ и $\omega^2 = -1$, то $\mathbf{Z}_{3,0} \simeq \mathbb{C}$, а следовательно, алгебра $\mathcal{A}_{3,0}$ является комплексификацией (удвоением) алгебры кватернионов $\mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, т. е. алгеброй бикватернионов $\mathbb{C}_2$. Отсюда следует, что комплексная структура (2), задающая заряженные состояния (согласно теореме 4 в [58]), является производной от нейтральной структуры. Иными словами, заряд есть удвоение (комплексификация) нейтральной структуры¹⁶. Таким образом, наряду с операцией **слияния** имеем операцию **удвоения** состояний¹⁷.

Операция слияния, генерирующая состояние (2), индуцирует тензорное произведение $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K}$ соответствующих колец фундаментальных состояний. Согласно факторизации (1), любая чётномерная алгебра $\mathcal{A}_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ изоморфна тензорному произведению кватернионных алгебр $\mathcal{A}_{0,2}$ ($\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$) и $\mathcal{A}_{1,1}$, $\mathcal{A}_{2,0}$ ($\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$). Соответственно этому имеем **два типа фундаментальных состояний**¹⁸:

¹⁶ В этом контексте, электрон есть комплексификация (удвоение) двух нейтринных состояний (нейтрино и антинейтрино), что и выражается в стандартном формализме в виде биспинора Дирака. Как известно [62], безмассовое уравнение Дирака $i\gamma^\nu \partial_\nu \psi(x) = 0$ в «расщеплённом» базисе для γ -матриц (базис Вейля) распадается на два уравнения $(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}) \varphi_{(\pm)}(x) = 0$, впервые предложенные Вейлем в 1929 г. [63], где двухкомпонентные функции φ_α [$\alpha = (-), (+)$] описывают, соответственно, *левовинтовое нейтрино* (отрицательная спиральность, $\alpha = (-)$) и *правовинтовое антинейтрино* (положительная спиральность, $\alpha = (+)$). При этом проекционные операторы $P_\pm = 1/2(1 \pm \gamma_5)$ являются центральными идемпотентами алгебры Дирака $\mathbb{C}_4$. Уравнения Вейля были получены в предположении, что нейтрино имеют нулевую массу, однако, согласно современным данным [64], нейтрино обладают ненулевой массой, лежащей в зависимости от сорта («аромата») нейтрино в пределах: $m_{\nu_e} < 1,1$ eV, $m_{\nu_\mu} < 0,19$ MeV, $m_{\nu_\tau} < 18,2$ MeV. Наличие массы у нейтрино с необходимостью приводит к определению диракоподобных уравнений для нейтрино, трансформационные свойства которых (дискретные симметрии) существенно отличны от таковых для уравнений Вейля. Это расширение трансформационных свойств находится в резком противоречии с наблюдательными данными. Наличие этого противоречия, очевидно, является следствием попытки пространственно-временного описания (в рамках теории континуума) квантовых микрообъектов. Алгебраическая формулировка, свободная от привязки к континууму, позволяет обойти это противоречие.

¹⁷ Согласно нейтринной теории света де Бройля [65], фотон есть результат слияния двух нейтринных состояний (нейтрино и антинейтрино): $|\gamma\rangle = |\nu\rangle \otimes |\bar{\nu}\rangle = |\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1\rangle = |\mathbb{R}, 0, 0, 1\rangle$. В свою очередь, электрон есть удвоение (комплексификация) нейтринных состояний: $|e\rangle = |\nu\rangle \oplus |\bar{\nu}\rangle = |\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, 0, 1, 1/2\rangle = |\mathbb{C}, 0, 1, 1/2\rangle$. В этом контексте, электрон и фотон являются *производными состояниями* (структурами), а *подлинно фундаментальным состоянием* является нейтрино. Нетрудно видеть, что все циклические векторы $|\psi\rangle$ $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства $H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ могут быть получены посредством операций слияния и удвоения из фундаментального состояния $|q\rangle = |\nu\rangle$. Эти операции задают динамическую связь между тензорной структурой и $\mathbb{K}$ -линейной структурой векторов $|\psi\rangle \in H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$, т. е. связь между массой, спином и зарядом состояний. В некотором смысле это позволяет обобщить *нейтринную теорию света* де Бройля до *нейтринной теории «всего»*.

¹⁸ Второй тип соответствует алгебрам $\mathcal{A}_{1,1}$, $\mathcal{A}_{2,0}$ с вещественным кольцом $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$. В этом случае зарядовое сопряжение C (псевдоавтоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$) редуцируется к тождественному

$$\text{I. } |\mathbf{q}_a\rangle = |\mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2}\rangle, |\bar{\mathbf{q}}_a\rangle = |\bar{\mathbb{H}}, 0, -1, \frac{1}{2}\rangle.$$

$$\text{II. } |\mathbf{q}_s\rangle = |\mathbb{R}, 0, 0, \frac{1}{2}\rangle, |\bar{\mathbf{q}}_s\rangle = |\mathbf{q}_s\rangle.$$

Отождествление минимальной структурной составляющей $|\mathbf{q}\rangle$ (квант энергии) с нейтрино $|\nu\rangle$, $|\mathbf{q}\rangle \equiv |\nu\rangle$, привело бы к «нейтринной теории всего» и к пониманию нейтрино как первоэлемента материи. Однако субстанция (энергия) не определяется своими состояниями. Как отмечал Спиноза: «Субстанция по природе первое своих состояний» (теорема 1, «Этика»). Субстанция как целое первичнее своих состояний. Состояния имеют вторичную (подчинённую) природу по отношению к целому (субстанции). Это один из главных принципов холизма. Спектр состояний субстанции, которую мы называем энергией или материей, содержит бесконечное множество состояний, среди которых одним из самых минимальных является нейтрино. Субстанция не является агрегатом, построенным из элементарных частей, вопреки всем представлениям атомизма и редукционизма.

Таким образом, согласно (2) и (1) любое состояние из $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ является комбинацией (слиянием или удвоением) активных и инертных фундаментальных состояний. В зависимости от $m \equiv 0, 1 \pmod{2}$ из (2) имеем фермионные или бозонные состояния. Фундаментальные состояния (типы **I** и **II**) соответствуют $m = 1$. При $m = 2$ структура $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ соответствует алгебрам

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4,0} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{3,1} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{2,2} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{1,3} &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{0,4} &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Далее, для структуры $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ при $m = 3$ имеем¹⁹

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{6,0} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{5,1} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{4,2} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

преобразованию, т. е. состояние совпадает со своим зарядово-сопряжённым (антисостоянием). Таким образом, второй тип задаёт *истинно нейтральное состояние*, а именно, майорановский фермион минимального спина $s = 1/2$, т. е. *стерильное нейтрино* $|\nu_s\rangle$ (нейтрино Майорана). Существование стерильного (инертного) нейтрино было предсказано Б.М. Понтекорво [66]. В настоящее время ведутся интенсивные поиски этого типа нейтрино в предположении, что $|\nu_s\rangle$ является основной составляющей так называемой «тёмной материи». В отличие от инертного нейтрино $|\nu_s\rangle$, *активное нейтрино* $|\nu_a\rangle$ подразделяется на две разновидности: левовинтовое нейтрино $|\nu_a\rangle$ и правовинтовое антинейтрино $|\bar{\nu}_a\rangle$.

¹⁹ Для алгебры $\mathcal{A}_{4,2} \simeq \mathbb{R}(8)$ справедливо разложение $\mathcal{A}_{4,2} \simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,4} \simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)$ (теорема 1), поскольку $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4)$, то $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Аналогично для алгебр $\mathcal{A}_{3,3} \simeq \mathbb{R}(8)$ и $\mathcal{A}_{0,6} \simeq \mathbb{R}(8)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{3,3} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{2,4} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{1,5} &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{0,6} &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

При $m = 4$ для $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$ получим

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{8,0} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{7,1} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{6,2} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{5,3} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{4,4} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{3,5} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{2,6} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{1,7} &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{0,8} &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Для $m = 5, 6, \dots$ явный вид структуры $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K}$ определяется периодичностью Картана–Ботта²⁰ для алгебр $\mathcal{A}_{p,q}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (более подробно см. [10]). Алгебра Клиффорда над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ периодична по модулю 8: $\mathcal{A}_{p+8,q} \simeq \mathcal{A}_{p,q} \otimes \mathcal{A}_{8,0}$ ($\mathcal{A}_{p,q+8} \simeq \mathcal{A}_{p,q} \otimes \mathcal{A}_{0,8}$). Так, при $m = 5$ для алгебры $\mathcal{A}_{10,0} \simeq \mathbb{R}(32)$ имеем разложение

$$\mathcal{A}_{10,0} \simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{8,0} \simeq \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(16) \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

²⁰ В 1908 г. Картан [67] определил алгебры Клиффорда как матричные алгебры с элементами в $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ и открыл периодичность по модулю 8. 8-периодичность Картана для алгебр Клиффорда часто приписывается Ботту, который доказал свою периодичность гомотопических групп для групп вращений в 1959 г. [68].

что соответствует

$$\mathcal{C}_{2,0} \otimes \mathcal{C}_{0,2} \otimes \mathcal{C}_{2,0} \otimes \mathcal{C}_{0,2} \otimes \mathcal{C}_{2,0} \longrightarrow |\mathbf{q}_s\rangle \otimes |\mathbf{q}_a\rangle \otimes |\mathbf{q}_s\rangle \otimes |\mathbf{q}_a\rangle \otimes |\mathbf{q}_s\rangle$$

и т. д. Таким образом, все состояния, составляющие $\mathbb{H}$ - и $\mathbb{R}$ -подпространства физического $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства (только $\mathbb{H}$ -подпространства в случае фермионов), могут быть построены посредством операции слияния из фундаментальных состояний.

Состояния, составляющие $\mathbb{C}$ -подпространства, определяются посредством операции удвоения, при этом ключевую роль играет изоморфизм $\mathbb{C}_{p+q-1} \simeq \mathcal{C}_{p,q}$, где $p-q \equiv 3, 7 \pmod{8}$. Частным случаем является изоморфизм $\mathbb{C}_2 \simeq \mathcal{C}_{3,0}$, рассмотренный выше. В свою очередь, при $p-q \equiv 3, 7 \pmod{8}$ для нечётномерной алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ справедливо разложение²¹

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1}, \quad (3)$$

которое можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_{p,q} \\ \swarrow \lambda_+ \quad \searrow \lambda_- \\ \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1} \end{array}$$

Здесь центральные идемпотенты²²

$$\lambda_+ = \frac{1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}}{2}$$

удовлетворяют соотношениям $(\lambda_+)^2 = \lambda_+$, $(\lambda_-)^2 = \lambda_-$, $\lambda_+ \lambda_- = 0$. При $p-q \equiv 3 \pmod{8}$ изоморфизм (3) приводит к разложению алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ на две подалгебры $\mathcal{C}_{q,p-1}$ с кватернионным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$:

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1} \simeq \mathbb{H} \left(2^{\frac{p+q-3}{2}} \right) \oplus \mathbb{H} \left(2^{\frac{p+q-3}{2}} \right) \longrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Далее, при $p-q \equiv 7 \pmod{8}$ изоморфизм (3) приводит к разложению алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ на две подалгебры $\mathcal{C}_{q,p-1}$ с вещественным кольцом деления $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1} \simeq \mathbb{R} \left(2^{\frac{p+q-1}{2}} \right) \oplus \mathbb{R} \left(2^{\frac{p+q-1}{2}} \right) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

В обоих случаях максимальный базисный элемент $\omega = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}$ алгебр $\mathcal{C}_{p,q}$ принадлежит центру $\mathbf{Z}_{p,q} = \{1, \omega\}$. Поскольку $\omega^2 = -1$, то $\mathbf{Z}_{p,q} \simeq \mathbb{C}$, а следовательно, алгебры $\mathcal{C}_{p,q}$ являются комплексификациями (удвоениями) своих подалгебр $\mathcal{C}_{q,p-1}$ с кольцами $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ и $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$: $\mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}$ ($p-q \equiv 3 \pmod{8}$) и $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ ($p-q \equiv 7 \pmod{8}$). Таким образом, имеем два вида заряда: 1) $\mathbb{C} \simeq \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}$ – удвоение активных состояний $|\mathbf{q}_a\rangle$; 2) $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ – удвоение инертных состояний $|\mathbf{q}_s\rangle$. ■

²¹ Для алгебр вида $\mathcal{C}_{0,q}$ имеем $\mathcal{C}_{0,q} \simeq \mathcal{C}_{0,q-1} \oplus \mathcal{C}_{0,q-1}$.

²² Согласно [69], идемпотенты λ_+ и λ_- могут быть отождествлены с проекционными операторами спиральности, которые различают лево- и правополяризованные спиноры.

В заключение следует отметить, что главной целью данной статьи явилось стремление подчеркнуть фундаментальную роль двухкомпонентных спиноров. Двухкомпонентный спинор описывает минимальную структурную составляющую материи (квант энергии). Квантованная природа ферми- и бозе-состояний спектра материи заключается в факторизации (сепарабельности) циклических векторов $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства посредством тензорного произведения фундаментальных состояний $|q\rangle$ (ГНС-конструкция, алгебраическое квантование). При этом наличие $\mathbb{K}$ -структуры расщепляет $|q\rangle$ на два состояния $|q_a\rangle$ и $|q_s\rangle$ ²³.

ЛИТЕРАТУРА

1. Farmelo G. The Strangest Man: The Hidden Life of Poul Dirac, Quantum Genius. New York: Basic Books, 2009.
2. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика III.: Вопросы интерпретации // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 4–26.
3. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
4. Марков М.А. О современной форме атомизма // Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Квантовая теория поля, физика элементарных частиц, физика нейтрино, философские проблемы физики. М. : Наука, 2000. с. 408–438.
5. Wolchover N. What is a Particle? // Quantamagazine. 2020. 12. URL: www.quantamagazine.org (дата обращения: 20.02.2022).
6. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.
7. Gell-Mann M., Ne'eman Y. The Eightfold Way. Benjamin, New York, 1964.
8. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика I.: Основные определения // Математические структуры и моделирование. 2020. № 2(54). С. 4–23.
9. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // Adv. Appl. Clifford Algebras. 2015. V. 25. P. 487–516.
10. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // Int. J. Theor. Phys. 2015. V. 54. P. 3533–3576.
11. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // Int. J. Theor. Phys. 2016. V. 55. P. 5008–5045.
12. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
13. Понтекорво Б.М., Смородинский Я.А. Нейтрино и плотность материи во Вселенной // ЖЭТФ. 1961. Т. 41. С. 239–243.
14. Weizsäcker C.F.V. Komplementarität und Logik I // Naturwiss. 1955. V. 42. P. 521–529.
15. Görnitz Th., Graudenz D, Weizsäcker C.F.V. Quantum Field Theory of Binary Alternatives // Int. J. Theor. Phys. 1992. V. 31. P. 1929–1959.
16. Finkelstein D. Space-Time Code // Phys. Rev. 1969. V. 184. P. 1261–1271.

²³ Следуя уже давно установившейся традиции проведения аналогий между современными представлениями и учениями древних («восьмеричный путь» Гелл-Манна, «троичный путь» Дайсона, «двоичный путь» (Уг-гипотеза) фон Вайцзеккера), можно «отождествить» состояния $|q_a\rangle$ и $|q_s\rangle$ с «ян» и «инь» даосизма или с первичной сизигией (двоицей) гностицизма.

17. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853.
18. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre. Berlin, 1862.
19. Clifford W.K. Applications of Grassmann's extensive algebra // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 350.
20. Lipschitz R. Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Max Cohen und Sohn, Bonn, 1886.
21. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. М. : ГИТТЛ, 1955. 744 с.
22. Cartan E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane // Bull. Soc. math. France. 1913. V. 41. P. 53–96.
23. Ван дер Варден Б. Принцип запрета и спин // Теоретическая физика 20 века. М. : Изд. ин. лит., 1962. С. 231–284.
24. Uhlenbeck G.E., Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra // Nature. 1926. V. 117. P. 264–265.
25. Картан Э. Теория спиноров. М. : Изд. ин. лит., 1947. 223 с.
26. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. New York: Columbia University Press, 1954.
27. Brauer R., Weyl H. Spinors in n dimensions // Amer. J. Math. 1935. V. 57. P. 425–449.
28. Porteous I.R. Topological Geometry. van Nostrand, London, 1969.
29. Crumeyrolle A. Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
30. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
31. Riesz M. Sur certain notions fondamentales en théorie quantique relativiste / C.R.10^e Congrès Math. Scandinaves (Copenhagen, 1946). Jnl. Cjellerups. Forlag, Copenhagen, 1947, pp. 123–148.
32. Ab-lamowicz R. Construction of Spinors via Witt Decomposition and Primitive Idempotents: A Review / Clifford Algebras and Spinor Structures. Kluwer Academic Publishers, 1995. pp. 113–123.
33. Pauli W. Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemanefekt // Z. Phys. 1925. V. 31. P. 373–385. Русский перевод: Паули В. Труды по квантовой теории. Т. 1. М. : Наука, 1975. С. 634–644.
34. Юрий Борисович Румер: Физика, XX век : авт.-сост. И.А. Крайнева [и др.] ; отв. ред. А.Г. Марчук ; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т систем информатики им. А.П. Ершова. Новосибирск : Изд-во «АРТА», 2013. 592 с.
35. Фок В.А. Вмещаются ли химические свойства атомов в рамки чисто пространственных представлений? // Периодический закон и строение атома. М. : Атомиздат, 1971. С. 107–117.
36. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektronen // Z. f. Phys. 1927. V. 43. P. 601.
37. Dirac P.A.M. The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
38. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 5–23.
39. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.
40. Thomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis // Phil. Mag. 1927. V. 17. P. 3.

41. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // *Int. J. Theor. Phys.* 2012. V. 51. P. 1453–1481.
42. Паули В. Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда / Нильс Бор и развитие физики. М. : Изд. ин. лит., 1958, с. 46–74.
43. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970. 400 с.
44. Jordan P., Neumann J.V., Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // *Ann. Math.* 1934. V. 35. P. 29–64.
45. Neumann J.V. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I) // *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* 1936. V. 1(43). P. 415–484.
46. Segal I. Postulates for general quantum mechanics // *Ann. Math.* 1947. V. 48. P. 930–948.
47. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М. : Мир, 1976. 423 с.
48. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987. 616 с.
49. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986. 304 с.
50. Dyson F. The threefold way: algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics // *J. Math. Phys.* 1962. V. 3. P. 1199–1215.
51. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics // *Found. Phys.* 2012. V. 42. P. 819–855.
52. Solèr M.P. Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces // *Comm. Algebra.* 1995. V. 23. P. 219–243.
53. Dixon G. Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics. Kluwer Academic Publishers, 1994.
54. Günaydin M., Gürsey, F. Quark structure and octonions // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 9. P. 3387.
55. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // *Int. J. Theor. Phys.* 2001. V. 40. P. 769–805.
56. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // *Adv. Appl. Clifford Algebras.* 2004. V. 14. P. 81–168.
57. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 631. P. 187–191.
58. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика I.: Основные определения // *Математические структуры и моделирование.* 2020. № 2(54). С. 4–23.
59. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика II.: S-матрица // *Математические структуры и моделирование.* 2021. № 1(57). С. 3–24.
60. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // *Математические структуры и моделирование.* 2017. № 2(42). С. 11–28.
61. Каруби М. К-теория. Введение. М. : Мир, 1981. 360 с.
62. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М. : Наука, 1993. 331 с.
63. Weyl H. Electron und Gravitation. I // *Zs. f. Phys.* 1929. V. 56. P. 330–352.
64. Zyla P.A. *et al.* (Particle Data Group) // *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020. 083C01.
65. де Бройль Л. Избранные научные труды. Т. 3. Теория света на основе теории слияния. Частицы со спином. М. : Академия Медииндустрии, 2013. 524 с.
66. Понтекорво Б.М. Обратные β -процессы и несохранение лептонного заряда //

- ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 247–249.
67. Cartan E. Nombres complexes // *Encycl. d. Sci. Math.* 1908. V. 1, N. 3. P. 329–468.
68. Bott R. The stable homotopy of the classical groups // *Ann. Math.* 1959. V. 70. P. 313–337.
69. Chisholm J.S.R., Farwell R.S. Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles / *Clifford (Geometric) Algebras*, ed. W. Baylis. Birkhäuser, 1996, pp. 365–388.

ALGEBRAIC QUANTIZATION AND SPINOR STRUCTURE

V.V. Varlamov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. It is shown that all states of the matter spectrum from various coherent subspaces of the physical Hilbert space can be constructed from fundamental states (two-component spinors) by means of fusion and doubling operations.

Keywords: fermions, spinors, neutrino, Hilbert space, fusion, doubling, annihilation.

REFERENCES

1. Farmelo G. *The Strangest Man: The Hidden Life of Poul Dirac, Quantum Genius.* New York, Basic Books, 2009.
2. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika III.: Voprosy interpretatsii. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 3(59), pp. 4–26. (in Russian)
3. Geizenberg V. *Shagi za gorizont.* Moscow, Progress, 1987. (in Russian)
4. Markov M.A. O sovremennoi forme atomizma. Izbrannye trudy, V 2 t., vol. 1, *Kvantovaya teoriya polya, fizika elementarnykh chastits, fizika neitrino, filosofskie problemy fiziki*, Moscow, Nauka, 2000, pp. 408–438. (in Russian)
5. Wolchover N. What is a Particle? *Quantamagazine*, 2020, 12, URL: www.quantamagazine.org (20.02.2022).
6. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Ann. Math.*, 1939, vol. 40, pp. 149–204.
7. Gell-Mann M. and Ne'eman Y. *The Eightfold Way.* Benjamin, New York, 1964.
8. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika I.: Osnovnye opredeleniya. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 2(54), pp. 4–23. (in Russian)
9. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2015, vol. 25, pp. 487–516.
10. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries. *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, vol. 54, pp. 3533–3576.
11. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum. *Int. J. Theor. Phys.*, 2016, vol. 55, pp. 5008–5045.

12. Geizenberg V. Fizika i filosofiya. Chast' i tseloe. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
13. Pontekorvo B.M. and Smorodinskii Ya.A. Neitrino i plotnost' materii vo Vselennoi. ZhETF, 1961, vol. 41, pp. 239–243. (in Russian)
14. Weizsäcker C.F.V. Komplementarität und Logik I. Naturwiss, 1955, vol. 42, pp. 521–529.
15. Görnitz Th., Graudenz D, and Weizsäcker C.F.V. Quantum Field Theory of Binary Alternatives. Int. J. Theor. Phys., 1992, vol. 31, pp. 1929–1959.
16. Finkelstein D. Space-Time Code. Phys. Rev., 1969, vol. 184, pp. 1261–1271.
17. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853.
18. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre. Berlin, 1862.
19. Clifford W.K. Applications of Grassmann's extensive algebra. Amer. J. Math., 1878, vol. 1, pp. 350.
20. Lipschitz R. Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Max Cohen und Sohn, Bonn, 1886.
21. Rozenfel'd B.A. Neevklidovy geometrii. Moscow, GITTL, 1955, 744 p. (in Russian)
22. Cartan E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. math. France, 1913, vol. 41, pp. 53–96.
23. Van der Varden B. Printsip zapreta i spin. Teoreticheskaya fizika 20 veka. Moscow, Izd. in. lit., 1962, pp. 231–284. (in Russian)
24. Uhlenbeck G.E. and Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra. Nature, 1926, vol. 117, pp. 264–265.
25. Kartan E. Teoriya spinorov. Moscow, Izd. in. lit., 1947, 223 p. (in Russian)
26. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. New York, Columbia University Press, 1954.
27. Brauer R. and Weyl H. Spinors in n dimensions. Amer. J. Math., 1935, vol. 57, pp. 425–449.
28. Porteous I.R. Topological Geometry. van Nostrand, London, 1969.
29. Crumeyrolle A. Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
30. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
31. Riesz M. Sur certain notions fondamentales en théorie quantique relativiste. C.R.10^e Congrès Math. Scandinaves (Copenhagen, 1946). Jnl. Cjellerups. Forlag, Copenhagen, 1947, pp.123–148.
32. Ab-lamowicz R. Construction of Spinors via Witt Decomposition and Primitive Idempotents: A Review. Clifford Algebras and Spinor Structures. Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 113–123.
33. Pauli W. Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt. Z. Phys., 1925, vol. 31, pp. 373–385. Russkii perevod: Pauli V. Trudy po kvantovoi teorii. Vol. 1, Moscow, Nauka, 1975, pp. 634–644. (in Russian)
34. Yurii Borisovich Rumer: Fizika, XX vek : avt.sost. I.A. Kraineva [i dr.], otv. red. A.G. Marchuk, Ros. akad. nauk, Sib. otd-nie, In-t sistem informatiki im. A.P. Ershova, Novosibirsk, Izd-vo «ARTA», 2013, 592 p. (in Russian)
35. Fok V.A. Vmeshchayutsya li khimicheskie svoistva atomov v ramki chisto prostanstvennykh predstavlenii? Periodicheskii zakon i stroenie atoma, Moscow, Atomizdat, 1971, pp. 107–117. (in Russian)
36. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektronen. Z. f. Phys., 1927,

- vol. 43, pp. 601.
37. Dirac P.A.M. The Quantum Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc. A., 1928, vol. 117, pp. 610–624.
38. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2018, no. 2(46), pp. 5–23. (in Russian)
39. Fet A.I. Gruppa simmetrii khimicheskikh elementov. Novosibirsk, Nauka, 2010. (in Russian)
40. Thomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis. *Phil. Mag.*, 1927, vol. 17, pp. 3.
41. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields. *Int. J. Theor. Phys.*, 2012, vol. 51, pp. 1453–1481.
42. Pauli V. Printsip zapreta, gruppa Lorentsa, otrazhenie prostranstva, vremeni i zaryada. *Nil's Bor i razvitie fiziki*, Moscow, Izd. in. lit., 1958, pp. 46–74. (in Russian)
43. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Teoriya unitarnoi simmetrii. Moscow, Nauka, 1970, 400 p. (in Russian)
44. Jordan P., Neumann J.V., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. Math.*, 1934, vol. 35, pp. 29–64.
45. Neumann J.V. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I). *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1936, vol. 1(43), pp. 415–484.
46. Segal I. Postulates for general quantum mechanics. *Ann. Math.*, 1947, vol. 48, pp. 930–948.
47. Emkh Zh. Algebraicheskie metody v statisticheskoi mekhanike i kvantovoi teorii polya. Moscow, Mir, 1976, 423 p. (in Russian)
48. Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., and Todorov I.T. Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya. Moscow, Nauka, 1987, 616 p. (in Russian)
49. Khoruzhii S.S. Vvedenie v algebraicheskuyu kvantovuyu teoriyu polya. Moscow, Nauka, 1986, 304 p. (in Russian)
50. Dyson F. The threefold way: algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 1962, vol. 3, pp. 1199–1215.
51. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics. *Found. Phys.*, 2012, vol. 42, pp. 819–855.
52. Solèr M.P. Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces. *Comm. Algebra*, 1995, vol. 23, pp. 219–243.
53. Dixon G. Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics. Kluwer Academic Publishers, 1994.
54. Günaydin M. and Gürsey, F. Quark structure and octonions. *Phys. Rev. D.*, 1974, vol. 9, pp. 3387.
55. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras. *Int. J. Theor. Phys.*, 2001, vol. 40, pp. 769–805.
56. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2004, vol. 14, pp. 81–168.
57. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space. *Phys. Lett. B.*, 2005, vol. 631, pp. 187–191.
58. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika I.: Osnovnye opredeleniya. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2020, no. 2(54), pp. 4–23. (in Russian)
59. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika II.: S-matritsa. *Matematich-*

- eskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 1(57), pp. 3–24. (in Russian)
60. Varlamov V.V. Kvantovanie massy i gruppy Lorentsa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 2(42), pp. 11–28. (in Russian)
61. Karubi M. K-teoriya. Vvedenie. Moscow, Mir, 1981, 360 p. (in Russian)
62. Bogolyubov N.N. and Shirkov D.V. Kvantovye polya. Moscow, Nauka, 1993, 331 p. (in Russian)
63. Weyl H. Electron und Gravitation. I. Zs. f. Phys., 1929, vol. 56, pp. 330–352.
64. Zyla P.A. *et al.* (Particle Data Group). Prog. Theor. Exp. Phys., 2020, 083C01.
65. de Broil' L. Izbrannye nauchnye trudy. Vol. 3. Teoriya sveta na osnove teorii sliyaniya. Chastitsy so spinom. Moscow, Akademiya Mediaindustrii, 2013, 524 p. (in Russian)
66. Pontekorvo B.M. Obratnye β -protsessy i nesokhranenie leptonnogo zaryada. ZhETF, 1958, vol. 34, pp. 247–249. (in Russian)
67. Cartan E. Nombres complexes. Encycl. d. Sci. Math., 1908, vol. 1, no. 3, pp. 329–468.
68. Bott R. The stable homotopy of the classical groups. Ann. Math., 1959, vol. 70, pp. 313–337.
69. Chisholm J.S.R. and Farwell R.S. Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles. Clifford (Geometric) Algebras, ed. W. Baylis. Birkhäuser, 1996, pp. 365–388.

Дата поступления в редакцию: 23.02.2022