

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 1 (61)  
2022**



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 1 (61)**

Омск  
2022

**Редакционная коллегия**

- А. К. Гуц** главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, проректор по информационным технологиям, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- В. П. Голубятников** доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
- А. Г. Гринь** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- В. А. Еровенко** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра общей математики и информатики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- А. В. Копыльцов** доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).
- А. Г. Коробейников** доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН.
- П. А. Корчагин** доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), г. Омск.
- V. Kreinovich** Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- В. А. Плетюхов** доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А. С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь.
- Л. Б. Соколинский** доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
- А. А. Fedorenko** Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- А. Н. Фирсов** доктор техн. наук, профессор, Высшая школа киберфизических систем и управления, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
- A. Jadczyk** Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Омский государственный университет  
им. Ф. М. Достоевского».  
Свидетельство о регистрации средства  
массовой информации ПИ № ФС77-72200  
от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

**Адрес редакции, издателя и типографии**

644077, Омская обл., г. Омск,  
пр-т Мира, д. 55а.

**Дата выхода в свет:** 28.04.2022.

**Тираж** 25 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsk.su>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

[guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru)

Электронная почта выпускающего редактора:

[lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

# СОДЕРЖАНИЕ

## Фундаментальная математика и физика

В.В. Варламов. *Алгебраическое квантование и спинорная структура* ..... 5

А.К. Гуц. *Уравнение скалярного поля Киббла и отсутствие барионного числа у статичной чёрной дыры в тетрадной теории гравитации* ..... 26

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Macrocausality Implies Lorenz Group: A Physics-Related Comment on Guts's Results* ..... 34

## Прикладная математика и моделирование

Н.Ф. Богаченко, Д.Н. Лавров. *Модель безработного на основе анализа статистических данных службы занятости за 2020–2021 гг.* ... 39

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Гипотеза Геу и проблемы её математического моделирования* ..... 49

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *A Natural Causality-Motivated Description of Learning* ... 59

А.Ю. Переварюха. *Модель эффекта спонтанного кризиса в развитии биологической инвазии* ..... 66

В.А. Филимонов. *Пандемия и спецоперация: многодисциплинарный анализ с использованием подхода «4К»* ..... 82

## Компьютерные науки

А.О. Бельченко, А.А. Магазев, А.Ю. Никифорова. *Приближённая оценка среднего числа заражённых узлов в марковской модели распространения компьютерных вирусов* ..... 92

Т.В. Вахний, С.В. Вахний. *Итеративное решение биматричной игры для оптимизации защиты компьютерной системы* ..... 105

М. Ceberio, О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Towards Optimal Techniques Intermediate Between Interval and Affine, Affine and Taylor* ..... 115

*Продолжение на следующей странице*

## Наши публикации



## Проблемы образования

А.А. Лаптев, Н.В. Лифляндская. *Модель проектной траектории обучения в Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского* ..... 122

## Некролог

Вальтер Каллис (1948–2021) ..... 129

# АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ И СПИНОРНАЯ СТРУКТУРА

**В.В. Варламов**

д.ф.-м.н., e-mail: varlamov@subsiu.ru

Сибирский государственный индустриальный университет, Новокузнецк, Россия

**Аннотация.** Показывается, что все состояния спектра материи из различных когерентных подпространств физического гильбертова пространства могут быть построены из фундаментальных состояний (двухкомпонентных спиноров) посредством операций слияния и удвоения.

**Ключевые слова:** фермионы, спиноры, нейтрино, гильбертово пространство, слияние, удвоение, аннигиляция.

## 1. Введение

Никто до конца не понимает спиноры. Их алгебра формально понятна, но их геометрическое значение загадочно

Майкл Атья [1, с. 430]

Общеизвестно, что поиск элементарных составляющих материи является главной мотивирующей идеей фундаментальной теоретической физики. Фейнман отмечал, что атомная гипотеза представляет собой наиболее важную и информативную часть научного знания. Основная посылка атомизма и редукционизма заключается в представлении о том, что материя есть некий агрегат, состоящий из фундаментальных (неделимых) субъединиц. С другой стороны, Гейзенберг неоднократно подчёркивал, что принцип «состоит из» не работает в области микромира, поскольку одна и та же так называемая элементарная частица может распадаться на различные частицы несколькими способами.

Современной реализацией гипотезы Демокрита является модель кварков, в которой предпринята попытка составного описания адронной части спектра материи в виде двухкваркового  $q\bar{q}$ -состава для мезонов и трёхкваркового  $qqq$ -состава для барионов. Наряду с экспериментальным открытием состояний, не укладывающихся в стандартные  $q\bar{q}$ - и  $qqq$ -схемы (экзотические адроны, тетракварки и пентакварки), модель кварков сталкивается с рядом серьёзных трудностей как теоретического, так и экспериментального характера: ошибочные предсказания барионного спектра на базе  $SU(6) \otimes O(3)$ -симметрии, отсутствие аналитического понимания механизма конфайнмента в рамках квантовой хромодинамики, кризис протонного спина (более подробно см. [2]). Кроме того, лептоны находятся вне рамок описания кварковой модели, что автоматически

лишает кварки статуса универсальных субъединиц материи. Согласно стандартной модели (СМ), включающей в себя модель кварков как составную часть, имеем следующий список из 17 «фундаментальных частиц»: фермионы ( $u, d, s, c, b, t, e, \mu, \tau, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) и бозоны ( $\gamma, g, Z, W, H$ ). В этом списке семь фиктивных частиц ( $u, d, s, c, b, t, g$ ), которые никогда не наблюдались в свободном состоянии. Пять частиц ( $\mu, \tau, Z, W, H$ ) заведомо не элементарны, поскольку распадаются по многочисленным каналам. Три сорта нейтрино ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) переходят друг в друга посредством нейтринных осцилляций, т. е. лептонное число для нейтрино не сохраняется. Вся эта разношёрстная компания (зоопарк) из 17 частиц в рамках стандартной модели связана динамической симметрией  $G_{SM} = U(1) \times SU(2) \times SU(3)$  и 18 параметрами<sup>1</sup>: массы ( $m_e, m_u, m_d, m_\mu, m_s, m_c, m_\tau, m_b, m_t, M_W, M_H$ ), углы смешивания ( $\theta_u, \theta_d, \theta, \delta$ ) и константы связи ( $\alpha, \alpha_s, \alpha_W$ ). Легко видеть, что стандартная модель очень далека от идеала Демокрита о существовании универсального первоэлемента материи. Однако, если удалить из списка СМ фиктивные и распадающиеся частицы, то в итоге останутся три частицы ( $\nu, e, \gamma$ ), претендующие на роль такого первоэлемента.

Другим важным аспектом рассматриваемой проблемы (атомной гипотезы, корпускулярной картины) является вопрос об адекватности использования термина «частица» применительно к квантовому микрообъекту. Этим вопросом («что такое элементарная частица?») задавались Гейзенберг [3], Шрёдингер, Марков [4]. Этот термин, точнее говоря, наглядный пространственный образ, обычно ассоциируемый с понятием «частица», неосознанно транслируется на объекты микромира<sup>2</sup>, которые, в общем случае, не подчиняются классическому пространственно-временному описанию. Как следствие возникает широкий спектр нечётких и размытых представлений о квантовом микрообъекте. В недавней статье [5] Вулховер суммирует эти представления. Перечислим некоторые из них: 1) частица как результат коллапса волновой функции; 2) частица как возмущение квантованного поля; 3) частица как неприводимое представление группы<sup>3</sup>; 4) частица как вибрация струны; 5) частица как

<sup>1</sup> Число параметров СМ не является жёстко фиксированным. Так, в связи с тем, что обнаружены нейтринные осцилляции, СМ нуждается в расширении, которое дополнительно вводит 3 массы нейтрино и как минимум 4 параметра PMNS-матрицы смешивания нейтрино (матрицы Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты), аналогичные СКМ-матрицы смешивания кварков, и, видимо, ещё 2 параметра, если нейтрино являются майорановскими частицами.

<sup>2</sup> Именно это транслирование (бессознательный перенос) Гейзенберг называл «дурной философией».

<sup>3</sup> Эта интерпретация восходит к работе Вигнера [6], в которой элементарная частица описывается неприводимым представлением группы Пуанкаре  $\mathcal{P}$ . С другой стороны, в согласии с  $SU(3)$ -теорией элементарная частица описывается *вектором* неприводимого представления группы  $SU(3)$ . Например, в так называемом «восьмеричном пути» Гелл-Манна [7] адроны представлены векторами восьмимерного регулярного представления  $\text{Sym}_{(1,1)}^0$  группы  $SU(3)$ . С целью проложить мост между этими интерпретациями (между *представлениями* группы  $\mathcal{P}$  и *векторами* представлений  $\text{Sym}_{(1,1)}^0, \text{Sym}_{(1,4)}^0, \dots$ ) в [8] определяется  $\mathbb{K}$ -гильбертово пространство состояний, где каждый циклический вектор этого пространства задаёт неприводимое представление группы  $SL(2, \mathbb{C})$  (см. также [9–11]). В данном подходе главенствующую роль приобретает понятие симметрии. Гейзенберг отмечал: «В начале была симметрия» – идея, безусловно, более правильная, чем демокритовский тезис «в начале была частица». Элементарные

деформация информационного океана<sup>4</sup> («it from bit» Уилера). Последняя интерпретация восходит к Уг-гипотезе фон Вайцзеккера [14, 15], а также к гипотезе пространственно-временного кода Финкельштейна [16]. Согласно этим представлениям, фундаментальным первоэлементом является бит информации, а все материальные объекты есть некие «конструкты» информационного поля<sup>5</sup>.

Математическая структура бита информации тождественна двухкомпонентному спинору. В свою очередь, двухкомпонентный спинор описывает нейтрино. Вынесенное в эпиграф высказывание Атьи о «загадочности» спиноров наводит на мысль о том, что в поиске первоэлемента материи определяющую роль играет фундаментальное понятие спинора. В связи с этим рассмотрим истоки возникновения этого понятия, восходящие к кватернионам Гамильтона, а также *геометрическое* (Картан) и *алгебраическое* (Брауэр–Вейль) определения спинора.

Итак, теория алгебр Клиффорда берёт своё начало от *кватернионов* Гамильтона [17] и *теории протяжённости* Грассмана [18]. Алгебра, введённая Клиффордом [19], является обобщением алгебры кватернионов на случай многомерных пространств. Как следствие этого обобщения, в алгебре Клиффорда возникает кватернионная структура, являющаяся тензорным произведением алгебр кватернионов, т. е. тензорным произведением четырёхмерных алгебр (размерность алгебры кватернионов равна 4). Изучая вращения  $n$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ , Липшиц [20] установил, что группа вращений пространства  $\mathbb{R}^n$  с определителем  $+1$  двузначно изображается *спинорной группой*<sup>6</sup>. Как известно [21], группы движений  $n$ -мерных неевклидовых пространств  $S^n$  изоморфны группам вращений пространств  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Поскольку алгебры Клиффорда изоморфны матричным алгебрам, *спинорные представления* движений пространств  $S^n$  можно рассматривать как представления этих движений линейными преобразованиями векторов в соответствующих пространствах. Векторы этих пространств называются *спинорами* пространств  $S^n$ . Понятие спинора

---

частицы являются воплощениями симметрий, их простейшими выражениями, однако они – лишь следствие симметрий» [12, с. 349].

<sup>4</sup> Ассоциации океанического плана часто возникают, когда речь идёт о природе фундаментальной субстанции, заполняющей Вселенную, здесь достаточно вспомнить *море Дирака* или *нейтринное море Понтекорво–Смординского* [13].

<sup>5</sup> Утверждая существование информационного поля (океана), последователи Уг-гипотезы фон Вайцзеккера («it from bit» Уилера) встают на зыбкую почву метафизических спекуляций, неизбежно возникающих по поводу так называемой «связи» между материей и информацией. По сути здесь имеет место очередная реинкарнация неоплатонизма, т. е. разделение реальности на мир идеальный и мир материальный (платонова «пещера») и последующее утверждение доминирования первого мира над вторым. Однако it from bit  $\equiv$  bit from it, откуда it  $\equiv$  bit, и существование двух миров есть фикция (иллюзия). Спиноза, вводя понятие *мыслящей субстанции*, отлично понимал эту ошибку Платона и искусственность противопоставления *res cogitans* и *res extensa* философии Декарта.

<sup>6</sup> Для  $n$ -мерного псевдоевклидова пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$  ( $n = p + q$ ) группа Липшица  $\Gamma_{p,q} = \{s \in \mathcal{O}_{p,q} \mid \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}, sx s^{-1} \in \mathbb{R}^{p,q}\}$  содержит спинорную группу  $\mathbf{Spin}(p, q) = \{s \in \Gamma_{p,q}^+ \mid N(s) = \pm 1\}$ , где  $\Gamma_{p,q}^+ = \Gamma_{p,q} \cap \mathcal{O}_{p,q}^+$ ,  $\mathcal{O}_{p,q}^+$  – чётная подалгебра алгебры Клиффорда  $\mathcal{O}_{p,q}$  пространства  $\mathbb{R}^{p,q}$ . Группа  $\mathbf{Spin}(p, q)$  содержит подгруппу  $\mathbf{Spin}_+(p, q) = \{s \in \mathbf{Spin}(p, q) \mid N(s) = 1\}$ .



было введено Картаном [22]. Ван дер Варден [23] отмечает, что название «спинор» было дано Эренфестом после появления известной статьи Гаудсмита и Уленбека [24] о вращающемся электроде. Более точно, геометрический смысл спинорных представлений движений неевклидовых пространств  $S^n$  состоит в том, что координаты спиноров можно рассматривать как координаты плоских образующих максимальной размерности абсолютов<sup>7</sup> этих пространств, а спинорные представления движения этих пространств совпадают с теми преобразованиями спиноров, которые соответствуют преобразованиям абсолютов при движениях. Так, в случае, важном для физики, известно, что связная группа движений трёхмерного неевклидова пространства  $S^{1,2}$  (пространство Лобачевского) изоморфна связной группе вращений четырёхмерного псевдоевклидова пространства  $\mathbb{R}^{1,3}$  (пространство-время Минковского), совпадающей с группой преобразований Лоренца специальной теории относительности. Поэтому спинорное представление связной группы движений пространства  $S^{1,2}$  (комплексными матрицами второго порядка с определителем +1) является в то же время спинорным представлением группы Лоренца. Отсюда следует, что каждому спинору пространства  $S^{1,2}$  соответствует некоторая точка абсолюта<sup>8</sup> пространства  $S^{1,2}$ , а каждой точке абсолюта пространства  $S^{1,2}$  соответствует изотропная прямая пространства  $\mathbb{R}^{1,3}$ , проходящая через некоторую точку этого пространства. Изложенное геометрическое истолкование спиноров и спинорных представлений было предложено Картаном [25] (см. также [21]).

В своей книге [26] Шевалле отмечает, что концепция понятия спинора, данная Картаном, является довольно сложной, а более простое представление теории, основанное на использовании алгебр Клиффорда, было предложено в статье Брауэра и Вейля [27]. В своём изложении алгебраической теории спиноров Шевалле следует статье [27]. Так, наряду с геометрической интерпретацией Картана возник алгебраический подход к описанию спиноров и спинорных представлений, далее развитый в работах [28–30]. Продуктивность и развитость алгебраического подхода показывает, что спинор по преимуществу является объектом алгебраической природы. Согласно алгебраическому определению, спинор задаётся элементом минимального левого идеала алгебры Клиффорда<sup>9</sup>  $\mathcal{C}(V, Q)$ , где  $V$  – векторное пространство, снабжённое невырожденной квадратичной формой  $Q$ . При  $n$  чётном минимальный левый идеал алгебры  $\mathcal{C}(V, Q)$  соответствует *максимальному тотально изотропному подпространству*<sup>10</sup>  $U \subset V$  размерности  $n/2$ , т. е. изоморфен спинпространству  $\mathbb{S}$  размерности  $2^{n/2}$  [32].

Понятие спина неразрывно связано с природой того математического объек-

<sup>7</sup> Абсолютом называется множество бесконечно удалённых точек неевклидова пространства.

<sup>8</sup> Абсолют пространства Лобачевского  $S^{1,2}$  гомеоморфен расширенной комплексной плоскости  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

<sup>9</sup> Исторически первое рассмотрение спиноров как элементов минимального левого идеала алгебры Клиффорда было дано в работе [31].

<sup>10</sup> Подпространство  $U$  пространства  $V$  называется тотально изотропным подпространством, если билинейная форма  $B(\alpha_i, \alpha_j) = 0$  для всех  $\alpha_i, \alpha_j \in U$ . Подпространство  $U \subset V$  максимальной размерности с указанным выше свойством называется максимальным тотально изотропным подпространством.

та (спинора), геометрическое и алгебраическое определения которого мы рассмотрели выше. И именно здесь лежит «загадка», т. е. в *физическом* понимании спина, а не в геометрическом значении спиноров, как это утверждал Атья. Как известно, понятие спина ввёл Паули в 1925 г., объясняя дублетную структуру спектра щелочных металлов (аномальный эффект Зеемана): «Дублетная структура спектров щелочных металлов, а также нарушение теоремы Лармора согласно этой точке зрения объясняется своеобразной, классически не описываемой двузначностью квантовомеханических свойств излучающего электрона» [33, с. 644]. Ван дер Варден отмечает: «Эту неподдающуюся классическому описанию двузначность электрона ныне мы называем спином» [23, с. 236]. Как известно, все попытки классического (механического) описания спина электрона, начиная с работы Уленбека и Гаудсмита [24], не имели успеха<sup>11</sup>. Первая теория спина, дающая корректную математическую формулировку «двузначности, не поддающейся классическому описанию», была предложена Паули в работе 1927 г. [36]. Избегая построения каких-либо наглядных кинематических моделей, Паули ввёл удвоенное гильбертово пространство  $H_2 \otimes H_\infty$  (пространство волновых функций), векторами которого являются двухкомпонентные спиноры. Так впервые в физике появились двухкомпонентные спиноры и первое удвоение. Последующее удвоение (*биспиноры*, пространство  $H_4 \otimes H_\infty$ ) было предложено Дираком в 1928 г. [37]<sup>12</sup>. Ван дер Варден пишет: «Переход от однокомпонентной волновой функции к двухкомпонентной  $\psi$  более радикален, чем переход от двух компонент к четырём; переход от векторной алгебры к двузначным представлениям группы вращений совершить много труднее, чем расширить группу вращений до группы Лоренца» [23, с. 258]. Как известно, после работы Томаса [40] о величине дублетного расщепления Паули формально принял гипотезу о вращающемся электроны, однако остался при убеждении, что спин нельзя описать классической кинематической моделью, поскольку такая модель никогда не сможет привести к двузначным представлениям группы вращений. Таким образом в понятии о спине возник своего рода «теоретический компромисс», сущность которого Паули выразил следующими словами: «После короткого периода идейного разброда и разногласий, вызванных времен-

<sup>11</sup> В воспоминаниях Ю.Б. Румера пишет: «В свое время Паули сказал Кронигу, что теория спина – это вздор, потому что математическая точка не может вокруг себя вращаться» [34, с. 56]. Точечность электрона является требованием специальной теории относительности, поэтому электроны в квантовой электродинамике, как и кварки в квантовой хромодинамике, представляются точечными фермионами спина  $1/2$ . Более того, согласно кварковой модели, кварки совершают «внутри» адрона орбитальные и радиальные движения. При этом спин адрона ассоциируется с полным угловым моментом  $\mathbf{J}$ , являющимся суммой орбитального момента  $\mathbf{L}$  и спина кварков  $\mathbf{S}$ :  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Очевидно, что это определение есть своего рода «механическая пародия» реального спина. Как утверждал Фок [35], *спин не является механическим понятием*.

<sup>12</sup> Принцип удвоения есть ведущий принцип физики микромира («удвоение симметрии» Паули, Гейзенберг [12, с. 342–343], см. также [38]). Следующее удвоение приводит к *гипертвисторам* в  $\mathbb{K}$ -гильбертовом пространстве  $H_8 \otimes H_\infty$ . Гипертвисторы являются векторами фундаментального представления группы Румера–Фета  $SO(2, 4) \otimes SU(2) \otimes SU(2)'$ , дающей теоретико-групповую интерпретацию периодической системы элементов [39]. Спиноры, биспиноры и твисторы суть частные случаи гипертвистора.

ным ограничением “наглядности”, было достигнуто общее согласие, о замене конкретных образов абстрактными математическими символами, например  $\psi$ . В частности, конкретный образ вращения в трёхмерном пространстве был заменён на математические характеристики представления группы вращения. Эту группу Дирак скоро расширил до группы Лоренца» [42, с. 46]. В приведённой цитате особенно важно последнее предложение, поскольку полное описание спина достигается в рамках двузначных представлений группы Лоренца, а традиционное описание спина посредством группы  $SU(2)$  является ограниченным представлением, исторически связанным с наглядным трёхмерным образом.  $SU(2)$ -трактовка спина принята в стандартной модели, в  $SU(6)$ -теории и её «орбитальном» расширении  $SU(6) \otimes O(3)$ , а также в понятии изотопического спина («вращение» в изопространстве). Очевидно, что редуцированное на трёхмерный образ (вследствие указанного Паули компромисса)  $SU(2)$ -описание спина не отражает всех свойств этой важнейшей характеристики квантового микрообъекта (состояния). Так, при  $SU(2)$ -описании невозможно объяснить наличие одинакового спина у состояний, имеющих различную массу (энергию). Это становится возможным при  $SL(2, \mathbb{C})$ -описании, где спин  $s = l - \dot{l}$ ,  $l = k/2$ ,  $\dot{l} = r/2$ ,  $k$  и  $r$  – степени спинтензорных факторизаций циклических векторов, задающих фермионные и бозонные состояния.  $SL(2, \mathbb{C})$ -описание спина было дано в работах [10, 41].

Как уже отмечалось выше, общее понятие спина имело своим источником конкретное описание «двузначности, не поддающейся классическому описанию» электрона, *понимаемого как частица*. Однако частица – это классическое понятие. Ван дер Варден задаётся вопросом: «Почему Паули не приписал электрону момент количества движения  $m_s = \pm 1/2$  и магнитный момент  $2m_s?$ » [23, с. 243]. Может ли классическая частица обладать неклассическим свойством? Очевидно, что нет. Это и есть ответ на вопрос Ван дер Вардена. Ю. Румер и А. Фет пишут: «До сих пор мы считали, что *одна и та же частица* – например, электрон – может находиться в двух спиновых состояниях со спином  $+1/2$  и  $-1/2$ . Однако электрон без определённого значения спина никогда не наблюдается и представляет собой лишь абстрактное понятие. Ввиду этого вполне закономерна другая точка зрения: можно считать, что существуют *две* элементарные частицы – электрон со спином  $+1/2$  и электрон со спином  $-1/2$ , в то время как “просто электрон” в природе не встречается. При этом можно сохранить понятие об электроне как о некоторой абстрактной частице, энергия которой в магнитном поле всегда расщепляется на два возможных значения» [43, с. 161–162]. Согласно расхожему мнению («дурная философия» по Гейзенбергу) в пространстве-времени существуют некие объекты («просто электрон», «просто протон» и т. д.), которые понимаются как независимые друг от друга сущности, обладающие самостоятельным бытием и имеющие сразу все присущие им квантовые характеристики. Излишне напоминать, что такое представление не имеет ничего общего с реальностью, открытой в последних экспериментах по проверке неравенств Белла (опыты Фридмана–Клаузера, Аспэ, Гринберга–Хорна–Цайлингера и др.). Очевидно, что классическое понятие частицы несостоятельно на микроуровне, а также несостоятельны все меха-

нические модели, связанные с этим понятием. Абстрагируясь от наглядного образа (ментального шаблона), мы видим, что в основании понятия «частица» лежит представление о *дискретности*, заключающееся в предположении о существовании некоторой минимальной величины, неделимой далее до бесконечности, т. е. отрицание *континуума*. Прерывность и непрерывность (тезис и антитезис), квант и континуум (Демокрит и Эмпедокл). В отличие от чисто умозрительной процедуры деления до бесконечности, превращающей континуум в идеализацию, понятие кванта опирается на фундаментальный закон Планка о прерывности (дискретности) энергии. М.А. Марков в статье «О современной форме атомизма», анализируя эволюцию понятия «элементарная частица», приходит к выводу: «Если дано понятие поля, то дальше следует определение: элементарная частица – атом данного поля. Только в этом случае слово “атом” современной физики заменяется словом “квант”. Данная элементарная частица – это простейший элемент данного поля, или просто “квант данного поля”. Здесь действительно по праву, т. е. в соответствии с терминологическим смыслом можно употребить и слово “атом”» [4, с. 412]. Итак, согласно Маркову частица – это квант поля, *если дано понятие поля*. Увы, здесь мы видим определение одного тёмного понятия («частица») с помощью другого, пожалуй, ещё более тёмного понятия «поле». Сам Марков это видит и отмечает: «Но, к сожалению, с той же педагогической точки зрения нелегко объяснить содержание понятия поля» [4, с. 412]. И далее, Марков приводит весьма любопытную аналогию между четырьмя взаимодействиями современной физики и четырьмя стихиями древних греков, давая тем самым недвусмысленно понять, что современные представления не так уж далеко ушли от античной физики. Поле является необходимым атрибутом концепции близкодействия, определение поля требует наличия пространственно-временного континуума (для передачи взаимодействия от точки к точке). Однако понятие кванта возникло вне какой-либо связи с полевыми представлениями. Более того, дискретность энергии находится в противоречии с непрерывностью континуума. Согласно этой позиции, частица это не квант поля, а **квант энергии**.

Возвращаясь к спинорным представлениям группы Лоренца, мы видим, что *фундаментальное представление* этой группы над полем комплексных чисел  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  действует в двумерном спинпространстве, вектором которого является двухкомпонентный спинор. И далее, любое конечномерное неприводимое спинорное представление группы Лоренца может быть факторизовано в виде тензорного произведения двумерных фундаментальных представлений. В свою очередь, спинпространство фундаментального представления является минимальным левым идеалом кватернионной алгебры (алгебры бикватернионов  $\mathbb{C}_2 \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$  в случае поля  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  и алгебр кватернионов  $\mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ ,  $\mathcal{A}_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2)$ ,  $\mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{R}(2)$  в случае поля  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , при этом с кольцом деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  для  $\mathcal{A}_{0,2}$  и  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$  для  $\mathcal{A}_{1,1}$  и  $\mathcal{A}_{2,0}$ ). Элементами минимальных левых идеалов четырёхмерных кватернионных алгебр являются двухкомпонентные спиноры. Здесь мы рассмотрели только один из путей возникновения  $\mathbb{K}$ -структур (алгебр деления) в теоретической физике. В более широком контексте алгебраическая формулировка квантовой теории была впервые предложена Йорданом, фон

Нейманом и Вигнером [44, 45], а также Сигалом [46] (в терминах  $C^*$ -алгебр). Впоследствии алгебраические методы проникли в квантовую теорию поля и статистическую механику [47–49]. Авторы работ [44, 45] рассматривали  $\mathbb{R}$ -,  $\mathbb{C}$ - и  $\mathbb{H}$ -реализации квантовой теории на равных основаниях. Исторически это была первая реализация  $\mathbb{K}$ -структур в физике. В 1962 г. Дайсон [50] предложил рассматривать все три  $\mathbb{K}$ -реализации квантовой теории ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ) в рамках единой структуры, названной им «троичный путь». Более точно, троичный путь Дайсона описывает, как определённые комплексные представления групп можно рассматривать как возникающие из вещественных или кватернионных представлений. И далее, в 2012 г. Баез [51] развивает троичный путь в рамках теории категорий и  $\mathbb{K}$ -гильбертовых пространств. Теория  $\mathbb{K}$ -гильбертовых пространств была ранее предложена в работе [52]. Ещё одно применение  $\mathbb{K}$ -структур в физике связано с алгебраическим описанием стандартной модели (алгебра Диксона  $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$  [53], где  $\mathbb{O}$  – алгебра октонионов<sup>13</sup>). Представление дискретных симметрий в виде автоморфизмов алгебр Клиффорда было предложено в [55–57] ( $PT$ - и  $CPT$ -группы). При этом существенную роль играет  $\mathbb{K}$ -структура псевдоавтоморфизма алгебры Клиффорда, задающего зарядовое сопряжение  $C$ : кольцо деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$  соответствует заряженным состояниям (частицам),  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  – нейтральным состояниям,  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$  соответствует истинно нейтральным (майорановским) состояниям. Определение фермионных и бозонных представлений группы Лоренца в терминах тензорных произведений двумерных спинпространств (минимальных левых идеалов четырёхмерных кватернионных алгебр) и действие соответствующих  $CPT$  групп для полей высшего спина были даны в [9, 41].

В настоящей статье, являющейся продолжением серии работ [2, 58, 59], рассматривается алгебраическая формулировка квантовой теории с двоичной структурой. Следуя Гейзенбергу, основной наблюдаемой на фундаментальном уровне (микроуровне) считается энергия, которой соответствует эрмитов оператор  $H$ .  $C^*$ -алгебра  $\mathfrak{A}$  наблюдаемых состоит из оператора энергии  $H$  и присоединённых к  $H$  генераторов группы  $SU(2, 2)$  (двухлистной накрывающей конформной группы  $SO_0(2, 4)$ ), образующих с  $H$  общую систему собственных функций. Спектр состояний (спектр материи) генерируется посредством конструкции Гельфанда–Найма–Сигала. Чистые сепарабельные состояния спектра материи задаются циклическими векторами  $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства, где  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  (вещественные числа  $\mathbb{R}$ , комплексные числа  $\mathbb{C}$  и кватернионы  $\mathbb{H}$ ). В соответствии со спектром масс [60] чистые сепарабельные состояния  $\omega$  образуют физическое  $\mathbb{K}$ -гильбертово пространство  $H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ , где каждый циклический вектор  $|\psi\rangle \in H_{\text{phys}}(\mathbb{K})$  соответствует определённому наблюдаемому состоянию («частице»). Алгебраическое квантование, реализуемое ГНС-конструкцией в рамках концепции циклических векторов  $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства и энергетической интерпретации  $C^*$ -алгебры, естественным образом приводит к пониманию состояния («частицы») как **кванта энергии**. При этом минимальный

<sup>13</sup> Гюнайдин и Гюрши [54] рассмотрели алгебраическое представление кварковой модели в рамках октонионной группы автоморфизмов  $G_2$  ( $G_2$  является 14-мерной исключительной группой Ли, содержащей в качестве подгруппы группу  $SU(3)$ ).

квант энергии соответствует фундаментальному состоянию  $C^*$ -алгебры (минимальный левый идеал алгебры кватернионов), а тензорные произведения фундаментальных состояний образуют *фермионные состояния* при нечётном числе сомножителей (кватернионных алгебр) и *бозонные состояния* при чётном. Показывается, что все состояния (фермионные и бозонные) из  $\mathbb{K}$ -подпространств ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ) являются производными структурами, которые получаются из фундаментальных состояний посредством операций слияния и удвоения.

## 2. Слияние, удвоение и аннигиляция состояний

В рамках двоичной структуры для состояний с минимальной тензорной размерностью существуют три базовые операции<sup>14</sup>:

1) **Слияние.**

$$|q\rangle \otimes |\bar{q}\rangle = \left| \mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \overline{\mathbb{H}}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \mathbb{H} \otimes \overline{\mathbb{H}}, 0, 0, 1 \right\rangle = \left| \mathbb{R}, 0, 0, 1 \right\rangle = |\gamma\rangle.$$

2) **Удвоение.**

$$\begin{aligned} |e^-\rangle &= |q\rangle \oplus |\bar{q}\rangle = \left| \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \mathbb{C}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |e^+\rangle &= |q\rangle \ominus |\bar{q}\rangle = \left| \mathbb{H} \ominus i\mathbb{H}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \overline{\mathbb{C}}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

3) **Аннигиляция.**

$$\begin{aligned} |e^-\rangle \otimes |e^+\rangle &= \left| \mathbb{C}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \overline{\mathbb{C}}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \left| \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2} \right\rangle \otimes \left| \mathbb{H} \ominus i\mathbb{H}, 0, -1, \frac{1}{2} \right\rangle = \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle + i \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle - \\ &\quad - i \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle + \left| \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1 \right\rangle = 2 \left| \mathbb{R}, 0, 0, 1 \right\rangle = 2 |\gamma\rangle. \end{aligned}$$

Последняя операция является алгебраическим аналогом процесса аннигиляции электрон-позитронной пары на два  $\gamma$ -кванта:  $e^-e^+ \rightarrow 2\gamma$ .

Покажем, что все циклические векторы физического  $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства, представляющие чистые сепарабельные состояния спектра материи, могут быть определены посредством вышеперечисленных операций слияния и удвоения. С этой целью потребуется вспомнить некоторые сведения, касающиеся факторизации и периодичности алгебр Клиффорда.

Пусть  $\mathcal{C}(V, Q)$  – алгебра Клиффорда над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , где  $V$  – векторное пространство, снабжённое квадратичной формой  $Q = x_1^2 + \dots + x_p^2 - \dots - x_{p+q}^2$ . Если  $p + q$  чётно и  $\omega^2 = 1$ , то  $\mathcal{C}(V, Q)$  называется *положительной*, и, соответственно, *отрицательной*, если  $\omega^2 = -1$ , т. е.  $\mathcal{C}_{p,q} > 0$ , если  $p - q \equiv 0, 4 \pmod{8}$  и  $\mathcal{C}_{p,q} < 0$ , если  $p - q \equiv 2, 6 \pmod{8}$ .

<sup>14</sup> Операция слияния была ранее определена в [2]

**Теорема 1** (Каруби [61]). 1) Если  $\mathcal{C}\ell(V, Q) > 0$  и  $\dim V$  чётна, то

$$\mathcal{C}\ell(V \oplus V', Q \oplus Q') \simeq \mathcal{C}\ell(V, Q) \otimes \mathcal{C}\ell(V', Q').$$

2) Если  $\mathcal{C}\ell(V, Q) < 0$  и  $\dim V$  чётна, то

$$\mathcal{C}\ell(V \oplus V', Q \oplus Q') \simeq \mathcal{C}\ell(V, Q) \otimes \mathcal{C}\ell(V', -Q').$$

Используя теорему Каруби, получим для алгебры  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  ( $p - q \equiv 0 \pmod{2}$ ) следующую факторизацию:

$$\mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \underbrace{\mathcal{C}\ell_{s_i, t_j} \otimes \mathcal{C}\ell_{s_i, t_j} \otimes \cdots \otimes \mathcal{C}\ell_{s_i, t_j}}_{(p+q)/2 \text{ раз}}, \quad (1)$$

где  $s_i, t_j \in \{0, 1, 2\}$ .

**Теорема 2.** Все циклические векторы  $|\psi\rangle$  физического  $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства  $\mathbb{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ , задающие фермионные и бозонные состояния  $\mathbb{R}$ -,  $\mathbb{C}$ - и  $\mathbb{H}$ -подпространств, определяются посредством композиции операций слияния и удвоения из активных  $|\mathfrak{q}_a\rangle$  и инертных  $|\mathfrak{q}_s\rangle$  фундаментальных состояний.

*Доказательство.* Согласно теореме 3 в [58], фермионным состояниям  $F$  соответствуют циклические векторы  $\tau_{\frac{k}{2}, 0} \otimes \tau_{0, \frac{r}{2}} |\omega\rangle$  с нечётным числом сомножителей  $\tau_{\frac{1}{2}, 0}$  (соотв.  $\tau_{0, \frac{1}{2}}$ ) в тензорном произведении. В свою очередь, бозонным состояниям  $B$  соответствуют циклические векторы с чётным числом сомножителей. Следовательно,

$$\underbrace{\tau_{\frac{1}{2}, 0} \otimes \tau_{\frac{1}{2}, 0} \otimes \cdots \otimes \tau_{\frac{1}{2}, 0} \otimes \tau_{0, \frac{1}{2}} \otimes \tau_{0, \frac{1}{2}} \otimes \cdots \otimes \tau_{0, \frac{1}{2}}}_{m \text{ раз}} \Rightarrow \begin{cases} F, & m \equiv 1 \pmod{2}; \\ B, & m \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Двумерное гильбертово пространство  $\mathbb{H}_2(\mathbb{C})$ , в котором действует фундаментальное циклическое представление  $\tau_{\frac{1}{2}, 0}$  (соотв.  $\tau_{0, \frac{1}{2}}$ ), т. е. «базовый строительный блок» структуры (2), эквивалентно спинпространству  $\mathbb{S}_2(\mathbb{C})$ , которое, в свою очередь, является минимальным левым идеалом алгебры бикватернионов  $\mathbb{C}_2$ . С другой стороны, алгебра  $\mathbb{C}_2$  изоморфна комплексификациям вещественных подалгебр  $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ ,  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$ ,  $\mathcal{C}\ell_{0,2}$ . Соответственно, спинпространство  $\mathbb{S}_2(\mathbb{C})$  изоморфно комплексификациям минимальных левых идеалов вещественных подалгебр<sup>15</sup>:  $\mathbb{S}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes I_{2,0}$ ,  $\mathbb{S}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes I_{1,1}$ ,  $\mathbb{S}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes I_{0,2}$ . Кроме

<sup>15</sup> Минимальный левый идеал подалгебры  $\mathcal{C}\ell_{2,0}$  имеет вид  $I_{2,0} = \mathcal{C}\ell_{2,0} f_{20}$ , где  $f_{20} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_1)$  – примитивный идемпотент для  $\mathcal{C}\ell_{2,0}$ , соответствующее кольцо деления  $\mathbb{K} \simeq f_{20} \mathcal{C}\ell_{2,0} f_{20} \simeq \{1\} \simeq \mathbb{R}$  изоморфно полю вещественных чисел. Для подалгебры  $\mathcal{C}\ell_{1,1}$  имеем  $I_{1,1} = \mathcal{C}\ell_{1,1} f_{11}$ , где  $f_{11} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_{12})$ ,  $\mathbb{K} \simeq f_{11} \mathcal{C}\ell_{1,1} f_{11} \simeq \{1\} \simeq \mathbb{R}$ . Аналогично, минимальный левый идеал подалгебры  $\mathcal{C}\ell_{0,2}$  задаётся выражением  $I_{0,2} = \mathcal{C}\ell_{0,2} f_{02}$ , где  $f_{02} = 1$ , а кватернионное кольцо деления имеет вид  $\mathbb{K} \simeq f_{02} \mathcal{C}\ell_{0,2} f_{02} \simeq \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_{12}\} \simeq \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \simeq \mathbb{H}$ . Следует отметить, что выбор примитивных идемпотентов алгебр  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$  неоднозначен и определяется числом коммутирующих элементов алгебры  $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ , образующих конечную группу порядка  $2^k$ , где  $k = q - r_{q-p}$ , здесь  $r_{q-p}$  – числа Радона–Гурвица, значения которых образуют цикл с периодом 8:  $r_{i+8} = r_i + 4$  (более подробно см. [30, 56]).

того, для алгебры  $\mathbb{C}_2$  справедлив изоморфизм  $\mathbb{C}_2 \simeq \mathcal{A}_{3,0}$ , где  $\mathcal{A}_{3,0}$  – алгебра Клиффорда над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  с комплексным кольцом деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$  (тип  $p - q \equiv 3 \pmod{8}$ ). В свою очередь, для алгебры  $\mathcal{A}_{3,0}$  справедливо разложение  $\mathcal{A}_{3,0} \simeq \mathcal{A}_{0,2} \oplus \mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  (частный случай общего изоморфизма  $\mathcal{A}_{p,q} \simeq \mathcal{A}_{q,p-1} \oplus \mathcal{A}_{q,p-1}$  для нечётномерных алгебр, более подробно см. [10, 28]). Далее, поскольку максимальный базисный элемент  $\omega = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$  алгебры  $\mathcal{A}_{3,0}$  принадлежит центру  $\mathbf{Z}_{3,0} = \{1, \omega\} \in \mathcal{A}_{3,0}$  и  $\omega^2 = -1$ , то  $\mathbf{Z}_{3,0} \simeq \mathbb{C}$ , а следовательно, алгебра  $\mathcal{A}_{3,0}$  является комплексификацией (удвоением) алгебры кватернионов  $\mathcal{A}_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ , т. е. алгеброй бикватернионов  $\mathbb{C}_2$ . Отсюда следует, что комплексная структура (2), задающая заряженные состояния (согласно теореме 4 в [58]), является производной от нейтральной структуры. Иными словами, заряд есть удвоение (комплексификация) нейтральной структуры<sup>16</sup>. Таким образом, наряду с операцией **слияния** имеем операцию **удвоения** состояний<sup>17</sup>.

Операция слияния, генерирующая состояние (2), индуцирует тензорное произведение  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K}$  соответствующих колец фундаментальных состояний. Согласно факторизации (1), любая чётномерная алгебра  $\mathcal{A}_{p,q}$  над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  изоморфна тензорному произведению кватернионных алгебр  $\mathcal{A}_{0,2}$  ( $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ ) и  $\mathcal{A}_{1,1}$ ,  $\mathcal{A}_{2,0}$  ( $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ ). Соответственно этому имеем **два типа фундаментальных состояний**<sup>18</sup>:

<sup>16</sup> В этом контексте, электрон есть комплексификация (удвоение) двух нейтринных состояний (нейтрино и антинейтрино), что и выражается в стандартном формализме в виде биспинора Дирака. Как известно [62], безмассовое уравнение Дирака  $i\gamma^\nu \partial_\nu \psi(x) = 0$  в «расщеплённом» базисе для  $\gamma$ -матриц (базис Вейля) распадается на два уравнения  $(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}) \varphi_{(\pm)}(x) = 0$ , впервые предложенные Вейлем в 1929 г. [63], где двухкомпонентные функции  $\varphi_\alpha$  [ $\alpha = (-), (+)$ ] описывают, соответственно, *левовинтовое нейтрино* (отрицательная спиральность,  $\alpha = (-)$ ) и *правовинтовое антинейтрино* (положительная спиральность,  $\alpha = (+)$ ). При этом проекционные операторы  $P_\pm = 1/2(1 \pm \gamma_5)$  являются центральными идемпотентами алгебры Дирака  $\mathbb{C}_4$ . Уравнения Вейля были получены в предположении, что нейтрино имеют нулевую массу, однако, согласно современным данным [64], нейтрино обладают ненулевой массой, лежащей в зависимости от сорта («аромата») нейтрино в пределах:  $m_{\nu_e} < 1,1$  eV,  $m_{\nu_\mu} < 0,19$  MeV,  $m_{\nu_\tau} < 18,2$  MeV. Наличие массы у нейтрино с необходимостью приводит к определению диракоподобных уравнений для нейтрино, трансформационные свойства которых (дискретные симметрии) существенно отличны от таковых для уравнений Вейля. Это расширение трансформационных свойств находится в резком противоречии с наблюдательными данными. Наличие этого противоречия, очевидно, является следствием попытки пространственно-временного описания (в рамках теории континуума) квантовых микрообъектов. Алгебраическая формулировка, свободная от привязки к континууму, позволяет обойти это противоречие.

<sup>17</sup> Согласно нейтринной теории света де Бройля [65], фотон есть результат слияния двух нейтринных состояний (нейтрино и антинейтрино):  $|\gamma\rangle = |\nu\rangle \otimes |\bar{\nu}\rangle = |\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}, 0, 0, 1\rangle = |\mathbb{R}, 0, 0, 1\rangle$ . В свою очередь, электрон есть удвоение (комплексификация) нейтринных состояний:  $|e\rangle = |\nu\rangle \oplus |\bar{\nu}\rangle = |\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}, 0, 1, 1/2\rangle = |\mathbb{C}, 0, 1, 1/2\rangle$ . В этом контексте, электрон и фотон являются *производными состояниями* (структурами), а *подлинно фундаментальным состоянием* является нейтрино. Нетрудно видеть, что все циклические векторы  $|\psi\rangle$   $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства  $\mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$  могут быть получены посредством операций слияния и удвоения из фундаментального состояния  $|q\rangle = |\nu\rangle$ . Эти операции задают динамическую связь между тензорной структурой и  $\mathbb{K}$ -линейной структурой векторов  $|\psi\rangle \in \mathbf{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$ , т. е. связь между массой, спином и зарядом состояний. В некотором смысле это позволяет обобщить *нейтринную теорию света* де Бройля до *нейтринной теории «всего»*.

<sup>18</sup> Второй тип соответствует алгебрам  $\mathcal{A}_{1,1}$ ,  $\mathcal{A}_{2,0}$  с вещественным кольцом  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ . В этом случае зарядовое сопряжение  $C$  (псевдоавтоморфизм  $\mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$ ) редуцируется к тождественному



$$\text{I. } |\mathbf{q}_a\rangle = |\mathbb{H}, 0, 1, \frac{1}{2}\rangle, |\bar{\mathbf{q}}_a\rangle = |\bar{\mathbb{H}}, 0, -1, \frac{1}{2}\rangle.$$

$$\text{II. } |\mathbf{q}_s\rangle = |\mathbb{R}, 0, 0, \frac{1}{2}\rangle, |\bar{\mathbf{q}}_s\rangle = |\mathbf{q}_s\rangle.$$

Отождествление минимальной структурной составляющей  $|\mathbf{q}\rangle$  (квант энергии) с нейтрино  $|\nu\rangle$ ,  $|\mathbf{q}\rangle \equiv |\nu\rangle$ , привело бы к «нейтринной теории всего» и к пониманию нейтрино как первоэлемента материи. Однако субстанция (энергия) не определяется своими состояниями. Как отмечал Спиноза: «Субстанция по природе первое своих состояний» (теорема 1, «Этика»). Субстанция как целое первичнее своих состояний. Состояния имеют вторичную (подчинённую) природу по отношению к целому (субстанции). Это один из главных принципов холизма. Спектр состояний субстанции, которую мы называем энергией или материей, содержит бесконечное множество состояний, среди которых одним из самых минимальных является нейтрино. Субстанция не является агрегатом, построенным из элементарных частей, вопреки всем представлениям атомизма и редукционизма.

Таким образом, согласно (2) и (1) любое состояние из  $\mathbb{H}_{\text{phys}}(\mathbb{K})$  является комбинацией (слиянием или удвоением) активных и инертных фундаментальных состояний. В зависимости от  $m \equiv 0, 1 \pmod{2}$  из (2) имеем фермионные или бозонные состояния. Фундаментальные состояния (типы **I** и **II**) соответствуют  $m = 1$ . При  $m = 2$  структура  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$  соответствует алгебрам

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{4,0} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{3,1} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{2,2} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{1,3} &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{0,4} &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Далее, для структуры  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$  при  $m = 3$  имеем<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{6,0} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{5,1} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{4,2} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

преобразованию, т. е. состояние совпадает со своим зарядово-сопряжённым (антисостоянием). Таким образом, второй тип задаёт *истинно нейтральное состояние*, а именно, майорановский фермион минимального спина  $s = 1/2$ , т. е. *стерильное нейтрино*  $|\nu_s\rangle$  (нейтрино Майорана). Существование стерильного (инертного) нейтрино было предсказано Б.М. Понтекорво [66]. В настоящее время ведутся интенсивные поиски этого типа нейтрино в предположении, что  $|\nu_s\rangle$  является основной составляющей так называемой «тёмной материи». В отличие от инертного нейтрино  $|\nu_s\rangle$ , *активное нейтрино*  $|\nu_a\rangle$  подразделяется на две разновидности: левовинтовое нейтрино  $|\nu_a\rangle$  и правовинтовое антинейтрино  $|\bar{\nu}_a\rangle$ .

<sup>19</sup> Для алгебры  $\mathcal{A}_{4,2} \simeq \mathbb{R}(8)$  справедливо разложение  $\mathcal{A}_{4,2} \simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,4} \simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)$  (теорема 1), поскольку  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4)$ , то  $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Аналогично для алгебр  $\mathcal{A}_{3,3} \simeq \mathbb{R}(8)$  и  $\mathcal{A}_{0,6} \simeq \mathbb{R}(8)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3,3} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2,4} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{1,5} &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{0,6} &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

При  $m = 4$  для  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}$  получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{8,0} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{7,1} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{6,2} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{5,3} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{4,4} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{3,5} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{2,6} &\simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}, \\ \mathcal{A}_{1,7} &\simeq \mathcal{A}_{1,1} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{A}_{0,8} &\simeq \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{0,2} \otimes \mathcal{A}_{2,0} \Rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для  $m = 5, 6, \dots$  явный вид структуры  $\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \otimes \dots \otimes \mathbb{K}$  определяется периодичностью Картана–Ботта<sup>20</sup> для алгебр  $\mathcal{A}_{p,q}$  над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  (более подробно см. [10]). Алгебра Клиффорда над полем  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  периодична по модулю 8:  $\mathcal{A}_{p+8,q} \simeq \mathcal{A}_{p,q} \otimes \mathcal{A}_{8,0}$  ( $\mathcal{A}_{p,q+8} \simeq \mathcal{A}_{p,q} \otimes \mathcal{A}_{0,8}$ ). Так, при  $m = 5$  для алгебры  $\mathcal{A}_{10,0} \simeq \mathbb{R}(32)$  имеем разложение

$$\mathcal{A}_{10,0} \simeq \mathcal{A}_{2,0} \otimes \mathcal{A}_{8,0} \simeq \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(16) \Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

<sup>20</sup> В 1908 г. Картан [67] определил алгебры Клиффорда как матричные алгебры с элементами в  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$  и открыл периодичность по модулю 8. 8-периодичность Картана для алгебр Клиффорда часто приписывается Ботту, который доказал свою периодичность гомотопических групп для групп вращений в 1959 г. [68].

что соответствует

$$\mathcal{C}_{2,0} \otimes \mathcal{C}_{0,2} \otimes \mathcal{C}_{2,0} \otimes \mathcal{C}_{0,2} \otimes \mathcal{C}_{2,0} \longrightarrow |\mathbf{q}_s\rangle \otimes |\mathbf{q}_a\rangle \otimes |\mathbf{q}_s\rangle \otimes |\mathbf{q}_a\rangle \otimes |\mathbf{q}_s\rangle$$

и т. д. Таким образом, все состояния, составляющие  $\mathbb{H}$ - и  $\mathbb{R}$ -подпространства физического  $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства (только  $\mathbb{H}$ -подпространства в случае фермионов), могут быть построены посредством операции слияния из фундаментальных состояний.

Состояния, составляющие  $\mathbb{C}$ -подпространства, определяются посредством операции удвоения, при этом ключевую роль играет изоморфизм  $\mathbb{C}_{p+q-1} \simeq \mathcal{C}_{p,q}$ , где  $p-q \equiv 3, 7 \pmod{8}$ . Частным случаем является изоморфизм  $\mathbb{C}_2 \simeq \mathcal{C}_{3,0}$ , рассмотренный выше. В свою очередь, при  $p-q \equiv 3, 7 \pmod{8}$  для нечётномерной алгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$  справедливо разложение<sup>21</sup>

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1}, \quad (3)$$

которое можно представить следующей схемой:

$$\begin{array}{c} \mathcal{C}_{p,q} \\ \swarrow \lambda_+ \quad \searrow \lambda_- \\ \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1} \end{array}$$

Здесь центральные идемпотенты<sup>22</sup>

$$\lambda_+ = \frac{1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}}{2}$$

удовлетворяют соотношениям  $(\lambda_+)^2 = \lambda_+$ ,  $(\lambda_-)^2 = \lambda_-$ ,  $\lambda_+ \lambda_- = 0$ . При  $p-q \equiv 3 \pmod{8}$  изоморфизм (3) приводит к разложению алгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$  на две подалгебры  $\mathcal{C}_{q,p-1}$  с кватернионным кольцом деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$ :

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1} \simeq \mathbb{H} \left( 2^{\frac{p+q-3}{2}} \right) \oplus \mathbb{H} \left( 2^{\frac{p+q-3}{2}} \right) \longrightarrow \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

Далее, при  $p-q \equiv 7 \pmod{8}$  изоморфизм (3) приводит к разложению алгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$  на две подалгебры  $\mathcal{C}_{q,p-1}$  с вещественным кольцом деления  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{C}_{p,q} \simeq \mathcal{C}_{q,p-1} \oplus \mathcal{C}_{q,p-1} \simeq \mathbb{R} \left( 2^{\frac{p+q-1}{2}} \right) \oplus \mathbb{R} \left( 2^{\frac{p+q-1}{2}} \right) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}.$$

В обоих случаях максимальный базисный элемент  $\omega = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_{p+q}$  алгебр  $\mathcal{C}_{p,q}$  принадлежит центру  $\mathbf{Z}_{p,q} = \{1, \omega\}$ . Поскольку  $\omega^2 = -1$ , то  $\mathbf{Z}_{p,q} \simeq \mathbb{C}$ , а следовательно, алгебры  $\mathcal{C}_{p,q}$  являются комплексификациями (удвоениями) своих подалгебр  $\mathcal{C}_{q,p-1}$  с кольцами  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{H}$  и  $\mathbb{K} \simeq \mathbb{R}$ :  $\mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}$  ( $p-q \equiv 3 \pmod{8}$ ) и  $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$  ( $p-q \equiv 7 \pmod{8}$ ). Таким образом, имеем два вида заряда: 1)  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}$  – удвоение активных состояний  $|\mathbf{q}_a\rangle$ ; 2)  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$  – удвоение инертных состояний  $|\mathbf{q}_s\rangle$ . ■

<sup>21</sup> Для алгебр вида  $\mathcal{C}_{0,q}$  имеем  $\mathcal{C}_{0,q} \simeq \mathcal{C}_{0,q-1} \oplus \mathcal{C}_{0,q-1}$ .

<sup>22</sup> Согласно [69], идемпотенты  $\lambda_+$  и  $\lambda_-$  могут быть отождествлены с проекционными операторами спиральности, которые различают лево- и правополяризованные спиноры.

В заключение следует отметить, что главной целью данной статьи явилось стремление подчеркнуть фундаментальную роль двухкомпонентных спиноров. Двухкомпонентный спинор описывает минимальную структурную составляющую материи (квант энергии). Квантованная природа ферми- и бозе-состояний спектра материи заключается в факторизации (сепарабельности) циклических векторов  $\mathbb{K}$ -гильбертова пространства посредством тензорного произведения фундаментальных состояний  $|q\rangle$  (ГНС-конструкция, алгебраическое квантование). При этом наличие  $\mathbb{K}$ -структуры расщепляет  $|q\rangle$  на два состояния  $|q_a\rangle$  и  $|q_s\rangle$ <sup>23</sup>.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Farmelo G. *The Strangest Man: The Hidden Life of Poul Dirac, Quantum Genius*. New York: Basic Books, 2009.
2. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика III.: Вопросы интерпретации // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 4–26.
3. Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М. : Прогресс, 1987.
4. Марков М.А. О современной форме атомизма // Избранные труды: В 2 т. Т. 1. Квантовая теория поля, физика элементарных частиц, физика нейтрино, философские проблемы физики. М. : Наука, 2000. с. 408–438.
5. Wolchover N. What is a Particle? // *Quantamagazine*. 2020. 12. URL: [www.quantamagazine.org](http://www.quantamagazine.org) (дата обращения: 20.02.2022).
6. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group // *Ann. Math.* 1939. V. 40. P. 149–204.
7. Gell-Mann M., Ne'eman Y. *The Eightfold Way*. Benjamin, New York, 1964.
8. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика I.: Основные определения // Математические структуры и моделирование. 2020. № 2(54). С. 4–23.
9. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces // *Adv. Appl. Clifford Algebras*. 2015. V. 25. P. 487–516.
10. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries // *Int. J. Theor. Phys.* 2015. V. 54. P. 3533–3576.
11. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum // *Int. J. Theor. Phys.* 2016. V. 55. P. 5008–5045.
12. Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М. : Наука, 1990.
13. Понтекорво Б.М., Смородинский Я.А. Нейтрино и плотность материи во Вселенной // *ЖЭТФ*. 1961. Т. 41. С. 239–243.
14. Weizsäcker C.F.V. Komplementarität und Logik I // *Naturwiss.* 1955. V. 42. P. 521–529.
15. Görnitz Th., Graudenz D, Weizsäcker C.F.V. Quantum Field Theory of Binary Alternatives // *Int. J. Theor. Phys.* 1992. V. 31. P. 1929–1959.
16. Finkelstein D. Space-Time Code // *Phys. Rev.* 1969. V. 184. P. 1261–1271.

<sup>23</sup> Следуя уже давно установившейся традиции проведения аналогий между современными представлениями и учениями древних («восьмеричный путь» Гелл-Манна, «троичный путь» Дайсона, «двоичный путь» (Уг-гипотеза) фон Вайцзеккера), можно «отождествить» состояния  $|q_a\rangle$  и  $|q_s\rangle$  с «ян» и «инь» даосизма или с первичной сизигией (двоицей) гностицизма.

17. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853.
18. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre. Berlin, 1862.
19. Clifford W.K. Applications of Grassmann's extensive algebra // Amer. J. Math. 1878. V. 1. P. 350.
20. Lipschitz R. Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Max Cohen und Sohn, Bonn, 1886.
21. Розенфельд Б.А. Неевклидовы геометрии. М. : ГИТТЛ, 1955. 744 с.
22. Cartan E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane // Bull. Soc. math. France. 1913. V. 41. P. 53–96.
23. Ван дер Варден Б. Принцип запрета и спин // Теоретическая физика 20 века. М. : Изд. ин. лит., 1962. С. 231–284.
24. Uhlenbeck G.E., Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra // Nature. 1926. V. 117. P. 264–265.
25. Картан Э. Теория спиноров. М. : Изд. ин. лит., 1947. 223 с.
26. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. New York: Columbia University Press, 1954.
27. Brauer R., Weyl H. Spinors in  $n$  dimensions // Amer. J. Math. 1935. V. 57. P. 425–449.
28. Porteous I.R. Topological Geometry. van Nostrand, London, 1969.
29. Crumeyrolle A. Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
30. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
31. Riesz M. Sur certain notions fondamentales en théorie quantique relativiste / C.R.10<sup>e</sup> Congrès Math. Scandinaves (Copenhagen, 1946). Jnl. Cjellerups. Forlag, Copenhagen, 1947, pp. 123–148.
32. Ab-lamowicz R. Construction of Spinors via Witt Decomposition and Primitive Idempotents: A Review / Clifford Algebras and Spinor Structures. Kluwer Academic Publishers, 1995. pp. 113–123.
33. Pauli W. Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt // Z. Phys. 1925. V. 31. P. 373–385. Русский перевод: Паули В. Труды по квантовой теории. Т. 1. М. : Наука, 1975. С. 634–644.
34. Юрий Борисович Румер: Физика, XX век : авт.-сост. И.А. Крайнева [и др.] ; отв. ред. А.Г. Марчук ; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т систем информатики им. А.П. Ершова. Новосибирск : Изд-во «АРТА», 2013. 592 с.
35. Фок В.А. Вмещаются ли химические свойства атомов в рамки чисто пространственных представлений? // Периодический закон и строение атома. М. : Атомиздат, 1971. С. 107–117.
36. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektronen // Z. f. Phys. 1927. V. 43. P. 601.
37. Dirac P.A.M. The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
38. Варламов В.В. Теоретико-групповое описание периодической системы элементов // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2(46). С. 5–23.
39. Фет А.И. Группа симметрии химических элементов. Новосибирск : Наука, 2010.
40. Thomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis // Phil. Mag. 1927. V. 17. P. 3.

41. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields // *Int. J. Theor. Phys.* 2012. V. 51. P. 1453–1481.
42. Паули В. Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда / Нильс Бор и развитие физики. М. : Изд. ин. лит., 1958, с. 46–74.
43. Румер Ю.Б., Фет А.И. Теория унитарной симметрии. М. : Наука, 1970. 400 с.
44. Jordan P., Neumann J.V., Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism // *Ann. Math.* 1934. V. 35. P. 29–64.
45. Neumann J.V. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I) // *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* 1936. V. 1(43). P. 415–484.
46. Segal I. Postulates for general quantum mechanics // *Ann. Math.* 1947. V. 48. P. 930–948.
47. Эмх Ж. Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля. М. : Мир, 1976. 423 с.
48. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т. Общие принципы квантовой теории поля. М. : Наука, 1987. 616 с.
49. Хоружий С.С. Введение в алгебраическую квантовую теорию поля. М. : Наука, 1986. 304 с.
50. Dyson F. The threefold way: algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics // *J. Math. Phys.* 1962. V. 3. P. 1199–1215.
51. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics // *Found. Phys.* 2012. V. 42. P. 819–855.
52. Solèr M.P. Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces // *Comm. Algebra.* 1995. V. 23. P. 219–243.
53. Dixon G. Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics. Kluwer Academic Publishers, 1994.
54. Günaydin M., Gürsey, F. Quark structure and octonions // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 9. P. 3387.
55. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras // *Int. J. Theor. Phys.* 2001. V. 40. P. 769–805.
56. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups // *Adv. Appl. Clifford Algebras.* 2004. V. 14. P. 81–168.
57. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 631. P. 187–191.
58. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика I.: Основные определения // *Математические структуры и моделирование.* 2020. № 2(54). С. 4–23.
59. Варламов В.В. Алгебраическая квантовая механика II.: S-матрица // *Математические структуры и моделирование.* 2021. № 1(57). С. 3–24.
60. Варламов В.В. Квантование массы и группа Лоренца // *Математические структуры и моделирование.* 2017. № 2(42). С. 11–28.
61. Каруби М. К-теория. Введение. М. : Мир, 1981. 360 с.
62. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М. : Наука, 1993. 331 с.
63. Weyl H. Electron und Gravitation. I // *Zs. f. Phys.* 1929. V. 56. P. 330–352.
64. Zyla P.A. *at el.* (Particle Data Group) // *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2020. 083C01.
65. де Бройль Л. Избранные научные труды. Т. 3. Теория света на основе теории слияния. Частицы со спином. М. : Академия Медииндустрии, 2013. 524 с.
66. Понтекорво Б.М. Обратные  $\beta$ -процессы и несохранение лептонного заряда //

- ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 247–249.
67. Cartan E. Nombres complexes // *Encycl. d. Sci. Math.* 1908. V. 1, N. 3. P. 329–468.
68. Bott R. The stable homotopy of the classical groups // *Ann. Math.* 1959. V. 70. P. 313–337.
69. Chisholm J.S.R., Farwell R.S. Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles / Clifford (Geometric) Algebras, ed. W. Baylis. Birkhäuser, 1996, pp. 365–388.

## ALGEBRAIC QUANTIZATION AND SPINOR STRUCTURE

**V.V. Varlamov**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: varlamov@sibsiu.ru

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

**Abstract.** It is shown that all states of the matter spectrum from various coherent subspaces of the physical Hilbert space can be constructed from fundamental states (two-component spinors) by means of fusion and doubling operations.

**Keywords:** fermions, spinors, neutrino, Hilbert space, fusion, doubling, annihilation.

## REFERENCES

1. Farmelo G. *The Strangest Man: The Hidden Life of Poul Dirac, Quantum Genius.* New York, Basic Books, 2009.
2. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika III.: Voprosy interpretatsii. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2021, no. 3(59), pp. 4–26. (in Russian)
3. Geizenberg V. *Shagi za gorizont.* Moscow, Progress, 1987. (in Russian)
4. Markov M.A. O sovremennoi forme atomizma. *Izbrannye trudy, V 2 t., vol. 1, Kvantovaya teoriya polya, fizika elementarnykh chastits, fizika neitrino, filosofskie problemy fiziki*, Moscow, Nauka, 2000, pp. 408–438. (in Russian)
5. Wolchover N. What is a Particle? *Quantamagazine*, 2020, 12, URL: [www.quantamagazine.org](http://www.quantamagazine.org) (20.02.2022).
6. Wigner E.P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *Ann. Math.*, 1939, vol. 40, pp. 149–204.
7. Gell-Mann M. and Ne’eman Y. *The Eightfold Way.* Benjamin, New York, 1964.
8. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika I.: Osnovnye opredeleniya. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2020, no. 2(54), pp. 4–23. (in Russian)
9. Varlamov V.V. CPT groups of spinor fields in de Sitter and anti-de Sitter spaces. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2015, vol. 25, pp. 487–516.
10. Varlamov V.V. Spinor Structure and Internal Symmetries. *Int. J. Theor. Phys.*, 2015, vol. 54, pp. 3533–3576.
11. Varlamov V.V. Spinor Structure and Matter Spectrum. *Int. J. Theor. Phys.*, 2016, vol. 55, pp. 5008–5045.

12. Geizenberg V. Fizika i filosofiya. Chast' i tseloe. Moscow, Nauka, 1990. (in Russian)
13. Pontekorvo B.M. and Smorodinskii Ya.A. Neitrino i plotnost' materii vo Vselennoi. ZhETF, 1961, vol. 41, pp. 239–243. (in Russian)
14. Weizsäcker C.F.V. Komplementarität und Logik I. Naturwiss, 1955, vol. 42, pp. 521–529.
15. Görnitz Th., Graudenz D, and Weizsäcker C.F.V. Quantum Field Theory of Binary Alternatives. Int. J. Theor. Phys., 1992, vol. 31, pp. 1929–1959.
16. Finkelstein D. Space-Time Code. Phys. Rev., 1969, vol. 184, pp. 1261–1271.
17. Hamilton W.R. Lectures on Quaternions. Dublin, 1853.
18. Grassmann H. Die Ausdehnungslehre. Berlin, 1862.
19. Clifford W.K. Applications of Grassmann's extensive algebra. Amer. J. Math., 1878, vol. 1, pp. 350.
20. Lipschitz R. Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Max Cohen und Sohn, Bonn, 1886.
21. Rozenfel'd B.A. Neevklidovy geometrii. Moscow, GITTL, 1955, 744 p. (in Russian)
22. Cartan E. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. math. France, 1913, vol. 41, pp. 53–96.
23. Van der Varden B. Printsip zapreta i spin. Teoreticheskaya fizika 20 veka. Moscow, Izd. in. lit., 1962, pp. 231–284. (in Russian)
24. Uhlenbeck G.E. and Goudsmit S. Spinning Electrons and the Structure of Spectra. Nature, 1926, vol. 117, pp. 264–265.
25. Kartan E. Teoriya spinorov. Moscow, Izd. in. lit., 1947, 223 p. (in Russian)
26. Chevalley C. The Algebraic Theory of Spinors. New York, Columbia University Press, 1954.
27. Brauer R. and Weyl H. Spinors in  $n$  dimensions. Amer. J. Math., 1935, vol. 57, pp. 425–449.
28. Porteous I.R. Topological Geometry. van Nostrand, London, 1969.
29. Crumeyrolle A. Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
30. Lounesto P. Clifford Algebras and Spinors. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
31. Riesz M. Sur certain notions fondamentales en théorie quantique relativiste. C.R.10<sup>e</sup> Congrès Math. Scandinaves (Copenhagen, 1946). Jnl. Cjellerups. Forlag, Copenhagen, 1947, pp.123–148.
32. Ab-lamowicz R. Construction of Spinors via Witt Decomposition and Primitive Idempotents: A Review. Clifford Algebras and Spinor Structures. Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 113–123.
33. Pauli W. Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt. Z. Phys., 1925, vol. 31, pp. 373–385. Russkii perevod: Pauli V. Trudy po kvantovoi teorii. Vol. 1, Moscow, Nauka, 1975, pp. 634–644. (in Russian)
34. Yurii Borisovich Rumer: Fizika, XX vek : avt.sost. I.A. Kraineva [i dr.], otv. red. A.G. Marchuk, Ros. akad. nauk, Sib. otd-nie, In-t sistem informatiki im. A.P. Ershova, Novosibirsk, Izd-vo «ARTA», 2013, 592 p. (in Russian)
35. Fok V.A. Vmeshchayutsya li khimicheskie svoistva atomov v ramki chisto prostanstvennykh predstavlenii? Periodicheskii zakon i stroenie atoma, Moscow, Atomizdat, 1971, pp. 107–117. (in Russian)
36. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektronen. Z. f. Phys., 1927,



- vol. 43, pp. 601.
37. Dirac P.A.M. The Quantum Theory of the Electron. Proc. Roy. Soc. A., 1928, vol. 117, pp. 610–624.
  38. Varlamov V.V. Teoretiko-grupповое opisanie periodicheskoi sistemy elementov. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2018, no. 2(46), pp. 5–23. (in Russian)
  39. Fet A.I. Gruppy simmetrii khimicheskikh elementov. Novosibirsk, Nauka, 2010. (in Russian)
  40. Thomas L.H. The Kinematics of an Electron with an Axis. *Phil. Mag.*, 1927, vol. 17, pp. 3.
  41. Varlamov V.V. CPT Groups of Higher Spin Fields. *Int. J. Theor. Phys.*, 2012, vol. 51, pp. 1453–1481.
  42. Pauli V. Printsip zapreta, gruppy Lorentsa, otrazhenie prostranstva, vremeni i zaryada. *Nil's Bor i razvitie fiziki*, Moscow, Izd. in. lit., 1958, pp. 46–74. (in Russian)
  43. Rumer Yu.B. and Fet A.I. Teoriya unitarnoi simmetrii. Moscow, Nauka, 1970, 400 p. (in Russian)
  44. Jordan P., Neumann J.V., and Wigner E. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. Math.*, 1934, vol. 35, pp. 29–64.
  45. Neumann J.V. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism (Part I). *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 1936, vol. 1(43), pp. 415–484.
  46. Segal I. Postulates for general quantum mechanics. *Ann. Math.*, 1947, vol. 48, pp. 930–948.
  47. Emkh Zh. Algebraicheskie metody v statisticheskoi mekhanike i kvantovoi teorii polya. Moscow, Mir, 1976, 423 p. (in Russian)
  48. Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., and Todorov I.T. Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya. Moscow, Nauka, 1987, 616 p. (in Russian)
  49. Khoruzhii S.S. Vvedenie v algebraicheskuyu kvantovuyu teoriyu polya. Moscow, Nauka, 1986, 304 p. (in Russian)
  50. Dyson F. The threefold way: algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics. *J. Math. Phys.*, 1962, vol. 3, pp. 1199–1215.
  51. Baez J.C. Division Algebras and Quantum Mechanics. *Found. Phys.*, 2012, vol. 42, pp. 819–855.
  52. Solèr M.P. Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces. *Comm. Algebra*, 1995, vol. 23, pp. 219–243.
  53. Dixon G. Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers and the Algebraic Design of Physics. Kluwer Academic Publishers, 1994.
  54. Günaydin M. and Gürsey, F. Quark structure and octonions. *Phys. Rev. D.*, 1974, vol. 9, pp. 3387.
  55. Varlamov V.V. Discrete Symmetries and Clifford Algebras. *Int. J. Theor. Phys.*, 2001, vol. 40, pp. 769–805.
  56. Varlamov V.V. Universal Coverings of Orthogonal Groups. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 2004, vol. 14, pp. 81–168.
  57. Varlamov V.V. CPT groups for spinor field in de Sitter space. *Phys. Lett. B.*, 2005, vol. 631, pp. 187–191.
  58. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika I.: Osnovnye opredeleniya. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2020, no. 2(54), pp. 4–23. (in Russian)
  59. Varlamov V.V. Algebraicheskaya kvantovaya mekhanika II.: S-matritsa. *Matematich-*

- eskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 1(57), pp. 3–24. (in Russian)
60. Varlamov V.V. Kvantovanie massy i gruppy Lorentsa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2017, no. 2(42), pp. 11–28. (in Russian)
  61. Karubi M. K-teoriya. Vvedenie. Moscow, Mir, 1981, 360 p. (in Russian)
  62. Bogolyubov N.N. and Shirkov D.V. Kvantovye polya. Moscow, Nauka, 1993, 331 p. (in Russian)
  63. Weyl H. Electron und Gravitation. I. Zs. f. Phys., 1929, vol. 56, pp. 330–352.
  64. Zyla P.A. *et al.* (Particle Data Group). Prog. Theor. Exp. Phys., 2020, 083C01.
  65. de Broil' L. Izbrannye nauchnye trudy. Vol. 3. Teoriya sveta na osnove teorii sliyaniya. Chastitsy so spinom. Moscow, Akademiya Mediaindustrii, 2013, 524 p. (in Russian)
  66. Pontekorvo B.M. Obratnye  $\beta$ -procsessy i nesokhranenie leptonnogo zaryada. ZhETF, 1958, vol. 34, pp. 247–249. (in Russian)
  67. Cartan E. Nombres complexes. Encycl. d. Sci. Math., 1908, vol. 1, no. 3, pp. 329–468.
  68. Bott R. The stable homotopy of the classical groups. Ann. Math., 1959, vol. 70, pp. 313–337.
  69. Chisholm J.S.R. and Farwell R.S. Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles. Clifford (Geometric) Algebras, ed. W. Baylis. Birkhäuser, 1996, pp. 365–388.

*Дата поступления в редакцию: 23.02.2022*

## УРАВНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ КИББЛА И ОТСУТСТВИЕ БАРИОННОГО ЧИСЛА У СТАТИЧНОЙ ЧЁРНОЙ ДЫРЫ В ТЕТРАДНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье доказывается теорема в рамках тетрадной теории гравитации, при выполнении условий которой на скалярное поле можно утверждать, что статичная чёрная дыра не имеет скалярных «волос» Киббла. Иначе говоря, такая чёрная дыра характеризуется только одной физической величиной – массой, и у неё нет барионного числа.

**Ключевые слова:** тетрадная теория гравитации, скалярное поле, no hair theorem.

Известно, что статичные чёрные дыры в общей теории относительности (ОТО) характеризуются только массой, а в случае учёта электромагнитных полей ещё и электрическим зарядом. Отсутствие барионного числа у статичной чёрной дыры было доказано Бекельштейном в 1972 г. [1, 2].

В статье показывается, при выполнении каких условий статичная чёрная дыра в тетрадной теории гравитации не имеет скалярных «волос» Киббла (no hair theorem). Результат был получен в 1977 г. Для другого уравнения скалярного поля аналогичный результат был анонсирован в [3–5] и опубликован в [6].

### 1. Тетрадная теория гравитации

В тетрадной теории гравитации (ТТГ) гравитация описывается тетрадным полем  $\lambda_{(a)}^i$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ , которое связано с метрическим тензором соотношениями:

$$g^{ik} = \eta^{(ab)} \lambda_{(a)}^i \lambda_{(b)}^k,$$

где  $\eta^{(ab)} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$  – тензор Минковского.

Уравнения Эйнштейна для метрического поля  $g_{ik}$  в ТТГ заменяются уравнениями Эйнштейна для тетрадного поля в форме

$$R_{(a)}^i - \frac{1}{2} \lambda_{(a)}^i R = \varkappa T_{(a)}^i.$$

Тетрадная теория гравитации впервые появилась в работе Эйнштейна, который искал аппарат для единой теории гравитации и электромагнетизма [7]. Это был частный случай ТТГ, именуемой в наше время телепараллельной теорией гравитации. В ней использовалось пространство-время с абсолютным параллелизмом. Однако Эйнштейн отказался от неё, поскольку в рассмотренном им варианте тетрадной теории не было решения Шварцшильда. В 1960-е гг. к тетрадной теории обратился Мёллер [8, с.38] и *показал, каким образом можно решить проблему вычисления гравитационной энергии*.

ТТГ имеет ещё одно важное достижение. Ряд решений уравнений общей теории относительности (ОТО), в том числе решения, отвечающие различным космологическим моделям и коллапсу достаточно массивных звёзд, например известные решения Шварцшильда (статичная чёрная дыра) и Фридмана, как известно, имеют «истинные» сингулярности, когда плотность  $\rho \rightarrow +\infty$  и (или) некоторые компоненты тензора кривизны  $R_{iklm} \rightarrow +\infty$ . В ТТГ *найденны аналогичные решения уравнений поля без сингулярностей* [10].

Более того, тетрадную теорию гравитации без сингулярностей удаётся построить, правда с изменением уравнений поля, в случае выбора лагранжиана в виде

$$L = \underbrace{\gamma_{rst}\gamma^{tsr} - \gamma_{sn}^n\gamma_n^{sn}}_{\text{Эйнштейн}} + \alpha L',$$

где  $L'$  – однородная функция четвёртой степени от  $\lambda_{a,s}^n$ ,  $\alpha$  – постоянная, имеющая размерность квадрата длины [11, с. 104],

$$\gamma_{ikl} = \lambda_i^{(a)} \nabla_l \lambda_{k(a)} = -\gamma_{kil}.$$

В 1980-е годы интерес к ТТГ угас. Однако с конца 1990-х к ТТГ обращаются вновь многие авторы [9, 10, 12–16].

Далее латинские индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, а греческие – 1, 2, 3.

## 2. Формулы тетрадного формализма и уравнения тетрадного поля

Пусть  $\lambda_{(a)}^i, \lambda_{i(a)}$  обозначают соответственно контрвариантные и ковариантные компоненты тетрады, отмечаемой индексом  $(a)$ , причём

$$\lambda^{i(a)} = \eta^{(ab)} \lambda_{(b)}^i, \quad \lambda_{(a)}^i = \eta_{(ab)} \lambda^{i(b)}, \quad g_{ik} \lambda_{(0)}^i \lambda_{(0)}^k > 0,$$

где  $\eta_{(ab)} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$  – метрический тензор Минковского. Связь между тетрадным полем и метрическим полем даётся соотношениями

$$g_{ik} = \lambda_{i(a)} \lambda_k^{(a)}, \quad g^{ik} = \lambda_{(a)}^i \lambda^{k(a)}, \quad \lambda_{(a)}^i \lambda_k^{(a)} = \delta_k^i.$$

Тетрадное поле задаётся с точностью до *локальных* лоренц-поворотов

$$\lambda_{(a)}^i \rightarrow \Omega_{(a)}^{(b)}(x) \lambda_{(b)}^i, \tag{1}$$

$$\eta_{ab} = \eta_{cd} \Omega_{(a)}^{(c)}(x) \Omega_{(b)}^{(d)}(x).$$

Последнее равенство показывает, что  $\|\Omega_{(a)}^{(b)}(x)\|$  – однородное преобразование Лоренца. В случае, когда функции  $\Omega_{(a)}^{(b)}(x)$  являются постоянными, говорят, что имеем *глобальные* лоренц-повороты тетрады.

Тетрада  $\lambda_{(a)}^i$  позволяет формировать локальные объекты из тензоров:

$$\begin{aligned} V_{(a)} &= \lambda_{(a)}^i V_i, & V^{(a)} &= \lambda_i^{(a)} V^i, \\ \frac{\partial}{\partial x^{(a)}} &= \lambda_{(a)}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \\ A_{j(a)}^k &= \lambda_{(a)}^m A_{jm}^k, & W^{(ab)} &= \lambda_i^{(a)} \lambda_j^{(b)} W^{ij}, \dots \end{aligned}$$

### 3. Уравнение скалярного поля Киббла

В общей теории относительности (ОТО) уравнение скалярного поля имеет вид:

$$(g^{ik} \nabla_i \nabla_k + \mu^2) \varphi = 0, \quad (2)$$

где  $\nabla_i$  – ковариантная производная относительно римановой связности по переменной  $x^i$ .

В ТТГ Киббл [18] вводит следующий лагранжиан скалярного поля:

$$L = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \nabla_i [\sqrt{-g} \lambda_{(a)}^k \varphi] \nabla_k [\sqrt{-g} \lambda^{(a)k} \varphi] - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \mu^2 \varphi^2$$

и соответствующее уравнение

$$g^{ik} \nabla_i \nabla_k \varphi + (\mu^2 + \nabla_k G^k - G_i G^i) \varphi = 0, \quad (3)$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) + (\mu^2 + \nabla_k G^k - G_i G^i) \varphi = 0, \quad (4)$$

так как

$$g^{ik} \nabla_i \nabla_k \varphi = \nabla_i \left( g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right),$$

где

$$G^n \equiv \lambda^{n(s)} \nabla_k \lambda_{(s)}^k. \quad (5)$$

### 4. Внешнее скалярное поле чёрной дыры в тетрадной теории гравитации

Будем под ТТГ понимать теорию, уравнения поля в которой совпадают с уравнениями Эйнштейна. Скалярное поле описываем уравнением Киббла.

**Определение 1.** Вакуумное решение  $\lambda_{(a)}^i$  уравнений поля описывает чёрную дыру в ТТГ, если метрика  $g_{ik} = \eta_{(ab)} \lambda_i^{(a)} \lambda_k^{(b)}$  описывает чёрную дыру в ОТО. Причём чёрная дыра – это компактный объект в 3-пространстве.

**Определение 2.** Поле  $\lambda_{(a)}^i$  статично, если его компоненты не зависят от временной координаты  $x^0$  и  $\lambda_0^{(a)} = \lambda_\alpha^{(0)} = 0$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

Будем предполагать, что метрика  $g_{ik}$  асимптотически плоская, и во внешней области чёрной дыры координаты  $x^i$  выбраны так, что  $g_{ik}$  на бесконечности переходят в компоненты метрики Шварцшильда, заданные в сферических координатах. Горизонт событий  $F$  описывается уравнением  $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ , и нормаль  $n_i$  к нему, а также элемент поверхности  $dS_i$  имеют нулевую временную компоненту, и поскольку это световая (изотропная) поверхность, то

$$dS_\alpha dS^\alpha = 0.$$

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_{(a)}^i$  – статичное гравитационное поле, описывающее чёрную дыру, а  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  – статичное внешнее скалярное поле Киббла. Если выполнены условия:

- 1)  $b_i b^i$ , где  $b^i = \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ , ограничено на горизонте;
- 2)  $\nabla_m G^m \geq 0$  и  $\nabla_m G^m \neq 0$  хотя бы в одной точке вне горизонта, то  $\varphi \equiv 0$ , т. е. чёрная дыра не имеет внешнего скалярного поля.

**Доказательство.** Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = \varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

то, подставляя это равенство в уравнение (4), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) + \sqrt{-g} \mu^2 \varphi^2 - \sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \sqrt{-g} \nabla_k G^k \varphi^2 - \sqrt{-g} G_i G^i \varphi^2 = 0.$$

Интегрируем полученное уравнение по внешности чёрной дыры до пространственной бесконечности  $r = +\infty$  и по времени  $x^0$  от  $x_1^0$  до  $x_2^0$  – области  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) d^4 x + \int_{\Omega} \left( \mu^2 \varphi^2 - g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \nabla_k G^k \varphi^2 - G_i G^i \varphi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0. \quad (6)$$

Для первого интеграла в (6) в силу статичности метрики  $g_{ik}$  и равенства  $dS_0 = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) d^4 x &= \int_{F \times [x_1^0, x_2^0]} \sqrt{-g} g^{ik} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} n_i dS = \int_{F \times [x_1^0, x_2^0]} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} n_\alpha dS, \\ &= \int_{F \times [x_1^0, x_2^0]} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} dS^\beta, \end{aligned}$$

где  $dS_i = n_i dS$  – элемент поверхности,  $n_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}$ ,  $n_0 = 0$ .

Используя неравенство Шварца

$$[g_{\alpha\beta} b^\alpha dS^\beta]^2 \leq [g_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta][g_{\alpha\beta} dS^\alpha dS^\beta],$$

где

$$b^\alpha = \sqrt{-g} g^{\alpha\gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x^\gamma},$$

а также то, что на горизонте  $g_{\alpha\beta} dS^\alpha dS^\beta = 0$ , и условие 1 теоремы, получаем, что

$$g_{\alpha\beta} b^\alpha dS^\beta = 0.$$

Следовательно, первый интеграл в (6) равен нулю и уравнение сводится к равенству

$$\int_{\Omega} \left( \mu^2 \varphi^2 - g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \nabla_k G^k \varphi^2 - G_i G^i \varphi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0, \quad (7)$$

или, с учётом статичности чёрной дыры и скалярного поля,

$$\int_{\Omega} \left( \mu^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + \nabla_k G^k \varphi^2 - G_i G^i \varphi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0. \quad (8)$$

Поскольку чёрная дыра статичная и

$$G_0 = \lambda_0^{(s)} \nabla_k \lambda_{(s)}^k = 0 \cdot \nabla_k \lambda_{(s)}^k = 0,$$

то равенство (8) сводится к

$$\int_{\Omega} \sqrt{-g} \left( \mu^2 \varphi^2 - g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} + \nabla_\mu G^\mu \varphi^2 - g^{\alpha\beta} G_\alpha G_\beta \varphi^2 \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0. \quad (9)$$

Квадратичная форма  $\| -g_{\alpha\beta} \|$  положительно определена; все слагаемые подынтегральной функции в (9) в силу условия 2, в частности, неотрицательны. Если хотя бы одно из слагаемых хотя бы в одной точке больше нуля, то сам интеграл будет отличен от нуля. Поэтому

$$\varphi^2 \equiv 0, \text{ или } \varphi \equiv 0.$$

■

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bekenstein J. Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes // Phys. Rev. 1972. V. D5, No. 6. P. 1239–1246.
2. Teitelboim C. Nonmeasurability of the Baryon Number of a Black-Hole // Lett. Nuov. Cim. 1972. V. 3. P. 326–328.

3. Гуц А.К. О внешнем скалярном поле чёрной дыры в тетрадной теории гравитации // *Материалы третьей отчётной научно-практической конференции Омского университета*. Омск : ОмГУ, 1977. С. 60–62.
4. Гуц А.К. Уравнение скалярного поля в тетрадной теории гравитации / Учёный совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНТИ 02.12.92, № 3426–В92. 12 с.
5. Гуц А.К. *Физика реальности*. Омск: Изд-во КАН, 2012. 424 с.
6. Гуц А.К. Отсутствие скалярных «волос» у статичной чёрной дыры в тетрадной теории гравитации // *Математические структуры и моделирование*. 2021. № 3(59). С. 28–38.
7. Einstein A. Riemann-Geometrie mit Aujrechterhaltungdes Begriffes des Fernparallelismus // *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. K. 1*. 1928. S. 217–221.
8. Меллер Дж. Законы сохранения в тетрадной теории гравитации / В сб.: *Гравитация и топология. Актуальные проблемы*. М. : Мир, 1966.
9. Mikhail F.I., Wanas M.I., Lashin E.I., Hindawi A. Spherically symmetric solutions in Möller's tetrad theory of gravitation. URL: <https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf> (дата обращения: 01.10.2021).
10. Nashed G.G.L. Vacuum Non Singular Black Hole in Tetrad Theory of Gravitation. 2001. URL: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0109017v1.pdf> (дата обращения: 01.10.2021).
11. Мёллер Х. Неизбежны ли сингулярности в теории гравитации? // *Проблемы физики: классика и современность*. М. : Мир, 1982. С. 99–126.
12. Nashed G.G.L. Energy Momentum Complex // *Brazilian Journal of Physics*. 2010. V. 40, N. 3. P. 315–318.
13. Nashed G.G.L., Shirafuji T. Reissner-Nordström Spacetime in the Tetrad Theory of Gravitation. 2007. URL: <https://arxiv.org/pdf/0704.3898v1.pdf> (дата обращения: 01.10.2021).
14. Alhendi H.A., Lashin E.I., Nashed G.L. The Cosmology of Tetradic Theory of Gravitation. 2007. URL: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0702139v1.pdf> (дата обращения: 01.10.2021).
15. Shevchenko L.P. Tetrad-Gauge Theory of Gravity // *Theoretical and Mathematical Physics*. 2018. V. 194. P. 450–470.
16. Mitsou E., Yoo J. Tetrad formalism for exact cosmological observables. 2020. URL: <https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf> (дата обращения: 01.10.2021).
17. Бабурова О.В., Королев В.Ф., Умярова И.А. Вариационный формализм для квадратичных лагранжианов в тетрадной теории гравитации // *Известия высших учебных заведений. Физика*. 2006. Т. 49, № 5. С. 70–74.
18. Kibble T.W.B. Lorentz Invariance and the Gravitational Field // *Journal of Math. Phys.* 1961. V. 2. P. 212–221.



**THE KIBBLE EQUATION OF SCALAR FIELD AND THE ABSENCE  
OF SCALAR "HAIR" IN A STATIC BLACK HOLE IN THE TETRAD THEORY  
OF GRAVITY**

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** In the article a theorem in the framework of the tetrad theory of gravity is proved, under the conditions of which on a scalar field, it can be argued that a static black hole does not have the Kibble scalar "hairs". In other words, such a black hole is characterized only by one physical quantity – mass, and it has no baryon number

**Keywords:** tetrad gravity theory, scalar field, no hair theorem.

REFERENCES

1. Bekenstein J. Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes. *Phys. Rev.*, 1972, vol. D5, no. 6, pp. 1239–1246.
2. Teitelboim C. Nonmeasurability of the Baryon Number of a Black-Hole. *Lett. Nuov. Cim.*, 1972, vol. 3, pp. 326–328.
3. Guts A.K. O vneshnem skalyarnom pole chernoi dyry v tetradnoi teorii gravitatsii. *Materialy tret'ei otchetnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii Omskogo universiteta*, Omsk, OmGU, 1977, pp. 60–62. (in Russian)
4. Guts A.K. Uravnenie skalyarnogo polya v tetradnoi teorii gravitatsii. *Uchenyi sovet mat. fak. OmGU., Dep. v VINIvol. 02.12.92*, no. 3426–B92, 12 p. (in Russian)
5. Guts A.K. *Fizika real'nosti*. Omsk, Izd-vo KAN, 2012, 424 p. (in Russian)
6. Guts A.K. Otsutstvie skalyarnykh "volos" u statichnoi chernoi dyry v tetradnoi teorii gravitatsii. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2021, no. 3(59), pp. 28–38. (in Russian)
7. Einstein A. Riemann-Geometrie mit Aujrechterhaltungdes Begriffes des Fernparallelismus. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.math.*, K. 1, 1928, S. 217–221.
8. Meller Dzh. Zakony sokhraneniya v tetradnoi teorii gravitatsii. V sb.: *Gravitatsiya i topologiya. Aktual'nye problemy*. Moscow, Mir, 1966. (in Russian)
9. Mikhail F.I., Wanas M.I., Lashin E.I., and Hindawi A. Spherically symmetric solutions in Möller's tetrad theory of gravitation. URL: <https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf> (01.10.2021).
10. Nashed G.G.L. Vacuum Non Singular Black Hole in Tetrad Theory of Gravitation. 2001. URL: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0109017v1.pdf> (01.10.2021).
11. Meller X. Neizbezhny li singulyarnosti v teorii gravitatsii? *Problemy fiziki: klassika i sovremennost'*, Moscow, Mir, 1982, pp. 99–126. (in Russian)
12. Nashed G.G.L. Energy Momentum Complex. *Brazilian Journal of Physics*, 2010, vol. 40, no. 3, pp. 315–318.

13. Nashed G.G.L. and Shirafuji T. Reissner-Nordström Spacetime in the Tetrad Theory of Gravitation. 2007. URL: <https://arxiv.org/pdf/0704.3898v1.pdf> (01.10.2021).
14. Alhendi H.A., Lashin E.I., and Nashed G.L. The Cosmology of Tetric Theory of Gravitation. 2007. URL: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/0702139v1.pdf> (01.10.2021).
15. Shevchenko L.P. Tetrad-Gauge Theory of Gravity. Theoretical and Mathematical Physics, 2018, vol. 194, pp. 450–470.
16. Mitsou E. and Yoo J. Tetrad formalism for exact cosmological observables. 2020. URL: <https://arxiv.org/pdf/1908.10757.pdf> (01.10.2021).
17. Baburova O.V., Korolev V.F., and Umyarova I.A. Variatsionnyi formalizm dlya kvadratischnykh lagranzhianov v tetradnoi teorii gravitatsii. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika, 2006, vol. 49, no. 5, pp. 70–74. (in Russian)
18. Kibble T.W.B. Lorentz Invariance and the Gravitational Field. Journal of Math. Phys., 1961, vol. 2, pp. 212–221.

*Дата поступления в редакцию: 04.10.2021*

## **MACROCAUSALITY IMPLIES LORENZ GROUP: A PHYSICS-RELATED COMMENT ON GUTS'S RESULTS**

**O. Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

**V. Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, USA

**Abstract.** It is known that, in the space-time of Special Relativity, causality implies Lorenz group, i.e., if we know which events can causally influence each other, then, based on this information, we can uniquely reconstruct the affine structure of space-time. When the two events are very close, quantum effects, with their probabilistic nature, make it difficult to detect causality. So, the following question naturally arises: can we uniquely reconstruct the affine structure if we only know causality for events which are sufficiently far away from each other? Several positive answers to this question were provided in a recent paper by Alexander Guts. In this paper, we describe a very simple answer to this same question.

**Keywords:** causality, special relativity, Alexandrov-Zeeman theorem.

### **1. Introduction**

**Causality in Special Relativity reminder.** According to Special Relativity Theory, an event  $a = (t, x_1, x_2, x_3)$  can causally influence an event  $b = (s, y_1, y_2, y_3)$  (we will denote it by  $a \leq b$ ) if and only if a signal originated in  $a$  can reach  $b$  while traveling with a speed not exceeding the speed of light  $c$ , i.e., if

$$s - t \geq c \cdot \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}. \quad (1)$$

**Causality implies Lorenz group: main result.** The famous result by A.D. Alexandrov (see, e.g., [1–3]) shows that any bijection  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  of the 4-D space-time that preserves causality – i.e., for which  $a \leq b$  if and only if  $f(a) \leq f(b)$  – is a composition of rotations, shifts, scalings  $a \cdot \lambda \cdot a$ , Lorenz transformations, and, if needed, spatial inversion  $(t, x_1, x_2, x_3) \rightarrow (t, -x_1, -x_2, -x_3)$ .

**Causality implies Lorenz group: physical consequences.** Thus, if we know, for every two events  $a$  and  $b$ , whether  $a$  can causally influence  $b$ , then, based on this information, we can uniquely reconstruct the linear (= affine) structure on the 4-D space-time.

**Quantum effects lead to an additional complexity.** A usual way to test a causal relation between the events is to make some change in  $a$  and observe the resulting effect in  $b$ . This can be done in a deterministic situation. However, when the events  $a$  and  $b$  are very close to each other, with microworld-size differences between their coordinates, then quantum effects prevail, the relation becomes probabilistic, and detecting causality becomes difficult. As a result, we can only observe causal relation when the event  $b$  is sufficiently far away from the event  $a$ .

**Related natural question and Guts's answers.** Can we still reconstruct the linear structure of space-time based on this observable (macro) causality?

This question was studied in a recent paper [3] by Alexander Guts that provides many positive answers to this question.

**What we do in this paper.** The main objective of this paper is to provide yet another positive answer – an answer that probably follows from Guts's results, but that is so simple that we believe it is worth describing.

## 2. Analysis of the Problem and the Main Result

**Let us be as general as possible – without abandoning simplicity.** While our main interest is in the causal relation (1), we follow a natural mathematical tendency of formulating this result in the most general form – as long as this desire for generality does not make things more complicated.

So, instead of relation (1), let us consider any relation  $a \leq b$  that is described by a closed convex cone  $F$ :  $a \leq b$  if and only if  $b - a \in F$ .

**Natural requirement on macrocausality relation.** In addition to the “theoretical” causality relation  $a \leq b$ , we assume that there is also an additional observable (= macro) causality relation  $a \ll b$ . Of course, when we can observe that  $a$  causally influence  $b$ , this means that  $a \leq b$  in the theoretical sense as well, i.e., that  $a \ll b$  implies  $a \leq b$ .

If  $a$  observably influences  $b$  ( $a \ll b$ ), this means that  $b$  is sufficiently far away from  $a$ . Thus, if  $b \leq c$ , this means that  $c$  is even further from  $a$  than  $b$  – so we should also be able to detect that  $a$  influences  $c$  as well. In other words, if  $a \ll b$  and  $b \leq c$ , then  $a \ll c$ .

Finally, since we are considering a homogeneous space-time, it is reasonable to require that the macrocausality relation  $\ll$  is shift-invariant, i.e., that  $a \ll b$  implies  $a + c \ll b + c$ .

Now, we are ready to formulate our result.

*Comment.* To make this paper understandable to as many readers as possible, we add as many definitions as needed – even though they are most probably familiar to many readers.

**Definition 1.** Let  $R$  be a binary relation on a set  $S$ . We say that a bijection  $f : S \rightarrow S$  preserves the relation  $R$  if for every  $a, b \in S$ , we have  $aRb$  if and only if  $f(a)Rf(b)$ .

**Definition 2.** A set  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  is called a convex cone if for every two elements  $s_1, s_2 \in S$  and for every two non-negative real numbers  $c_1$  and  $c_2$ , the element  $c_1 \cdot s_1 + c_2 \cdot s_2$  also belongs to  $S$ .

**Proposition.** Let  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  be a convex cone which is a closed set, let  $a \leq b$  mean  $b - a \in F$ , and let  $\ll$  be a binary relation on  $\mathbb{R}^n$  that is satisfied by at least one pair  $(a_0, b_0)$  and that satisfies the following properties for all  $a, b$ , and  $c$ :

1. if  $a \ll b$ , then  $a \leq b$ ;
2. if  $a \ll b$  and  $b \leq c$ , then  $a \ll c$ ; and
3. if  $a \ll b$ , then  $a + c \ll b + c$ .

Then every bijection that preserves  $\ll$  also preserve  $\leq$ .

**Conclusion.** For the case when  $\leq$  is the Special Relativity causality relation (1) and  $\ll$  is macrocausality, this result means that every bijection that preserves macrocausality is a composition of rotations, shifts, scalings, Lorenz transformations, and, if needed, spatial inversion.

Thus, even if we only know observable causality, we can still uniquely reconstruct linear structure on  $\mathbb{R}^n$ .

**Proof.** To prove the Proposition, let us show that the relation  $\leq$  can be described in terms of  $\ll$ , namely, that for all  $b$  and  $c$ :

$$b \leq c \Leftrightarrow \forall a (a \ll b \Rightarrow a \ll c). \quad (2)$$

This will imply that any bijection that preserved  $\ll$  preserves  $\leq$  as well.

Indeed, the left-to-right part of (2) follows from the second property listed in the Proposition. So, to complete the proof, we need to prove the right-to-left implication. Indeed, let us assume that

$$\forall a (a \ll b \Rightarrow a \ll c). \quad (3)$$

Due to the third property (shift-invariance), we have  $a \ll b$  if and only if  $0 \ll b - a$ , i.e., if and only if  $b - a \in M \stackrel{\text{def}}{=} \{c : 0 \ll c\}$ .

We know that  $a_0 \ll b_0$ .

- Thus, due to shift-invariance, we have  $a_0 + (b - b_0) \ll b$ , and therefore, due to (3), we have

$$a_0 + (b - b_0) \ll c.$$

- Then, due to shift-invariance, we have  $a_0 + (b - b_0) + (b - c) \leq b$  and therefore, due to (3), we have

$$a_0 + (b - b_0) + (b - c) \ll c.$$

- Then, due to shift-invariance, we have  $a_0 + (b - b_0) + 2(b - c) \leq b$  and therefore, due to (3), we have

$$a_0 + (b - b_0) + 2(b - c) \ll c,$$

etc.

By induction, we can prove that for every natural number  $m$ , we have

$$a_0 + (b - b_0) + m \cdot (b - c) \ll c.$$

Due to the first property, this implies that

$$a_0 + (b - b_0) + m \cdot (b - c) \leq c.$$

By definition of the relation  $\leq$ , this means that

$$c - (a_0 + (b - b_0) + m \cdot (b - c)) = (m + 1) \cdot (c - b) + (b_0 - a_0) \in F.$$

Since  $F$  is a convex cone, we also have

$$\frac{1}{m + 1} \cdot ((m + 1) \cdot (c - b) + (b_0 - a_0)) = c - b + \frac{b_0 - a_0}{m + 1} \in F.$$

In the limit  $m \rightarrow \infty$ , these elements tend to  $c - b$ . Since  $F$  is a closed set, we thus have  $c - b \in F$ , which means that  $b \leq c$ .

The proposition is proven.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes), and by the AT&T Fellowship in Information Technology.

It was also supported by the program of the development of the Scientific-Educational Mathematical Center of Volga Federal District No. 075-02-2020-1478, and by a grant from the Hungarian National Research, Development and Innovation Office (NRDI).

## REFERENCES

1. Alexandrov A.D. On Lorentz transformations. Uspekhi Math. Nauk, 1950, vol. 5, no. 1, pp. 187 (in Russian).
2. Alexandrov A.D. and Ovchinnikova V.V. Remarks on the foundations of Special Relativity. Leningrad University Vestnik, 1953, no. 11, pp. 94–110 (in Russian).
3. Guts A.K. Non-connected order in affine space and its automorphisms. Mathematical Structures and Modeling, 2021, vol. 4(60), pp. 17–38 (in Russian).
4. Zeeman E.C. Causality implies the Lorentz group. Journal of Mathematical Physics, 1964, vol. 5, no. 4, pp. 490–493.

**МАКРОПРИЧИННОСТЬ ВЛЕЧЕТ ГРУППУ ЛОРЕНЦА: КОММЕНТАРИЙ,  
СВЯЗАННЫЙ С ФИЗИКОЙ РЕЗУЛЬТАТА ГУЦА**

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, США

**Аннотация.** Известно, что в пространстве-времени специальной теории относительности причинность влечёт группу Лоренца, т. е. если мы знаем, какие события могут причинно влиять друг на друга, то на основе этой информации мы можем однозначно реконструировать аффинную структуру пространства-времени. Когда два события очень близки, квантовые эффекты с их вероятностной природой затрудняют обнаружение причинно-следственной связи. Итак, естественно возникает следующий вопрос: можем ли мы однозначно реконструировать аффинную структуру, если мы знаем причинность только для событий, достаточно удалённых друг от друга? Несколько положительных ответов на этот вопрос было дано в недавней статье Александра Гуца. В этой статье мы опишем очень простой ответ на этот же вопрос

**Ключевые слова:** причинность, специальная теория относительности, теорема Александрова–Зимана.

*Дата поступления в редакцию: 14.02.2022*

## **МОДЕЛЬ БЕЗРАБОТНОГО НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ СЛУЖБЫ ЗАНЯТОСТИ ЗА 2020–2021 ГГ.**

**Н.Ф. Богаченко**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

**Д.Н. Лавров**

к.т.н., доцент, e-mail: dmitry.lavrov72@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В работе строится усреднённая модель безработного на основе статистических данных за 2020–2021 гг. Проверяется гипотеза: действительно ли типовой безработный, обратившийся в службу занятости, — это представитель малого бизнеса, потерявший его в период пандемии?

**Ключевые слова:** модель безработного, служба занятости, статистические данные.

### **Введение**

В период пандемии 2020–2021 гг. ситуация на рынке труда резко изменилась. Локдаун привёл к уходу с рынка небольших фирм, сокращению сектора малого бизнеса, что в свою очередь привело к увеличению числа безработных. Пособия по безработице были подняты, что вывело из тени часть безработных, ранее не обращавшихся в службу занятости. Модели эффективности, построенные ранее [1,2], не предполагали наличие таких внешних обстоятельств, так существенно повлиявших на рынок занятости.

В сложившихся обстоятельствах представляет интерес модель безработного для этого сложного периода пандемии. Действительно ли разорившиеся представители малого бизнеса формируют большинство обратившихся в службу занятости? Проверка данной гипотезы и является главной целью настоящего исследования.

По-прежнему нам интересен вопрос эффективности работы службы занятости. Модель безработного строится на основе статистических данных службы занятости Омской области. Упор делается на выявление статистических зависимостей между параметрами безработного и длительностью нахождения его на учёте в службе занятости как одним из возможных показателей эффективности её работы.



## 1. Данные

В нашем распоряжении имелась база данных на 50950 записей о безработных, обратившихся в службу занятости. В это число входили безработные как находящиеся на учёте в службе занятости, так и завершившие взаимодействие со службой.

Интересно проанализировать наличие зависимости между характеристиками безработного и длительностью пребывания его на учёте в службе занятости.

## 2. Метод

Для анализа данных была использована библиотека `pandas`, написанная на языке `python`, а в качестве среды разработки — `jupyter`.

На первом шаге данные были загружены в датафрейм и продолжающие стоять на учёте были отфильтрованы.

```
xlsx = pd.ExcelFile('test3.xlsx')
df = pd.read_excel(xlsx, 'test3')
df2=df.loc[df['Дата решения о снятии с учета']>'']
```

С завершённым периодом безработицы оказалось 49111 из общего числа обратившихся в службу занятости за представленный период наблюдений.

На втором шаге была вычислена продолжительность нахождения на учёте в днях (переменная `delta`), создан и присоединён столбец с этими данными к датафрейму:

```
a = df2['Дата первичного обращения']
b = df2['Дата решения о снятии с учета']
delta=[]
for i in list(a.index):
    x = dt.datetime(*map(int,a[i].split('.')[::-1]))
    y = dt.datetime(*map(int,b[i].split('.')[::-1]))
    delta.append((y-x).days)
dat = {'delta' : delta}
temp_df = pd.DataFrame(dat,columns=['delta'],index=a.index)
df2 = df2.join(temp_df)
```

Аналогично был вычислен возраст в годах безработного на 1 сентября 2021 г.

```
c = df2['Дата рождения']
y = dt.datetime(2021,9,1)
ages = []
for i in list(c.index):
    x = dt.datetime(*map(int,c[i].split('.')[::-1]))
    ages.append((y-x).days/365)
data = {'ages':ages}
temp_df = pd.DataFrame(data.copy(),columns=['ages'],index=a.index)
df2 = df2.join(temp_df)
```

### 3. Обработка данных и результаты

Результат действия команды

```
df2.groupby(by=['Подразделение', 'Пол']).mean()
```

представлен в табл. 1. Из таблицы видно, что для города средний трудовой стаж безработного значительно меньше, чем для области. Гипотеза: в городе в основном на учёте находятся «профессиональные» безработные, это видно по среднему трудовому стажу, который не достигает и года для 39-летних мужчин и 37-летних женщин. При этом среднее пребывание на учёте превышает 6 месяцев. В области ситуация несколько иная, и по нашим предположениям связана с реальным отсутствием рабочих мест в сельской местности и малых городах Омской области. Для подтверждения гипотезы предоставленных данных недостаточно, требуется дополнительное исследование.

Таблица 1. Средний возраст, среднее время пребывания на учёте, средний общий трудовой стаж в зависимости от пола и места проживания

| Место проживания | Пол     | Возраст   | Пребывание на учёте | Общий стаж |
|------------------|---------|-----------|---------------------|------------|
| Город            | Женский | 37,030527 | 195,072750          | 0,875303   |
|                  | Мужской | 39,169425 | 190,030178          | 0,691833   |
| Область          | Женский | 37,845763 | 157,610605          | 3,713653   |
|                  | Мужской | 42,101928 | 156,631347          | 6,726148   |

Для более наглядного представления результатов с помощью библиотеки `matplotlib` были построены гистограммы.

```
fig1 = plt.figure(1)
ax1 = fig1.add_subplot(111)
ax1.set_title("Число обратившихся в зависимости\n
от длительности пребывания на учёте")
df2.loc[:, 'delta'].plot.hist(bins=50)
```

На рис. 1 представлена гистограмма, отражающая распределение числа безработных в зависимости от длительности пребывания на учёте в службе занятости. Из гистограммы видно, что среднее время пребывания на учёте составляет 180 дней, или 6 месяцев.

Следующий фрагмент кода строит гистограммы, изображённые на рис. 2.

```
fig2= plt.figure(2)
ax2=fig2.add_subplot(111)
ax2.set_title("Влияние трудового стажа\n
на длительность пребывания на учёте")
```

```
df2[(df2['Трудовой стаж гражданина - Общий стаж']<3)]
    .loc[:, 'delta'].plot.hist(bins=15, alpha=0.5)
df2[(df2['Трудовой стаж гражданина - Общий стаж']>=3)
     &(df2['Трудовой стаж гражданина - Общий стаж']<7)]
    .loc[:, 'delta'].plot.hist(bins=15, alpha=0.5)
df2[(df2['Трудовой стаж гражданина - Общий стаж']>=7)]
    .loc[:, 'delta'].plot.hist(bins=15, alpha=0.5)
```

Здесь (см. рис. 2) представлена зависимость числа безработных (ось ординат) от длительности пребывания на учёте (ось абсцисс) в разрезе трудового стажа. Стаж был поделён на три категории: «1» — от трёх до семи лет (средний возраст от 34 до 40 лет); «2» — более семи лет (средний возраст от 40 до 60 лет); «3» — менее трёх лет, самая многочисленная группа безработных. Дополнительные расчёты показывают, что средний возраст этой категории 30–35 лет.

Хотим акцентировать внимание на то, что большая часть обратившихся в службу занятости имеют стаж менее трёх лет и возраст от 30 до 35 лет. Данный факт требует отдельного исследования и сбора дополнительных данных, чтобы раскрыть сложившуюся картину происходящего.

Рассматривая зависимость числа безработных от длительности пребывания на учёте в разрезе места проживания (рис. 3), видим, что время пребывания на учёте в области составляет в среднем 150 дней, или 5 месяцев, что меньше этого показателя для города (180–210 дней, 6–7 месяцев).

В то же время пол безработного влияет на время пребывания на учёте незначительно, так что этим можно пренебречь (рис. 4).

Классификацией Всемирной организации здравоохранения установлено: 18–44 года — молодой возраст, 45–59 лет — средний возраст; 60–74 года — пожилой возраст, 75–90 лет — старческий возраст; старше 90 лет — долгожители [3]. Очевидно, что трудоспособный возраст безработного до 60 лет у женщин и до 65 лет у мужчин. В наше рассмотрение попадают три возрастных категории: молодой возраст, средний возраст и часть пожилого возраста.

На рис. 5 видно, что основная категория, состоящая на учёте в службе занятости, это молодые люди до 45 лет. Вторая по численности категория — безработные среднего возраста. Какой-либо зависимости времени пребывания на учёте от принадлежности этим категориям не выявлено.

Исследуя зависимость длительности пребывания на учёте и сам факт трудоустройства от наличия образования (см. табл. 2 и рис. 6), отметим, что людям с основным общим или средним общим образованием сложно предложить вакансии в связи с отсутствием у них специальности, а также большой конкуренции на вакансию. С профильным и высшим образованием трудоустраиваются 40 % всех обратившихся, а без профобразования — всего лишь 28 %.

Вместе с тем на учёте меньше находятся безработные со средним профессиональным образованием и основным общим (9 кл.) — 3–4 месяца, в то время как со средним общим образованием (11 кл.) и высшим образованием средняя продолжительность пребывания на учёте составляет 6 месяцев.

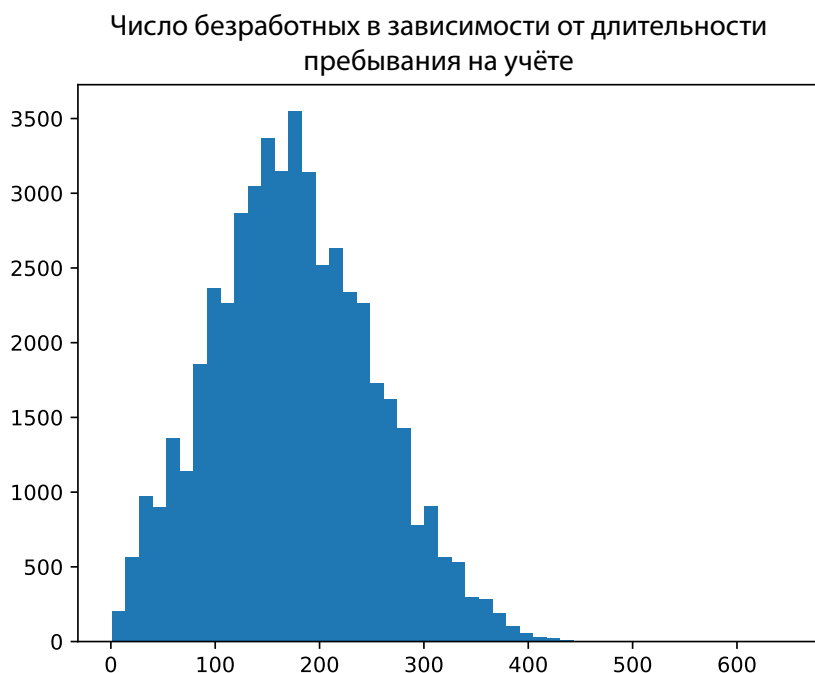


Рис. 1. Гистограмма зависимости числа безработных от длительности пребывания на учёте в службе занятости

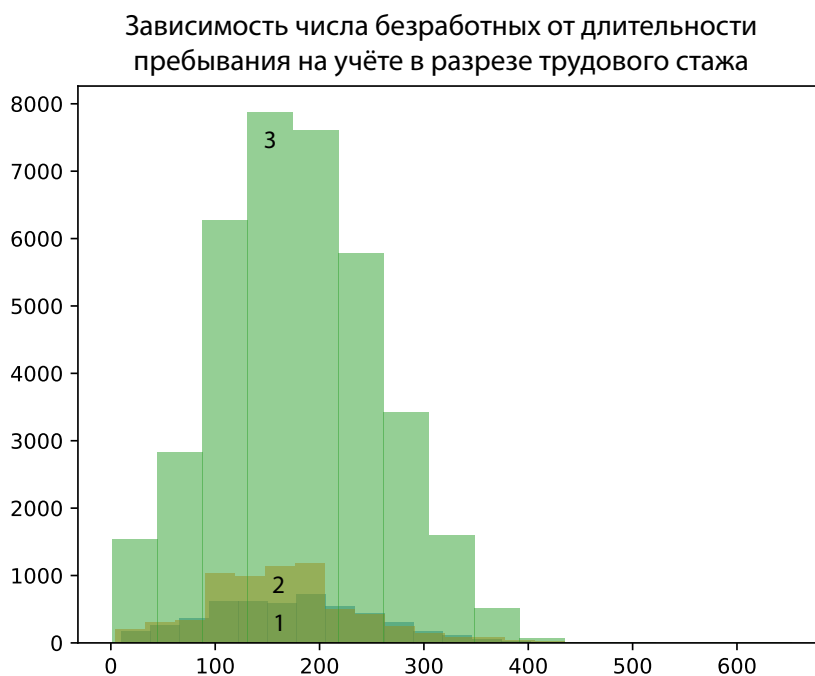


Рис. 2. Трудовой стаж гражданина: 1 — от 3 до 7 лет; 2 — более 7 лет; 3 — менее 3 лет

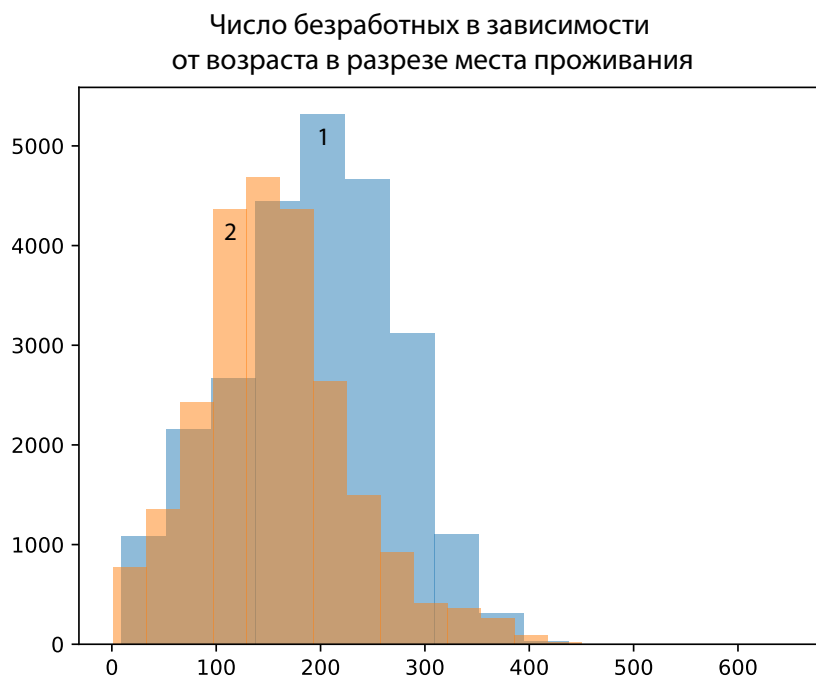


Рис. 3. Место проживания: 1 — город; 2 — село

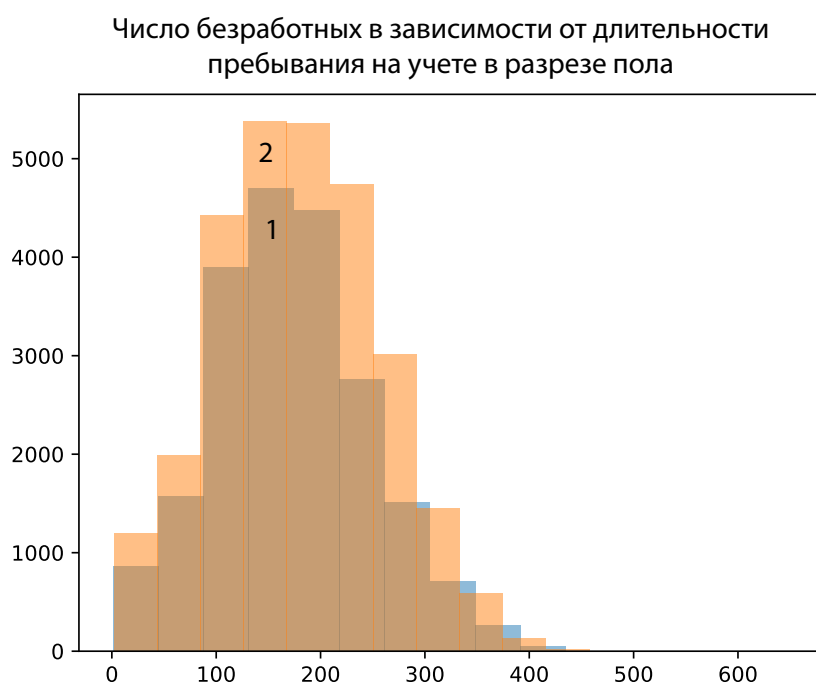


Рис. 4. Пол: 1 — мужчины; 2 — женщины

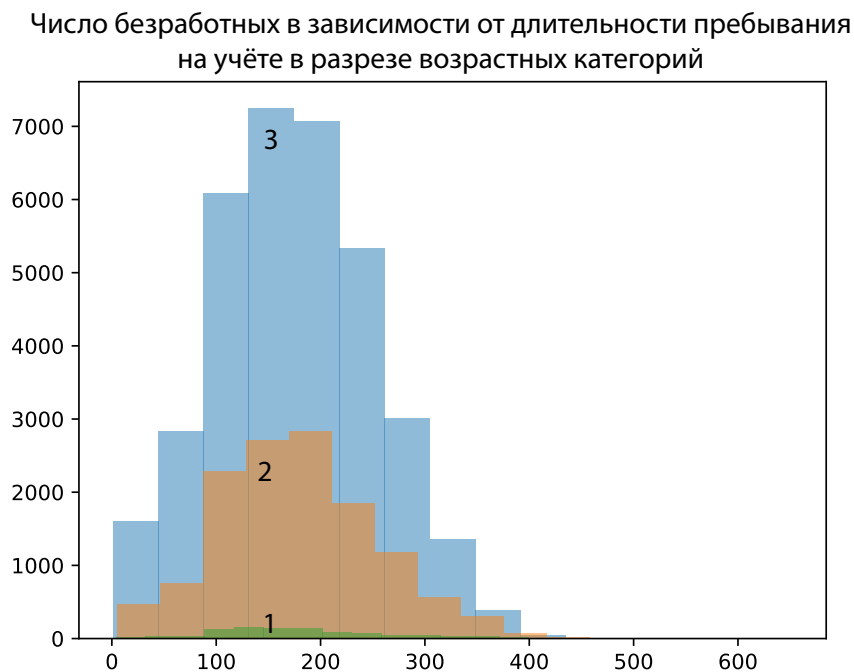


Рис. 5. Возрастные категории: 1 — от 60 до 65 лет; 2 — от 45 до 60 лет; 3 — менее 45 лет

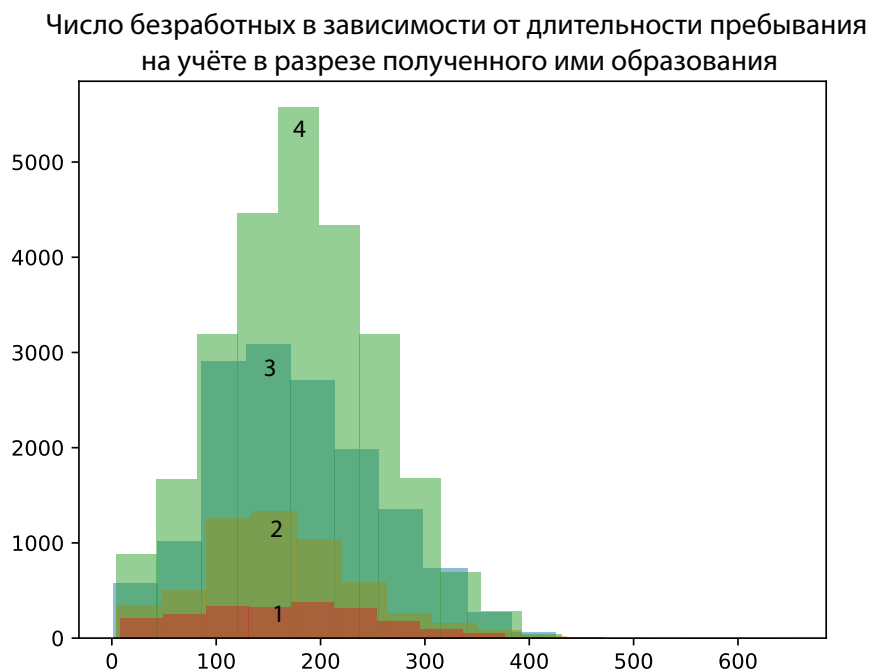


Рис. 6. Образование: 1 — высшее; 2 — среднее профессиональное (в т. ч. начальное профессиональное); 3 — основное общее (9 кл.); 4 — среднее общее (11 кл.)

Таблица 2. Образование трудоустроенных

| Образование   | Количество безработных | Трудоустроенных СЗ | Процент трудоустроенных СЗ, % | Трудоустроенных самостоятельно | Процент трудоустроенных самостоятельно, % |
|---|------------------------|--------------------|-------------------------------|--------------------------------|---|
| Высшее  | 2229                   | 179                | 8,03                          | 732                            | 32,84                                     |
| Высшее, бакалавр  | 166                    | 25                 | 0,15                          | 40                             | 24,10                                     |
| Высшее, дипломированный специалист                            | 58                     | 4                  | 6,90                          | 16                             | 27,59                                     |
| Высшее, магистр   | 10                     | 3                  | 30,00                         | 4                              | 40,00                                     |
| Не имеющие основного общего                                   | 530                    | 73                 | 13,77                         | 111                            | 20,94                                     |
| Основное общее (9 кл.)  | 15335                  | 1148               | 7,49                          | 3377                           | 22,02                                     |
| Послевузовское профессиональное                               | 1                      | 0                  | 0,00                          | 0                              | 0,00                                      |
| Среднее общее (11 кл.)  | 26675                  | 1439               | 5,39                          | 5902                           | 22,13                                     |
| Среднее профессиональное (в т. ч. начальное профессиональное) | 5946                   | 835                | 14,04                         | 1497                           | 25,18                                     |

Отметим также, что в сравнении с количеством людей, которые смогли трудоустроиться самостоятельно, количество трудоустроенных с помощью службы занятости (СЗ) в разы ниже.

Анализируя последнюю гистограмму на рис. 7, можем завершить построение описательной характеристики типичного безработного:

- возраст от 30 до 45 лет;
- образование среднее общее (11 классов);
- пол: вероятнее женский;
- место проживания: вероятнее городской житель;
- трудовой стаж менее 3 лет;
- продолжительность пребывания на учёте в службе занятости от 180 до 210 дней (6–7 месяцев).

## Заключение

Нужно сказать, что наша гипотеза о том, что разорившиеся представители малого бизнеса формируют большинство обратившихся в службу занятости, не подтверждается. Это не значит, что таковых нет. Это означает, что они массово не обращаются в службу занятости.

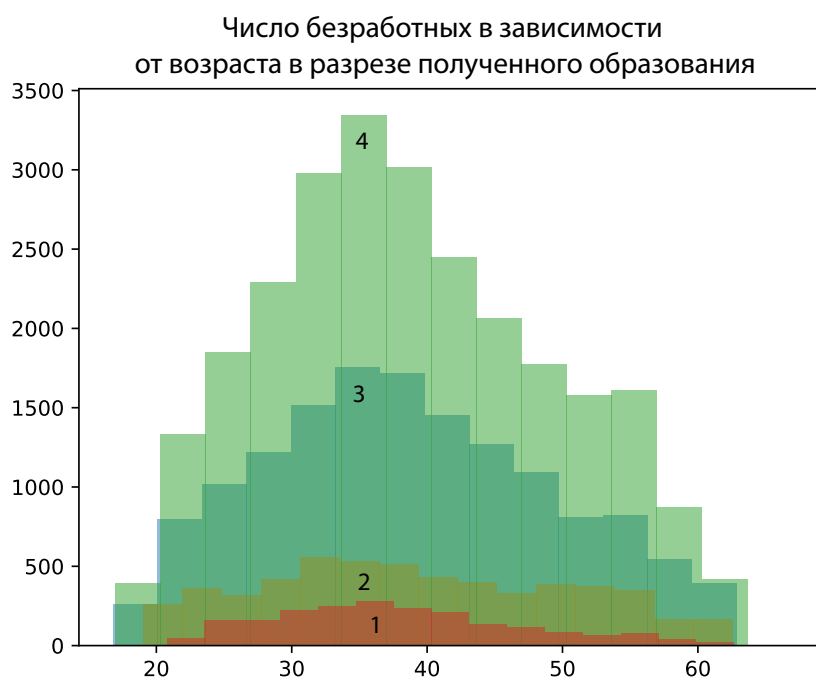


Рис. 7. Образование: 1 — высшее; 2 — среднее профессиональное (в т. ч. начальное профессиональное); 3 — основное общее (9 кл.); 4 — среднее общее (11 кл.)

Второй важный вывод исследования — среднее профессиональное образование позволяет быстрее найти работу. Безработные с незаконченным средним образованием (9 кл.) также относительно быстро находят работу. Средняя длительность пребывания на учёте этих двух категорий 3–4 месяца, в отличие от других категорий, где этот срок составляет в среднем около 6 месяцев. Общий вывод, тем не менее, таков: с профильным и высшим образованием трудоустроиться проще.

## Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20–010–00489.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bogachenko N.F., Lavrov D.N., Stuken T.Y. Evaluating the Performance of Employment Services: Experience of Building a Model // The 14th International Days of Statistics and Economics. Conference Proceedings. 2020. С. 1174–1183. URL: [https://msed.vse.cz/msed\\_2020/article/371-Stuken-Tatiana-paper.pdf](https://msed.vse.cz/msed_2020/article/371-Stuken-Tatiana-paper.pdf)
2. Богаченко Н.Ф., Лавров Д.Н. Об особенностях реализации интервального метода анализа иерархий в задаче оценки эффективности работы службы занятости // Математические структуры и моделирование. 2020. № 4(56). С. 41–48.



3. Васильева Ю.В., Шуралева С.В. Возраст как фактор уязвимости работника в трудовом праве // Вестник Пермского университета. Юридические науки. 2020. № 3.

### MODEL OF THE UNEMPLOYED BASED ON THE ANALYSIS OF STATISTICS FROM THE EMPLOYMENT SERVICE FOR 2020–2021

**N.F. Bogachenko**

Ph.D.(Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

**D.N. Lavrov**

Ph.D.(Eng.), Associate Professor, e-mail: dmitry.lavrov72@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The work builds an average model of the unemployed based on statistical data for 2020–2021. The hypothesis is being tested: is the typical unemployed person who applied to the employment service really a small business representative who lost it during the pandemic?

**Keywords:** unemployed model, employment service, statistics data.

### REFERENCES

1. Bogachenko N.F., Lavrov D.N., and Stuken T.Y. Evaluating the Performance of Employment Services: Experience of Building a Model. The 14th International Days of Statistics and Economics, Conference Proceedings, 2020, pp. 1174–1183. URL: [https://msed.vse.cz/msed\\_2020/article/371-Stuken-Tatiana-paper.pdf](https://msed.vse.cz/msed_2020/article/371-Stuken-Tatiana-paper.pdf)
2. Bogachenko N.F. and Lavrov D.N. Ob osobennostyakh realizatsii interval'nogo metoda analiza ierarkhii v zadache otsenki effektivnosti raboty sluzhby zanyatosti. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 4(56), pp. 41–48. (in Russian)
3. Vasil'eva Yu.V. and Shuraleva S.V. Vozrast kak faktor uyazvimosti rabotnika v trudovom prave. Vestnik Permskogo universiteta. Yuridicheskie nauki, 2020, no. 3. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 05.12.2021*

## ГИПОТЕЗА ГЕИ И ПРОБЛЕМЫ ЕЁ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

**Л.А. Володченкова**

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** Рассматривается простейшая математическая модель гипотезы Геи – гипотезы «живой» Земли. Обсуждаются математические трудности на пути использования предложенной модели.

**Ключевые слова:** гипотеза Геи, математическая модель, равновесие Нэша, метафизика.

### Введение

В середине 1960-х гг. гипотезу Геи (она названа так в честь греческой богини Земли), о которой говорят, что она предполагает, что планета Земля – это *живой организм*, предложили американский микробиолог Линн Маргулис и британский химик, биофизик и медик Джеймс Лавлок.

Лавлок писал:

«Земля является саморегулирующейся системой, способной удерживать комфортный климат и химический состав для организмов, населяющих её».

«Гея – сложная, целостная система, которая охватывает земную биосферу, атмосферу, океаны и почву. В своей совокупности она образует кибернетическую систему, которая стремится к тому, чтобы на нашей планете установились оптимальные физические и химические условия».

Когда математик говорит об оптимальных условиях, то имеет в виду реализацию ситуации, которая каким-то образом устраивает все участвующие стороны. В случае Геи такими сторонами являются, как указано в цитате из Лавлока, биосфера, атмосфера, океаны и почва. Однако, вспоминая Вернадского, следует добавить сюда и людей с их технологиями и стремлениями преобразовать природу.

Если направить свои усилия на создание математической модели Геи, то очевидно, что математическая формулировка, принимаемая при этом условии оптимальности, зависит от используемого математического аппарата.

В данной статье модель Геи – это система обыкновенных дифференциальных уравнений с множеством различных изменяющихся параметров (факторов)  $p = (p_1, \dots, p_{D_1})$ , которые в какой-то мере являются заинтересованными сторонами – игроками разыгрываемой картины эволюции Геи. Естественно в случае нашей модели воспользоваться теорией дифференциальных игр и имеющимися в ней критериями оптимальности, одним из которых является *критерий Нэша*, позволяющий говорить при его выполнении о наступлении *равновесия Нэша*.

Критерий Нэша строится на учёте интересов всех участвующих в игре сторон, всех игроков. Напротив, критерий Штакельберга отдаёт предпочтение одной доминирующей стороне, под которой можно понимать Homo Sapiens – людей, от которых сам Лавлок не ждёт ничего хорошего и поэтому неоднократно предупреждал о том, что Гея начнёт избавляться от этого игрока, меняя биосферу Земли.

Чтобы смоделировать замысел о «саморегулируемости» организма Геи, мы обращаемся к математическому понятию оптимального управления Нэша, при котором выбор параметров  $p$  управления происходит с учётом текущего состояния  $x$  организма Геи. Такое управление называется *позиционным управлением* и обозначается часто как  $p(x)$ . Часто говорят при этом о выборе игроками *марковской стратегии*.

## 1. Математическая модель Геи

Математическая модель Геи – это совокупность уравнений, описывающих биосферу регионов [1], этносфер и социосфер [2], которые мы приводим ниже. Полностью модель представлена в книге [2].

Ниже мы приводим все эти дифференциальные уравнения без разъяснения входящих в правую часть членов (их описанию и посвящена книга [2]). Они нам необходимы для того, чтобы читатель в следующем параграфе наиболее полным образом представил весь масштаб проблем моделирования Геи.

### 1.1. Биомасса океана

Биомасса океана складывается из биомассы фитопланктона, nekтона и детрита.

Продукция биомассы фитопланктона  $\Phi$ ,  $т/км^2$ :

$$\frac{d\Phi}{dt} = R_\Phi - M_\Phi - T_\Phi - \Sigma_\Phi. \quad (1)$$

Продукция биомассы nekтона  $r$ ,  $т/км^2$ :

$$\frac{dr}{dt} = R_r - M_r - T_r - \Sigma_r. \quad (2)$$

Продукция биомассы детрита  $D$ ,  $т/км^2$ :

$$\frac{dD}{dt} = M_\Phi - M_r + H_r - (k_{D_2}\nu_D + k_{D_3}(1 - \nu_D)) D. \quad (3)$$

## 1.2. Биомасса суши

Биомасса суши распределена по регионам. Ниже мы метим каждый регион индексом  $i = 1, \dots, N$ , где  $N$  – количество регионов.

Продукции биомассы лесной растительности  $L_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dL_i}{dt} = R_{L_i} - M_{L_i} - T_{L_i} - \Sigma_{L_i}. \quad (4)$$

Продукции биомассы травяной растительности  $Y_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dY_i}{dt} = R_{Y_i} - M_{Y_i} - T_{Y_i} - \Sigma_{Y_i}. \quad (5)$$

Продукция биомассы сельскохозяйственной растительности  $X_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dX_i}{dt} = R_{X_i} - M_{X_i} - T_{X_i} - \Sigma_{X_i} - \Pi_{X_i}. \quad (6)$$

Продукция биомассы животных  $F_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dF_i}{dt} = R_{F_i} - M_{F_i} - H_{F_i} - T_{F_i} - \Sigma_{F_i} - \Pi_{F_i}. \quad (7)$$

Динамика биомассы гумуса (почва)  $Q_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{dt} = & k_{QF_i}M_{F_i} + k_{QG_i}M_{G_i} + k_{QX_i}M_{X_i} + k_{QL_i}M_{L_i} + k_{QY_i}M_{Y_i} + \\ & + k_{QH_i}H_{GH_i} + k_{QFH_i}H_{FH_i} - R_{MQ_i}. \end{aligned} \quad (8)$$

Динамика добычи полезных ископаемых в  $i$ -м регионе  $M_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dM_i}{dt} = -R_{MG_i}G_i + \frac{U_{MG_i}V_i}{G_{MG_i}}. \quad (9)$$

Динамика капитала  $V_i$ , усл. ед.:

$$\frac{dV_i}{dt} = V_{MG_i}G_i - \frac{V_i}{T_{VG_i}}. \quad (10)$$

Динамика сельскохозяйственных инвестиций  $v_i$ , %/100:

$$\frac{dv_i}{dt} = (U_{vG_i}v_{FG_i}v_{qG_i} - v_i)/T_{vi}. \quad (11)$$

Динамика промышленного загрязнения окружающей среды  $Z_i$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dZ_i}{dt} = Z_{kVG_i} - Z_{TV_i}. \quad (12)$$

Рост населения  $i$ -го региона  $G_i$ , чел./ $\kappa m^2$ :

$$\frac{dG_i}{dt} = R_{G_i} - H_{GH_i} - M_{G_i} - T_{G_i}. \quad (13)$$

### 1.3. Атмосфера

Концентрация кислорода  $O$ , в % , по объёму в атмосфере:

$$\begin{aligned} \frac{dO}{dt} = \frac{100}{\sigma} \{ & k_O R_\Phi \sigma_0 + \sum_{j=1}^m [(k_{XO_j} R_{X_j} - \nu_{XO_j} T_{X_j}) \sigma_{X_j} + \\ & + (k_{LO_j} R_{L_j} - \nu_{LO_j} T_{L_j}) \sigma_{L_j} + (k_{YO_j} R_{Y_j} - \nu_{YO_j} T_{Y_j}) \sigma_{Y_j} - \\ & - (b_{GO_j} G_j + \nu_{F_j} T_{F_j} + \nu_{G_j} T_{G_j} + \mu_{O_j} R_{MQ_j}) \sigma_j \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Концентрация углекислого газа  $C_1$ ,  $m/\kappa m^2$ , по объёму в атмосфере, а также продукция биомассы углерода в верхнем перемешанном слое  $C_2$ ,  $m/\kappa m^2$ , и в глубинных слоях  $C_3$ ,  $m/\kappa m^2$ , океана:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} = \frac{100}{\sigma} \sum_{j=1}^m [ & (\psi_{XC_j} T_{X_j} - \theta_{XC_j} R_{X_j}) \sigma_{X_j} + \\ & + (\psi_{LC_j} T_{L_j} - \theta_{LC_j} R_{L_j}) \sigma_{L_j} + \\ & + (\psi_{YC_j} T_{Y_j} - \theta_{YC_j} R_{Y_j}) \sigma_{Y_j} + \\ & + (b_{GC_j} G_j + \mu_{C_j} R_{MQ_j}) \sigma_j] - \\ & - \lambda_1 C_1 + \frac{100}{P_A} \lambda_2 C_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dC_2}{dt} = \lambda_1 \frac{P_A}{100} C_1 + \lambda_4 C_3 - \\ - \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_2 + k_{D2} \nu_D D - k_{\Phi C} R_\Phi, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{dC_3}{dt} = \lambda_3 C_2 - \lambda_4 C_3 + k_{D3} (1 - \nu_D) D. \quad (17)$$

Замутнённость атмосферы  $B$ ,  $m/\kappa m^2$ :

$$\frac{dB}{dt} = B_n + \rho \frac{dT}{dt} - \frac{B}{T_B} + \sum_{j=1}^m (N_{Bj} Z_j + N_{Aj} b_{GC_j} G_j)^{1/4}. \quad (18)$$

### 1.4. Круговорот воды

Вода измеряется величиной столба,  $m$ , над единицей площади. Введём обозначения:

$W_i$  – количество воды (на суше) в  $i$ -м регионе;

$W_0$  – количество воды в океане (= средней глубине, что составляет по современным данным от 3653 до 3705  $m$ );

$W_A$  – вода в атмосфере;

$$W_A = W_{0A} + \sum_{i=1}^m W_{iA},$$

где  $W_{0A}$  – вода в атмосфере над поверхностью океана;  $W_{iA}$  – вода в атмосфере над поверхностью  $i$ -го региона.

Имеем уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{dW_{iA}}{dt} &= W_{iPA} + W_{iFA} + W_{iSA} - W_{iA0} - \\ &- W_{iAS} - \sum_{j=1}^m W_{iAj}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_{iS}}{dt} &= \frac{\sigma_0}{\sigma_i} W_{0Ai} + \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j}{\sigma_i} W_{jAi} + \sum_{j \neq i} \left( \frac{\sigma_j}{\sigma_i} W_{jSi} - W_{iSj} \right) + \\ &+ W_{iAS} + W_{iHGS} - W_{iSA} - W_{Si0} - W_{iSH} - \\ &- W_{iSF} - W_{iSP} - W_{iSG}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{dt} &= W_{0A0} + \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j}{\sigma_0} (W_{jA0} + W_{jS0} + W_{jF0} + W_{jH0} + \\ &+ W_{jSG0} + W_{jHG0}) - W_{0A}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{dW_{iH}}{dt} = W_{iSH} - W_{iH0} - W_{iHG}, \quad (22)$$

$$\frac{dW_{iF}}{dt} = W_{iSF} - W_{iF0} - W_{iFA}, \quad (23)$$

$$\frac{dW_{iP}}{dt} = W_{iSP} - W_{iPA} = \beta_{iX} \frac{dX_i}{dt} + \beta_{iY} \frac{dY_i}{dt} + \beta_{iL} \frac{dL_i}{dt}. \quad (24)$$

### 1.5. Эволюция этносов

Под этносом мы понимаем совокупность людей, имеющих одинаковый стереотип поведения и отличающих «своих» от «чужих» (Л. Гумилев).

Каждый этнос  $j = 1, \dots, E$  рассматривается как «система», состоящая из подсистем: пассионарии, субпассионарии, гармоничные люди, организация, наука и техника, культура и искусство, ландшафт, – которым сопоставлен соответственно уровень пассионарной энергии  $P_j, S_j, H_j, Or_j, T_j, Cu_j, Ln_j$ .

Уровень пассионарности  $P_i$  подсистемы пассионариев:

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= P_{\Pi i} + P_{P_i}^{(+)} + P_{H_i} + P_{S_i}^{(+)} - \\ &- P_{Or,i} - P_{W_i} - P_{E_i} - P_{P_i} - P_{S_i}^{(-)} - P_{Ln,i}. \end{aligned} \quad (25)$$

Уровень пассионарности подсистемы субпассионариев:

$$\frac{dS_i}{dt} = S_{\Pi i} - S_{P_i} - S_{W_i}. \quad (26)$$

Уровень пассионарности подсистемы гармоничных людей:

$$\frac{dH_i}{dt} = H_{\Pi i} + H_{TCu,i} - H_{Pi} - H_{Wi} - H_{Or,i} - H_{Ln,i}. \quad (27)$$

Динамика подсистемы «Организация»:

$$\begin{aligned} \frac{dOr_i}{dt} = & Or_{Pi} + Or_{Hi}^{(+)} + Or_{WPi} + Or_{WH,i} + Or_{WOr,i}^{(+)} + Or_{Ln,i} - \\ & - Or_{WOi}^{(-)} - Or_{Hi}^{(-)} - Or_{Ti}^1 - Or_{Cu,i}^1 - Or_{Ti}^2 - Or_{Cu,i}^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Динамика уровня пассионарности подсистемы науки и техники:

$$\frac{dT_i}{dt} = T_{Pi} + T_{Or,i}^{(+)} - T_{Or,i}^{(-)} - T_{Hi}, \quad (29)$$

Динамика уровня пассионарности подсистемы культуры и искусства:

$$\frac{dCu_i}{dt} = Cu_{Pi} + Cu_{Cu,i} + Cu_{Or,i}^{(+)} + Cu_{Ln,i} - Cu_{Or,i}^{(-)} - Cu_{Hi}, \quad (30)$$

Динамика уровня пассионарности подсистемы «Ландшафт»:

$$\frac{dLn_i}{dt} = L_{Pi} + L_{Hi} - L_{Or,i} - L_{Cu,i}. \quad (31)$$

### 1.6. Эволюция обществ

Общества, или нации для простоты понимания, описываем в рамках теории социальных систем Парсонса. Каждое общество  $s = 1, \dots, S$  – это система, состоящая из взаимодействующих подсистем – подсистемы институциональных этнических образцов, социетального сообщества, экономической системы, политической системы – с соответствующими числовыми уровнями:  $K_s$ ,  $\lambda_s$ ,  $e_s$ ,  $g_s$ , единицы измерения которых особо устанавливаются.

Динамика уровня органической солидарности по Дюркгейму  $K_s$  описывается уравнением

$$\frac{dK_s}{dt} = K_{\pi s} + K_{Or,s} + K_{gs} + K_{Fs} + K_{Xs} - K_{Gi} - K_{Kj0} - K_{\lambda s}. \quad (32)$$

Уровень механической солидарности по Дюркгейму  $\lambda_i$ :

$$\frac{d\lambda_s}{dt} = \lambda_{Or,s} + \lambda_{gs} + \lambda_{Cu,s} - \lambda_{Ps} - \lambda_{HSs} - \lambda_{Hs}, \quad (33)$$

Уровень адаптации к окружающей природной среде:

$$\frac{de_s}{dt} = e_{Ks} + e_{\mu s} + e_{Vs} + e_{vs} + e_{Ts} + e_{gs}^{(\pm)} + e_{Ks}^{(\pm)}. \quad (34)$$

Уровень обеспечения достижения общих целей:

$$\frac{dg_s}{dt} = g_{PHs} + g_{es} + g_{Ps} + g_{K\lambda s} - g_{Ks} - g_{\lambda s} - g_{es}^{(-)}. \quad (35)$$

## 2. Проблемы нахождения оптимальных условий

Итак, мы имеем систему уравнений (1)–(35), где еще необходимо определиться с содержанием понятия региона и их количеством  $N$ ; количеством этносов (этносфер) и количеством обществ (наций или государств) на Земле. При этом мы упростим задачу моделирования, группируя этносы, относящиеся к одному государству. Дело в том, что количество этносов рядом исследователей определяется как число 5000! В справочниках же их указывается не менее 800. Государств же намного меньше, в ООН их 193. А вот если под регионом понимать биогеоценозы, то их десятки или сотни тысяч.

Пусть регионов столько же, сколько государств – 193. У нас 35 уравнений. Их них 26 индексируются государствами. Следовательно, имеем дело с системой из  $D = 26 \times 193 + 9 = 5027$  дифференциальных уравнений (к ним надо ещё добавить члены, учитывающие взаимодействия между государствами (этносоми), которые представим условно как, например,

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_1, \dots, x_D, p_1, \dots, p_{D_1}), \quad k = 1, \dots, D, \quad (36)$$

где  $D$  – количество переменных, описывающих регионы-этносы-общества, а  $D_1$  – количество управляющих параметров (факторов).

Если теперь мы пожелаем установить эпоху *стационарного равновесия*  $[T_1, T_2]$ , когда переменные  $x_k$  почти неизменны, т. е.

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = 0, \quad t \in [T_1, T_2], \quad k = 1, \dots, D,$$

то необходимо найти решение системы

$$f_k(x_1, \dots, x_D, p_1, \dots, p_{D_1}) = 0, \quad k = 1, \dots, D, \quad (37)$$

из 5027 алгебраических уравнений с параметрами. Мы не представляем, как это можно сделать при современном уровне развития искусственного интеллекта. Именно искусственного, ибо вряд ли это под силу людям. Хотя в истории науки были примеры решения сотнями и тысячами математиков важнейших государственных заданий, связанных с вооружениями.

Если же мы будем рассматривать систему уравнений (36) как дифференциальную игру [3], вводя для параметров  $p_j$  выигрышные функции  $J_m(p_1, \dots, p_{D_1})$  и отыскивая равновесие Нэша, то нам необходимо найти оптимальные условия – набор параметров  $(p_1^*, \dots, p_{D_1}^*)$  таких, что выполняются  $D = 5027$  неравенств

$$J_m(p_1^*, \dots, p_{j-1}^*, p_j^*, p_{j+1}^*, \dots, p_{D_1}^*) \leq J_m(p_1^*, \dots, p_{j-1}^*, p_j, p_{j+1}^*, \dots, p_{D_1}^*), \quad \forall p_j \forall m = 1, \dots, D.$$

Математики доказали множество теорем, дающих алгоритмы нахождения *оптимального управления* (равновесия) *Нэша*. В частности, такие теоремы, направленные на поиск оптимального позиционного управления, даны в [3]. Однако наличие огромного количества переменных и параметров  $x_m$  и  $p_j$  является препятствием на пути решения желанной задачи.



Как видим, нужна принципиально иная организация науки и иные методы решения дифференциальных уравнений или игр со сверхбольшим числом переменных и параметров на базе искусственного интеллекта, чем то, что нам известно на сегодняшний день.

Но и это ещё не всё. Думается, что моделирование Геи требует пересмотра всего нашего мировоззрения, наших взглядов на структуру Вселенной и на место в ней человека.

### **3. Метафизика гипотезы Геи**

Гипотеза Геи, или Земли как живого организма, который, функционируя, оптимизирует условия проживания на нашей планете и поддерживает некоторое равновесие, встречает внутренний протест. Почему?

Попробуем подойти к этому со стороны метафизики, со стороны возможной смены научной парадигмы и мировоззрения [4].

Со школьной скамьи мы знаем, что Земля – это неодушевлённая сущность; планета не есть живое существо. Но если мы к живому относимся подчас с бешеной жестокостью, то трудно поверить, что воспитанием или посредством особых «методических подходов», убедив людей, что планета «живая», можно добиться «бережного отношения к Земле как к "живому" существу».

Рядом с рациональным восприятием Земли, как неодушевлённой сущности, существует мифологема об одушевлённой планете, на поверхности которой обитают люди. Вместе с теорией эволюции эта мифологема ведёт к утверждению, что люди суть дети, созданные Землёй, ею взращённые и ведущие себя по отношению к своей матери всё более вздорно, неразумно и недалёковидно. Естественно, раз планета живое существо, то она должно реагировать на раздражения, являющиеся совокупными «подростковыми» действиями людей. Такая реакция красочно описана, например, в повести братьев Стругацких «За миллиард лет до конца света».

Как осознание неправильности существующего хищнического поведения людей по отношению к природе, к Земле, у нас и возникает представление о необходимости формирования бережного отношения к Земле как к «живому» существу. Возникает иллюзия, что если будем относиться «бережно», то исчезнет то, что нам не нравится и чего мы боимся: ураганы, извержения вулканов, наводнения, гигантские пожары, жара или холод. На рациональном уровне, когда отрицается одушевлённость планеты, среди рационалистов распространена практически та же иллюзия: если будем поступать рационально, т. е. по-научному, то естественно избежим природных катастроф.

Как мы знаем, нам не удаётся понять, откуда взялись люди, как появилось сознание. Создание людей «живой» планетой кажется нам наивным. Не говоря уже о том, что если допустить «живую» Землю, то придётся дополнительно разбираться с не менее трудным вопросом, таким как «откуда взялась живая планета».

Трудных нерешаемых вопросов в современной науке накопилось слишком много. Так может причина в том, что современная наука идёт по ложному

пути рационализма: Большой Взрыв  $\Rightarrow$  водород  $\Rightarrow$  звезды и планеты  $\Rightarrow$  живое вещество на планетах  $\Rightarrow$  люди.

И ради комфортного существования допустимо потребительское отношение к Природе. Тем более, современная наука говорит об отчужденности людей от места своего рождения: возникнут проблемы с проживанием на Земле – заменим планету. Сколько не говори человеку, что плохо ходить по газонам и устраивать костры в лесу, он топчет траву и сжигает леса.

Думается, стоит исследовать иной путь: Ничто  $\Rightarrow$  сознание  $\Rightarrow$  люди+Земля  $\Rightarrow$  звезды  $\Rightarrow$  планеты  $\Rightarrow$  галактики  $\Rightarrow$ ...  $\Rightarrow$  всё, что надо людям для комфортной жизни.

Осознание себя во тьме – процесс скучный, и как результат загораются во тьме звезды. Иначе говоря, люди сами творят Вселенную. Поэтому и Земля есть их создание, и поэтому она, Гея, заботится о своих творцах, обеспечивает им оптимальные условия существования. Сказанное похоже на какой-то коллективный солипсизм или абсолютный идеализм.

Наука отвергла подобный путь в XIX в. Наука материалистична. В XX в., как нам всем казалось, данный отказ продемонстрировал свою эффективность.

Да, выбранный путь дал нам современную техническую цивилизацию. Но оказался беспомощным в вопросе о происхождения сознания. Но иной путь говорит, что окружающий Мир создаём мы сами актом непустого мышления [5]. Если мы сами, своими мыслями, творим Землю, космос, Вселенную, то стоит задуматься о своих мыслях и поступках и о мыслях и поступках других людей. Все вещи возникают из Ничего точно так же, как по теореме Банаха из чёрного квадрата шаг за шагом в ходе итераций сжимающих отображений возникает прекрасный портрет девушки, известный в Интернете как *lena.bmp*. Сжимающие отображения суть непустое мышление. Оно определяет устойчивый образ наличных вещей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крапивин В.Ф., Свирижев Ю.М., Тарко А.М. Математическое моделирование глобальных биосферных процессов. М. : Наука, 1982.
2. Гуц А.К., Паутова Л.А. Глобальная этносоциология. Изд. 2, доп. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019. 248 с.
3. Lewis F.L., Vrabie D.L., Sirmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
4. Володченкова Л.А., Гуц А.К. «Живая» и «неживая» Земля // Информационные технологии в экологии: материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной Году экологии в России (г. Нижневартовск, 23 ноября 2017) / отв. ред. Т.Б. Казиахмедов. Нижневартовск: Изд-во Нижневарт. гос. ун-та, 2018. С. 202–203.
5. Гуц А.К. Метафизика теоретической истории // Метафизика. 2015. № 4. С. 9–30.

**GAIA HYPOTHESIS AND PROBLEMS OF ITS MATHEMATICAL MODELING****L.A. Volodchenkova**

PhD. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The simplest mathematical the model of the Gaia hypothesis – the hypothesis of the "living" Earth. Mathematical difficulties in the way of using the proposed models are discussed.

**Keywords:** Gaia hypothesis, mathematical model, Nash equilibrium, metaphysics.

**REFERENCES**

1. Krapivin V.F., Svirizhev Yu.M., and Tarko A.M. *Matematicheskoe modelirovanie global'nykh biosfernykh protsessov*, Moscow, Nauka, 1982. (in Russian)
2. Guts A.K. and Pautova L.A. *Global'naya etnosotsiologiya. Izd. 2, dop.*, Moscow, Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2019, 248 p. (in Russian)
3. Lewis F.L., Vrabie D.L., and Syrmos V.L. *Optimal Control*. John Wiley & Sons, Inc., 2012.
4. Volodchenkova L.A. and Guts A.K. "Zhivaya" i "nezhivaya" Zemlya, *Informatsionnye tekhnologii v ekologii: materialy Vserossiiskoi nauchno-praktiche-skoi konferentsii, posvyashchennoi Godu ekologii v Rossii (g. Nizhnevartovsk, 23 noyabrya 2017)*, otv. red. T.B. Kaziakhmedov, Nizhnevartovsk, Izd-vo Nizhnevart. gos. un-ta, 2018, 203 p, pp. 202-203. (in Russian)
5. Guts A.K. *Metafizika teoreticheskoi istorii. Metafizika*, 2015, no.4, pp. 9–30. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 20.03.2022*

## **A NATURAL CAUSALITY-MOTIVATED DESCRIPTION OF LEARNING**

**O. Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: [olgak@utep.edu](mailto:olgak@utep.edu)

**V. Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: [vladik@utep.edu](mailto:vladik@utep.edu)

University of Texas at El Paso, El Paso, USA

**Abstract.** Teaching is not easy. One of the main reasons why it is not easy is that the existing descriptions of the teaching process are not very precise – and thus, we cannot use the usual optimization techniques, techniques which require a precise model of the corresponding phenomenon. It is therefore desirable to come up with a precise description of the learning process. To come up with such a description, we notice that on the set of all possible states of learning, there is a natural order  $s \leq s'$  meaning that we can bring the student from the state  $s$  to the state  $s'$ . This relation is similar to the causality relation of relativity theory, where  $a \leq b$  means that we can move from point  $a$  to point  $b$ . In this paper, we use this analogy with relativity theory to come up with the basics of such an order-based description of learning. We hope that future studies of these basics will help to improve the teaching process.

**Keywords:** teaching, learning, relativity theory, causality, metric, kinematic metric.

### **1. Formulation of the Problem**

**How can we train instructors faster?** Effective teaching is not easy. For most instructors, it takes several years to master teaching – and even after these years, no matter how experienced the instructor is, there is always room for significant improvement.

How can we speed up this process? How can we make sure that instructors learn the teaching skills as soon as possible – and not, as now, spend several years learning these skills?

**This problem is not easy.** One of the reasons why training instructors takes so long is that teaching is not a precise science.

Naive thinking is that since we want to achieve optimal teaching, why not use optimization techniques – that have been so successful in many other application areas? Unfortunately, this is not that easy: optimization techniques require that the problem is formulated in precise terms, and the teaching problem is far from such a description.

**We need to describe teaching in precise terms.** To be able to utilize the effectiveness of the existing optimization tools, it is therefore desirable to be able to come up with a formal description of the teaching process.

**Our approach to this description.** One of our areas of interest is foundations of relativity, where an ordering relation – namely, the causality relation – turned out to play a fundamental role; see, e.g., [1–3]. In view of this fact, a natural idea is to look for a description of teaching in terms of an ordering relation.

## 2. Towards a Natural Description of the Learning Process

**What are states of student knowledge.** Before we start analyzing what is the natural relation on the set  $S$  of all possible states of knowledge, we first need to find out what is a natural way to describe these states.

To fully characterize the student's knowledge of the class material, we need to describe this student's degree of knowledge in each topic. Usually, the knowledge of each topic is described by a grade, and grades are somewhat subjective. To avoid this subjectivity, we can use some objective (or at least inter-subjective) way to gauging this knowledge: e.g., by the number of hours that an average student would take to get to this level of knowledge.

Thus, at any given moment of time, the student's knowledge can be characterized by the values  $s_1, \dots, s_n$  describing this student's knowledge of all  $n$  topics, or, in other words, by an  $n$ -dimensional point  $s = (s_1, \dots, s_n)$ . In this case,  $S$  is simply a subset in the  $n$ -dimensional affine space.

To be more precise, since the number of hours is always non-negative,  $S$  is a quadrant of the  $n$ -dimensional affine space in which all the coordinates  $s_i$  are non-negative.

**What is a natural ordering relation between states of knowledge.** Now that we have an idea of what is the set  $S$  of states of knowledge, we can start analyzing what is a natural relation between these states. To come up with such a description, let us use an analogy with causality. Causality relation  $a \leq b$  between two points (events) in space-time means that, in principle, we can go from the point  $a$  to the point  $b$ , i.e., an observer can first observe  $a$  and then observe  $b$ .

Similarly, we can define an order  $s \leq s'$  between two different states of knowledge as the possibility to go from the state  $s$  to the state  $s'$ , i.e., the possibility that a student was first in the state  $s$  and at some future moment of time, the knowledge of this student is characterized by the state  $s'$ .

We assume that the skills the students learn are not forgotten during for the duration of the course – or, to be more precise, that, in the first approximation, we can ignore the effects of possible forgetting. Under this assumption, the student's level of knowledge in each topic cannot decrease, so we cannot have  $s_i > s'_i$ . On the other hand, if  $s_i \leq s'_i$  for all  $i$ , then we can move from the state  $s$  to the state  $s'$  by teaching the student additional material in each topic. Thus, a natural ordering relation on the set  $S$  of all states of the student knowledge is the coordinate-wise

order:

$$(s = (s_1, \dots, s_n) \leq s' = (s'_1, \dots, s'_n)) \Leftrightarrow (s_i \leq s'_i \text{ for all } i). \quad (1)$$

**How much effort do we need to move the students from one state to another.** The ultimate goal of teaching is to bring the student from the original state  $(0, \dots, 0)$  (in which the student does not yet have any knowledge of any of the class topics) to the desired state  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ , where  $\ell_i$  is the student's desired level of knowledge on the  $i$ -th topic.

Our goal is to bring the student there the fastest way. To find out which way is the fastest, we need to know, for every two states  $s \leq s'$ , how much student effort (e.g., measured by hours) we need to get from the state  $s$  to the state  $s'$ . Let us denote this amount by  $d(s, s')$ . To be more precise,  $d(s, s')$  denote the smallest possible effort needed to get from the state  $s$  to the state  $s'$ .

*Comment.* In the idealized case when all topics are independent, the only way to go from state  $s$  to state  $s'$  is to teach the student additional material for each topic. Because of our selection of the way we measure the student's knowledge in each topic – by the number of hours needed to go from 0 to  $s_i$  – the additional time needed for the student to improve his/her knowledge from level  $s_i$  to the level  $s'_i$  is to spend time  $s'_i - s_i$ . In this case, the overall time needed to go from  $s$  to  $s'$  is equal to the sum of these times:

$$d(s, s') = \sum_{i=1}^n (s'_i - s_i). \quad (2)$$

In reality, topics are interdependent, so the knowledge of one topic helps to study another topic. For example, knowing basic physics helps students to better understand calculus – for example, the derivative can be naturally understood when a student realizes the velocity is the derivative of the coordinate. Similarly, knowing the derivative can help the student better understand the ideas of velocity and acceleration. Because of such mutual help, the overall time needed to go from  $s$  to  $s'$  can be smaller than the sum of the corresponding times:

$$d(s, s') \leq \sum_{i=1}^n (s'_i - s_i). \quad (3)$$

**What are natural properties of the function  $d(s, s')$ .** Any transition requires some efforts: the only time when the effort is 0 is when  $s = s'$ . So, we have the following property:

$$d(s, s) = 0 \text{ and } (d(s, s') = 0 \Rightarrow s = s'). \quad (4)$$

If we can go from state  $s$  to  $s'$  by using the amount  $d(s, s')$  of resources, and then we can go from  $s'$  to  $s''$  by using the amount  $d(s', s'')$  of resources, then one of the possible ways to go from the state  $s$  to the state  $s''$  is to go through  $s'$ . For this

two-stage transition, we spend the amount  $d(s, s') + d(s', s'')$ . Thus, the smallest possible amount  $d(s, s'')$  of resources needed to go from  $s$  to  $s''$  cannot exceed this sum. Thus, we have the usual triangle inequality:

$$d(s, s'') \leq d(s, s') + d(s', s''). \quad (5)$$

**How is our function  $d(s, s')$  related to metric and to its space-time analogue – kinematic metric (as measured by proper time)?** Properties (4) and (5) resemble the usual properties of metric. The main difference is that in our case, the value  $d(s, s')$  is only defined when  $s \leq s'$ . From this viewpoint, this notion resembles *kinematic metric*  $\tau(a, b)$  – the proper time that an inertial particle would measure when it goes from event  $a$  to event  $b$ : this value is also only defined when  $a \leq b$ . However, kinematic metric is known to be the *largest* value of the proper time – not the smallest as in our case – and thus, instead of the triangle inequality, it satisfies the opposite (“anti-triangle”) inequality

$$\tau(a, a'') \geq \tau(a, a') + \tau(a', a'').$$

From this viewpoint, the proposed model is intermediate between the regular metrics and the kinematic metrics.

**Towards a formal general definition.** Let us combine the above-described natural properties of this “learning” metric (we will call it  $\ell$ -metric,  $\ell$  for “learning”) into the following definition:

**Definition 1.** *Let  $(S, \leq)$  be a partially ordered set. By an  $\ell$ -metric we mean a function  $d(s, s')$  that is defined for all pairs  $s, s' \in S$  for which  $s \leq s'$  and that satisfies the properties (4) and (5).*

**Challenge.** Since  $\ell$ -metrics provide a natural description of learning, we believe that to enhance the learning process, it will be beneficial to study the properties of such  $\ell$ -metrics.

One such property is described in the next section.

### 3. Shift-Invariant Scale-Invariant $\ell$ -Metrics on the Finite-Dimensional Affine Space with Component-Wise Order

**Why shift-invariant and scale-invariant.** In the study of causality, a good approximation to real-life causality is provided by the Special Relativity Theory, in which:

- the causality relation is invariant with respect to shift  $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c$  and with respect to scalings:  $a \leq b \Leftrightarrow \lambda \cdot a \leq \lambda \cdot b$  for all  $\lambda > 0$ , and
- the kinematic metric is both shift- and scale-invariant:  $\tau(a, b) = \tau(a + c, b + c)$  and  $\tau(\lambda \cdot a, \lambda \cdot b) = \lambda \cdot \tau(a, b)$  for all  $\lambda > 0$ .

In our case, component-wise order is also clearly shift- and scale-invariant. It is therefore reasonable to consider shift- and scale-invariant  $\ell$ -metrics.

**Definition 2.** Let  $(S, \leq)$  be an  $n$ -dimensional affine space with coordinate-wise order (1). We say that an  $\ell$ -metric is:

- shift-invariant if  $d(s, s') = d(s + s'', s' + s'')$  for all  $s, s',$  and  $s''$ , and
- scale-invariant if  $d(\lambda \cdot s, \lambda \cdot s') = \lambda \cdot d(s, s')$  for all  $s, s',$  and  $\lambda > 0$ .

**Proposition 1.** Let  $(S, \leq)$  be an  $n$ -dimensional affine space with coordinate-wise order (1). The following two conditions are equivalent to each other for any function  $d(s, s')$  defined for all pairs  $s, s' \in S$  for which  $s \leq s'$ :

- $d(s, s')$  is a shift- and scale-invariant  $\ell$ -metric;
- $d(s, s')$  has the form

$$d(s, s') = (s'_1 - s_1) \cdot F\left(\frac{s'_2 - s_2}{s'_1 - s_1}, \dots, \frac{s'_n - s_n}{s'_1 - s_1}\right)$$

for some positive-valued convex function  $F(r_2, \dots, r_n)$ .

**Proof.** Shift-invariance clearly implies that  $d(s, s') = d(0, s - s')$ , and scale-invariance, with  $\lambda = s'_1 - s_1$  (when  $s'_1 > s_1$ ) implies that

$$d(s, s') = d(0, s' - s) = (s'_1 - s_1) \cdot d(0, (1, r_2, \dots, r_n)),$$

where we denoted

$$r_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s'_i - s_i}{s'_1 - s_1}.$$

So, if we denote

$$F(r_2, \dots, r_n) \stackrel{\text{def}}{=} d(0, (1, r_2, \dots, r_n)),$$

we almost get the desired result – the only thing remaining to prove is that the triangle inequality for the original function  $d(s, s')$  is equivalent to convexity of the function  $F(r_2, \dots, r_n)$ .

Indeed, due to shift-invariance, the triangle inequality gets the following equivalent form

$$d(0, s'' - s) \leq d(0, s' - s) + d(0, s'' - s').$$

So, if we denote  $a \stackrel{\text{def}}{=} s' - s$  and  $b \stackrel{\text{def}}{=} s'' - s'$ , we get the following equivalent form:

$$d(0, a + b) \leq d(0, a) + d(0, b). \tag{6}$$

Due to scale-invariance, we have

$$d(0, a) = a_1 \cdot d(0, (1, A_2, \dots, A_n)) = a_1 \cdot F(A_2, \dots, A_n),$$



where we denoted

$$A_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_i}{a_1}.$$

Similarly, we have

$$d(0, b) = b_1 \cdot F(B_1, \dots, B_n),$$

where we denoted

$$B_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b_i}{b_1},$$

and

$$d(0, a + b) = (a_1 + b_1) \cdot F(C_1, \dots, C_n),$$

where we denoted

$$C_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_i + b_i}{a_1 + b_1}.$$

Thus, the triangle inequality (6) takes the form

$$(a_1 + b_1) \cdot F(C_2, \dots, C_n) \leq a_1 \cdot F(A_2, \dots, A_n) + b_1 \cdot F(B_2, \dots, B_n).$$

Dividing both sides of this inequality by  $a_1 + b_1$ , we get an equivalent inequality

$$F(C_2, \dots, C_n) \leq \frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot F(A_2, \dots, A_n) + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot F(B_2, \dots, B_n),$$

i.e., if we denote

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a_1}{a_1 + b_1},$$

the form

$$F(C_2, \dots, C_n) \leq \alpha \cdot F(A_2, \dots, A_n) + (1 - \alpha) \cdot F(B_2, \dots, B_n). \quad (7)$$

By definition of  $A_i$  and  $B_i$ , we have  $a_i = a_1 \cdot A_i$  and  $b_i = b_1 \cdot B_i$ . Substituting these expressions for  $a_i$  and  $b_i$  into the formula that defined  $C_i$ , we get

$$C_i = \frac{a_i + b_i}{a_1 + b_1} = \frac{a_1 \cdot A_i + b_1 \cdot B_i}{a_1 + b_1} = \frac{a_1}{a_1 + b_1} \cdot A_i + \frac{b_1}{a_1 + b_1} \cdot B_i = \alpha \cdot A_i + (1 - \alpha) \cdot B_i.$$

Thus, the inequality (7) takes the equivalent form

$$\begin{aligned} F(\alpha \cdot A_2 + (1 - \alpha) \cdot B_2, \dots, \alpha \cdot A_n + (1 - \alpha) \cdot B_n) \leq \\ \alpha \cdot F(A_2, \dots, A_n) + (1 - \alpha) \cdot F(B_2, \dots, B_n), \end{aligned}$$

which is exactly the definition of convexity.

The equivalence between triangle inequality for the function  $d(s, s')$  and the convexity of the corresponding function  $F(r_2, \dots, r_n)$  is thus proven, and so is the proposition.

*Comment.* The case when all topics are independent and the  $\ell$ -metric is described by the formula (2) corresponds to the convex function  $F(r_2, \dots, r_n) = r_2 + \dots + r_n$ .

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes), and by the AT&T Fellowship in Information Technology.

It was also supported by the program of the development of the Scientific-Educational Mathematical Center of Volga Federal District No. 075-02-2020-1478, and by a grant from the Hungarian National Research, Development and Innovation Office (NRDI).

## REFERENCES

1. Alexandrov A.D. On Lorentz transformations. Uspekhi Math. Nauk, 1950, vol. 5, no. 1, p. 187 (in Russian).
2. Alexandrov A.D. and Ovchinnikova V.V. Remarks on the foundations of Special Relativity. Leningrad University Vestnik, 1953, no. 11, pp. 94–110 (in Russian).
3. Zeeman E.C. Causality implies the Lorentz group. Journal of Mathematical Physics, 1964, vol. 5, no. 4, pp. 490–493.

## МОТИВИРОВАННОЕ ЕСТЕСТВЕННОЙ ПРИЧИННОСТЬЮ ОПИСАНИЕ ОБУЧЕНИЯ

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, США

**Аннотация.** Преподавать нелегко. Одна из основных причин, почему это нелегко, заключается в том, что существующие описания процесса обучения не очень точны, и поэтому мы не можем использовать обычные методы оптимизации, методы, которые требуют точной модели соответствующего явления. Поэтому желательно придумать точное описание процесса обучения. Чтобы придумать такое описание, заметим, что на множестве всех возможных состояний обучения существует естественный порядок  $s \leq s'$ , означающий, что мы можем перевести ученика из состояния  $s$  в состояние  $s'$ . Это отношение похоже на отношение причинности теории относительности, где  $a \leq b$  означает, что мы можем двигаться из точки  $a$  в точку  $b$ . В этой статье мы используем эту аналогию с теорией относительности, чтобы придумать основы такого упорядоченного описания обучения. Мы надеемся, что дальнейшее изучение этих основ поможет улучшить процесс обучения.

**Ключевые слова:** преподавание, обучение, теория относительности, причинность, метрика, кинематическая метрика.

*Дата поступления в редакцию: 14.02.2022*

## **МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА СПОНТАННОГО КРИЗИСА В РАЗВИТИИ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ИНВАЗИИ**

**А.Ю. Переварюха**

к.т.н., старший научный сотрудник, e-mail: temp\_elf@mail.ru

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН, Санкт-Петербург,  
Россия

**Аннотация.** Динамика образования новых популяций в результате вселения чужеродных видов в устойчивое сообщество — часть важного современного направления междисциплинарных исследований. Цель нашего исследования — анализ вариативности ситуаций после попадания новых видов в изолированные биосистемы с применением методов вычислительного моделирования. Инвазионные процессы существенно отличаются от динамики взаимодействия устоявшихся популяций, что требует модификации уравнений. В каждой новой среде создаётся особая система регуляции и противоборства с временным последствием, потому инвазионные процессы чрезвычайно вариативны, как COVID протекает у людей очень различно. Математического описания требует ряд резких по амплитуде и стремительных по времени изменений численности, которые отличаются от циклических режимов у известных моделей. Реакция ответа часто непостоянная и адаптируется, что отличает актуальные сейчас ситуации от обычных трофических цепей. Статья посвящена разработке вычислительной модели для одного из важных вариантов развития инвазионного процесса, который наблюдается при приближении численности новой популяции к опасному для среды порогу. В модели описан сценарий кризисной динамики инвазии при оказываемой средой противодействии, которое недостаточно для остановки инвазии из-за значительного запаздывания необходимого для выработки ответа. Показаны ситуации в экспериментальных и реальных экосистемах, которые соответствуют описанному в вычислительном эксперименте кризисному сценарию.

**Ключевые слова:** вычислительные методы экоддинамики, агрессивные инвазии, модели популяционной депрессии, адаптационные механизмы, краткий кризис, порог противодействия, регуляция с последствием.

### **Введение**

Исследование посвящено специфическим сценариям популяционных процессов в рамках математической биологии. Компьютерное моделирование кризисных явлений актуально для современных задач биологического контроля.

Нежелательные для экономики природопользования вселенцы на первых стадиях агрессивной инвазии часто не испытывают сопротивления со стороны биотического окружения. Быстрорастущая популяция в таких условиях оказывается вне области балансового равновесия с ресурсами среды обитания. Некомпенсируемая репродуктивная активность вызывает далее резкие перепады численности [1]. Активизация приспособившихся врагов происходит позднее, что резко меняет характер процесса стремительного роста численности вселенца, но редко останавливает инвазию. До момента появления приспособившегося эффективного вида-антагониста иногда требовались десятилетия. Так случилось с появлением в 1869 г. в Северной Америке нескольких особей бабочки непарного шелкопряда, спорадическими вспышками уничтожавшей потом леса Канады [2]. Дополнительно известно из наблюдений, если существуют пороговые состояния, то величина исходной группы проникших особей влияет на дальнейшее развитие процесса.

Цель работы — разработка модели популяционного процесса для вида с большим репродуктивным потенциалом в ситуации с адаптивной формой противодействия. После первичной вспышки численность вселенца всегда снижается, но иногда обычное снижение резко переходит в фазу депрессии и даже с риском исчезновения — вариант «бутылочного горлышка». Давление антагонистов усиливается при достижении вселенцем пороговых значений численности, но не остаётся постоянным.

Ситуации в неустойчивых биосистемах со вспышками и с депрессиями требуют специальных подходов к моделированию [3]. В классической модели вспышки динамику определяют переходы между стационарными состояниями [4]. Сценарии с сериями вспышек и промежуточных кризисов остаются за рамками традиционных популяционных моделей равновесной или регулярной циклической динамики. Для модели инвазии с эффектом кризиса потребуется учёт времени запаздывания и в регуляции и в реакции окружения на нового конкурента. Новизной модельного сценария станет описание краткой формы популяционной депрессии, отличной от системного экологического кризиса.

## 1. Феномен популяционной цикличности и запаздывающая регуляция

Прогнозирование ожидаемой численности и/или допустимого изъятия из популяции остаётся важной практической задачей. Колебания численности возникали неоднократно у изолированных популяций в лабораториях. Для математического описания циклических изменений, которые не следуют из взаимодействий (прямого трофического «хищник – жертва» или адаптивного «паразит – хозяин»), в популяционной биологии Г. Хатчинсоном [5] предложено рассмотреть влияние запаздывания — некоторого предшествующего состояния биосистемы  $N(t - \psi(t))$  на скорость современного воспроизводства. Уравнений в теоретическом обзоре по экологии циклических биосистем [5] не было.

Непосредственно модель в форме уравнения предложена позднее, сперва

Е. Райтом  $y'(t) = -\alpha y(t-1)[1 + y(t)]^1$  [6], в дальнейшем «уравнение Хатчинсона» выписано Р. Мэем [7] в современном привычном экологам виде:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right), \quad (1)$$

где  $r$  — традиционно репродуктивный потенциал популяции. Изначально  $r$  — разность между естественной смертностью и рождаемостью в единицу времени. Параметр  $K$  заимствован из модели ограниченного роста  $N(t) \rightarrow K$  Ферхюльста–Пирла, где отражает уровень насыщения экологической ниши. Фактически (1) это модификация  $\dot{N} = rf(N(t-\tau))$  с запаздыванием  $\tau$  для уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = rf(N(t)) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right). \quad (2)$$

Заимствованный в другие модели хрестоматийный параметр  $K$  в (2) устанавливал доступный уровень неразрушающего заполнения среды: при  $0 < N(0) < K$  выполняется  $\max N(t) = K$ .

В разных работах по моделированию [8]  $K$  на самом деле следует трактовать с различными аспектами для разных сценариев в зависимости от ситуации и свойств выбранной  $f(N)$ . За разными трактовками  $K$  стоит теория экологической регуляции [9]. Ёмкость среды может опосредованно действовать на смертность, например через скорость роста личинок [10]. В экологии различают фундаментальную и реализованную экологические ниши [11].

Интерпретация  $K$  в моделях для анализа разных переходных процессов будет неоднозначна. При развитии экстремальных процессов в биосистемах численность агрессивного вселенца значимое время превышает гипотетическую балансовую ёмкость для биосистемы. Для летального патогена балансовой ёмкости не существует. Для многих явлений экодинамики использование при моделировании  $K$  как оптимальной ёмкости ниши или уровня-ограничителя только инструментальное средство.

Модель (1) предназначалась для наглядного описания колебаний  $\forall N(0) > 0$ , так как при  $r\tau = \pi/2$  наблюдается бифуркация рождения цикла [12]. Ёмкость насыщения экологической ниши  $K$  при  $r\tau > \pi/2$  становится точкой центра для возникшего цикла  $N_*(t; r\tau)$  со свойством  $\forall N(0), |\max N_*(t) - \min N_*(t)| \approx K$ . Уравнение (1) исследовано многими авторами [13, 14] и часто в однопараметрической форме:  $\dot{x} = \lambda x(t)(1 - x(t-\tau))$  без интерпретации.

Исследования (1) не закрыли многие проблемы в адекватном описании разнообразных популяционных колебаний. Развитие и усложнение (1) привело к появлению направления в моделировании — разработки уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах моделирования биологических процессов. Уравнения с  $N(t-\tau)$  стали актуальны не только для динамики популяций. Применяются в изучении механизмов транскрипции ДНК→РНК и синтеза белков.

<sup>1</sup> Мы сохраняем оригинальные обозначения авторов, очевидно тут  $\alpha$  эквивалентно  $r$  в (1).

Развитие направления связано с проблемами, которые не имеют особого интереса с точки зрения теоретической математики, но значимы для вычислительного моделирования в биологической области.

М. Смит предложил [15] альтернативную для (1) модель флуктуаций насекомых в лабораторных опытах, но этот вариант уравнения не получил развития. В репродуктивном сомножителе запаздывание  $\tau$  – экологически избыточное включение:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau)(1 - N(t - \tau)) - \delta N(t). \quad (3)$$

Направление моделирования лимитированного средой роста продолжает развиваться в современных модификациях и с необычными коэффициентами, например:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \frac{(1 - N(t)/(K + \vartheta N))^{\Theta}}{(1 - N(t))/K(1 - \gamma)}. \quad (4)$$

Решения подобных (4) моделей описывают уравнивающиеся процессы  $\forall N(0) > 0$ . Не все такие уравнения имеет смысл дополнять включением  $t - \tau$ . Основное отличие у разных моделей ограниченного роста – положение точки перегиба  $N_p \neq 0$  на графике решения  $N(t)$ . Для модели (2) ордината точки перегиба  $N_p = K/2$ , абсцисса  $t_p = r^{-1} \ln(K - N(0))/N(0)$ . Положение ординаты точки перегиба  $N_p$  важно установить для задачи оптимальной эксплуатации и анализа сценариев с изъятием  $\dot{N} = rf(N(t)) - Q$ . Прирост численности в точке  $N_p$  максимизируется. Тогда популяция демонстрирует лучшую продуктивность, а весь излишек прироста можно изымать. Концепция чрезвычайно опасна для промысла популяций с критическими пороговыми состояниями<sup>2</sup>.

Для «модели Хатчинсона» известно несколько модификаций и вариантов обобщений уравнения [16]. Например, модификация в [17] подходит для случая разного времени взросления самцов и самок:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{c_1 N(t - \tau) + c_2 N(t - \tau_1)}{K} \right). \quad (5)$$

Модификация, где регуляция на основе  $K$  включена с относительной величиной насыщения:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( \frac{K - N(t - \tau)}{(K + cN(t - \tau))} \right). \quad (6)$$

Модель  $\dot{N} = rf(N(t - \tau)) - F(N)$  с запаздывающей регуляцией, но без параметра ниши  $K$  с  $f(x) = rxe^{-bx}$  предложена на основе изучения экспериментов энтомолога А. Николсона:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - \delta N(t). \quad (7)$$

<sup>2</sup> Из-за действия экологического эффекта Олли.

А. Николсон создал конкуренцию за ресурсы между тремя стадиями развития насекомых и вызвал колебания большой амплитуды. Смертность  $\delta$  добавлена в (7) произвольно, хищников/паразитов в опыте не использовали. При увеличении  $r\tau$  решение (7) демонстрирует релаксационные колебания [18], но с очень малыми минимальными значениями.

Важна сущностная трактовка возникновения  $\tau$  запаздывания  $t - \tau$ , или, обобщённо,  $t - \psi(t)$ . Величина времени  $\tau$  изначально в [5] относилась к регуляции эффективности воспроизводства через задержку онтогенетического развития. Изменение запаздывания по некоторому закону  $\tau = \psi(t)$  может возникать при существовании смежных поколений с разной длительностью онтогенеза, когда одно из поколений проходит зимовку, что является специфическим случаем. Длина жизненного цикла вида и интервалы между пиками численности у его популяций не всегда сопоставимые величины на шкале времени. Мы предлагаем разделять запаздывание при интерпретации моделей на репродуктивное (онтогенетическое), регуляционное из-за исчерпания ресурсов и адаптивное — время для выработки ответной реакции.

## 2. Проблемный аспект (1),(7) — приближение к нулю минимумов цикла

У метода получения осциллирующих решений в моделях с  $t - \tau$  есть проблема с точки зрения экологической обоснованности поведения решений. Если увеличивать  $r\tau > \pi/2$  в (1), то цикл  $N_*(t; r\tau)$  быстро приобретёт форму негармонических колебаний. Релаксационный цикл с увеличивающейся амплитудой по мере возрастания  $r\tau$  получит форму всё дальше отстающих друг от друга во времени  $\Lambda$ -образных пиков  $\max N_*(t) \gg K$ . Тогда траектория в минимумах цикла начинает сколь угодно близко приближаться к нулю. Говорят, что не выполнена равномерная отдалённость решения от нуля. Известно, что для модели в однопараметрической форме  $\dot{N} = \lambda N(t)(1 - N(t - \tau))$  выполняется:

$$\min N_*(t, \lambda) = \exp \left( -e^\lambda + 2\lambda + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O \left[ \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2} \right] - 1 \right).$$

Окрестности минимумов  $N(t_{min}) \approx \min N_*(t; \lambda\tau)$  колебаний, где траектория долго пробегает околонулевые значения  $\min N_*(t; \lambda\tau) \rightarrow 0 + \epsilon$ , становятся чрезвычайно длинными — для популяционной интерпретации решение нереалистично.

Следующий вариант модификации (1) анализировался в [19]:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)), \quad (8)$$

где предполагается  $\lambda \gg 1$ , а  $f(x)$  — дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, для которой выполняются:

$$f(0) = 1, f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, x \rightarrow \infty, a_0 > 0. \quad (9)$$

Условиям (9) соответствует в [19] интерпретируемая биологически функция при относительной регуляции воспроизводства:

$$f(x) = \frac{(1-x)}{(1+\varsigma x)}. \quad (10)$$

Коэффициент  $\varsigma$  в (10) дополняет число параметров, определяющих характеристики у релаксационного цикла  $N_*(t)$ . При преобразованиях от исходного уравнения (8) к сингулярно возмущённому  $\dot{x} = F(x(t-1), \epsilon)$  и к предельному релейному уравнению  $\dot{x} = R(x(t-1))$  для (8) с (9) в [19] подтверждено существование единственного и орбитально устойчивого цикла  $N_*(t; \lambda\tau\varsigma)$ . Соответствие свойств цикла  $N_*(t)$  известному популяционному процессу в (8) с (10) из вводимых там ограничений (9) трудно обосновать, так как из утверждения о характеристиках колебаний в [19] установили:

$$\min N_*(t, \lambda) \sim C_1 \exp(-\lambda a_0), C_1, a_0 = \text{const} > 0.$$

Параметр  $\lambda$  был указан в [19] изначально большим. Проблема популяционной интерпретируемости циклического режима сохраняется в других модификациях моделей с  $N(t-\tau)$ . Серийные вспышки численности у насекомых-вредителей нельзя описать при свойстве минимумов:  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow \epsilon$ , и  $\epsilon \ll 1$ . Особенно это проявляется для активных вселенцев при больших значениях  $r$ . Цикл  $N_*(t, r)$  достигает слишком малых величин для быстрого повторного достижения высоких значений численности. Включение в модель более чем двух переменных с большим запаздыванием биологически не убедительно. Сценарий образования вида-реликта происходит с постепенным убыванием доминировавшего ранее вида до равновесия, которое оказывается стабильно отделённым от нуля.

Известны экстремальные популяционные колебания у арктических грызунов с большой амплитудой и малыми минимумами, но это *неустойчивые* режимы, и 4-годовые периоды регулярно нарушаются с возможностью гибели локальных групп. Данные колебания аналогично не являются следствием взаимодействия «хищник – жертва».

### 3. Модели с активным противодействием и минимальным порогом

Для модели экстремальных популяционных процессов актуальна минимальная численность той группы, которая теоретически необходима для выживания локальной популяции [20, 21]. А. Д. Базыкиным [22] предложено уравнение с квадратичным фактором внешнего сопротивления  $-\delta N^2$  для описания сценария исчезновения популяции при пороговом эффекте:

$$\frac{dN}{dt} = r \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2. \quad (11)$$



Принцип «агрегированной группы» говорит о том, что для популяции есть оптимальный для воспроизводства диапазон численности сообщества  $\bar{\Delta}N$ . Этот термин применим к общественным животным. Критический минимальный  $L$ -порог  $L < \inf \bar{\Delta}N$  из этого эффекта напрямую не следует, более того,  $L$ -порог плохо совместим с жёсткой функцией регуляции  $rf(N^k)$ ,  $k \geq 2$  в моделях. Многомиллионные колонии социальных насекомых не страдают от высокой плотности. Минимально необходимое количество рабочих насекомых действительно установлено для выживания пчелиных семей.

Из гипотезы об ослаблении конкуренции при  $N \approx L$  мы предлагаем использовать сомножитель  $\times \sqrt[k]{(N-L)}$  с  $rf(N^\theta)$ ,  $1 < \theta < 2$ ,  $k \in 2^i - 1$  в такой модификации:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)^\Theta \times \sqrt[k]{(N-L)}. \quad (12)$$

В нашей модели (12) диапазон воздействия негативного эффекта агрегированной группы (сильный эффект Олли) начинается непосредственно у  $L$ -порога.

#### 4. Модель перехода инвазионной вспышки в депрессию

Обоснуем новую модель  $\dot{N} = rf(N(t-\tau)) - F(N(t-\tau_1))$  для важной ситуации, которая не связана с возникновением устойчивого режима осцилляций. Представим сценарий, где при большом значении  $r$  не исчерпан потенциал увеличения численности образующейся инвазивной популяции с  $N(t) \rightarrow K$ , но происходит активация адаптирующегося всё это время  $t_\tau$  биотического сопротивления.

Включим отложенный фактор внешней убыли с запаздыванием  $\delta N(t-\tau)$  и используем в уравнении логарифмическую функцию для саморегуляции темпов роста численности:

$$\frac{dN}{dt} = N(t)r \ln \left( \frac{\mathfrak{K}}{N(t-\tau)} \right) - \delta N(t-\tau_1). \quad (13)$$

Для  $\dot{N} = rN \ln(K/N)$  ордината точки перегиба  $N_p = K/e$  на кривой решения лежит ниже, чем  $K/2$  у решения (2). Параметр ограниченной среды в данной модели не тождественен роли устойчивого равновесия в (2). В данной модификации  $\dot{N} = rf(N; \tau\mathfrak{K}) - F(N; \tau_1)$  мы используем в обозначениях  $\mathfrak{K}$ , так как достижение уровня  $N(t) = \mathfrak{K}$  возможно, но при больших  $r\tau$  только кратковременно. В вычислительном сценарии с (13) наблюдается гибель популяции агрессивного вселенца после двух максимумов осцилляций, как это было в опытах Г. Гаузе с интродукцией хищника в колонию жертвы [23]. Цель у Гаузе была экспериментально проверить с использованием инфузорий-антагонистов полученные в популяционных моделях «хищник-жертва» (Лотки, Вольтерра, Костицына) решения. Длительных колебаний в серии опытов с простейшими организмами получено не было. Через два или три периода опыт заканчивался  $N_1(t_1) = 0, N(t_2) = 0, t_2 > t_1$ . Оказалось, если активность вселённого хищника

не сдерживает иной фактор, то трофическая система из двух видов в реальности неустойчива. При уменьшении  $r$ -параметра траектория (13) демонстрирует обычные гармонические колебания  $N_*(t; \tau r)$ , как и (1). В (13) мы пожертвовали удобным свойством  $\forall t, N(0) \geq 0, N(t) \geq 0$ , но это незначительная сложность.

Для реальных процессов необходима более сложная форма противодействия, чем в (13). Непосредственно многовидовую регуляцию в естественной среде мы описать не сможем: так, у паразитов есть и свои естественные враги и факторы-регуляторы. В результате добиться полного уничтожения популяции, как у Гаузе, в реальных системах сложно. Включение нелинейности давления в форме  $F(N) = -\delta N^k(t - \tau_1), k > 1, \tau \geq \tau_1$  обосновано тем, что текущее воздействие паразитов будет определяться предшествующим состоянием популяции хозяина, но такое воздействие, в свою очередь, связано зависимостью с концентрацией доступных им для заражения жертв.

#### 4.1. Описание сценария преодоления внезапного кризиса

Многие популяции вселенцев преодолевают сопротивление в ситуации кризиса. Рассмотрим ситуацию активного противодействия, которое формируется спустя определённое время против быстро размножающейся популяции. Опишем противоборство в форме уравнения  $\dot{N} = rN(t)f(N(t - \tau)) - F(N^k(t - \tau_1); J)$  для случая регулируемого размножения вселенца, который способен воздействовать на свою среду. Представим, что ситуация внезапного обострения конкурентного противоборства развивается для популяции уже при приближении к некоторому порогу численности  $J$ , что значительно меньше теоретически допустимого предельного уровня  $\mathfrak{K}$ . Отразим в новой модели два явления: пороговый эффект и адаптивность противодействия активному росту численности вселенца в уравнении при логарифмической саморегуляции:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \ln \left( \frac{\mathfrak{K}}{N(t - \tau)} \right) - \delta \frac{N^m(t - \tau_1)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \delta > q, m \geq 2, N(0) < J < \mathfrak{K}. \tag{14}$$

При приближении к порогу конкуренция при внешнем воздействии обостряется, однако уровень давления зависит от состояния популяции нелинейно и с возникновением глубокого кризиса давление антагонистов ослабляется, но не уменьшается до нуля.

В вычислительном сценарии для (14) на первом этапе происходит «логистическое» увеличение численности небольшой группы  $N(0) < J$ , но рост останавливается после  $N(t) > N_p$ . Вместо обычной стабилизации после краткого превышения равновесия далее начинается стадия резкой убыли численности с возрастанием  $F(N^2; J^{-1})$  при  $N \rightarrow J$ . Кризис наступает до момента, когда потенциал роста будет исчерпан внутривидовой  $\ln_K$ -регуляцией из-за истощения ресурсов среды. Воздействие специфических биотических внешних, но зависимых от численности  $N(t - \tau_1)$  факторов создаёт порог для начала депрессии. При приближении к пороговому уровню численности популяция вселенца

переходит в демографический кризис. Вариант развития исследуемой ситуации особой формы противоборства показан в вычислительном сценарии на рис. 1.

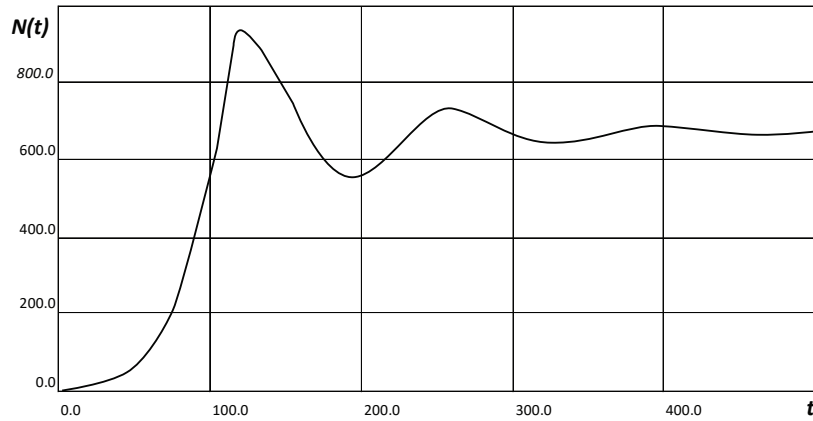


Рис. 1. Сценарий краткой индуцированной депрессии в новой модели (14) при  $m = 2, r = 7.17 \times 10^{-3}, J = 10^3, \mathfrak{K} = 15 \times 10^3, \tau = \tau_1 = 48, \delta = 10, q = 4.2 \times 10^{-3}, N(0) = 10$  (Вычислительная среда Rand Model Designer, алгоритм Ovren-Zennaro)

Популяция проходит этап депрессии численности, так как реакция её противников при кризисе непостоянная и в это время ослабляется. В результате популяционный кризис после переходных колебаний стабилизируется на уровне  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = P < J$  при малых  $q < \delta$ . Параметр  $\mathfrak{K}$  тут теоретическая предельная ёмкость истощаемых ресурсов среды, которая изначально малой локальной группой не достигается. В иммунологической интерпретации только очень высокая доза заражения  $N(0) > J$  тут способна стать летальной. Для патогенного вируса априори не существует равновесной ёмкости ниши, так как вирус разрушает организм — свою среду. Дополнительное внешнее воздействие  $q$  в модели (14) интерпретируется как влияние терапии или искусственных антропогенных мер воздействия.

Модель (14) экологически применима для исходно малой группы  $N(0) < J/4$ . При  $N(0) = 2/3J, m > 2$  развитие покажет резкий эффект глубокого кризиса, но преодолимого  $N(t_m) \approx 0 + \epsilon, \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = P$ . Если уменьшать коэффициент воздействия окружения  $\delta$ , от которого зависит амплитуда сокращения численности при кризисе, то циклический режим сохраняется (вокруг уровня  $P$ ). Сценарии таких быстрых изменений на графиках имеют в англоязычной литературе образные названия: «хоккейная клюшка» (hockey stick graph), «бутылочное горлышко» (bottleneck), — а полученный в модели (14) относится к образу «саксофон» (быстрое снижение с неполным восстановлением).

Рассмотренный сценарий отличается от ситуации прохождения у вновь образующейся популяцией стадии длительного минимума при стабильной малочисленной группе особей с относительно малым  $r$ . Длительное состояние минимальной реликтовой группы принципиально отлично по эволюционным аспектам от перехода к резкому кризису с восстановлением. Увеличение чис-

ленности  $N(t) \rightarrow K$  в сценариях с длительным минимумом  $N(t) \approx L$  связано с нарастанием репродуктивного потенциала, где  $r \neq cost$ . Восстановление происходит чаще не за счёт увеличения индивидуальной плодовитости, но из-за возрастания выживаемости в ювенальном онтогенезе при появлении способов ухода от обнаружения врагами.

## 5. Биологическое обоснование для модельного сценария

Новой модели и вычислительному сценарию необходимо дать обоснование в реальных примерах. Известно из многих опытов ещё с 1930-х гг., что вирусы бактериофаги не могут полностью подавить колонию бактерий, вызывая только временный кризис. В эксперименте с вселением бактериофага в колонию бактерий возникший эффект депрессии успешно преодолевался бактериями при адаптации их антивирусного механизма эндонуклеазы *CRISPR-Cas9* (рис. 2). Специальный белок в клетке бактерии находил и разрезал молекулярными ножницами ДНК вируса, которую он опознавал по специальному короткому фрагменту. На выделение подходящего образца чужеродной ДНК необходимо время. В результате методы терапии бактериальных инфекций с вирусами бактериофагами быстро теряли эффективность и не оправдали ожиданий [24], хотя полного восстановления колонии бактерий не наблюдалось. Сейчас этот механизм адаптивной защиты активно используется учёными для геномного редактирования.

Полученный в (14) сценарий описывает динамику локальных популяций оленей, интродуцированных на островах в Канаде (рис. 3). Популяция при отсутствии хищников размножается, но олени при большой скученности уничтожают растительность и разрушают свою среду. Питание становится недостаточным, возникают эпизоотии, и смертность молодых особей увеличивается. Популяция входит в депрессию. Восстановление после кризиса зависит от способности к регенерации их пищевых ресурсов, что происходит с запаздыванием. На острове Врангеля популяция оленей погибла полностью. Полной регенерации не происходит, и так создаётся порог, который значительно меньше *изначальной* допустимой ёмкости экологической ниши. В системе присутствуют и конкурируют два запаздывания: репродуктивный цикл оленей и темпы восстановления среды. Это создаст колебания со снижением среднего значения. Северная растительность восстанавливается медленно. Интересно, что при искусственном изъятии популяция оленей стабилизируется,

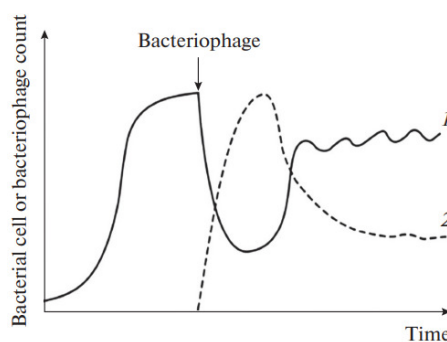


Рис. 2. Сценарий со взаимной адаптацией: восстановление колонии бактерий после вселения бактериофага [24]: 1 — динамика бактерий; 2 — динамика вирионов

но без изъятия флуктуации продолжают, что и подтверждает разработанная нами модель.

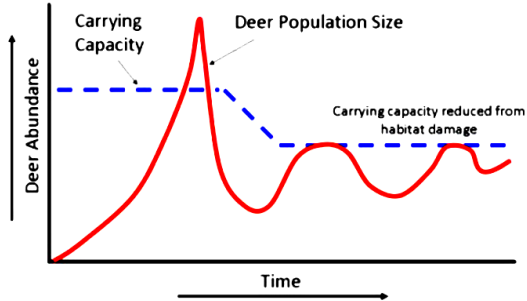


Рис. 3. Динамика популяций оленей при интродукции на острова по данным [25]

В (14) феноменологически описано сложно регулируемое противодействие. Ослабление давления определено зависимостью от порога обнаружения, что соответствует реакции паразитов на крупные скопления жертв [26].

Предложенную функцию воздействия  $F(N^m(t - \nu); J)$  можно включать в модель пилообразных колебаний вспышек вредителей для описания их демпфирования

в случае существования ограниченного лесного ресурса и противодействия естественных врагов-паразитов:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( \frac{K - N^2(t - \tau)}{(K + cN^3(t - \tau_1))} \right) - \delta \frac{N^m(t - \nu)}{(J - N(t))^2} - qN(t), \quad (15)$$

где  $\delta > q, m \geq 2, N(0) < J < K$ . Уравнение (15) можно использовать в составе «вольтерровских» систем для описания трофического взаимодействия с пороговыми эффектами.

Существуют интересные примеры кризисной динамики и вне области популяционных наблюдений. Так, в онкологии оставшиеся после подавления иммунотерапией опухолевые клетки могут вдруг снова переходить к стремительному делению [27], но эти сценарии – тема отдельного исследования.

## Заключение

Разработаны три модели специфических популяционных процессов на основе уравнений с запаздыванием для ситуаций активного сопротивления, которое оказывает биотическое окружение (возможно искусственно индуцированное) инвазионному виду с высоким репродуктивным потенциалом. Специфическая модель (14) для сценария прохождения кризиса инвазивной популяцией разработана на основе двух явлений запаздывания: в регуляции из-за восстановления необходимых ресурсов и порогового запаздывающего противодействия. Моделируемый кризис резко начинается в фазе быстрого роста при активном сопротивлении биотического окружения при приближении к пороговой численности. Увеличение  $\tau_1$  делает кризис более выраженным. Явления резкой смены быстрого роста глубокой депрессией наблюдались в экодинамике разных чужеродных популяций.

Рассмотренная модель (14) может получить дальнейшее развитие в контексте запаздывающей выработки иммунного ответа от Т-лимфоцитов CD8

на острую вирусную инфекцию. Полученный сценарий согласуется с вариантом хронизации очага инфекции. Модели в дальнейшем могут применяться для прямого описания противодействия в системах уравнений, где в функции  $F(N(t), Z(t - \xi))$  указывается непосредственно численность вида-антагониста. Модель (15) подходит для ситуации взаимодействия мутирующего вируса с иммунитетом организма, реагирующего на неактуальные уже антигены, что вызывает периодические рецидивы. Для случая вируса реакция иммунной системы часто зависит от начальной дозы заражения  $Z(0)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Greenwood D.J., Hall R.O., Tibbets T.M. A precipitous decline in an invasive snail population cannot be explained by a native predator // *Biological Invasions*. 2020. Vol. 22. P. 363–378. DOI: 10.1007/s10530-019-02093-8.
2. Andreadis T., Weseloh R. Discovery of *Entomophaga maimaiga* in North American gypsy moth, *Lymantria dispar* // *Proc Natl Acad Sci U S A*. 1990. V. 87. P. 2461–2465. DOI: 10.1073/pnas.87.7.2461.
3. Nedorezov L.V. Analysis of Cyclic Fluctuations in Larch Bud Moth Populations with Discrete-Time Dynamic Models // *Biology Bulletin Reviews*. 2011. V. 72, N. 2. P. 407–414. DOI: 10.1134/S2079086411050057.
4. Ludwig D., Jones D.D., Holling C.S. Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest // *The Journal of Animal Ecology*. 1978. V. 47, N. 1. P. 315–332. DOI: 10.2307/3939.
5. Hutchinson G.E. Circular causal systems in ecology // *Ann. New York Acad. Sci.* 1948. V. 50. P. 221–248. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
6. Wright E.M. A non-linear difference-differential equation // *J. Reine Angew. Math.* 1955. V. 194. P. 66–87.
7. May R.M., Conway G.R., Hassell M.P. Time delays, density-dependence and single-species oscillations // *J. Anim. Ecol.* 1974. V. 43. P. 747–770. DOI: 10.2307/3535.
8. Шапкин А.М., Иванова Р.Г. Оценка ёмкости среды применительно таймырской популяции дикого северного оленя (*Rangifer tarandus*) // *Генетика и разведение животных*. 2018. Т. 2. P. 108–116.
9. Salesa L.P., Haywar M.W., Loyola R. What do you mean by «niche»? Modern ecological theories are not coherent on rhetoric about the niche concept // *Acta Oecologica*. 2021. V. 110. P. 103–1070. DOI: 10.1016/j.actao.2020.103701.
10. Дубровская В.А., Трофимова И.В. Модель динамики структурированных субпопуляций осетровых рыб Каспия с учетом отклонений в темпах развития молоди // *Журнал Белорусского государственного университета. Биология*. 2017. № 3. С. 76–86.
11. Северцов А.С. Соотношение фундаментальной и реализованной экологических ниш // *Журнал общей биологии*. 2012. Т. 73. С. 323–333. DOI: 10.1134/S2079086413030080.
12. Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation // *Sb. Math.* 2011. V. 202. P. 829–858. DOI: 10.1070/SM2011v202n06ABEH004168

13. Сабатулина Т.Л. Об устойчивости обобщенного уравнения Хатчинсона с распределенным переменным запаздыванием // Вестник Пермского государственного технического университета. Механика. 2009. № 1. С. 46–56.
14. Глызин С.Д. Учёт возрастных групп в уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. Т. 14, № 3. С. 29–42.
15. Smith M. *Mathematical ideas in biology*. Cambridge University Press, London, 1968. 168 p.
16. Глызин Д.С., Кашенко С.А., Полстьянов А.С. Пространственно-неоднородные периодические решения в распределённом уравнении Хатчинсона // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 4. С. 77–85.
17. Кашенко И.С., Кашенко С.А. Динамика уравнения с двумя запаздываниями, моделирующего численность популяции // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. С. 21–38. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38.
18. Liu Y., Wei J. Bifurcation analysis in delayed Nicholson blowflies equation with delayed harvest // *Nonlinear Dynamics*. 2021. V. 105. P. 1805–1819. DOI: 10.1007/s11071-021-06651-5.
19. Kolesov A.Y., Mishchenko E.F., Rozov N.K. A modification of Hutchinson's equation // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2010. V. 50. P. 1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
20. Никольский М.С. Об одной задаче оптимального управления, связанной с общей моделью А.Д. Базыкина «хищник–жертва» // *Дифференциальные уравнения*. 2011. Т. 47. С. 1638–1645. DOI: 10.1134/S0012266111110127.
21. Metzler W. Mathematical Modelling Bifurcations of equilibria in Bazykin's predator-prey model // *Mathematical Modelling*. 1985. V. 6. P. 111–123. DOI: 10.1016/0270-0255(85)90003-X.
22. Bazykin A.D., Khibnik A.I. Bilocal model of dissipative structure // *Biophysics*. 1982. V. 27, N. 1. P. 133–138.
23. Gause G.F. *The struggle for existence*. Baltimore: Williams Wilkins. 1934, 163 p.
24. Lenski R.E. Dynamics of Interactions between Bacteria and Virulent Bacteriophage // *Advances in Microbial Ecology*. 1988. Vol 10. P. 1–44. DOI: 10.1007/978-1-4684-5409-3\_1
25. Forest and Wildlife Research Center report: URL: <https://www.msudeer.msstate.edu/deer-habitat-carrying-capacity.php> (дата обращения: 10.01.2022).
26. Morozov A.S., Rytova S.V., Thompson L.C. Introducing entomophagous insects to control pests: prediction of target species density // *Russian Entomological Journal*. 2003. V. 12. P. 441–445.
27. Kuznetsov V.A., Knott G.D. Modeling tumor regrowth and immunotherapy // *Mathematical and Computer Modelling*. 2001. V. 33, I. 12–13. P. 1275–1287. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00314-9.

## MODEL OF THE EFFECT OF SPONTANEOUS CRISIS IN THE DEVELOPMENT OF BIOLOGICAL INVASION

**A.Yu. Perevaryukha**

Ph.D.(Eng.), Senior Scientist Researcher, e-mail: temp\_elf@mail.ru

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences,  
St. Petersburg, Russia

**Abstract.** The dynamics of formation of new populations as result of the introduction of alien species into a stable community is an important modern direction of modern interdisciplinary research. The aim of the research is to analyze the variability of situations after the entry of new species into isolated biosystems using computational modeling methods. Invasive processes differ significantly from the dynamics of interaction of established populations, which requires modification of the equations. In each new environment, a special system of regulation and confrontation with a temporary aftereffect is created, therefore invasive processes are extremely variable, as now COVID infection occurs in people very differently. A number of abrupt in amplitude and rapid in time changes in population numbers, which differ from the cyclic regimes in the known models, require a mathematical description. The response of the response is not constant and adapts, which distinguishes current situations from ordinary trophic models. The article is devoted to the development of a computational model for one of the important variants of the development of the invasive process, which is observed when the population size approaches a threshold dangerous for the environment. The model describes the scenario of the crisis dynamics of invasion in the presence of environmental resistance, which is insufficient to stop the invasion due to the significant required development of a delay response. Real situations in experimental and real ecosystems are discussed, which correspond to the crisis scenario described in the computational experiment.

**Keywords:** computational methods in ecodynamics, aggressive invasions, modeling of population depression, adaptation mechanisms, brief crisis, threshold resistance, regulation with delay.

## REFERENCES

1. Greenwood D.J., Hall R.O., and Tibbets T.M. A precipitous decline in an invasive snail population cannot be explained by a native predator. *Biological Invasions*, 2020, vol. 22, pp. 363–378. DOI: 10.1007/s10530-019-02093-8.
2. Andreadis T. and Weseloh R. Discovery of *Entomophaga maimaiga* in North American gypsy moth, *Lymantria dispar*. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 1990, vol. 87, pp. 2461–2465. DOI: 10.1073/pnas.87.7.2461.
3. Nedorezov L.V. Analysis of Cyclic Fluctuations in Larch Bud Moth Populations with Discrete-Time Dynamic Models. *Biology Bulletin Reviews*, 2011, vol. 72, no. 2, pp. 407–414. DOI: 10.1134/S2079086411050057.
4. Ludwig D., Jones D.D., and Holling C.S. Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems: The Spruce Budworm and Forest. *The Journal of Animal Ecology*, 1978, vol. 47, no. 1, pp. 315–332. DOI: 10.2307/3939.



5. Hutchinson G.E. Circular causal systems in ecology. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1948, vol. 50, pp. 221–248. DOI: 10.1111/j.1749-6632.1948.tb39854.x.
6. Wright E.M. A non-linear difference-differential equation. *J. Reine Angew. Math.*, 1955, vol. 194, pp. 66–87.
7. May R.M., Conway G.R., and Hassell M.P. Time delays, density-dependence and single-species oscillations. *J. Anim. Ecol.*, 1974, vol. 43, pp. 747–770. DOI: 10.2307/3535.
8. Shapkin A.M. and Ivanova R.G. Otsenka emkosti sredy primenitel'no taimyrskoi populyatsii dikogo severnogo olenya (Rangi fertarandus). *Genetika i razvedenie zhivotnykh*, 2018, vol. 2, pp. 108–116. (in Russian)
9. Salesa L.P., Haywar M.W., and Loyola R. What do you mean by "niche"? Modern ecological theories are not coherent on rhetoric about the niche concept. *Acta Oecologica*, 2021, vol. 110, pp. 103–1070. DOI: 10.1016/j.actao.2020.103701.
10. Dubrovskaya V.A. and Trofimova I.V. Model' dinamiki strukturirovannykh subpopulyatsii osetrovyykh ryb Kaspiya s uchetom otklonenii v tempakh razvitiya molodi. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Biologiya*, 2017, no. 3, pp. 76–86. (in Russian)
11. Severtsov A.S. Sootnoshenie fundamental'noi i realizovannoi ekologicheskikh nish. *Zhurnal obshchei biologii*, 2012, vol. 73, pp. 323–333. DOI: 10.1134/S2079086413030080. (in Russian)
12. Kolesov A.Yu. and Rozov N.Kh. The theory of relaxation oscillations for Hutchinson's equation. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, pp. 829–858. DOI: 10.1070/SM2011v202n06ABEH004168
13. Sabatulina T.L. Ob ustoichivosti obobshchennogo uravneniya Khatchinsona s raspredelennym peremennym zapazdyvaniem. *Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2009, no. 1, pp. 46-56. (in Russian)
14. Glyzin S.D. Uchet vozrastnykh grupp v uravnenii Khatchinsona. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2007, vol. 14, no. 3, pp. 29-42. (in Russian)
15. Smith M. *Mathematical ideas in biology*. Cambridge University Press, London, 1968, 168 p.
16. Glyzin D.S., Kashchenko S.A., and Polst'yanov A.S. Prostranstvenno-neodnorodnye periodicheskie resheniya v raspredelennom uravnenii Khatchinsona. *Modelirovanie i analiz informatsionnykh sistem*, 2009, vol. 16, no. 4, pp. 77-85. (in Russian)
17. Kashchenko I.S. and Kashchenko S.A. Dinamika uravneniya s dvumya zapazdyvaniyami, modeliruyushchego chislennost' populyatsii. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika*, 2019, vol. 27, pp. 21–38. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-21-38. (in Russian)
18. Liu Y. and Wei J. Bifurcation analysis in delayed Nicholson blowflies equation with delayed harvest. *Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 105, pp. 1805–1819. DOI: 10.1007/s11071-021-06651-5.
19. Kolesov A.Y., Mishchenko E.F., and Rozov N.K. A modification of Hutchinson's equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, pp. 1990–2002. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
20. Nikol'skii M.S. Ob odnoi zadache optimal'nogo upravleniya, svyazannoi s obshchei model'yu A.D. Bazykina "khishchnik-zhertva". *Differentsial'nye uravneniya*, 2011, vol. 47, pp. 1638–1645. DOI: 10.1134/S0012266111110127. (in Russian)
21. Metzler W. *Mathematical Modelling Bifurcations of equilibria in Bazykin's predator-*

- prey model. *Mathematical Modelling*, 1985, vol. 6, pp. 111–123. DOI: 10.1016/0270-0255(85)90003-x.
22. Bazykin A.D. and Khibnik A.I. Bilocal model of dissipative structure. *Biophysics*, 1982, vol. 27, no. 1, pp. 133–138.
23. Gause G.F. *The struggle for existence*. Baltimore, Williams Wilkins, 1934, 163 p.
24. Lenski R.E. Dynamics of Interactions between Bacteria and Virulent Bacteriophage. *Advances in Microbial Ecology*, 1988, vol 10, pp. 1–44. DOI: 10.1007/978-1-4684-5409-3\\_1
25. Forest and Wildlife Research Center report: URL: <https://www.msudeer.msstate.edu/deer-habitat-carrying-capacity.php> (10.01.2022).
26. Morozov A.S., Rytova S.V., and Thompson L.C. Introducing entomophagous insects to control pests: prediction of target species density. *Russian Entomological Journal*, 2003, vol. 12, pp. 441–445.
27. Kuznetsov V.A. and Knott G.D. Modeling tumor regrowth and immunotherapy. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001, vol. 33, iss. 12–13, pp. 1275–1287. DOI: 10.1016/S0895-7177(00)00314-9.

*Дата поступления в редакцию: 12.01.2022*

## **ПАНДЕМИЯ И СПЕЦОПЕРАЦИЯ: МНОГОДИСЦИПЛИНАРНЫЙ АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОДХОДА «4К»**

**В.А. Филимонов**

д.т.н., профессор, старший научный сотрудник, e-mail: filimonov-v-a@yandex.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

**Аннотация.** С использованием авторского подхода «4К» рассматриваются два глобальных процесса – пандемия и спецоперация, – существенно влияющие на РФ. Отмечается низкая результативность науки в осмыслении этих процессов. Обсуждается потенциал теории рефлексивного управления В.А. Лефевра. Предлагаются варианты развития методов теории рефлексивных игр. Обсуждаются авторские варианты анализа и прогноза ситуаций 2013 и 2020 гг. Предлагаются варианты прогнозов развития ситуации.

**Ключевые слова:** пандемия, война, междисциплинарность, подход «4К», модели, рефлексивное управление, финансы, реальность, фальсификация, асимметричное доминирование, когнитивная осведомлённость, прогнозы.

### **1. Введение**

Спецоперация по принуждению Украины к миру подпадает под определение «чёрного лебедя» в трактовке Н. Талеба. Это уже второй «чёрный лебедь» за последние годы, причём действующий совместно с первым – пандемией. Можно было ожидать блестящей демонстрации достижений науки, которая всё это должна была предвидеть и поддержать принятие решений политиками, бизнесменами, а также простыми гражданами. Ещё в 2013 г. начальник Генерального штаба ВС РФ, автор «доктрины Герасимова», отметил: «Важным вопросом является развитие научно-методического аппарата поддержки принятия решений с учётом межвидового характера группировок войск. Необходимо провести исследование интегральных возможностей, сочетающих потенциал всех входящих в их состав войск и сил. Проблема здесь заключается в том, что существующие модели операций и боевых действий не позволяют это сделать. Нужны новые модели» [1]. Однако в этой же публикации отмечено, что «идеи невозможно генерировать по приказу» и что перед Второй мировой войной «у нас не было: научных школ, но были неординарные личности с яркими идеями». Этот диагноз согласуется с квалификацией современной западной науки как «советско-гарвардской школы» [2]. Поэтому в реальности наблюдается разочарование администраций разного уровня отсутствием интеллектуальной поддержки на фоне интенсивной работы медицины. Общая ситуация может быть

сформулирована следующим образом: учёные не могут объяснить, а население – понять.

Обе эти ситуации продемонстрировали неспособность создавать работоспособные модели для руководителей, принимающих решения, несмотря на наличие суперкомпьютеров и Data Mining. Наиболее полезными и востребованными стали только системы тотального контроля. Добавим, что ситуационные центры руководителей субъектов РФ не стали средством эффективного управления, как это предполагалось 15 лет назад. В связи с этим в 2020 г. во всех субъектах РФ оперативно были созданы центры управления регионами, задача которых – мониторинг социальной напряжённости. Добавим, что основной персонал всех этих центров находится в Москве. Естественно, развивается и инфраструктура: с 1 февраля 2022 г. в РФ действует национальный стандарт в области гражданской обороны ГОСТ Р 42.7.01-2021 «Захоронение срочное трупов в военное и мирное время». Следуя совету Н. Талеба, автор решил рискнуть своей шкурой: попытаться ответить за свои предыдущие утверждения, а также предложить некоторые прогнозы. Учитывая, что журнал, в котором публикуется данная статья, предназначен не только для математиков, но и для социологов, было решено не ограничивать анализ и прогноз только математическими моделями, а попытаться сделать эскиз (прототип) междисциплинарного анализа. Автор поддерживает известный тезис И.А. Крылова «Судить не выше сапога» и не претендует на роль эксперта в политологии, экономике, военном деле, медицине и т. п. Однако некоторая квалификация в перечисленных областях у него имеется [3–8]. Кроме того, данный текст предоставляет хорошую возможность коллегам для критики, а также предложений правильного анализа и правильных прогнозов.

## 2. Хронология исследований автора

В 2003 г. на IV Международном симпозиуме «Рефлексивные процессы и управление» автор представлял свой доклад «Итоги и перспективы преподавания фрагментов рефлексивного анализа в вузах Омска». На симпозиуме автору посчастливилось познакомиться с Владимиром Александровичем Лефевром – создателем концепции и теории рефлексивного управления [9–11]. В результате этого знакомства наши коллеги в Омске смогли увидеть и обсудить дистанционные доклады В.А. Лефевра на конференциях «Рефлексивный театр ситуационного центра»; стенограмма доклада 2016 г. опубликована в настоящем журнале [12]. Появились публикации, посвящённые практическому использованию рефлексивного управления и методикам его преподавания [13–20]. В 2013 г. был разработан сайт <http://www.reflection.trizkin.ru>, на котором можно сделать анализ ситуаций с помощью теории рефлексивных игр (ТРИ) [21]. Сайт был протестирован В.А. Лефевром и скорректирован по его замечаниям. На этом же симпозиуме автор прослушал в Дипломатической академии МИД РФ доклад представителя США, в котором была представлена информация об использовании ситуационных центров во Франции и США для переговоров руководителей воюющих сторон при завершении войны в Югославии (опера-

ция НАТО «Союзная сила», 1999 г.). Наиболее впечатляющим был процесс, который можно назвать «Очная ставка с реальностью». При разногласиях переговорщиков по поводу дислокации вооружённых сил на обсуждаемое место направлялись транспортные средства (автомобили, вертолёты), которые показывали видео ситуации (погоны военнослужащих, опознавательные знаки на танках и т. п.). Против таких аргументов возражать было трудно, и, как правило, отдавались приказы о передислокации в соответствии с утверждённой картой. С финансовой и медицинской сферами автор знаком благодаря многолетнему сотрудничеству со своими коллегами из Омского филиала Финансового университета при Правительстве РФ и Омского государственного медицинского университета. Также очень полезными были конференции 2006–2009 гг., посвящённые ситуационным центрам, которые проводила Академия государственной службы при Президенте РФ. Наконец, автор давно знаком с работами Н. Кузанского и А.С. Нариньяни, посвящёнными знанию о незнании, и старается держать это своё знание в актуальном состоянии [22].

### 3. Структурирование задачи с помощью «4К»

Подход «4К» был создан для структурирования междисциплинарных задач. Он не является единственно возможным и эффективным во всех случаях, однако оказался достаточно полезным. Ниже эта структура детализируется применительно к рассматриваемой теме.

**Коллектив.** В данном тексте под коллективом понимается население РФ, которое в состоянии более или менее осмысленно реагировать на два исследуемых процесса и их последствия. Это население мы разделяем на две категории по отношению к действиям государства: поддержку и противодействие, иначе, союз либо конфликт. Эти категории зафиксированы в терминологии, в том числе имеющей исторические корни (коронапаникёры, коронаскептики, патриоты, предатели, белые, красные, западники, славянофилы и т. п.). Заметим, что анализ терминологии представляет самостоятельный интерес [23]. Отдельных представителей коллектива мы будем именовать субъектами.

**Когнитивность.** Представляет интерес определение того, какими когнитивными инструментами пользуется рассматриваемый коллектив. В первую очередь, и это наиболее простая задача, требуется определить логику, которой пользуются субъекты. Эта логика может быть формализованной [24], её структура может быть катастрофической (в смысле математической теории катастроф) [25], а может быть специфической, что демонстрируется появлением таких образовательных дисциплин, как этнологика и этноматематика. За другими когнитивными инструментами, особенно в случаях формирования оценок, надо обращаться к психологам. Упомянем здесь эффект асимметричного доминирования [26], а также разделение систем мозга на систему быстрого принятия решений и медленную дефолт-систему [27]. При анализе различных ситуаций, особенно в военном деле, часто используется термин «ситуационная осведомлённость». В идеале это предполагает знание обо всех обстоятельствах, важных для определённой деятельности в конкретной ситуации. Размышления

над вопросом Н. Талеба: «Почему колёса к чемоданам догадались приделывать спустя 2000 лет после изобретения колеса?» [2] – вместе с вопросом: «Что мешало изобрести фаустпатрон в 1941 г.?» – привели к формированию термина «когнитивная осведомлённость», которым обозначается ориентация на интуитивные ресурсы, а не сенсорные, как в ситуационной осведомлённости.

**Конфигуратор.** Мы используем этот термин в соответствии с правилами системного анализа, где конфигуратором называется комплекс языков и представлений объектов с позиций различных дисциплин. Однако сборку для данного текста предлагаем осуществить читателю, и в помощь ему книга [9].

**Конвергенция.** Этот компонент отвечает за результат завершения процесса. В нашем случае это варианты прогноза по рассматриваемым процессам.

#### 4. Рефлексивное управление по В.А. Лефевру

Модели Лефевра [9–11, 28] отличаются простотой математического представления и фундаментальностью замысла. Именно фундаментальность идей и сложность корректной интерпретации ограничивает их применение. Специалисты в области гуманитарных наук усвоили, в основном, тезис о двух этических системах и появление золотого сечения в ситуации Бурданова осла. Знакомство с публикациями коллег позволяет утверждать, что более сложные модели, например [29], останутся, в основном, предметом изучения для математиков, и для этих моделей будет сложно спроектировать эксперименты и сформулировать практические рекомендации. Фундаментальность обусловила отсутствие интереса В.А. Лефевра к исследованию структуры мозга [12], что является мейнстримом современной науки, поскольку этот инструмент мышления не является единственно возможным.

За свои прикладные исследования, посвящённые борьбе с терроризмом, В.А. Лефевр был награждён Агентством оборонных исследований США медалью Декарта. Наиболее подробным примером использования теории рефлексивных игр в военной области, известным автору, является статья, посвящённая операции США в Ливии в 2011 г. [13].

Для рассматриваемой нами темы необходимо упомянуть «парадокс миротворца» [11], который состоит в том, что при определённой конфигурации взаимодействия нескольких субъектов с отношениями конфликта и союза, присутствие миротворца не останавливает конфликт. Также стоит упомянуть приведённые там же теоремы о разнообразии, смысл которых заключается в возможности сконструировать для любого субъекта группы из других субъектов, в рамках которых возможно жёсткое управление его поведением.

#### 5. Варианты модификации моделей

В этом разделе отмечаются важные аспекты, требующие дальнейшей проработки, а также предлагается вариант модифицированного представления для моделей ТРИ.

Рассматриваемые модели основаны на квалификации отношений субъектов в группе как «союз» либо «конфликт» без оценки этих отношений по интенсивности. Одним из вариантов является представление каждой пары субъектов в виде четырёх (или более) подсубъектов, например в соответствии с известными типологиями Э. Бёрна «Родитель – Взрослый – Ребёнок» или четырьмя уровнями К.Г. Юнга и соционики «Сверх-Я – Я-ОНО – Коллективное бессознательное». Другой вариант: численная оценка интенсивности отношения может быть трансформирована в варианты альтернатив.

Предложенные В.А. Лефевром варианты интерпретации алгоритмов поведения субъектов, относящихся к разным этическим системам, нуждаются в уточнении применительно к историческим и социокультурным условиям. В частности, анализ статистики по разводам, что автору представляется индикатором наличия конфликта, не показал значимых различий между обществами, обычно относимых к разным этическим системам.

Расчёт на указанном выше сайте начинается с определения конфигурации субъектов, которая задаётся списком субъектов и матрицей попарных отношений. Далее формируется список альтернатив и матрица влияний, которая представляет собой подмножества альтернатив, в реализации которых заинтересованы субъекты. Альтернативы могут быть совместными либо несовместными. Субъекты могут быть нецеленаправленными, т. е. готовыми к рассмотрению как реализуемых, так и нереализуемых наборов альтернатив, так и целенаправленными, которые рассматривают только реализуемые наборы.

Автор использует для предварительного представления расчётных данных матрицу, в которой сразу можно увидеть и отношения, и альтернативы, что достигается за счёт указания, что альтернатива рассматривается в контексте конфликта. Такие обозначения могут быть сделаны разными способами. Например, для альтернативы «а» можно использовать варианты «-а», «а\*» и т. п.

## 6. Расчёты и комментарии

Результаты расчётов, сделанные на указанном выше сайте в 2013 г., показали, что из пяти субъектов только Россия и Новороссия (на тот момент ЛНР и ДНР) находятся в пассивной ситуации, а Евросоюз (даже не США) является наиболее последовательным сторонником военных действий.

Наполеон был прав, не только утверждая, что для войны нужны три вещи: деньги, деньги, и ещё раз деньги, – но и захватив с собой в Россию в 1812 г. походные типографии для печати российских банкнот. Золотая Орда своих денег и книг не печатала, и следов от неё не осталось. Санкции против России подтверждают тезис о том, что государство без своей армии и своих финансов нежизнеспособно. Автор надеется, что достижение понимания государством необходимости иметь свою науку, технику и своё образование потребует дополнительных аргументов.

Общий прогноз будущей ситуации состоит в ускорении мирового финансового кризиса [30] и ужесточении информационной политики, что, как минимум, не уменьшит степени фальсификации информации в системах управления [22].

В сочетании с разрушением логики и памяти населения, привыкшего к рекламе как погодному явлению, это приведёт к созданию фантомов [31], в результате которых на ошибки управления будут накладываться ошибки реакции на ошибки [32, 33]. Частный прогноз, как гипотеза, состоит в том, что можно использовать оппозиционные силы в России и на Украине для стабилизации ситуации.

## 7. Заключение

Рассмотрены основные компоненты предлагаемого анализа в координатах «коллектив», «когнитивность», «конфигуратор», «конвергенция» (подход «4К»). В дополнение к понятию «ситуационная осведомлённость» предложено понятие «когнитивная осведомлённость». Намечены варианты детализации моделей теории рефлексивных игр. Предложен способ предварительного представления данных для расчётов по этим моделям. Дан комментарий прогнозам автора, сделанным ранее. Предложен прогноз развития основных факторов рассматриваемых ситуаций.

## Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0016.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимов В. Ценность науки в предвидении // Военно-промышленный курьер. 2013.
2. Талей Н.Н. Антихрупкость. Как извлечь выгоду из хаоса. М. : КоЛибри, Азбука-Аттикус, 2020. 768 с.
3. Филимонов В.А. Конфигуратор технологий коллективной работы для виртуальных ситуационных центров // Состояние и перспективы развития современной науки по направлению «Информатика и вычислительная техника». Сб. статей II Всероссийской научно-техн. конф. Военный инновационный технополис «ЭРА». Анапа, 2020. С. 126–131.
4. Филимонов В.А. Прототип системного анализа науки и образования в России в условиях пандемии // Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов VIII Международной научной конференции (Омск, 20 ноября 2020 г.). Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2021. С. 191–193.
5. Филимонов В.А. Искусственный интеллект и финансовая система: анализ взаимодействия // Робототехника и искусственный интеллект: материалы XIII Всеросс. науч.-техн. конф. с междун. участием (г. Железногорск, 27 ноября 2021 г.). Красноярск : ЛИТЕРА-принт, 2021. С. 405–411.
6. Filimonov V.A. Money and robots: the two shadows of humanity that will destroy it // Математические структуры и моделирование. 2021. № 4(60). С. 109–114.



7. Филимонов В.А. Буратино не медведь: обнаружение аномалий в статистических данных и их интерпретациях // Двадцать седьмые апрельские экономические чтения: материалы всероссийской научно-практической конф., 14 апреля 2021 г. Омск : Изд-во Фин. Ун-та, 2021. С. 119–121.
8. Филимонов В.А. Модель «Хищник-Заложник» эпидемии в регионе как пример простого системного анализа. 2021. DOI: 10.13140/RG.2.2.10459.49446.
9. Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. М. : Советское радио, 1973. 158 с.
10. Лефевр В.А. Алгебра совести. М. : Прогресс, 2003. 408 с.
11. Лефевр В.А. Лекции по теории рефлексивных игр. М : Когито-Центр, 2009. 218 с.
12. Лефевр В.А. Общая схема современной психологии. Место рефлексивных исследований в системе наук. Дистанционное выступление на конференции «Рефлексивный театр ситуационного центра» 29.11.2016 (Ирвайн, США – Омск, Россия) // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1(45). С. 108–110.
13. Lefebvre V., Nyamekye K. Construction of Theoretical Model for Antiterrorism: From Reflexive Game Theory Viewpoint // Proceedings of 19-th International Command and Control Research and Technology Symposium. 2014.
14. Филимонов В.А. Рефлексивный анализ и технологии ситуационного центра // Рефлексивные процессы и управление. Сб. материалов VIII Междун. симп. 18–19 октября 2011 г., Москва. М. : Когито-Центр, 2011. С. 251–253.
15. Filimonov V.A. Application of the Reflexive Analysis for Formalization of Situations of the Estimation and of the Choice // «Знания-Онтологии-Теории» (ЗОНТ-2013). Матер. Всеросс. конф. с междун. участием 8–10 октября 2013, г. Новосибирск. Т. 2. С. 169–173.
16. Филимонов В.А. Вариации на темы В.А. Лефевра // Рефлексивные процессы и управление. 2016. Т. 16, № 1–2. С. 95–99.
17. Филимонов В.А. Экспериментальное исследование моделей теории рефлексивных игр: постановка задачи // Математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов IV Международной научной конференции ФКН (Омск, ОмГУ, 11 ноября 2016 г.). Омск : Изд-во Омского гос. ун-та, 2015. С. 62–65.
18. Филимонов В.А. Конструктор моделей субъектов рефлексивных игр // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1(45). С. 122–130.
19. Филимонов В.А. Рефлексивное управление сетевым взаимодействием социальных партнёров // 24-е апрельские экономические чтения: Матер. междун. науч.-практ. конф. Омск : Фин. ун-т при Правительстве РФ, 2018. С. 165–168.
20. Филимонов В.А. Алгебра логики и совести / Вступительное слово В.А. Лефевра // Учеб. пособие для старших классов общеобразовательных и профильных школ. Омск : ОГИС, 2006. 72 с.
21. Толстуха С.А., Филимонов В.А. Веб-приложения для моделирования динамических систем и субъектов с рефлексией // Вестник Томского государственного университета, серия «Управление, вычислительная техника и информатика (УВТиИ)». 2013. № 1(26). С. 34–39.
22. Хэнд Д. Тёмные данные: Практическое руководство по принятию правильных решений в мире недостающих данных. М. : Альпина Пабlishер, 2021. 366 с.
23. Хроменков П.Н. Лингвопрагматика конфликта: исследование методом количественного контент-анализа: автореферат дис. ... доктора филол. Наук : 10.02.19 / Хроменков Павел Николаевич; [Место защиты: Воен. ун-т МО РФ]. Москва,

2016. 56 с.
24. Лобанов В.И. Русская вероятностная логика. М. : Русская правда, 2009. 320 с.
  25. Филимонов В.А., Чернявская В.С. Катастрофы субъективных оценок и их модели: к вопросу инструментализации диагностики эффекта «зловещей долины» // Территория новых возможностей. Вестник Владивостокского гос. университета экономики и сервиса. 2021. Т. 13, № 2. С. 170–178.
  26. Элленберг Дж. Как не ошибаться. Сила математического мышления. М. : Манн, Иванов и Фербер, 2018. 576 с.
  27. Канеман Д. Думай медленно... решай быстро. М. : АСТ, 2014. 331 с.
  28. Лефевр В.А. Что такое одушевлённость. Изд. 2, испр. и доп. М : Когито-Центр, 2017. 122 с.
  29. Новиков Д., Чхартишвили А. Рефлексия и управление: математические модели. М. : Ленанд, 2022. 416 с.
  30. Хазин М. Воспоминания о будущем. РИПОЛ классик, 2021. 464 с.
  31. Руднев В.П. Реальность как ошибка. М. : Гнозис, 2011. 320 с.
  32. Савчук В.В. Топологическая рефлексия. М. : Канон, 2012. 416 с.
  33. Переслегин С.Б. Первая Мировая. Война между Реальностями. Москва : Яузакаталог, 2016. 512 с.

## PANDEMIC AND SPECIAL OPERATION: MULTIDISCIPLINARY ANALYSIS USING THE CONCEPT OF "4C"

**V.A. Filimonov**

Dr.Sc. (Eng.), Professor, Senior Scientist Researcher, e-mail: filimonov-v-a@yandex.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

**Abstract.** Using the author's "4C" approach, two global processes are considered, a pandemic and a special military operation that significantly affect the Russian Federation. The low effectiveness of science in understanding these processes is noted. The potential of the theory of reflexive control V.A. Lefebvre is discussed. Variants of development of methods of the reflexive games theory are offered. The author's options for analyzing and forecasting situations offered in 2013 and 2020 are discussed. Options for forecasting the development of the situations are proposed.

**Keywords:** pandemic, war, multidisciplinary, "4C" approach, models, reflexive control, finance, reality, falsification, asymmetric dominance, cognitive awareness, forecasts.

## REFERENCES

1. Gerasimov V. Tsennost' nauki v predvidenii. Voenno-promyshlennyi kur'er, 2013. (in Russian)
2. Taleb N.N. Antikhrupkost'. Kak izvlech' vygodu iz khaosa. Moscow, KoLibri, Azbuka-Attikus, 2020, 768 p. (in Russian)

3. Filimonov V.A. Konfigurator tekhnologii kollektivnoi raboty dlya virtual'nykh situatsionnykh tse ntrov, Sostoyanie i perspektivy razvitiya sovremennoi nauki po napravleniyu "Informatika i vychislitel'naya tekhnika". Sb. statei II Vserossiiskoi nauchno-tekhn. konf. Voennyi innovatsionnyi tekhnopolis "ERA", Anapa, 2020, pp. 126–131. (in Russian)
4. Filimonov V.A. Prototip sistemnogo analiza nauki i obrazovaniya v Rossii v usloviyakh pandemii. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sb. materialov VIII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii (Omsk, 20 noyabrya 2020 g.), Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2021, pp. 191–193. (in Russian)
5. Filimonov V.A. Iskusstvennyi intellekt i finansovaya sistema: analiz vzaimodeistviya. Robototekhnika i iskusstvennyi intellekt: materialy XIII Vseross. nauch.tekhn. konf. s mezhdun. uchastiem (g. Zheleznogorsk, 27 noyabrya 2021 g.), Krasnoyarsk, LITERA-print, 2021, pp. 405–411. (in Russian)
6. Filimonov V.A. Money and robots: the two shadows of humanity that will destroy it. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 4(60), pp. 109–114. (in Russian)
7. Filimonov V.A. Buratino ne medved': obnaruzhenie anomalii v statisticheskikh dannykh i ikh interpretatsiyakh. Dvadtsat' sed'mye aprel'skie ekonomicheskie chteniya: materialy vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konf., 14 aprelya 2021 g., Omsk, Izd-vo Fin. Un-ta, 2021, pp. 119–121. (in Russian)
8. Filimonov V.A. Model' "Khishchnik-Zalozhnik" epidemii v regione kak primer prostogo sistemnogo analiza. 2021. DOI: 10.13140/RG.2.2.10459.49446. (in Russian)
9. Lefevr V.A. Konfliktuyushchie struktury. Moscow, Sovetskoe radio, 1973, 158 p. (in Russian)
10. Lefevr V.A. Algebra sovesti. Moscow, Progress, 2003, 408 p. (in Russian)
11. Lefevr V.A. Lektsii po teorii reflektivnykh igr. Moscow, Kogito-Tsentr, 2009, 218 p. (in Russian)
12. Lefevr V.A. Obshchaya skhema sovremennoi psikhologii. Mesto reflektivnykh issledovaniy v sisteme nauk. Dstantsionnoe vystuplenie na konferentsii "Refleksivnyi teatr situatsionnogo tsentra" 29.11.2016 (Irvain, SShA – Omsk, Rossiya). Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 1(45), pp. 108–110. (in Russian)
13. Lefebvre V. and Nyamekye K. Construction of Theoretical Model for Antiterrorism: From Reflexive Game Theory Viewpoint. Proceedings of 19-th International Command and Control Research and Technology Symposium, 2014.
14. Filimonov V.A. Refleksivnyi analiz i tekhnologii situatsionnogo tsentra. Refleksivnye protsessy i upravlenie, Sb. materialov VIII Mezhdun. simp. 18–19 oktyabrya 2011 g., Moscow, Kogito-Tsentr, 2011, pp. 251–253. (in Russian)
15. Filimonov V.A. Application of the Reflexive Analysis for Formalization of Situations of the Estimation and of the Choice. "Znaniya-Ontologii-Teorii" (ZONvol. 2013). Mater. Vseross. konf. s mezhdun. uchastiem, 8–10 oktyabrya 2013, g. Novosibirsk, vol. 2, pp. 169–173. (in Russian)
16. Filimonov V.A. Variatsii na temy V.A. Lefevra. Refleksivnye protsessy i upravlenie, 2016, vol. 16, no. 1–2, pp. 95–99. (in Russian)
17. Filimonov V.A. Eksperimental'noe issledovanie modelei teorii reflektivnykh igr: postanovka zadachi. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sb. materialov IV Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii FKN (Omsk, OmGU, 11 noyabrya 2016 g.), Omsk, Izd-vo Omskogo gos. un-ta, 2015, pp. 62–65. (in Russian)
18. Filimonov V.A. Konstruktor modelei sub"ektov reflektivnykh igr. Matematicheskie

- структуры i modelirovanie, 2018, no. 1(45), pp. 122–130. (in Russian)
19. Filimonov V.A. Refleksivnoe upravlenie setevym vzaimodeistviem sotsial'nykh partnerov. 24–e aprel'skie ekonomicheskie chteniya: Mater. mezhdun. nauch.-prakt. konf., Omsk, Fin. un-t pri Pravitel'stve RF, 2018, pp. 165–168. (in Russian)
  20. Filimonov V.A. Algebra logiki i sovesti. Vstupitel'noe slovo V.A. Lefevra, Ucheb. posobie dlya starshikh klassov obshcheobrazovatel'nykh i profil'nykh shkol, Omsk, OGIS, 2006, 72 p. (in Russian)
  21. Tolstukha S.A. and Filimonov V.A. Veb-prilozheniya dlya modelirovaniya dinamicheskikh sistem i sub"ektov s refleksiei. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, seriya "Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika (UVTiI)", 2013, no. 1(26), pp. 34–39. (in Russian)
  22. Khend D. Temnye dannye: Prakticheskoe rukovodstvo po prinyatiyu pravil'nykh reshenii v mire nedostayushchikh dannykh. Moscow, Al'pina Publisher, 2021. 366 p. (in Russian)
  23. Khromenkov P.N. Lingvopragmatika konflikta: issledovanie metodom kolichestvennogo kontent-analiza: avtoreferat dis. ... doktora filol. Nauk : 10.02.19, Khromenkov Pavel Nikolaevich; [Mesto zashchity: Voen. un-t MO RF]. Moscow, 2016, 56 p. (in Russian)
  24. Lobanov V.I. Russkaya veroyatnostnaya logika. Moscow, Russkaya pravda, 2009, 320 p. (in Russian)
  25. Filimonov V.A. and Chernyavskaya V.S. Katastrofy sub"ektivnykh otsenok i ikh modeli: k voprosu instrumentalizatsii diagnostiki efekta "zloveshchei doliny". Territoriya novykh vozmozhnostei. Vestnik Vladivostokskogo gos. universiteta ekonomiki i servisa, 2021, vol. 13, no. 2, pp. 170–178. (in Russian)
  26. Ellenberg Dzh. Kak ne oshibat'sya. Sila matematicheskogo myshleniya, Moscow, Mann, Ivanov i Ferber, 2018, 576 p. (in Russian)
  27. Kaneman D. Dumai medlenno... reshai bystro. Moscow, AST, 2014, 331 p. (in Russian)
  28. Lefevr V.A. Chto takoe odushevlenost'. Izd. 2, ispr. i dop., Moscow, Kogito-Tsentr, 2017, 122 p. (in Russian)
  29. Novikov D. and Chkhartishvili A. Refleksiya i upravlenie: matematicheskie modeli. Moscow, Lenand, 2022, 416 p. (in Russian)
  30. Khazin M. Vospominaniya o budushchem. RIPOL klassik, 2021, 464 p. (in Russian)
  31. Rudnev V.P. Real'nost' kak oshibka. Moscow, Gnozis, 2011, 320 p. (in Russian)
  32. Savchuk V.V. Topologicheskaya refleksiya. Moscow, Kanon, 2012, 416 p. (in Russian)
  33. Pereslegin S.B. Pervaya Mirovaya. Voina mezhdum Real'nostyami, Moscow, Yauza-katalog, 2016, 512 p. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 07.03.2022*

## **ПРИБЛИЖЁННАЯ ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЗАРАЖЁННЫХ УЗЛОВ В МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВИРУСОВ**

**А.О. Бельченко**<sup>1</sup>

магистрант, e-mail: artebel@mail.ru

**А.А. Магазев**<sup>2</sup>

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: magazev@omgtu.ru

**А.Ю. Никифорова**<sup>2</sup>

аспирант, e-mail: skt-omgtu@mail.ru

<sup>1</sup>Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

<sup>2</sup>Омский государственный технический университет, Омск, Россия

**Аннотация.** В работе рассматривается модель распространения компьютерных вирусов, являющаяся модификацией известной модели Рида–Фроста. Основным результатом статьи является приближённая рекуррентная формула для определения среднего числа заражённых узлов в произвольный момент времени. С помощью этой формулы описывается метод вычисления предельного значения среднего числа заражённых узлов, а также предлагается приближённый критерий для существования так называемого режима вымирания.

**Ключевые слова:** компьютерный вирус, марковская цепь, вирусная эпидемия, режим вымирания.

### **Введение**

В настоящее время для борьбы с компьютерными вирусами имеется достаточно большое количество разнообразных средств и механизмов. Их эффективность, однако, во многом обусловлена тем, что они имеют дело с уже известными вредоносными программными средствами или их несложными модификациями. Принципиально же новые виды компьютерных вирусов могут стать серьёзной угрозой для пользователей вычислительных сетей. В связи с этим разработка и исследование математических моделей распространения «абстрактных» компьютерных вирусов является важным теоретическим инструментом, позволяющим прогнозировать или даже предотвращать возникновение масштабных вирусных эпидемий.

Одной из первых статей, посвящённых математическому моделированию эпидемий компьютерных вирусов с вычислительных сетей, является концептуальная работа Кефарта и Уайта [1]. В этой статье (по-видимому, впервые) был описан принцип построения соответствующих математических моделей, основанный на синтезе идей теории графов и математической теории распростра-

нения биологических эпидемий в человеческой популяции. Собственно после появления этой статьи и начала своё развитие математическая теория моделирования эпидемий компьютерных вирусов в сложных сетях. Среди наиболее свежих обзорных работ по данному направлению исследований мы отметим здесь статьи [2, 3].

Следует подчеркнуть, что подавляющее большинство математических моделей распространения эпидемий компьютерных вирусов основано на приближении, в рамках которого число заражённых узлов сети является непрерывной функцией времени (к этому типу относятся, например, различные варианты SIS и SIR моделей). Это позволяет привлечь для моделирования хорошо развитый аппарат дифференциальных уравнений, с помощью которого удаётся получить ряд довольно важных результатов о долгосрочных эпидемиологических перспективах. Типичная постановка задачи в таких моделях подразумевает нахождение точек равновесия соответствующей системы дифференциальных уравнений, асимптотическое поведение её решений и исследование различных режимов протекания эпидемии [4, 5]. Системы уравнений, возникающие в подобных моделях, как правило являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, содержащими большое число внешних параметров.

С другой стороны, авторами работы [6] было продемонстрировано, что подобные «непрерывные» модели не всегда успешно описывают динамику вирусных эпидемий на коротких временных промежутках. Для более детального описания процесса распространения вируса в сложных вычислительных сетях они предложили «дискретный» вариант модели, в которой эволюция эпидемии описывается с помощью некоторой марковской цепи с дискретным временем. Отметим, что подобный подход не является оригинальным: в соответствующей литературе периодически появляются статьи различных авторов с теми или иными вариантами представления эпидемиологической динамики в рамках теории марковских процессов (см., например, [7–9]).

Основная цель настоящей работы — дальнейшее исследование дискретной марковской модели, предложенной в [6]. Преимуществами этой модели является более тонкая оценка числа заражённых узлов в сети, а также возможность дальнейшей модификации за счёт увеличения числа возможных состояний узлов (в оригинальной версии модели их два). Указанная модель, однако, имеет серьёзный недостаток — быстрый рост вычислительной сложности при увеличении размеров сети. Так, например, для сети, содержащей  $n$  узлов, приходится оперировать (умножать и возводить в целую степень) матрицами, содержащими  $n^2$  элементов, что при числе узлов  $n \sim 10^6$  уже проблематично из-за потери точности. В этой связи мы выводим рекуррентную приближённую формулу для вычисления среднего числа заражённых узлов сети, использование которой не сопряжено с большими вычислительными трудностями и возможно даже при очень больших значениях  $n$ . Мы обсуждаем вопрос о применимости данной приближённой оценки и применяем её для вычисления асимптотической оценки числа заражённых узлов при  $t \rightarrow \infty$ .

## 1. Марковская модель распространения компьютерных вирусов в связных сетях

Опишем основные положения марковской модели распространения компьютерных вирусов в связных сетях, предложенной в работе [6].

Рассмотрим компьютерную сеть, состоящую из  $n$  узлов. Сеть мы будем представлять в виде связного ориентированного графа, рёбра которого ассоциированы с возможными каналами передачи вируса между отдельными узлами. Каждый узел может находиться в двух состояниях: *восприимчивый к заражению* (**S**) и *заражённый* (**I**). В рамках рассматриваемой модели время предполагается дискретным, т. е. любые изменения в сети происходят в заданные моменты времени, которые мы будем полагать целыми числами:  $t = 0, 1, 2, \dots$

Обозначим через  $i(t)$  и  $s(t)$  число узлов, находящихся в момент  $t$  в заражённом и восприимчивом состояниях соответственно. Ясно, что  $i(t) + s(t) = n$ . Предполагается, что заражённые узлы могут оставаться таковыми или становиться восприимчивыми к заражению (излечиваться). Точно так же, восприимчивые узлы могут оставаться восприимчивыми или становиться заражёнными (инфицироваться). Для количественного описания данных переходов введём следующие параметры:

- $\beta$  — вероятность передачи вируса от заражённого узла к восприимчивому (за один такт времени);
- $\delta$  — вероятность заражённому узлу стать восприимчивым (вылечиться) за один такт времени;
- $c$  — *связность* сети, т. е. среднее относительное число соседей у узла. Отметим, что данный параметр связан со средней степенью  $\langle k \rangle$  вершины в графе формулой  $c = \langle k \rangle / n$ . Если  $c = 0$ , сеть состоит только из изолированных узлов, если же  $c = 1$ , сеть представляет собой полный ориентированный граф.

Кроме того, мы введём ещё одну важную характеристику: вероятность  $\mu$  восприимчивому узлу стать заражённым. Как мы увидим далее, эта величина не является постоянной; она зависит от  $\beta$ ,  $c$  и числа заражённых узлов  $i$ .

На рис. 1 иллюстрируются возможные переходы между состояниями отдельного узла с указанием соответствующих вероятностей.

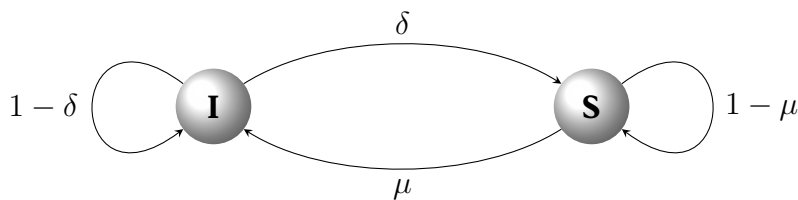


Рис. 1. Граф переходов между состояниями отдельного узла сети

Ассоциируем с нашей компьютерной сетью марковскую цепь, *состояния* которой определяются числом  $i$  заражённых узлов; всего имеется  $n+1$  возможных состояний:  $i = 0, 1, \dots, n$ . Динамика данной цепи задаётся переходными вероятностями  $\pi_{i,i'}$ , т. е. вероятностями перейти сети из состояния  $i$  в состояние  $i'$ . В работе [6] показано, что эти вероятности вычисляются в соответствии с формулой

$$\pi_{i,i'} = \sum_{k=\max\{0,i-i'\}}^{\min\{i,n-i'\}} C_i^k \delta^k (1-\delta)^{i-k} C_{n-i}^{i'-i+k} \mu^{i'-i+k} (1-\mu)^{n-k-i'}, \quad (1)$$

где вероятность  $\mu$  восприимчивому узлу стать заражённым в состоянии  $i$  даётся равенством

$$\mu = \sum_{k=0}^i C_i^k [1 - (1-\beta)^k] c^k (1-c)^{i-k}. \quad (2)$$

Здесь  $C_i^k \equiv \frac{i!}{k!(i-k)!}$  — биномиальный коэффициент, равный числу сочетаний из  $i$  по  $k$ .

Если нам известна переходная матрица  $\Pi = (\pi_{i,i'})$ , составленная из всех возможных вероятностей (1), с её помощью мы можем вычислять различные интересующие нас величины. Например, мы можем вычислить вероятность  $p_i(t)$  состояния  $i$  в момент времени  $t$  согласно формуле

$$p_i(t) = \sum_{i'=0}^n p_{i'}(0) \cdot \pi_{i',i}^{(t)},$$

где  $\pi_{i,i'}^{(t)}$  — элементы матрицы  $\Pi^t$ , являющейся  $t$ -й степенью матрицы  $\Pi$ . Здесь  $p_i(0)$  представляют собой вероятности состояний цепи в начальный момент времени  $t = 0$ . Обычно предполагают заданным *начальное число заражённых узлов*  $i_0 = i(0)$  так, что

$$p_i(0) = \begin{cases} 1, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0. \end{cases}$$

Зная вероятности  $p_i(t)$ , мы также можем оценить *среднее число заражённых узлов* в момент  $t$  — величину, которая будет играть основную роль в настоящем исследовании:

$$I(t) = \sum_{i=0}^n i \cdot p_i(t). \quad (3)$$

Перед тем как перейти к дальнейшему анализу этой модели, сделаем несколько замечаний.

Рассматриваемая нами модель распространения вирусов представляет собой модификацию хорошо известной модели Рида–Фроста [10], предложенную Л. Ридом и В. Фростом в 1920-х гг. для описания биологических эпидемий. Авторы этой модификации приняли некоторые дополнительные допущения, связанные с особенностями эпидемий компьютерных вирусов [6]; многие из



этих допущений заимствованы из концептуальной работы Кефарта и Уайта [1]. В то же время, в отличие от Кефарта и Уайта, в статье [6] была предложена более тонкая оценка вероятности  $\mu$  заражения восприимчивого узла; в [1] эта вероятность линейно зависела от числа заражённых узлов:  $\mu = \beta ci$ . Как нетрудно видеть, данная оценка получается из формулы (2) её разложением в ряд Тейлора и отбрасыванием всех членов выше первого порядка (см. ниже). Таким образом, согласно модели, предложенной в [6], вероятность заражения с увеличением числа заражённых узлов  $i$  растёт медленнее, чем это предполагалось Кефартом и Уайтом.

Авторами работы [6] также было отмечено, что рассматриваемая марковская модель распространения компьютерных вирусов может быть сравнительно легко обобщена на случай  $m$  различных состояний узлов при предположении, что переходы между этими состояниями происходят по кольцевому графу [11]. Ими также была высказана возможность дальнейших модификаций, в которых параметры модели являются функциями состояний марковской цепи (так же, как это имеет место для вероятности заражения  $\mu$  восприимчивого узла). Подобный уровень обобщения может приводить к более сложной нелинейной динамике распространения вирусов.

## 2. Приближённая оценка среднего числа заражённых узлов

При исследовании особенностей распространения эпидемий компьютерных вирусов основной интерес представляет динамика изменения числа заражённых узлов «в среднем». Иными словами, возникает необходимость изучения среднего числа заражённых узлов  $I$  как функции времени  $t$ . Однако в случае больших сетей, т. е. при  $n \gtrsim 10^5$ , прямой способ вычисления  $I(t)$  в соответствии с формулой (3) затруднён, так как приходится возводить в целую степень матрицу переходных вероятностей  $\Pi = (\pi_{i,i'})$  размера  $n \times n$ , что довольно затратно. Кроме того, при нахождении элементов  $\pi_{i,i'}$  этой матрицы в соответствии с равенством (1) требуется вычислять биномиальные коэффициенты  $C_i^k$  для больших значений  $i$  и  $k$ , что также неудобно с вычислительной точки зрения. В настоящем разделе мы опишем альтернативный способ, с помощью которого можно получить *приближённую* оценку для среднего числа заражённых узлов, минуя сложные и затратные вычисления.

Для начала упростим формулу (2) для вероятности  $\mu$  восприимчивому узлу стать заражённым. Для этого мы раскроем квадратные скобки в этой формуле:

$$\mu = \sum_{k=0}^i C_i^k c^k (1-c)^{i-k} - \sum_{k=0}^i C_i^k (1-\beta)^k c^k (1-c)^{i-k}. \quad (4)$$

Первое слагаемое — это биномиальное разложение единицы, так как  $1 = (c + 1 - c)^i$ . Второе слагаемое перепишем в соответствии с формулой для бинома

Ньютона в виде:

$$\sum_{k=0}^i C_i^k [(1 - \beta)c]^k (1 - c)^{i-k} = [(1 - \beta)c + 1 - c]^i = (1 - \beta c)^i.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (4), получаем

$$\mu = 1 - (1 - \beta c)^i. \tag{5}$$

Полученное упрощённое выражение для  $\mu$  позволяет сразу же сделать ряд полезных замечаний, касающихся этой величины. Во-первых, из равенства (5) следует, что величина  $\mu$  зависит от  $\beta$  и  $c$  не по отдельности, а в комбинации  $\beta c$ . Это наблюдение означает, что модель обладает симметрией относительно преобразований вида  $\beta \rightarrow \lambda\beta, c \rightarrow c/\lambda, \lambda > 0$  (отметим, что  $\beta$  и  $c$  входят в формулу (1) только через  $\mu$ ). Это позволяет сузить число входных параметров модели с четырёх ( $\beta, c, \delta, i_0$ ) до трёх ( $\alpha = \beta c, \delta, i_0$ ). Во-вторых, необходимо подчеркнуть факт *монотонного возрастания*  $\mu$  с увеличением числа заражённых узлов  $i$ , причём в пределе  $i \rightarrow \infty$  мы получаем  $\mu \rightarrow 1$ . Для конечных сетей, однако,  $i$  не может превышать  $n$ , так что для сети с  $n$  узлами максимальное значение вероятности  $\mu$  будет равно  $\mu_{\max} = 1 - (1 - \beta c)^n$ . В-третьих, при  $0 < \beta c < 1$  мы имеем разложение в ряд Тейлора

$$\mu = \beta c i - \frac{i(i-1)}{2!} \beta^2 c^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{3!} \beta^3 c^3 + O(\beta^4 c^4),$$

из которого, в частности, следует, что в линейном приближении  $\mu \approx \beta c i$ . Именно такую оценку для  $\mu$  и предлагали Кефарт и Уайт в своей работе [1].

Получим теперь удобное рекуррентное равенство для приближённой оценки  $I^*(t)$  среднего числа заражённых узлов в момент времени  $t$ .

Допустим, что в некоторый момент времени  $t$  среднее число заражённых узлов в сети известно и равно  $I^*(t)$ . Тогда вероятность восприимчивому узлу стать заражённым в следующий момент времени  $t + 1$  будет равна

$$\mu = 1 - (1 - \beta c)^{I^*(t)}.$$

Отсюда следует, что в момент  $t + 1$  «в среднем» будет дополнительно заражено  $\mu [n - I^*(t)] = [1 - (1 - \beta c)^{I^*(t)}] [n - I^*(t)]$  узлов (из тех, которые были восприимчивыми в момент  $t$ ). С другой стороны, часть узлов, инфицированных в момент  $t$ , вылечатся, т. е. станут восприимчивыми в момент  $t + 1$ ; среднее число таких узлов будет равно  $\delta I^*(t)$ . Таким образом, среднее число заражённых узлов в момент  $t + 1$  ожидается равным

$$I^*(t + 1) = (1 - \delta) I^*(t) + [n - I^*(t)] [1 - (1 - \beta c)^{I^*(t)}]. \tag{6}$$

Рекуррентное соотношение (6) естественным образом дополняется начальным условием

$$I^*(0) = i_0, \tag{7}$$

означающим, что в начальный момент времени  $t = 0$  в сети имеется ровно  $i_0$  заражённых узлов.

Насколько хорошо построенная нами рекуррентная последовательность  $I^*(t)$  аппроксимирует истинную функцию  $I(t)$ , получаемую в соответствии с формулой (3)? Строгий анализ этой проблемы является довольно сложной задачей, поэтому в настоящей работе мы ограничимся лишь несколькими качественными замечаниями, подтверждаемые численными экспериментами.

1. Во-первых, отметим довольно очевидный факт: с ростом размера сети  $n$  разница между  $I(t)$  и  $I^*(t)$  уменьшается, т. е. для больших сетей  $I^*(t)$  весьма неплохо аппроксимирует среднее число заражённых узлов.
2. Второе наблюдение заключается в том, что при фиксированных  $n$  и  $i_0$  разница  $\Delta I(t) = |I(t) - I^*(t)|$  слабо, но всё же зависит от параметров  $\alpha = \beta c$  и  $\delta$ . Эта разница особенно существенна вблизи тех значений  $\alpha$  и  $\delta$ , при которых наблюдается так называемый *режим вымирания* — режим, в котором  $I_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ . Полученное нами приближение  $I^*(t)$ , напротив, в этом режиме демонстрирует ненулевое предельное значение  $I_\infty^*$ , причём расхождение с  $I_\infty$  может достигать относительной величины порядка 20 %.
3. Наконец, наше третье замечание касается начального условия (7): расхождение между  $I(t)$  и  $I^*(t)$  довольно чувствительно по отношению к начальному значению  $i_0$  и с его ростом быстро уменьшается. По-видимому, это связано с тем фактом, что для рассматриваемой нами марковской модели предельное значение  $I_\infty$  поначалу довольно сильно зависит от  $i_0$ , но с ростом этой величины эта зависимость исчезает (обычно это происходит уже при  $i_0 > 0.1n$ ) [6]. Вместе с тем оценка  $I^*(t)$  демонстрирует ещё бóльшую нечувствительность к  $i_0$ . Иллюстрация этого замечания приведена на рис. 2, из которого видно, что имеется существенное расхождение между  $I(t)$  и  $I^*(t)$  при малых  $i_0$ , которое, однако, быстро уменьшается с ростом начального числа заражённых узлов.

В заключение этого раздела отметим, что, несмотря на сделанные выше замечания, приближение  $I^*(t)$  довольно хорошо «работает» на достаточно широком диапазоне входных значений модели и может быть использовано для её дальнейшего изучения. В частности, в следующем разделе мы проиллюстрируем применение рекуррентной формулы (6) для оценки предельного значения  $I_\infty$  — характеристики, представляющей большой интерес с точки зрения долгосрочных прогнозов динамики вирусной эпидемии.

### 3. Предельное значение среднего числа заражённых узлов и режим вымирания

В предположении, что существует предел рекуррентной последовательности (6), перейдём в этом равенстве к пределу при  $t \rightarrow \infty$ . Используя обозначе-

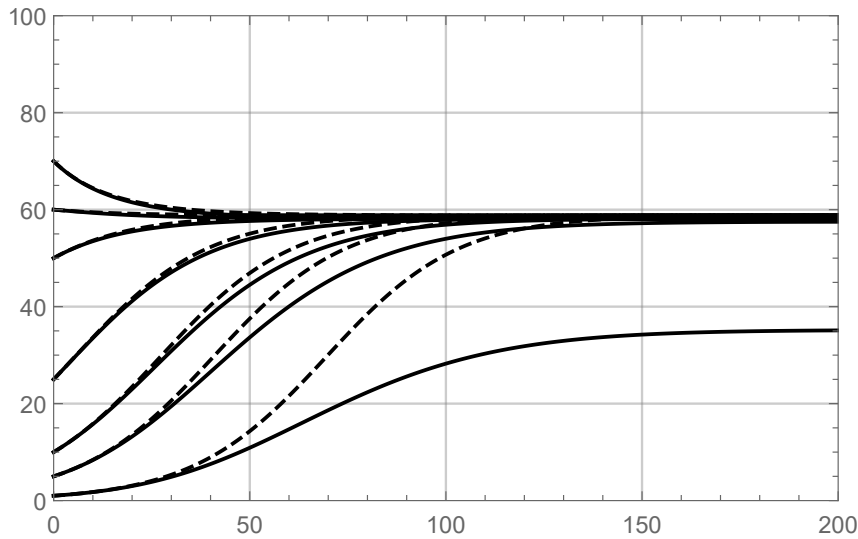


Рис. 2. Графики функций  $I(t)$  (сплошные линии) и  $I^*(t)$  (прерывистые линии) для различных начальных значений  $i_0$  ( $= 1, 5, 10, 25, 50, 60, 70$ );  $n = 100, \beta c = 0,001, \delta = 0,04$

ние  $I_\infty^* = \lim_{t \rightarrow \infty} I^*(t)$ , мы получаем

$$I_\infty^* = (1 - \delta) I_\infty^* + [n - I_\infty^*] [1 - (1 - \beta c)^{I_\infty^*}]. \tag{8}$$

Сразу же обратим внимание на тот факт, что решения этого уравнения не зависят от начального значения  $i_0$ , хотя исходная рекуррентная последовательность (6) эту зависимость (неявно) предполагала. В предыдущем разделе мы уже указывали на эту особенность, также иллюстрируемую численными экспериментами.

Для дальнейшего анализа уравнения (8) введём новый параметр  $\gamma = (1 - \beta c)^n$ , а также вспомогательную переменную  $x = I_\infty^*/n$ , представляющую собой относительное число заражённых узлов при  $t \rightarrow \infty$ . После этого уравнение (8) принимает вид

$$\delta x = (1 - x)(1 - \gamma^x). \tag{9}$$

Отметим, что данное уравнение рассматривается относительно неизвестного  $x$ , область значений которого представляет собой единичный отрезок  $[0, 1]$ . Кроме того, будем полагать, что  $\delta > 0$ .

Уравнение (9) является трансцендентным уравнением и, по-видимому, в общем случае не решается в аналитическом виде. С другой стороны, его можно легко решить численными методами, например методом бисекций или методом Ньютона. Некоторую информацию о характере корней этого уравнения, однако, можно получить и без явного его решения.

Очевидно, что число  $x = 0$  всегда является корнем уравнения (9), однако в большей степени нас будут интересовать его ненулевые корни из отрезка  $[0, 1]$ , так как таким корням отвечают ненулевые значения  $I_\infty^*$ . В то же время отсутствие таких корней означает наличие *режима вымирания*, в котором  $I_\infty^* = 0$  для любых значений начального числа заражённых узлов  $i_0$ .

Обозначим  $f(x) = \delta^{-1}(1-x)(1-\gamma^x)$ . Отметим, что функция  $f(x)$  бесконечно дифференцируема всюду на числовой прямой. В частности, её вторая производная имеет вид

$$f''(x) = \frac{\gamma^x}{\delta} \ln \gamma (2 - (1-x) \ln \gamma)$$

и является отрицательной на единичном отрезке. Это значит, что функция  $f'(x)$  монотонно убывает на отрезке  $[0, 1]$  и, так как  $f'(0) = -\ln(\gamma)/\delta > 0$  и  $f'(1) = (\gamma - 1)/\delta < 0$ , имеется *единственная* точка  $\xi \in (0, 1)$ , такая, что  $f'(\xi) = 0$ . Таким образом, функция  $f(x)$  монотонно возрастает на полуинтервале  $[0, \xi)$  и монотонно убывает на полуинтервале  $(\xi, 1]$ .

Учитывая указанное поведение функции  $f(x)$ , мы можем теперь дать ответ на вопрос, когда уравнение (9) не имеет на единичном отрезке корней, кроме нулевого. Так как (9) эквивалентно уравнению  $x = f(x)$ , ненулевых корней не будет, если и только если касательная к функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$  лежит *под* прямой  $y = x$ , так только в такой ситуации графики функций  $y = f(x)$  и  $y = x$  не пересекаются на полуотрезке  $(0, 1]$ . Уравнение касательной к функции  $f(x)$  в точке  $x = 0$  имеет вид

$$y = -\frac{\ln \gamma}{\delta} x,$$

откуда критерий отсутствия ненулевых корней уравнения (9) на отрезке  $[0, 1]$  принимает вид  $-\ln \gamma / \delta \leq 1$  или в исходных обозначениях:

$$(1 - \beta c)^n \geq e^{-\delta}. \quad (10)$$

Данное неравенство представляет собой условие, при котором должен иметь место режим вымирания — режим, в котором эпидемия всегда будет затухать на бесконечно больших временах. В частности, пороговое значение  $\delta_{\text{кр}} = -n \ln(1 - \beta c)$  отделяет режим вымирания от режима, в котором эпидемия никогда не затухнет.

Так как  $I^*(t)$  представляет собой лишь приближённую оценку к истинному значению  $I(t)$  среднего числа заражённых узлов, неравенство (10) также является всего лишь приближением к настоящему условию возникновения режима вымирания. В действительности оно является весьма грубым, так как в реальности режим вымирания начинает наблюдаться при значениях  $\delta$ , меньших, чем предсказываемое пороговое значение  $\delta_{\text{кр}}$ . С другой стороны, если условие (10) выполнено, то режим вымирания всегда имеет место; это также подтверждается наблюдениями.

Для иллюстрации сформулированных замечаний приведём результаты одной серии численных экспериментов, осуществлённых нами с применением системы символьных вычислений Wolfram Mathematica. Мы взяли исходную марковскую модель с числом узлов  $n = 100$  и параметром  $\alpha = \beta c = 0,00606$ . Отметим, что пороговое значение  $\delta_{\text{кр}}$ , предсказываемое нашим приближением, в этом случае равно  $\delta_{\text{кр}} = 0,60784$ . Далее для двенадцати различных значений параметра  $\delta$  мы вычислили значение  $I_{\infty}^*$  с помощью решения уравнения (9),

а затем для каждого из этих значений  $\delta$  и пяти различных значений  $i_0$  начального числа заражённых узлов мы вычислили соответствующие истинные предельные значения  $I_\infty$  стандартными алгоритмами теории марковских цепей. Полученные результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение значений  $I_\infty$  и  $I_\infty^*$  для  $n = 100$  и  $\beta c = 0,00606$

| $\delta$ | $I_\infty$ |           |            |            |            | $I_\infty^*$ |
|----------|------------|-----------|------------|------------|------------|--------------|
|          | $i_0 = 1$  | $i_0 = 5$ | $i_0 = 10$ | $i_0 = 25$ | $i_0 = 50$ |              |
| 0,001    | 99,6580    | 99,7790   | 99,7790    | 99,7790    | 99,7790    | 99,7806      |
| 0,010    | 96,6112    | 97,8012   | 97,8012    | 97,8012    | 97,8012    | 97,8176      |
| 0,050    | 83,7142    | 89,2378   | 89,2379    | 89,2379    | 89,2379    | 89,3396      |
| 0,100    | 69,0677    | 79,0778   | 79,0808    | 79,0808    | 79,0808    | 79,2680      |
| 0,200    | 44,2002    | 60,1127   | 60,2082    | 60,2084    | 60,2084    | 60,6590      |
| 0,300    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 43,7863      |
| 0,400    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 28,3589      |
| 0,500    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 14,1530      |
| 0,600    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 0,99239      |
| 0,700    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000      |
| 0,800    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000      |
| 0,900    | 0,00000    | 0,00000   | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000    | 0,00000      |

Анализ таблицы 1 подтверждает высказанные нами выше утверждения. При значениях  $\delta$ , много бóльших, чем  $\delta_{кр}$ , значение  $I_\infty^*$  довольно хорошо аппроксимирует истинное значение  $I_\infty$ , особенно с ростом  $i_0$ . При приближении  $\delta$  к  $\delta_{кр}$  наблюдается существенное расхождение  $I_\infty^*$  и  $I_\infty$ : режим вымирания начинает наблюдаться при бóльшем значении  $\delta$ , чем это предсказывается пороговым значением  $\delta_{кр} = 0,60784$  (мы наблюдаем его уже при  $\delta = 0,3$ ). Наконец, при значениях  $\delta \geq \delta_{кр}$  оба подхода предсказывают наличие режима вымирания и дают одни и те же результаты.

## Заключение

В настоящей статье мы предложили приближённую оценку среднего числа заражённых узлов сети с помощью рекуррентного соотношения (6). По сравнению с прямым подходом, известным из теории марковских цепей, наш метод является менее трудоёмким с вычислительной точки зрения, хотя цена подобного выигрыша состоит в потере точности, особенно вблизи тех значений параметров модели, для которых наблюдается переход от режима вымирания к режиму постоянного наличия эпидемии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kephart J.O., White S.R. Directed-Graph Epidemiological Models of Computer Viruses // Proceedings of the IEEE Symposium on Security and Privacy. Oakland, California, 1991. P. 343–359.
2. Pare P.E., Beck C.L., Basar T. Modeling, estimation, and analysis of epidemics over networks: An overview // Annual Reviews in Control. 2020. V. 50. P. 345–360. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.09.003>.
3. Zino L., Cao M. Analysis, prediction, and control of epidemics: A survey from scalar to dynamic network models // IEEE Circuits and Systems Magazine. 2021. V. 21, N. 4. P. 4–23. DOI: 10.1109/MCAS.2021.3118100.
4. Zhu Q., Yang X., Ren J. Modeling and analysis of the spread of computer virus // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2012. V. 17, N. 12. P. 5117–5124. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.05.030>.
5. Lu-Xing Y., Yang X., Liu J. [et al.] Epidemics of computer viruses: a complex-network approach // Applied Mathematics and Computation. 2013. V. 219, N. 16. P. 8705–8717. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.02.031>.
6. Billings L., Spears M.W., Schwartz I.B. A unified prediction of computer virus spread in connected networks // Physics Letters A. 2002. V. 297, N. 3–4. P. 261–266. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)00152-4](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00152-4).
7. Van Mieghem P., Omic J., Kooij R. Virus spread in networks // IEEE / ACM Transactions On Networking. 2009. V. 17, N. 1. P. 1–14. DOI: 10.1109/TNET.2008.925623.
8. Далингер Я.М., Бабанин Д.В., Бурков С.М. Математические модели распространения вирусов в компьютерных сетях различной структуры // Информатика и системы управления. 2011. № 4(30). С. 3–11.
9. Van de Bovenkamp R., van Mieghem P. Survival time of the susceptibleinfected-susceptible infection process on a graph // Physical Review E. 2015. V. 92, N. 3. P. 032806. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032806>.
10. Hoppensteadt F.C. Mathematical Methods of Population Biology. Cambridge : Cambridge University Press, 1982. 160 p.
11. Spears W., Billings L., Schwartz I. Modeling viral epidemiology // Naval Research Laboratory. 2001.

**AN APPROXIMATE EVALUATION OF THE INFECTED NODES NUMBER FOR  
A MARKOV MODEL OF VIRUSES SPREADING****A.O. Belchenko**<sup>1</sup>

Master's Degree Student, e-mail: artbel@mail.ru

**A.A. Magazev**<sup>2</sup>

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: magazev@omgtu.ru

**A.Yu. Nikiforova**<sup>2</sup>

Ph.D. Student, e-mail: skt-omgtu@mail.ru

<sup>1</sup>Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia<sup>2</sup>Omsk State Technical University, Omsk, Russia

**Abstract.** In this work, we consider a model of computer virus spreading, which is a modification of the well-known Reed–Frost model. The main result of the paper is an approximate recurrence formula for determining the mean number of infected nodes at any moment of time. Using this formula, we describe a method for calculating the limit value of the mean number of infected nodes, and then we derive an approximate criterion for the existence of the so-called extinction regime.

**Keywords:** computer virus, Markov chain, virus epidemic, extinction regime.

## REFERENCES

1. Kephart J.O. and White S.R. Directed-Graph Epidemiological Models of Computer Viruses. Proceedings of the IEEE Symposium on Security and Privacy, Oakland, California, 1991, pp. 343–359.
2. Pare P.E., Beck C.L., and Basar T. Modeling, estimation, and analysis of epidemics over networks: An overview. Annual Reviews in Control, 2020, vol. 50, pp. 345–360. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2020.09.003>.
3. Zino L. and Cao M. Analysis, prediction, and control of epidemics: A survey from scalar to dynamic network models. IEEE Circuits and Systems Magazine, 2021, vol. 21, no. 4, pp. 4–23. DOI: 10.1109/MCAS.2021.3118100.
4. Zhu Q., Yang X., and Ren J. Modeling and analysis of the spread of computer virus. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, vol. 17, no. 12, pp. 5117–5124. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.05.030>.
5. Lu-Xing Y., Yang X., Liu J. [et al.] Epidemics of computer viruses: a complex-network approach. Applied Mathematics and Computation, 2013, vol. 219, no. 16, pp. 8705–8717. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.02.031>.
6. Billings L., Spears M.W., and Schwartz I.B. A unified prediction of computer virus spread in connected networks. Physics Letters A, 2002, vol. 297, no. 3–4, pp. 261–266. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)00152-4](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00152-4).
7. Van Mieghem P., Omic J., and Kooij R. Virus spread in networks. IEEE, ACM Transactions On Networking, 2009, vol. 17, no. 1, pp. 1–14. DOI: 10.1109/TNET.2008.925623.



8. Dalinger Ya.M., Babanin D.V., and Burkov S.M. Matematicheskie modeli rasprostraneniya virusov v komp'yuternykh setyakh razlichnoi struktury. Informatika i sistemy upravleniya, 2011, no. 4(30), pp. 3–11. (in Russian)
9. Van de Bovenkamp R. and van Mieghem P. Survival time of the susceptibleinfected-susceptible infection process on a graph. Physical Review E, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 032806. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032806>.
10. Hoppensteadt F.C. Mathematical Methods of Population Biology. Cambridge, Cambridge University Press, 1982, 160 p.
11. Spears W., Billings L. and Schwartz I. Modeling viral epidemiology. Naval Research Laboratory, 2001.

*Дата поступления в редакцию: 17.03.2022*

## **ИТЕРАТИВНОЕ РЕШЕНИЕ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ЗАЩИТЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ СИСТЕМЫ**

**Т.В. Вахний**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: vahniytv@mail.ru

**С.В. Вахний**

студент, e-mail: vakhniysv@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье для решения биматричной игры между злоумышленником и администратором безопасности при огромных размерах платёжных матриц игроков предлагается использовать менее затратный на вычислительные ресурсы приближённый итеративный метод, алгоритм которого построен на основе метода Брауна–Робинсона.

**Ключевые слова:** информационная безопасность, компьютерная система, биматричные игры, итеративные методы, оптимальная стратегия, программный продукт.

### **Введение**

При построении систем защиты информации можно применять теоретико-игровые методы, позволяющие анализировать взаимодействие между администратором безопасности системы и злоумышленниками [1–3]. Целью администратора безопасности является выбор такой стратегии защиты, которая будет сводить потери от атак к минимуму, а цели атакующих хакеров часто в расчёт не принимаются. В силу этого предполагается, что злоумышленник увлечён желанием нанести как можно больший ущерб атакуемой компьютерной системе, тогда его выигрыш можно приравнять проигрышу администратора безопасности. В результате цели игроков полагают прямо противоположными и для анализа их взаимодействия достаточно составить одну общую платёжную матрицу и найти решение матричной игры [1–4].

Нанесение хакером ущерба обычно является скорее следствием его действий, а не самой целью. В биматричных играх предполагается, что игроки (администратор безопасности и злоумышленник) имеют разные интересы и для каждого из них составляется своя платёжная матрица [1]. Нахождение решений (наиболее оптимальных стратегий игроков) матричных и биматричных игр с платёжными матрицами небольших размеров не занимает много времени. Однако постоянно увеличивающееся количество способов атак и средств защиты приводит к тому, что экспоненциально растёт количество возможных стратегий хакеров и стратегий администратора безопасности (т. е. различных соче-

таний программных средств) соответственно. В результате решение подобных матричных и биматричных игр с платёжными матрицами огромных размеров представляет собой трудоёмкий и громоздкий процесс, требующий достаточно продолжительного времени [2]. Поэтому становятся всё более актуальными разработка и применение методов их приближённого решения, которые менее затратны на вычислительные ресурсы [2, 3].

В данной работе для нахождения наиболее оптимальных вариантов защиты компьютерной системы предлагается построить биматричную игру администратора безопасности со злоумышленником и решить её приближённым итеративным методом, алгоритм которого построен на основе метода Брауна–Робинсона [4].

## 1. Постановка задачи и игровой подход

Для поиска наиболее оптимального набора средств защиты компьютерной системы можно провести математическую игру двух сторон, одной из которых является система защиты компьютерной информации (I игрок – администратор безопасности), а с другой – возможные атаки хакеров (II игрок – злоумышленник). Один из подходов, моделирующий игру хакера и администратора безопасности, основан на проведении биматричной игры, в которой интересы игроков не совпадают и не являются противоположными.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются платёжными матрицами отдельно для каждого игрока. В каждой из них строки соответствуют стратегиям одного игрока (программное средство или набор из программных средств), а столбцы – стратегиям другого игрока, а на их пересечении в первой платёжной матрице стоит цена игры для администратора, а во второй платёжной матрице – цена игры для злоумышленника.

Если администратор для обеспечения безопасности системы может выбирать из  $S$  средств защиты, и при этом их можно использовать одновременно, то у него будет  $N = 2^S - 1$  вариантов стратегий. Аналогично, если злоумышленник имеет  $L$  способов атаки, то у него будет  $M = 2^L - 1$  вариантов вредоносных стратегий.

Таблица 1. Платёжная матрица  $A$

|       | $y_1$    | $y_2$    | ... | $y_M$    |
|-------|----------|----------|-----|----------|
| $x_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1M}$ |
| $x_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2M}$ |
| ...   | ...      | ...      | ... | ...      |
| $x_N$ | $a_{N1}$ | $a_{N2}$ | ... | $a_{NM}$ |

Таблица 2. Платёжная матрица  $B$

|       | $y_1$    | $y_2$    | ... | $y_M$    |
|-------|----------|----------|-----|----------|
| $x_1$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | ... | $b_{1M}$ |
| $x_2$ | $b_{21}$ | $b_{22}$ | ... | $b_{2M}$ |
| ...   | ...      | ...      | ... | ...      |
| $x_N$ | $b_{N1}$ | $b_{N2}$ | ... | $b_{NM}$ |

Ходом администратора безопасности является использование одной из  $N$  стратегий защиты компьютерной системы  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), а ходом злоумыш-

ленника – применение одной из  $M$  стратегий атаки  $y_j$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) на компьютерную систему. Последовательно перебирая все стратегии игроков, можно заполнить две таблицы, в одной из них указывая ущерб администратора  $a_{ij}$  (см. табл. 1), а во второй – прибыль  $b_{ij}$  злоумышленника (см. табл. 2) соответственно при выборе стратегии защиты  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) и способа атаки  $y_j$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ). Из таблиц 1 и 2 можно выписать платёжные матрицы  $A$  и  $B$ , содержащие  $N$  строк и  $M$  столбцов с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ , соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NM} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{NM} \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы  $a_{ij}$  платёжной матрицы администратора безопасности  $A$  вычисляются следующим образом:

$$a_{ij} = R(x_i, y_j) + G_i,$$

где  $G_i$  – затраты администратора безопасности на приобретение и использование средств защиты, необходимых для реализации  $i$ -й стратегии  $x_i$ ,  $R(x_i, y_j)$  – величина ущерба от атаки  $y_j$  при использовании стратегии защиты  $x_i$ .

Аналогично элементы  $b_{ij}$  платёжной матрицы злоумышленника  $B$  вычисляются по формуле:

$$b_{ij} = P(x_i, y_j) - F_j,$$

где  $F_j$  – затраты злоумышленника на использование атаки  $y_j$ ,  $P(x_i, y_j)$  – величина прибыли от атаки  $y_j$  при использовании администратором стратегии защиты  $x_i$ .

Биматричная игра является одноходовой. Процесс игры состоит в том, что администратор выбирает стратегию защиты  $x_i$ , злоумышленник выбирает стратегию атаки  $y_j$ , после чего вычисляется исход игры, заключающийся в том, что администратор терпит ущерб, равный  $a_{ij}$ , а злоумышленник получает прибыль  $b_{ij}$ . Цель администратора безопасности – выбор такой стратегии, т. е. набора программных средств защиты, который сводит потери от атак и затраты на покупку средств защиты к минимуму, а цель атакующего – выбор такой стратегии, которая даст ему наибольший выигрыш.

## 2. Критерии выбора оптимальных стратегий игроков

Осмотрительное поведение администратора безопасности заключается в том, чтобы минимизировать свой возможный максимальный ущерб. Поэтому его оптимальную стратегию в простейшем случае можно найти из условия минимакса [1]. Поставим в соответствие каждой  $i$ -й стратегии администратора число  $W_i(A)$ , вычисляемое с помощью его платёжной матрицы  $A$ . Критерий выбора оптимальной стратегии  $x_{i_0}$  для администратора состоит в том, чтобы

$$W_{i_0}(A) = \min_i \max_j a_{ij}. \quad (1)$$

Если злоумышленник ориентируется на самые неблагоприятные условия, то он стремится максимизировать свой возможный минимальный выигрыш. Поэтому его оптимальную стратегию в простейшем случае можно найти из условия максимина [1]. Поставим в соответствие каждой  $j$ -й стратегии злоумышленника число  $W_j(B)$ , вычисляемое с помощью его платёжной матрицы  $B$ . Критерий выбора оптимальной стратегии  $y_{j_0}$  для злоумышленника состоит в том, чтобы взять

$$W_{j_0}(A) = \max_j \min_i b_{ij}. \quad (2)$$

Минимаксные стратегии игроков уместны в тех случаях, когда они не столько хотят выиграть, сколько не хотят проиграть. Хотя администратор и злоумышленник могут выбрать для себя и другие критерии для подбора наиболее оптимальных для них наборов программных средств [5].

Решение биматричной игры сводится к отысканию ситуаций равновесия и равновесных (оптимальных) стратегий игроков. Выбор одним из игроков неоптимальной для него стратегии приведёт к ухудшению его результатов игры и улучшению их у противника.

### 3. Сложности нахождения точного решения биматричной игры

С увеличением участвующих в игре средств защиты  $S$  и атак  $L$ , растёт общее количество стратегий игроков  $N$  и  $M$ , размер их платёжных матриц, а также число возможных партий игры  $C = NM = (2^S - 1)(2^L - 1)$ . Например, если число возможных стратегий злоумышленника  $M = 1000$ , число выбираемых средств защиты  $S = 25$ , то число возможных стратегий администратора будет  $N = 33554431$ , а количество возможных партий игры  $C = 33554431000!$  Тогда для нахождения оптимальной стратегии администратора безопасности нужно провести минимум  $2C$  сложений, а в приведённом примере это более 67 миллиардов. В результате данный способ расчёта требует больших затрат на вычислительные ресурсы, и уже при заданных здесь относительно небольших значениях  $M$  и  $S$  оптимальная стратегия администратора может вычисляться продолжительное время. Если ещё в несколько раз увеличить значения  $M$  и  $S$ , то невозможно будет данным способом найти точное решение биматричной игры за разумное время даже с использованием вычислительных машин.

Исходя из этого, актуально нахождение решения рассматриваемой игры методами, которые будут менее затратны на вычислительные ресурсы, например приближённым итеративным методом.

#### 4. Описание алгоритма приближённого решения биматричной игры итеративным методом

В данной работе для нахождения приближённого решения биматричной игры итеративным методом предлагается многократно фиктивно разыгрывать игру с платёжными матрицами двух игроков (администратора безопасности и злоумышленника). При этом платёжные матрицы  $A$  и  $B$  составляют только из чистых стратегий игроков. У администратора безопасности каждая чистая стратегия состоит только из одного программного средства, а у злоумышленника – из одного способа атаки. Таким образом, в данном методе платёжные матрицы  $A$  и  $B$  будут иметь гораздо меньший размер  $S \times L$ .

В первой партии (при одном повторении игры) оба игрока могут использовать любые известные критерии [5] для нахождения своих чистых стратегий, а в  $k$ -й партии каждый игрок выбирает ту чистую стратегию, которая максимизирует его ожидаемый выигрыш или минимизирует проигрыш против наблюдаемого эмпирического вероятностного распределения противника за все его предыдущие  $(k - 1)$  партий. При итерационном решении биматричной игры свои оптимальные чистые стратегии злоумышленник выбирает по своей платёжной матрице  $B$ , после чего его ходы соответствующим образом переносятся на платёжную матрицу администратора  $A$ . Данный метод позволяет находить приближённое решение биматричной игры и из чистых стратегий выстраивает оптимальные смешанные стратегии обоих игроков. При этом наиболее оптимальная стратегия администратора безопасности будет выстраиваться с учётом не только собственной выгоды, но и интересов злоумышленника.

##### Алгоритм итеративного решения биматричной игры:

- Шаг  $k = 0$ . Игроки используют начальные чистые стратегии  $x_{i_0}$  и  $y_{j_0}$ , которые определяются из условий (1) и (2).

- Шаг  $k = 1$ . Выбор чистых стратегий  $x_{i_1}$  и  $y_{j_1}$  осуществляется исходя из накопленного выигрыша на предыдущей итерации:

$$x_{i_1} : \min_i b_{ij_0} = \underline{v}^1; \quad y_{j_1} : \max_j a_{i_0j} = \overline{v}^1.$$

- Шаг  $k + 1$ . Выбор чистых стратегий  $x_{i_{k+1}}$  и  $y_{j_{k+1}}$  осуществляется исходя из накопленного выигрыша на предыдущих итерациях:

$$x_{i_{k+1}} : \min_i \sum_j b_{ijk} \eta_j^k / k = \underline{v}^k; \quad y_{j_{k+1}} : \max_j \sum_i a_{ijk} \xi_i^k / k = \overline{v}^k,$$

где  $\xi_i^k$  и  $\eta_j^k$  – количество выборов чистых стратегий  $x_i$  и  $y_j$  за  $k$  шагов.

Цены игры администратора безопасности и злоумышленника будут равны  $\frac{\underline{v}^{k+1}}{k+1}$  и  $\frac{\overline{v}^{k+1}}{k+1}$  соответственно. Итеративный процесс следует продолжать до тех пор, пока за некоторое количество последних партий не будет повторяться чистая стратегия администратора безопасности при достижении некоторой предварительно задаваемой точности результатов значений игры.

Смешанные стратегии игроков выстраивают из чистых стратегий, которые участвовали в описанном алгоритме.

Чем больше будет сыграно партий игроками, тем ближе к точному значению приближается решение биматричной игры. Однако для оптимизации компьютерной безопасности наибольший интерес представляет не цена игры при оптимальной стратегии администратора, т. е. не конкретная величина наименьшего ущерба от атак при наименьших затратах на средства защиты, а именно сама оптимальная смешанная стратегия администратора безопасности, т. е. набор программных средств, при котором эта минимальная цена игры достигается.

## 5. Применение описанного алгоритма

Рассмотрим применение описанного алгоритма для решения задачи с платёжными матрицами небольшой размерности. Пусть у злоумышленника есть возможность купить и использовать две чистые стратегии  $y_1, y_2$ , а администратор может выбирать из трёх чистых стратегий  $x_1, x_2$  и  $x_3$ . В случае успешной реализации стратегия  $y_1$  может принести злоумышленнику прибыль 100 у.е. (условных единиц), а стратегия  $y_2$  – 110 у.е., для их приобретения нужно заплатить 2 у.е. и 1 у.е. соответственно. При этом бесплатная чистая стратегия администратора  $x_1$  защищает от атак  $y_1$  и  $y_2$  на 90 %, чистая стратегия  $x_2$  стоит 5 у.е. и защищает от атаки  $y_1$  на 80 %, чистая стратегия  $x_3$  стоит 1 у.е., защищает от атаки  $y_1$  на 85 % и от атаки  $y_2$  на 99 %. Требуется определить, какие программные средства из  $x_1, x_2, x_3$  нужно выбрать администратору для наиболее эффективной защиты компьютерной системы при наименьших затратах на их приобретение, а также какая стратегия злоумышленника будет для него наиболее оптимальной.

Проведём биматричную игру администратора со злоумышленником, найдём её точное решение и сравним его с приближённым решением, полученным описанным в данной работе итеративным методом.

Сначала для игроков нужно составить две платёжные матрицы  $A$  и  $B$ . У злоумышленника будут возможны 3 стратегии:  $y_1, y_2$  и стратегия  $y_3$ , заключающаяся в использовании программных средств для проведения одновременно обеих атак  $y_1$  и  $y_2$ . В свою очередь у администратора будет возможность выбирать из 7 стратегий:  $x_1, x_2, x_3, x_4 = x_1 + x_2, x_5 = x_1 + x_3, x_6 = x_2 + x_3, x_7 = x_1 + x_2 + x_3$ .

Последовательно перебирая все стратегии игроков, заполним две таблицы, в одной из них указывая ущерб администратора  $a_{ij}$  (см. табл. 3), а во второй – прибыль  $b_{ij}$  злоумышленника (см. табл. 4), соответственно, при выборе стратегии защиты  $x_i (i = 1, \dots, 7)$  и способа атаки  $y_j (j = 1, \dots, 3)$ .

Для нахождения точного решения биматричной игры воспользуемся минимаксными критериями (1) и (2). Тогда из платёжной матрицы  $A$  для администратора:  $W_{i_0}(A) = \min \{21, 135, 17.1, 26, 12.1, 22.1, 17.1\} = 12.1$ , откуда следует, что его оптимальной  $i_0$ -й стратегией будет  $x_5$ , которая заключается в использовании программных средств  $x_1$  и  $x_3$ . Из платёжной матрицы  $B$  для злоумышленника:  $W_{j_0}(B) = \max \{8, 0.1, 8.1\} = 8.1$ , откуда следует, что его оптимальной  $j_0$ -й стратегией будет  $y_3$ , которая заключается в использовании обеих атак  $y_1$  и  $y_2$ .

Таблица 3. Платёжная матрица  $A$

|       | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$       |
|-------|-------|-------|-------------|
| $x_1$ | 10    | 1     | <b>21</b>   |
| $x_2$ | 25    | 115   | <b>135</b>  |
| $x_3$ | 16    | 2.1   | <b>17.1</b> |
| $x_4$ | 15    | 16    | <b>26</b>   |
| $x_5$ | 11    | 2.1   | <b>12.1</b> |
| $x_6$ | 21    | 7.1   | <b>22.1</b> |
| $x_7$ | 16    | 7.1   | <b>17.1</b> |

Таблица 4. Платёжная матрица  $B$

|       | $y_1$    | $y_2$      | $y_3$      |
|-------|----------|------------|------------|
| $x_1$ | <b>8</b> | 10         | 18         |
| $x_2$ | 18       | 109        | 127        |
| $x_3$ | 13       | <b>0.1</b> | 13.1       |
| $x_4$ | <b>8</b> | 10         | 18         |
| $x_5$ | <b>8</b> | <b>0.1</b> | <b>8.1</b> |
| $x_6$ | 13       | <b>0.1</b> | 13.1       |
| $x_7$ | <b>8</b> | <b>0.1</b> | <b>8.1</b> |

Если администратор безопасности и злоумышленник выберут свои оптимальные стратегии  $x_5$  и  $y_3$ , то цена игры для них будет 12.1 у.е. (ущерб администратора) и 8.1 у.е. (прибыль злоумышленника).

Таблица 5. Платёжная матрица  $A$

|       | $y_1$     | $y_2$      |
|-------|-----------|------------|
| $x_1$ | 10        | <b>11</b>  |
| $x_2$ | 25        | <b>115</b> |
| $x_3$ | <b>16</b> | 2.1        |

Таблица 6. Платёжная матрица  $B$

|       | $y_1$    | $y_2$      |
|-------|----------|------------|
| $x_1$ | <b>8</b> | 10         |
| $x_2$ | 18       | 109        |
| $x_3$ | 13       | <b>0.1</b> |

Теперь найдём приближённое решение данной задачи итеративным методом. Для этого составим платёжные матрицы  $A$  и  $B$ , используя только чистые стратегии игроков. Последовательно перебирая стратегии игроков, так же заполним две таблицы, в одной из них указывая ущерб администратора  $a_{ij}$  (см. табл. 5), а во второй – прибыль  $b_{ij}$  злоумышленника (см. табл. 6), соответственно, при выборе стратегии защиты  $x_i (i = 1, 2, 3)$  и способа атаки  $y_j (j = 1, 2)$ .

Для нахождения начальных чистых стратегий  $x_{i_0}$  и  $y_{j_0}$  воспользуемся минимаксными критериями (1) и (2). Из платёжной матрицы  $A$  определим  $W_{i_0}(A) = \min_i \{11, 115, 16\} = 11$ , откуда следует, что для администратора безопасности  $x_{i_0} = x_1$ . Аналогично из платёжной матрицы  $B$  определим  $W_{j_0}(B) = \max_j \{8, 0.1\} = 8$ , откуда следует, что для злоумышленника  $y_{j_0} = y_1$ . Результаты расчётов каждой партии  $k$  запишем в табл. 7.

В первой партии игры (при  $k = 1$ ) в 7–8-й столбцы табл. 7 из платёжной матрицы  $A$  записываются возможные исходы игры для администратора безопасности при выборе им стратегии  $x_{i_0} = x_1$  (из первой строки матрицы  $A$  в табл. 5), из них выбирается максимальное значение. Чистая стратегия злоумышленника, при которой цена игры для администратора будет максимальна, принимается за оптимальную  $y_{j_1}$  (цена игры для администратора равна 11 у.е. при стратегии злоумышленника  $y_2$ ). В 4–6-й столбцы табл. 7 из матрицы  $B$



Таблица 7. Выигрыши игроков

| $k$ | Выбор игрока 1 | Выбор игрока 2 | Выигрыш игрока 1 |       |             | Выигрыш игрока 2 |           | $\overline{v^k}/k$  | $\underline{v^k}/k$ |
|-----|----------------|----------------|------------------|-------|-------------|------------------|-----------|---------------------|---------------------|
|     |                |                | $x_1$            | $x_2$ | $x_3$       | $y_1$            | $y_2$     |                     |                     |
| 1   | $x_1$          | $y_1$          | <b>8</b>         | 18    | 13          | 10               | <b>11</b> | 11                  | 8                   |
| 2   | $x_1$          | $y_2$          | 18               | 127   | <b>13.1</b> | 20               | <b>22</b> | $22/2 = 11$         | $13.1/2 = 6.55$     |
| 3   | $x_3$          | $y_2$          | 28               | 236   | <b>13.2</b> | <b>36</b>        | 24.1      | $36/3 = 12$         | $13.2/3 = 4.4$      |
| 4   | $x_3$          | $y_1$          | 36               | 254   | <b>26.2</b> | <b>52</b>        | 26.2      | $52/4 = 13$         | $26.2/4 = 6.55$     |
| 5   | $x_3$          | $y_1$          | 44               | 272   | <b>39.2</b> | <b>68</b>        | 28.3      | $68/5 = 13.6$       | $39.2/5 = 7.84$     |
| 6   | $x_3$          | $y_1$          | <b>52</b>        | 290   | 52.2        | <b>84</b>        | 30.4      | $84/6 = 14$         | $52/6 \approx 8.67$ |
| 7   | $x_1$          | $y_1$          | <b>60</b>        | 308   | 65.2        | <b>94</b>        | 41.4      | $94/7 \approx 13.4$ | $60/7 \approx 8.57$ |
| 8   | $x_1$          | $y_1$          | <b>68</b>        | 326   | 78.2        | <b>104</b>       | 52.4      | $104/8 = 13$        | $68/8 = 8.5$        |
| 9   | $x_1$          | $y_1$          | <b>76</b>        | 344   | 91.2        | <b>114</b>       | 63.4      | $114/9 = 12.7$      | $76/9 = 8.44$       |
| 10  | $x_1$          | $y_1$          | <b>84</b>        | 362   | 104.2       | <b>124</b>       | 74.4      | <b>12.4</b>         | <b>8.4</b>          |
| ... | ...            | ...            | ...              | ...   | ...         | ...              | ...       | ...                 | ...                 |

записываются возможные исходы игры для хакера при выборе им стратегии  $y_{j_0} = y_1$  (из первого столбца матрицы  $B$  в табл. 6). Стратегия администратора безопасности, при которой цена игры будет минимальна для злоумышленника, выбирается в качестве оптимальной для администратора безопасности, и  $x_{i_1} = x_1$ . В последние два столбца таблицы записывают цены игры для игроков.

Во второй партии игры (при  $k = 2$ ) в 7–8-й столбцы табл. 7 из платёжной матрицы  $A$  записывается сумма соответствующих значений возможных исходов игры для администратора безопасности при выборе им стратегии  $x_{i_1} = x_1$  и значений исходов игры первой партии (из предыдущей строки), из полученных сумм выбирается максимальное значение, по которому определяется следующая оптимальная чистая стратегия злоумышленника  $y_{j_2} = y_2$ . Аналогично в 4–6-й столбцы табл. 7 из матрицы  $B$  записывается сумма возможных исходов игры для хакера при выборе им стратегии  $y_{j_1} = y_2$  и значений исходов игры первой партии (из предыдущей строки), из полученных сумм выбирается минимальное значение, по которому определяется оптимальная чистая стратегия администратора безопасности  $x_{i_2} = x_3$ . При расчёте цен игры для игроков нужно найденные суммы разделить на номер партии игры  $k$ , полученные значения заносятся в два последних столбца табл. 7. Аналогичные расчёты производятся для следующих партий игры.

Как видно из табл. 7, уже после проведения 10 партий (при  $k = 10$ ) становится понятно, что оптимальная **смешанная** стратегия администратора безопасности состоит в использовании программных средств защиты  $x_1$  и  $x_3$  (см. второй столбец табл. 7), а оптимальной смешанной стратегией злоумышлен-

ника является использование обеих атак  $y_1$  и  $y_2$  (см. третий столбец в табл. 7). При этом приближённое решение биматричной игры (после 10 партий при выборе оптимальных стратегий игроков ущерб администратора 12.4 у.е. и прибыль злоумышленника 8.4 у.е.) с ростом числа партий приближается к точному решению (ущерб администратора 12.1 у.е. и прибыль злоумышленника 8.1 у.е.).

## 6. Заключение

В матричных играх у игроков имеет место строгое соперничество, поскольку выигрыш одного игрока в точности равен проигрышу другого, а в биматричных играх интересы игроков могут быть любыми, даже похожими. Поэтому анализ результатов расчётов биматричных игр может быть полезен администрации безопасности в принятии более верных решений в вопросах оптимизации защиты компьютерной системы. Предложенный в данной статье итеративный алгоритм даст выигрыш во времени нахождения решения биматричных игр с платёжными матрицами огромных размеров по сравнению с нахождением точного решения традиционными способами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Вахний Т.В. Теория игр и защита компьютерных систем: Учебное пособие. Омск : Изд-во ОмГУ, 2013. 160 с.
2. Вахний Т.В., Гуц А.К., Пахотин И.Ю. Определение оптимального набора средств защиты компьютерной системы методом Монте-Карло // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1(45). С. 148–158.
3. Вахний Т.В., Зиновьев С.А., Бесценный И.П. Игровой подход к защите компьютерных систем и алгоритм «Thompson Sampling» // Математическое и компьютерное моделирование [электронный ресурс]: сборник материалов VII Международной научной конференции, посвящённой памяти С.С. Ефимова (Омск, 22 ноября, 2019 г.). Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2020. С. 160–162. URL: <http://fkn.omsu.ru/nauka/Conf/2019/VII-MCM-Conf-2019.pdf> (дата обращения: 01.03.2022).
4. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр: учебник. СПб. : БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
5. Вахний Т.В., Гуц А.К., Новиков Н.Ю. Матрично-игровая программа с выбором критерия для определения оптимального набора средств защиты компьютерной системы // Математические структуры и моделирование. 2016. № 2(38). С. 103–115.

## ITERATIVE SOLUTION OF A BIMATRIC GAME TO OPTIMIZE THE PROTECTION OF A COMPUTER SYSTEM

**T.V. Vakhniy**

Ph.D.(Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: vahniytv@mail.ru

**S.V. Vakhniy**

Student, e-mail: vakhniysv@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The article suggests to solve a bimatric game between an attacker and a security administrator with huge sizes of players' payment matrices, to use an approximate iterative method that is less expensive for computing resources, the algorithm of which is based on the Brown–Robinson method.

**Keywords:** Information security, computer system, bimatric games, iterative methods, optimal strategy, software product.

## REFERENCES

1. Guts A.K. and Vakhnii T.V. Teoriya igr i zashchita komp'yuternykh sistem: Uchebnoe posobie. Omsk, Izd-vo OmGU, 2013, 160 p. (in Russian)
2. Vakhnii T.V., Guts A.K., and Pakhotin I.Yu. Opredelenie optimal'nogo nabora sredstv zashchity komp'yuternoï sistemy metodom Monte-Karlo. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 1(45), pp. 148–158. (in Russian)
3. Vakhnii T.V., Zinov'ev S.A., and Bestsenyi I.P. Igrovoi podkhod k zashchite komp'yuternykh sistem i algoritm "Thompson Sampling". Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie [elektronnyi resurs]: sbornik materialov VII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, posvyashchennoi pamyati S.S. Efimova (Omsk, 22 noyabrya, 2019 g.), Omsk, Izd-vo Omskogo gosudarstvennogo universiteta, 2020, pp. 160–162. URL: <http://fkn.omsu.ru/nauka/Conf/2019/VII-MCM-Conf-2019.pdf> (01.03.2022). (in Russian)
4. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., and Shevkoplyas E.V. Teoriya igr: uchebnik. Saint Petersburg, BKhV-Peterburg, 2012, 432 p. (in Russian)
5. Vakhnii T.V., Guts A.K., and Novikov N.Yu. Matrichno-igrovaya programma s vyborom kriteriya dlya opredeleniya optimal'nogo nabora sredstv zashchity komp'yuternoï sistemy. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2016, no. 2(38), pp. 103–115. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 14.03.2022*

## **TOWARDS OPTIMAL TECHNIQUES INTERMEDIATE BETWEEN INTERVAL AND AFFINE, AFFINE AND TAYLOR**

**M. Ceberio**

Student, e-mail: mceberio@utep.edu

**O. Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

**V. Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, USA

**Abstract.** In data processing, it is important to gauge how input uncertainty affects the results of data processing. Several techniques have been proposed for this gauging, from interval to affine to Taylor techniques. Some of these techniques result in more accurate estimates but require longer computation time, others' results are less accurate but can be obtained faster. Sometimes, we do not have enough time to use more accurate (but more time-consuming) techniques, but we have more time than needed for less accurate ones. In such cases, it is desirable to come up with intermediate techniques that would utilize the available additional time to get somewhat more accurate estimates. In this paper, we formulate the problem of selecting the best intermediate techniques, and provide a solution to this optimization problem.

**Keywords:** data processing, interval method, optimal method, Taylor method.

### **1. Formulation of the Problem**

**Interval, affine, and Taylor techniques: reminder.** In many practical problems, we need to estimate the value of a quantity  $y$  based on the values of the quantities  $x_1, \dots, x_n$  on which  $y$  depends in a known way, as  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  for a known algorithm  $f(x_1, \dots, x_n)$ .

The problem is that we do not know the exact values of the quantities  $x_i$ , all we know are the results  $\tilde{x}_i$  of measuring  $x_i$ , and these results are, in general different from the actual values of the corresponding quantities: there is usually a non-zero measurement error  $\Delta x_i \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}_i - x_i$ ; see, e.g., [7]. Often, the only information that we have about each of these measurement error is the upper bound  $\Delta_i$  on its absolute value:  $|\Delta x_i| \leq \Delta_i$ . In this case, the only information that we have about the actual (unknown) value  $x_i$  is that this value belongs to the interval  $[\tilde{x}_i - \Delta_i, \tilde{x}_i + \Delta_i]$ . In such situations, it is desirable not only to compute the value  $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ , but also to find the range of possible values of  $y$ :

$$\{f(x_1, \dots, x_n) : x_i \in [\tilde{x}_i - \Delta_i, \tilde{x}_i + \Delta_i]\}.$$

One of the natural ideas for computing this range is to take into account that computing  $y$  consists of several computational steps. So, on each of these steps, we do not only compute the corresponding intermediate result  $z$ , but we also keep some information about the dependence of this result on  $x_i$ , information that will eventually help us to find the desired range. There exist several implementations of this idea.

- In interval computations (see, e.g., [4–6]), for each intermediate result  $z$ , we keep an interval of possible values of  $z$ .
- In affine arithmetic (see, e.g., [2, 3]), for each intermediate result  $z$ , we represent  $\Delta z = \tilde{z} - z$  as the expression

$$\Delta z = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \Delta x_i + \delta z,$$

in which we know the coefficients  $a_i$  and the upper bound  $\Delta_z$  on the absolute value of the remaining term  $\delta z$ :  $|\delta z| \leq \Delta_z$ .

- In the more general Taylor arithmetic (see, e.g., [1]), instead of a generic linear expression, we keep a generic polynomial expression of a given order  $k$ :

$$\Delta z = \sum_{i_1=1}^n a_{i_1} \cdot \Delta x_{i_1} + \dots + \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} \cdot \Delta x_{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta x_{i_k} + \delta z,$$

in which we know the coefficients  $a_{i_1 \dots i_j}$  and the upper bound  $\Delta_z$  on the absolute value of the remaining term  $\delta z$ .

Then, for each elementary computational step – addition, subtraction, multiplication, etc. – we use expressions for this step’s inputs to come up with a similar expression for the output of this step. For example, if we know that

$$\Delta z = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \Delta x_i + \delta z \quad \text{and} \quad \Delta t = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \Delta x_i + \delta t,$$

with  $|\delta z| \leq \Delta_z$  and  $|\delta t| \leq \Delta_t$ , then for  $s = z + t$ , we get

$$\Delta s = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \cdot \Delta x_i + \delta s,$$

where  $|\delta s| \leq \Delta_z + \Delta_t$ .

**Need for intermediate techniques.** The more terms we keep in the dependence of  $\Delta z$  on  $\Delta x_i$ , the more accurately we represent this dependence – after all, any continuous function on a bounded domain can be approximated by polynomials as accurately as possible, but the more accuracy we want, the more terms we need. On the other hand, the more terms we keep and process for each intermediate

result, the more memory we need and the more computation time we need – and both memory and computation time are often limited.

As of now, the usual choice is either go with interval computations, or use affine arithmetic, or use quadratic Taylor series, or use cubic Taylor series, etc. But what if we do not have enough time to use affine techniques but we still have extra time left when using intervals? In this case, it is desirable to use this extra time to come up with computations which are less time consuming than affine arithmetic, but more accurate than interval computations. Similarly, if we cannot afford quadratic Taylor series but we still have extra time left when using affine arithmetic, it is desirable to come up with computations which are less time consuming than quadratic Taylor technique, but more accurate than affine arithmetic.

**Which intermediate techniques should we choose?** There are many possible intermediate techniques. We can choose some monomials and only use their linear combinations. Alternatively, we can select some other basis in the linear space of all polynomials of given order, and use linear combinations of some elements of this basis.

In this paper, we show that the optimal choice is selecting monomials.

## 2. Analysis of the Problem

**What we want.** If we can only afford to have a limited number  $L$  of coefficients at each computation stage, then we need to represent the difference  $\Delta z$  corresponding to each intermediate result as

$$\Delta z = \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} \cdot f_{\ell}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) + \delta z,$$

where  $f_{\ell}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  are pre-selected analytical functions, and we know the coefficients  $a_{\ell}$  and a bound  $\Delta_z$  of the absolute value of the remainder  $\delta z$ .

In this approach, we approximate each dependence of  $\Delta z$  on  $\Delta x_i$  by a linear combination of the functions  $f_{\ell}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ , i.e., by an element of the corresponding  $L$ -dimensional space

$$A = \left\{ \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} \cdot f_{\ell}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \right\}_{a_1, \dots, a_L}.$$

So, selecting an intermediate method means selecting an  $L$ -dimensional linear (sub)space in the linear space of all analytical functions.

**What we mean by optimal.** We want to select a subspace which is, in some reasonable sense, optimal. In some cases, optimal means attaining the largest or the smallest value of some objective function. However, optimality criteria can be more general. For example, if we select average approximation error as the objective function, we may end up with several different spaces with the same smallest possible value of this objective function. In this case, it is reasonable to select,

among them, the space that requires the smallest possible average computation time. This is equivalent to selecting an optimality criterion which is more complex than numerical: according to this criterion, a space  $A$  is better than a family  $A'$  if:

- either  $A$  has a smaller average approximation error,
- or they have the same average approximation error, but  $A'$  has a smaller average computation time.

We can have even more complex criteria. In general, what all these criteria do is for some pairs of alternatives  $A$  and  $A'$  that  $A$  is better – we will denote it by  $A < A'$  – or that they are of equal quality with respect to this criterion; this we denote by  $A \sim A'$ . It is also possible that for some pairs, the criterion does not tell us which alternative is worse. Of course, these conclusions should be consistent: e.g., if  $A$  is better than  $A'$ , and  $A'$  is better than  $A''$ , then  $A$  should be better than  $A''$ .

What is important is that there should be exactly one alternative which is, according to this criterion, better than or of equal quality than all others. Indeed, as we have mentioned, if there are several optimal alternatives, this would mean that we can use the corresponding non-uniqueness to optimize something else – and thus, that the original optimality criterion is not final.

**Scale-invariance.** We process the values of physical quantities, but the numerical values of these quantities depend on the choice of a measuring unit. If we replace meters with centimeters, the lengths remain the same, but the numerical values of all the lengths become multiplied by  $c = 100$ . In general, if we select a different measuring unit for the quantity  $x_i$ , then its numerical value (and thus, the numerical value of the difference  $\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i$ ) gets multiplied by the corresponding factor  $c_i > 0$ :  $x_i \mapsto c_i \cdot x_i$ .

It is reasonable to assume that the relative quality of different approximation families do not depend on the choice of units. Indeed, it would be very strange if one family is better for meters and kilograms, and another is better for centimeters and grams.

Now, we are ready to formulate our main result.

### 3. Definition and the Main Result

**Definition 1.** *Let  $\mathcal{A}$  be a set; its elements will be called alternatives.*

- *By an optimality criterion on the set  $\mathcal{S}$ , we mean a pair of relations  $(<, \sim)$  that satisfy the following properties:*
  - *if  $A < A'$  and  $A' < A''$ , then  $A < A''$ ;*
  - *if  $A < A'$  and  $A' \sim A''$ , then  $A < A''$ ;*
  - *if  $A \sim A'$  and  $A' < A''$ , then  $A < A''$ ;*
  - *if  $A \sim A'$  and  $A' \sim A''$ , then  $A \sim A''$ ;*

- always  $A \sim A$ ; and
- if  $A < A'$  then  $A \not\sim A'$  and  $A' \not\sim A$ .
- We say that an alternative  $A$  is optimal for every  $A' \in \mathcal{A}$ , we have  $A < A'$  or  $A \sim A'$ .
- We say that an optimality criterion is final if there is exactly one optimal alternative.

**Definition 2.** Let  $\mathcal{A}$  be the set of all  $L$ -dimensional linear subspaces of the linear space of all analytical functions. We say that the optimality criterion is scale-invariant if for all tuples  $c = (c_1, \dots, c_n)$  of positive numbers, we have  $A < A' \Leftrightarrow S_c(A) < S_c(A')$  and  $A \sim A' \Leftrightarrow S_c(A) \sim S_c(A')$ , where

$$S_c(A) = \{f(c_1 \cdot \Delta x_1, \dots, c_n \cdot \Delta x_n) : f(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \in A\}.$$

**Proposition.** For every scale-invariant final optimality criterion, the optimal linear space is the set of all linear combinations of given  $L$  monomials.

*Comment.* In other words, the optimal method between interval and affine means selecting  $L < n$  variables  $i_1, \dots, i_L$ , and considering expressions

$$\Delta z = \sum_{\ell=1}^L a_\ell \cdot x_{i_\ell} + \delta z.$$

The optimal method between affine and quadratic Taylor methods means selecting  $L - n$  pairs  $(i_\ell, j_\ell)$ , and considering expressions

$$\Delta z = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i + \sum_{\ell=1}^{L-n} a_\ell \cdot x_{i_\ell} \cdot x_{j_\ell} + \delta z,$$

etc.

**Proof of the Proposition.** Let us first prove that the optimal space  $A_{\text{opt}}$  is itself scale-invariant, i.e., that  $T_c(A_{\text{opt}}) = A_{\text{opt}}$  for all  $c$ . Indeed, by definition of optimality, for every  $A'$ , we have  $A_{\text{opt}} < A'$  or  $A_{\text{opt}} \sim A'$ . This is true for all  $A'$ , in particular, for  $A' = T_{c^{-1}}(A)$ , where  $(c_1, \dots, c_n)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (c_1^{-1}, \dots, c_n^{-1})$ . By using scale-invariance, from  $A_{\text{opt}} < T_{c^{-1}}(A)$ , we conclude that  $T_c(A_{\text{opt}}) < T_c(T_{c^{-1}}(A)) = A$ , and from  $A_{\text{opt}} \sim T_{c^{-1}}(A)$ , we conclude that  $T_c(A_{\text{opt}}) \sim T_c(T_{c^{-1}}(A)) = A$ . Thus, for each alternative  $A$ , we have either  $T_c(A_{\text{opt}}) < A$  or  $T_c(A_{\text{opt}}) \sim A$ . By definition of an optimal alternative, this means that the alternative  $T_c(A_{\text{opt}})$  is optimal. But our optimality criterion is final, which means that there is only one optimal alternative, and therefore,  $T_c(A_{\text{opt}}) = A_{\text{opt}}$ .

Each function from the basis of the optimal family is an analytical function, i.e., a sum – finite or infinite – of monomials, i.e., of the expressions of the type



$(\Delta x_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\Delta x_n)^{k_n}$ . Let  $m_1$  be the smallest possible value of  $k_1$  in all  $L$  basic functions. Then, the function containing a non-zero term with  $x_1^{m_1}$  has the form

$$f_\ell(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) =$$

$$(\Delta x_1)^{m_1} \cdot P_1(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n) + (\Delta x_1)^{m_1+1} \cdot P_2(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n) + \dots,$$

where  $P_k$  are polynomials and  $P_1$  is not identically 0. Due to scale-invariance, for each  $c_1$ , the function

$$f_\ell(c_1 \cdot \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) =$$

$$c_1^{m_1} \cdot (\Delta x_1)^{m_1} \cdot P_1(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n) + c_1^{m_1+1} \cdot (\Delta x_1)^{m_1+1} \cdot P_2(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n) + \dots$$

also belongs to the space  $A_{\text{opt}}$ , and thus, the function

$$c_1^{-m_1} \cdot f_\ell(c_1 \cdot \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) =$$

$$(\Delta x_1)^{m_1} \cdot P_1(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n) + c_1 \cdot (\Delta x_1)^{m_1+1} \cdot P_2(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n) + \dots$$

A finite-dimensional linear space is closed, i.e., contains all its limits. In particular, in the limit  $c_1 \rightarrow 0$ , we conclude that the space  $L$  contains the function

$$(\Delta x_1)^{m_1} \cdot P_1(\Delta x_2, \dots, \Delta x_n).$$

Similarly, by considering the smallest possible power of  $\Delta x_2$  in this expression and using scale-invariance, we conclude that the optimal linear space contains a function  $(\Delta x_1)^{m_1} \cdot (\Delta x_2)^{m_2} \cdot Q_1(\Delta x_3, \dots, \Delta x_n)$ , etc., and in the end, that the optimal linear space contains a monomial  $(\Delta x_1)^{m_1} \cdot (\Delta x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\Delta x_n)^{m_n}$ .

By subtracting terms proportional to this monomial from all the basic functions, we thus get a new basis, in which we can also select a monomial, etc. At the end, we indeed get a representation of the optimal linear space as the set of all linear combinations of  $L$  monomials.

The proposition is proven.

**How we can implement this idea.** In the case of techniques intermediate between interval and affine, we can select the variables  $x_i$  for which the initial uncertainty is the largest.

Alternatively, at each step like computing  $s = z + t$ , we can first combine all  $2L$  terms from both expressions for  $z$  and for  $t$ , and then keep  $L$  of them with the largest uncertainty – i.e., the largest values of the corresponding term  $|a_i| \cdot \Delta_i$ .

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes), and by the AT&T Fellowship in Information Technology.

It was also supported by the program of the development of the Scientific-Educational Mathematical Center of Volga Federal District No. 075-02-2020-1478, and by a grant from the Hungarian National Research, Development and Innovation Office (NRDI).

The authors are thankful to Christoph Lauter for valuable discussions.

## REFERENCES

1. Berz M. and Hoffstätter G. Computation and Application of Taylor Polynomials with Interval Remainder Bounds. *Reliable Computing*, 1998, vol. 4, pp. 83–97.
2. de Figueiredo L.H. and Stolfi J. *Self-Validated Numerical Methods and Applications*. IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
3. Hansen E.R. A generalized interval arithmetic. In: Nickel K. (ed.), *Interval Mathematics*, Springer Lecture Notes in Computer Science, 1975, vol. 29, pp. 7–18.
4. Jaulin L., Kiefer M., Didrit O., and Walter E. *Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control, and Robotics*, Springer, London, 2001.
5. Mayer G. *Interval Analysis and Automatic Result Verification*. de Gruyter, Berlin, 2017.
6. Moore R.E., Kearfott R.B., and Cloud M.J. *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 2009.
7. Rabinovich S.G. *Measurement Errors and Uncertainty: Theory and Practice*. Springer Verlag, New York, 2005.

**НА ПУТИ К ОПТИМАЛЬНЫМ МЕТОДАМ, ПРОМЕЖУТОЧНЫМ МЕЖДУ ИНТЕРВАЛЬНЫМ И АФФИННЫМ, АФФИННЫМ И ТЕЙЛОРОВСКИМ****М. Цеберно**

студент, e-mail: mceberio@utep.edu

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пасо, Эль-Пасо, США

**Аннотация.** При обработке данных важно оценить, как неопределенность ввода влияет на результаты обработки данных. Для этой калибровки было предложено несколько методов, от интервальных до аффинных и методов Тейлора. Некоторые из этих методов дают более точные оценки, но требуют больше времени для вычислений, другие результаты менее точны, но могут быть получены быстрее. Иногда у нас не хватает времени, чтобы использовать более точные (но более трудоёмкие) методы, но у нас есть больше времени, чем нужно, для менее точных. В таких случаях желательно разработать промежуточные методы, которые позволили бы использовать имеющееся дополнительное время для получения несколько более точных оценок. В данной статье мы формулируем задачу выбора наилучших промежуточных методов и даём решение этой задачи оптимизации.

**Ключевые слова:** обработка данных, интервальный метод, оптимальный метод, метод Тейлора.

*Дата поступления в редакцию: 14.02.2022*

## **МОДЕЛЬ ПРОЕКТНОЙ ТРАЕКТОРИИ ОБУЧЕНИЯ В ОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО**

**А.А. Лаптев**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: aalaptev@mail.ru

**Н.В. Лифляндская**

начальник организационно-методического отдела, e-mail: lifliandskaianv@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье описаны подходы к реализации проектных траекторий обучения в вузе. Представлены возможные подходы по освоению универсальных компетенций по разработке и реализации проектов, командной работе, самоорганизации и саморазвитию. Предложен внедряемый в ОмГУ им. Ф.М. Достоевского принцип построения проектной траектории обучения.

**Ключевые слова:** проектная образовательная траектория, индивидуальная образовательная траектория, универсальные компетенции, практическая подготовка, стартап как диплом.

### **Введение**

Индивидуальные образовательные траектории в последние несколько лет становятся неотъемлемой частью образовательной деятельности в организациях высшего образования. Данная тенденция закреплена на законодательном уровне и уже широко представлена в ряде высших учебных заведений. Формирование проектной траектории в Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского строится в русле обозначенных процессов, но в то же время имеет свою специфику, что и является предметом данной статьи.

На законодательном уровне к содержанию основных профессиональных образовательных программ предъявляются такие требования, которые обеспечивают «вариативность содержания образовательных программ соответствующего уровня образования, возможность формирования образовательных программ различных уровня сложности и направленности с учётом образовательных потребностей и способностей обучающихся» (п. 1 ст. 11 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»). В п. 13 Приказа Минобрнауки России от 06.04.2021 № 245 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования — программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры» устанавливается, что «органи-

зация обеспечивает осуществление образовательной деятельности в соответствии с установленными образовательной программой: планируемыми результатами освоения образовательной программы — компетенциями выпускников, установленными образовательным стандартом, и компетенциями выпускников, установленными организацией (в случае установления таких компетенций); планируемыми результатами обучения по каждой дисциплине (модулю), иному компоненту, в том числе практике, обеспечивающими достижение планируемых результатов освоения образовательной программы».

Из этого следует, что содержание образовательной траектории образовательная организация определяет самостоятельно в рамках разрабатываемых образовательных программ, исходя из актуальных потребностей рынка труда.

С переходом на актуализированные федеральные государственные стандарты высшего образования появился ряд обязательных универсальных компетенций, овладение которыми является необходимостью для современного специалиста: разработка и реализация проектов, командная работа, самоорганизация и саморазвитие (УК-2, УК-3, УК-6). Формирование обозначенных компетенций достигается за счёт реализации проектной траектории в образовательном процессе.

## 1. Проектная траектория обучения

Проектная учебная траектория — это последовательные проектные задачи при обучении в рамках дисциплин и практик, в которых проходит освоение профессиональных знаний, формирование опыта проектной деятельности обучающегося, достижение прогнозируемого индивидуального и командного результата в формировании проектных компетенций. Данная проектная траектория является частью индивидуальной образовательной траектории, самостоятельно формируемой обучающимися, обусловленной разнообразием выбора задач и возможностей, предоставляемых сферой образования.

Проектная образовательная траектория позволяет любому студенту стать участником или лидером команды, разработать бизнес-идею, проект (собственный или по заказу партнёров), который в будущем послужит своеобразным стартапом независимо от профиля подготовки.

С другой стороны, необходимым элементом проектной образовательной траектории является привлечение работодателей к образовательному процессу в качестве экспертов (участие в так называемых «экспертных трубах»), в качестве кураторов студенческих проектов. Эта норма, заложенная в требованиях ФГОС ВО к условиям реализации образовательных программ, подразумевает подготовку практико-ориентированного специалиста, обладающего не только научной теорией, но и практическими навыками применения полученных знаний при непосредственном участии в данном процессе будущего работодателя. Как отмечает Е.В. Морозова, «именно из университетских идей, разработок и лабораторий вырастают успешные технологические стартапы во всём мире. Университеты становятся той питательной средой, в которой молодой человек впервые пробует себя в качестве лидера или участника команды, в которой он

не просто создаёт нечто новое, но и пытается найти на это средства и доказать уникальность своего решения через участие в инженерных соревнованиях, исследовательских конкурсах, питч-сессиях...» [1, с. 4].

Однако, не все стороны проектной деятельности благоприятно влияют на образовательный процесс. Т.А. Зерщикова отмечает ряд ограничений, связанных с реализацией проектной образовательной траектории:

- «отсутствие педагогов, способных реализовать проектный метод;
- отсутствие индивидуализированной методики проектной деятельности у конкретного педагога;
- грамотное включение метода проектов в программу;
- чрезмерное увлечение методом проектов в ущерб другим методам и формам обучения;
- существенная затратность времени;
- нечёткость критериев оценки отслеживания результатов работы над проектом;
- невозможность оценить реальный вклад каждого участника группового проекта;
- низкая мотивация педагогов и студентов к реализации метода проектов;
- недостаточность исследовательских навыков у студентов, особенно первых курсов университета;
- неравномерность освоения учебного материала, особенно по сравнению с объяснительно-иллюстративным методом обучения» [2].

Данные ограничения значительно затрудняют реализацию проектной деятельности в образовательных учреждениях, но, тем не менее, уже имеется определённый опыт применения проектных технологий в ряде высших учебных заведений. Причём часть проектов уже сегодня становятся стартапами и заменяют собой традиционные выпускные квалификационные работы.

Например, образовательная модель НИУ ВШЭ предусматривает проектную деятельность как отдельный вид работ, реализующийся в проектно-учебных лабораториях. Студенты в ходе проектной деятельности ограничены во времени и нацелены на конечный продукт деятельности в качестве результата [1].

Проектное обучение в Уральском федеральном университете имени первого Президента России Б.Н. Ельцина предполагает совместную деятельность преподавателей, внешних экспертов, заказчиков и студентов, направленную на создание уникального продукта и формирование научно-технического задела, совместно с достижением дополнительных образовательных результатов [1].

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского реализует проектную траекторию в формате всероссийской школы «Технологии+Бизнес» (летней и зимней) для студентов и молодых специалистов. В результате участники учебной проектной деятельности данной школы представляют прототип — модель какого-либо объекта, вида деятельности [1].

Новосибирский государственный университет совместно с Академпарком проводят цикл мероприятий, направленных на проектное образование. Мероприятия предполагают совместную работу студентов, выпускников, молодых специалистов и научных сотрудников, авторов стартапов и членов

их команд. Основой проектного образования служат лабораторная генерация проектных идей Id-Lab, образовательный семинар «Управление научными проектами и стартап проектами в сфере высоких технологий», практико-ориентированная преакселерационная программа для начинающих лидеров научно-технологических проектов, в завершение проводится «А: старт» [3].

## 2. Проектная образовательная траектория в ОмГУ

В Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского проектная образовательная траектория находится в начале своего пути и предполагает реализацию следующих этапов: изучение дисциплины «Практикум управления проектами», прохождение проектной практики в рамках учебной и производственной практик с последующим выходом на защиту диплома как стартапа. В результате данная траектория предоставит студентам возможность освоить методики разработки и презентации своего проекта, принять участие в конкурсах, сформировать на практике лидерские, коммуникативные навыки, в конечном итоге — найти успешную работу.

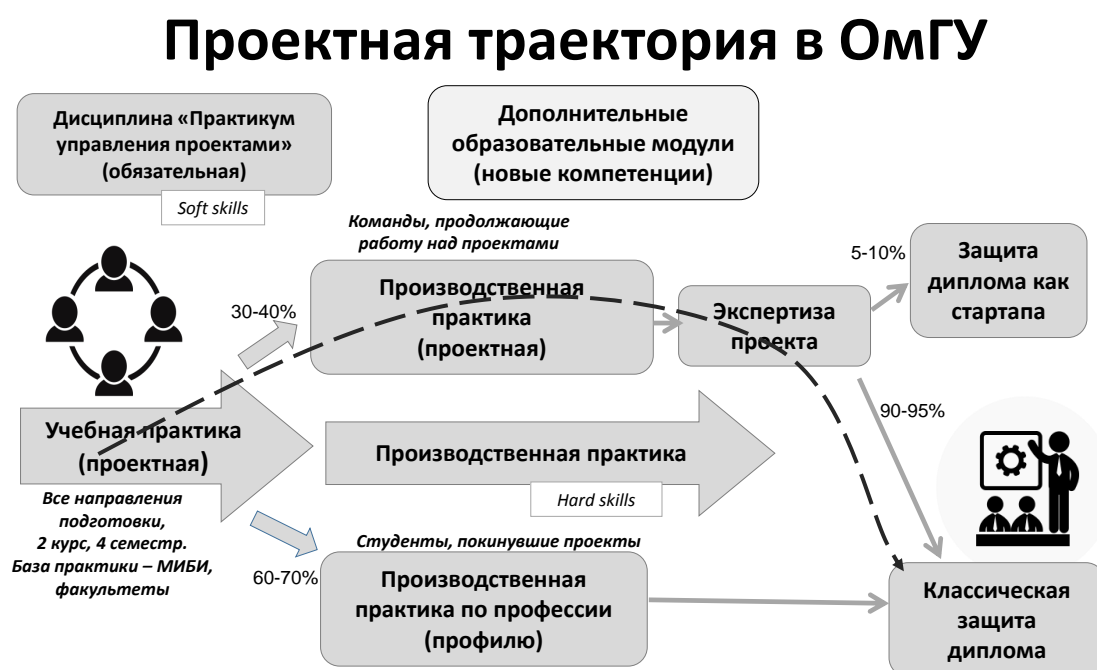


Рис. 1. Схема проектной траектории в ОмГУ им. Ф.М. Достоевского

Реализация проектной образовательной траектории начинается с изучения дисциплины «Практикум управления проектами», заложенной во втором или третьем семестрах всех реализуемых направлений подготовки бакалавров и специалистов. Цель дисциплины — научить основам разработки любых проектов, независимо от их вида и отраслевой принадлежности, начать формировать

навыки разработки собственного проекта, освоение «гибких компетенций» (Soft skills). Особенность дисциплины заключается в том, что занятия проходят в виде практикумов с большим объёмом часов самостоятельной работы. В рамках «Практикума управления проектами» обучающиеся узнают требования к проекту, а именно: к команде, бюджету, документации, привлечению заинтересованных сторон, презентации результатов и т. д.

Освоив теоретическую базу, студенты направляются на учебную проектную практику, цель которой заключается в разработке и реализации реальных проектов для отработки практических навыков в рамках освоения «гибких компетенций» (Soft skills). В расписании учебных занятий для данной практики отводится единый день, что позволяет студентам работать в смешанных командах в течение трёх месяцев. По окончании учебной проектной практики группа, работающая над проектом, предоставляет заполненную форму паспорта проекта, презентацию проекта и, при необходимости, аудио-, видеоматериалы, демонстрирующие ход и итоги проекта.

В разрабатываемой модели реализации проектной образовательной траектории в ОмГУ им. Ф.М. Достоевского предполагается публичная защита проекта, после чего принимается решение о продолжении работы над проектом в рамках следующих практик (производственной и преддипломной) с возможным выходом на стартап как диплом. Предполагается, что работу над проектами продолжат порядка 40 % студентов, проходивших учебную проектную практику.

Особенностью проектной образовательной траектории, реализуемой в ОмГУ, является возможность (частично или полностью) реализовывать традиционные курсовые и выпускные квалификационные работы в проектном формате на основе проектной практики, привязанной к формированию, в том числе, профессиональных компетенций (Hard skills).

Следует также отметить, что продолжение работы над проектом в рамках производственной практики и (или) выполнения дипломной (курсовой) работы предполагает поэтапную экспертизу проектов для определения типа выпускной квалификационной работы — стартап или традиционный дипломный проект. Не исключено, что отбор будет осуществляться на общеуниверситетском конкурсе проектов.

При выходе на подготовку выпускной квалификационной работы предусмотрена повторная предзащита с общей презентацией стартапа (в том числе для представителей межфакультетских команд с участием всех заинтересованных лиц) минимум за полтора месяца до итоговой защиты. Выделенного времени будет вполне достаточно для переработки представленного проекта в традиционный формат дипломной работы. Предполагается, что на стартап из всей совокупности студентов выйдут порядка 5–10 %, остальные же смогут защитить свою дипломную работу в традиционном формате.

Реализация данной проектной образовательной траектории потребует детальной проработки ресурсного обеспечения.

Во-первых, необходимо создать команду кураторов проектов. Для этого в рамках повышения квалификации заложено обучение кураторов проектных ко-

манд (не менее пяти человек с факультета). Кураторы по итогам обучения должны овладеть принципами разработки проекта, принципами командной работы, потому как на них возлагается сложная задача — вести группу студентов с начала реализации проекта до его завершения с получением конкретного результата. Обучение кураторов должно быть поэтапным: на первом этапе кураторы изучают основы ведения проектной практики, далее — более углублённое изучение основ проектной деятельности и т. д.

Во-вторых, необходимо предусмотреть в учебной нагрузке куратора нормы времени на руководство проектной практикой. При расчёте данных норм следует учитывать не только затраты рабочего времени, выделенного на работу кураторов со студенческими группами, но и учитывать конечный результат, представленный студентами.

В-третьих, должен быть создан так называемый банк проектов, который позволит командам работать над проблемой или задачей из области своих интересов. При его формировании следует учитывать внутренние потребности университета и внешние запросы общества. Задачи для внутриуниверситетских проектов определяются структурными подразделениями вуза, студентами, студенческими сообществами. Внешние проекты — это запросы индустриальных партнёров, общественных организаций, региональных властей. Все поступающие предложения перед попаданием в банк проектов должны пройти предварительную модерацию экспертами.

Преимущества реализации проектной образовательной траектории очевидны. Для студентов — это хорошая возможность стать участником или лидером команды, воплотить в жизнь любой проект, который в будущем сможет стать стартапом независимо от профиля подготовки. Кроме того, студенты смогут проявить в проектах свои творческие способности, экспериментировать с междисциплинарными подходами к решению тех или иных задач.

Для преподавателей, как научных руководителей, — это возможность помочь студенту сделать разработки в проектном формате, тем самым создав условия для продвижения разработок работодателю, грантодателю, для участия с разработками во внутренних и внешних конкурсах.

Для университета в целом — это возможность двигаться вперёд и уверенно смотреть в будущее, включаться в программы развития, более тесно сотрудничать с бизнесом, привлекать к работе со студентами работодателей, готовить высококвалифицированных специалистов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Проектное обучение: практики внедрения в университетах / под общей редакцией: Л.А. Евстратовой, Н.В. Исаевой, О.В. Лешукова. М. : Издательский дом НИУ ВШЭ, 2018.
2. Зерщикова Т.А. О способах реализации метода проектов в вузе // Проблемы и перспективы развития образования: материалы I Междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2011 г.). Т. 2. Пермь : Меркурий, 2011. С. 79–82. URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/17/295/> (дата обращения: 02.02.2022).



3. Развитие инновационных проектов с Академпарком. URL: <http://events.nsu.ru> (дата обращения: 22.02.2022).

## MODEL OF THE PROJECT TRAJECTORY OF STUDY AT DOSTOEVSKY OMSK STATE UNIVERSITY

**A.A. Laptev**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: [aalaptev@mail.ru](mailto:aalaptev@mail.ru)

**N.V. Lifliandskaia**

Head of Department, e-mail: [lifliandskaianv@omsu.ru](mailto:lifliandskaianv@omsu.ru)

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** The article describes approaches to the implementation of project trajectories of study at the university. Possible approaches to the development of universal competencies for the development and implementation of projects, teamwork, self-organization and self-development are described. The principle of constructing a project learning trajectory implemented at the Dostoevsky Omsk State University are proposed.

**Keywords:** project educational trajectory, individual educational trajectory, universal competencies, practical training, startup as a diploma.

## REFERENCES

1. Proektnoe obuchenie: praktiki vnedreniya v universitetakh, pod obshchei redaktsiei: L.A. Evstratovoi, N.V. Isaevoi, O.V. Leshukova. Moscow, Izdatel'skii dom NIU VShE, 2018. (in Russian)
2. Zershchikova T.A. O sposobakh realizatsii metoda proektov v vuze. Problemy i perspektivy razvitiya obrazovaniya: materialy I Mezhdunar. nauch. konf. (g. Perm', aprel' 2011 g.), vol. 2, Perm', Merkurii, 2011, pp. 79–82. URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/17/295/> (02.02.2022). (in Russian)
3. Razvitie innovatsionnykh proektov s Akademparkom. URL: <http://events.nsu.ru> (22.02.2022). (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 14.02.2022*

# Вальтер Каллис

22.06.1948 – 27.12.2021



27 декабря 2021 года скоропостижно скончался Вальтер Каллис — главный научный сотрудник Научно-технического отдела внешних коммуникаций и распределённых информационных систем Лаборатории информационных технологий имени М.Г. Мещерякова Объединённого института ядерных исследований (ОИЯИ; г. Дубна).

Ехал в машине, почувствовал себя плохо, съехал в кювет, остановился и потерял сознание. Его доставили в больницу, но на следующий день он умер.

Вальтер Каллис родился 22 июня 1948 г. в г. Йена в Германии. В 1958 г. семья переехала в СССР, в Ленинград (ныне Санкт-Петербург). Закончил с отличием физический факультет Ленинградского университета в 1972 г.

В 1977 г. защитил кандидатскую диссертацию на тему «Дифференциальное сечение и поляризация нуклонов в реакции  $\pi + d \rightarrow p + p$  в области 100–300 МэВ».

В ОИЯИ работал с 1978 г. Некоторое время работал в ГДР. Награждён государственными наградами ГДР и почётными грамотами ОИЯИ. Ему присвоено звание «Почётный сотрудник ОИЯИ».

Каллис работал в различных областях теоретической и прикладной физики. Опубликовал более 67 научных работ и являлся соавтором трёх научных монографий. Две статьи, написанные совместно с И.А. Егановой, вышли в нашем журнале (2017. № 1(41); № 4(44)).

Важнейшим вкладом в науку является его участие в исследованиях, касающихся экспериментальных подтверждений реальности 4-мерного пространства-времени Минковского. Речь идёт о фиксации мгновенной связи между событиями, которые находятся на изотропных кривых. Такие события разделены нулевым интервалом  $ds^2 = 0$ . Первым такие наблюдения проводил Н.А. Козырев. По инициативе академика М.М. Лаврентьева эксперименты Козырева были повторены сотрудниками Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева. Было заявлено об обнаружении датчиками Козырева мгновенных сигналов как от одновременного с наблюдателем истинного положения Солнца, так и от будущего положения Солнца (ещё не состоявшееся событие), свет от которого должен прийти только в будущем, и от прошлого положения Солнца (уже состоявшегося события).

Последняя публикация Вальтера Каллиса в журнале «Метафизика» с соавторами посвящена именно этой теме – теме мгновенных связей на расстоянии, природа которых во многом неясна, а заявление Козырева, что это проявление времени как физического процесса даже сейчас лежит за гранью современной научной физической парадигмы, хотя уже признана мгновенная связь посредством квантовых корреляций, т. е. несиловых связей.

Живя в России, Вальтер Каллис был немцем по духу и мировоззрению, наследником великих интернационалистических идей, рождённых в Германии и нашедших, как и он, вторую родину в России.

Редакция журнала

## Авторам

### Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате  $\LaTeX$  (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу<sup>1</sup>;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

### Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

### Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
  - фамилии, имени и отчества,
  - учёного звания,
  - учёной степени,
  - должности,
  - места работы или учёбы,
  - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета  $\LaTeX$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор  $\text{MiKTeX}$ , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

---

<sup>1</sup>Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

## Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлекцией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

### **Авторская этика**

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

### **Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык**

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

### **Электронная почта для отправки статей**

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

# Математические структуры И моделирование

№1 (61)

Главный редактор

**А.К. Гуц**

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

**Д.Н. Лавров**

Зам. глав. ред., технический редактор

**Н.Ф. Богаченко**

Корректор:

**Е.П. Барановская**

Перевод на английский язык в авторской редакции

---

#### Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,  
Омский государственный университет

E-mail: [guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru), [lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



---

Подписано в печать 22.04.2022. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 15,6. Тираж 25 экз. Заказ № 60.

---

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского  
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



22061 >