

ISSN 2222-8772

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ**  
**СТРУКТУРЫ**  
**И**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 4(60)  
2021



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

**№ 4(60)**

Омск  
2021

**Редакционная коллегия**

- А. К. Гуц** главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- Д. Н. Лавров** зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, проректор по информационным технологиям, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- Н. Ф. Богаченко** технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- В. П. Голубятников** доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
- С. И. Горлов** доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
- А. Г. Гринь** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- В. А. Еровенко** доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра общей математики и информатики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь.
- V. Zilber** Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
- А. Н. Кабанов** канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
- А. В. Копыльцов** доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).
- А. Г. Коробейников** доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
- П. А. Корчагин** доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), г. Омск.
- V. Kreinovich** Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
- В. А. Плетюхов** доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь.
- Л. Б. Соколинский** доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
- А. А. Fedorenko** Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
- А. Н. Фирсов** доктор техн. наук, профессор, Высшая школа киберфизических систем и управления, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
- A. Jadczyk** Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

**Учредитель**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».  
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

**Адрес редакции, издателя и типографии**

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а.

**Дата выхода в свет:** 24.12.2021.

**Тираж** 60 экз.

Свободная цена.

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СТРУКТУРЫ  
И  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>  
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

[guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru)

Электронная почта выпускающего редактора:

[lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

# СОДЕРЖАНИЕ

## К 110-летию Леонида Канторовича

С.С. Кутателадзе, Л.В. Канторович — математик и экономист ..... 4

### Фундаментальная математика и физика

А.Г. Гринь. *О центральной предельной теореме с нелинейной масштабной нормировкой* ... 9

А.К. Гуц. *Несвязный порядок в аффинном пространстве и его автоморфизмы* ..... 17

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Why Was Nicholson's Theory So Successful: An Explanation of a Mysterious Episode in 20 Century Atomic Physics* ..... 39

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Why T-Duality: A Simple Explanation* ..... 44

А.В. Полищук. *Хронофизика и хроноинженерия для целей технологической рессурекции: краткий обзор идей* ..... 49

### Прикладная математика и моделирование

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц. *Равновесия в модели экосистемы «лес-почва»* ..... 54

А.К. Гуц, Т.Н. Капотина, Н.И. Панова, В.М. Семенюк, Р.Т. Файзулин, К.К. Яковлев. *Математическое обоснование к использованию корней фронтальных зубов, разрушенных ниже уровня десны, под штифтовые конструкции* ..... 58

А.В. Зыкина, В.В. Мунько. *Подходы к моделированию процесса формирования учебного плана* ..... 81

П.М. Косьянов, Н.В. Манюкова. *Проектирование компьютерной модели эксплуатации нескольких пластов одной нагнетательной скважины* ..... 94

*Продолжение на следующей странице*

# Наши публикации



## Компьютерные науки

V.A. Filimonov. *Money and Robots: the Two Shadows Of Humanity that will Destroy It . . . . .* 109

## Образование

Е.И. Федорова, Ю.Б. Никитин, А.С. Котюргина. *Итоги первых дистанционных экзаменов в вузе . . . . .* 115

## Некролог

Академик АН РАН Ю.Г. Решетняк (1929–2021). 124

# Леонид Витальевич Канторович

1912 – 1986

Математик и экономист  
(к 110-летию со дня рождения)



19 января 2022 года исполняется 110 лет со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича. Многим известно, что Л. В. Канторович — единственный советский учёный, удостоенный Нобелевской премии по экономике. Для большинства этими сведениями знания о Л. В. Канторовиче и исчерпываются. Нынешняя памятная дата даёт повод для более пристального взгляда на судьбу нашего выдающегося соотечественника.

Л. В. Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача-венеролога 19 января 1912 года (6 января по старому стилю). Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 году в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет.

Закончив ЛГУ в 1930 году, Леонид Витальевич начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая её с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 году он профессор Ленинградского института инженеров гражданского строительства и доцент ЛГУ. В 1934 году Леонид Витальевич становится профессором своей alma mater.

Основные научные труды в области математики Леонид Витальевич создал именно в свой «ленинградский» период. При этом если в тридцатые годы он

публикует больше статей по чистой математике, то сороковые годы для него — время работ по вычислительной математике, где он становится признанным лидером в стране.

Недавно было обнаружено письмо академика Н. Н. Лузина к Л. В. Канторовичу, датированное 29 апреля 1934 года. Это письмо даёт возможность почувствовать отношение к яркому дару Леонида Витальевича — математика. Николай Николаевич, один из первых математиков того времени и основатель знаменитой «Лузитании», писал:

«...Вы должны знать, каково моё отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю ещё, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то, что я точно знаю, — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее...».

С конца тридцатых годов ярко заявляет о себе Л. В. Канторович — экономист. В 1939 году выходит в свет его знаменитая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», ознаменовавшая рождение линейного программирования. В сороковые годы на поверхности научного информационного потока, в виде публикаций, экономические работы Леонида Витальевича практически не появляются. Однако в его творчестве экономическая проблематика выходит на первый план. Уже в военные годы он завершает работу над первым вариантом книги «Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов», принёсшей ему в 1975 году Нобелевскую премию.

В годы Великой Отечественной войны Л. В. Канторович был призван в армию и преподавал офицерам. В эти годы он написал ряд работ об оптимальных методах минирования и бомбометания, часть из которых опубликована совсем недавно.

В 1957 году Леонида Витальевича приглашают на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук. Более десяти лет Л. В. Канторович проработал в Новосибирском академгородке. С этого момента основные публикации Леонида Витальевича относятся к экономике, за исключением всемирно известного курса функционального анализа, в студенческом жаргоне — «Канторович и Акилов».

Нельзя не отметить одну блестящую придумку Леонида Витальевича и его учеников — научные тарифы на такси. Люди старшего поколения помнят, как в 60-е годы была введена плата за посадку и уменьшена такса за проезд, что немедленно привело к повышению рентабельности перевозок и выгоды коротких поездок для клиентов и водителей. Эта экономическая мера была разработана в результате математического моделирования, осуществлённого Л. В. Канторовичем и группой его молодых учеников-математиков, и опубликована в самом престижном математическом журнале страны — в «Успехах математических наук».

Шестидесятые годы — время признания Леонида Витальевича. В 1964 году

он избран действительным членом Академии наук по Отделению математики и в 1965 году удостоен Ленинской премии.

В начале семидесятых годов Леонид Витальевич переезжает в Москву, где продолжает занятия экономическим анализом. Леонид Витальевич всегда мечтал о внедрении новых математических методов в хозяйственную практику своей Родины и служил этой мечте до своей кончины 7 апреля 1986 года, не взирая на непонимание и откровенное противодействие ретроградов от науки и политики, управлявших страной. Он похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

Научное наследие Л. В. Канторовича огромно. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Л. В. Канторович по праву входит в число основоположников современного экономико-математического направления.

Л. В. Канторович — автор более трёхсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам: (1) дескриптивная теория функций и теория множеств, (2) конструктивная теория функций, (3) приближенные методы анализа, (4) функциональный анализ, (5) функциональный анализ и прикладная математика, (6) линейное программирование, (7) вычислительная техника и программирование, (8) оптимальное планирование и оптимальные цены, (9) экономические проблемы плановой экономики.

Столь впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Л. В. Канторовича, но и его методическими установками. Он всегда подчёркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения самых разнообразных теоретических и прикладных проблем математики и экономики. Ещё одной характерной чертой его творчества является тесная взаимосвязь с наиболее трудными проблемами и самыми перспективными идеями математики и экономики того времени.

Самым важным научным достижением своей жизни Леонид Витальевич считал «линейное программирование». Этим термином называют колоссальный раздел науки, посвящённый линейным оптимизационным моделям, то есть построению, теоретическому и численному анализу и решению задач, в которых требуется найти оптимальное значение, т. е. максимум или минимум некоторой системы показателей в процессе, поведение и состояние которого описывается той или иной системой линейных неравенств. Сам термин «линейное программирование» был предложен в 1951 году Т. Купмансом — американским экономистом, вместе с которым Л. В. Канторович и получил в 1975 году Нобелевскую премию с формулировкой «за вклад в теорию оптимального использования ресурсов».

В США линейное программирование возникло в 1947 году прежде всего в работах Дж. Данцига. Поучительно привести слова Дж. Данцига об истории линейного программирования:



«Советский математик Л. В. Канторович на протяжении ряда лет интересовался применением математики к задачам планирования. В 1939 году он опубликовал обстоятельную монографию под названием „Математические методы организации и планирования производства“... Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддаётся чёткой математической формулировке, которая, по его убеждению, даёт возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...

Канторович описал метод решения, основанный на имеющемся первоначально допустимом решении... Хотя двойственные переменные и не назывались „ценами“, в целом идея метода состоит в том, что выбранные значения этих „разрешающих множителей“ для недостающих ресурсов можно довести до уровня, когда становится целесообразной переброска ресурсов, являющихся избыточными...

Если бы первые работы Канторовича были бы в должной мере оценены в момент их первой публикации, то, возможно, в настоящее время линейное программирование продвинулось бы значительно дальше. Однако его первая работа в этой области оставалась неизвестной как в Советском Союзе, так и в других странах, а за это время линейное программирование стало настоящим искусством».

Следует подчеркнуть, что с оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Леонид Витальевич выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина. Взаимозависимость оптимальных решений и оптимальных цен — такова краткая суть экономического открытия Л. В. Канторовича.

Л. В. Канторович по праву стал в ряд наиболее известных российских учёных. Открытое им линейное программирование изменило лицо экономической науки, поставив идею планирования в экономике на точные математические основы. Леониду Витальевичу хватило научной и гражданской решимости бороться до последних дней за признание новых экономико-математических теорий и внедрение их в хозяйственную жизнь своей Родины.

В истории науки двадцатого века трудно назвать другого учёного, сделавшего так много для взаимопроникновения математики и экономики, для синтеза диаметрально противоположных способов научного мышления.

С.С. Кутателадзе  
Институт математики СО РАН  
им. С.Л. Соболева, г. Новосибирск

*Дата поступления в редакцию: 06.10.2021*

## О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ МАСШТАБНОЙ НОРМИРОВКОЙ

А.Г. Гринь

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В работе показано, как с помощью полученных ранее результатов о предельных теоремах для симметрических функций от случайных величин можно доказывать центральную предельную теорему для  $U$ -статистик, в частности в случае ядер растущего числа переменных.

**Ключевые слова:** симметрические функции от случайных величин, центральная предельная теорема,  $U$ -статистики с ядрами растущего числа переменных.

Пусть  $\{\xi_n\}$  — последовательность случайных величин. Будем писать  $\xi \stackrel{d}{=} \eta$ ,  $\xi_n \xrightarrow{d} \eta$  и  $\xi_n \stackrel{d}{\sim} \eta_n$  в случаях, когда, соответственно, распределения  $\xi$  и  $\eta$  совпадают,  $\{\xi_n\}$  сходится к  $\eta$  по распределению и когда последовательности  $\{\xi_n\}$  и  $\{\eta_n\}$  слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]).

Следуя [2], назовём  $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$  правильно меняющейся последовательностью порядка  $\rho$ , если  $b_{[x]}$ ,  $x > 0$  является правильно меняющейся функцией порядка  $\rho$ , где  $[x]$  — целая часть  $x$ . Через  $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n$  будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что  $\hat{\xi}_k \stackrel{d}{=} \xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Пусть при каждом  $n \in \mathbb{N}$  определена симметрическая вещественнозначная функция  $f$ , то есть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  для любых  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  для любой перестановки  $\{i_1, \dots, i_n\}$  множества  $\{1, \dots, n\}$  (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость  $f$  от  $n$  какими-либо индексами и называть  $f$  последовательностью).

Пусть  $X_n = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ ,  $A_n = \mathbb{E}X_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $B_n^2 = \mathbb{D}X_n \rightarrow \infty$ , а  $\mathcal{N}(0, 1)$  — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$B_n^{-1}(X_n - A_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности  $\{X_n\}$  применима центральная предельная теорема.

Обозначим

$$\alpha_n = \left( \frac{B_n}{B_{n+m}} \right)^{\frac{1}{2\rho} - 1}, \quad \alpha_m = \left( \frac{B_m}{B_{n+m}} \right)^{\frac{1}{2\rho} - 1}, \quad \rho > 0.$$

Будем говорить, что последовательность  $\{\xi_n\}$  удовлетворяет условию  $(R_f)$ , если

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{\alpha_n \widehat{X}_n}{B_{n+m}} + \frac{\alpha_m \widehat{X}_m}{B_{n+m}}, \quad n+m \rightarrow \infty. \quad (R_f)$$

Если  $\{B_n\}$  является правильно меняющейся последовательностью порядка  $\rho > 0$  и  $\gamma_n = B_{n+m}^{-1}(\alpha_n A_n + \alpha_m A_m - A_{n+m}) \rightarrow 0$ ,  $n+m \rightarrow \infty$ , то будем говорить, что выполнены условия нормировки  $(N)$ .

В [3] получен следующий результат:

**Теорема 1.** Пусть  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  — стационарная последовательность и пусть  $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ . Для того чтобы к последовательности  $\{X_n\}$  была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки  $(N)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $(R_f)$  и последовательность  $\{B_n^{-2}(X_n - A_n)^2\}$  была равномерно интегрируема.

**Замечание 1.** В предположениях теоремы 1 условие  $(R_f)$  равносильно условию

$$\frac{X_{n+m} - A_{n+m}}{B_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \frac{\alpha_n (\widehat{X}_n - A_n)}{B_{n+m}} + \frac{\alpha_m (\widehat{X}_m - A_m)}{B_{n+m}}, \quad n+m \rightarrow \infty. \quad (R_f^*)$$

Этот факт по сути доказан в Теореме 2 в [3], где показано, что в условиях теоремы 1 из  $(R_f)$  и равномерной интегрируемости  $\{B_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$  следует условие нормировки  $(N)$  и, следовательно,  $(R_f^*)$ ; если же выполняется условие  $(N)$ , то очевидным образом из  $(R_f^*)$  следует  $(R_f)$ .

Пусть  $f$  симметрическая вещественнозначная функция и пусть  $\{\xi_n\}$  — последовательность независимых одинаково распределённых величин.

$$U_n = U_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k \leq n} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) \quad (1)$$

называют  $U$ -статистикой с ядром  $f$  (см., например [4]).

В. Хёфдинггом [5] показано, что если  $\mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, \dots, \xi_k)|\xi_1\} \neq 0$ , то к последовательности  $\{U_n\}$  применима центральная предельная теорема.

**Замечание 2.** Условие  $\mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, \dots, \xi_k)|\xi_1\} \neq 0$  просто означает, что  $\mathbb{E}\{f(\xi_1, \dots, \xi_k)|\xi_1\}$  — невырожденная случайная величина. Роль этого условия поясним на простом примере, когда  $U_n = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \xi_i \xi_j$ ,  $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi_1 > 0$ . Если  $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ , (в этом случае  $U_n$  называют канонической или вырожденной  $U$ -статистикой), то  $\mathbb{E}\{\xi_1 \xi_2 | \xi_1\} = 0$ , а

$$n^{-1}U_n = n^{-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right) \stackrel{d}{\rightarrow} \mathcal{N}^2(0, \sigma) - \sigma^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть предельное распределение не является нормальным, и для  $\{U_n\}$  центральная предельная теорема не выполняется. Если же  $a = \mathbb{E}\xi_1 \neq 0$ , то  $\mathbb{E}\{\xi_1\xi_2|\xi_1\} = a\xi_1$ , а

$$U_n - \mathbb{E}U_n = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} (\xi_i - a)(\xi_j - a) + 2(n-1)a \sum_{i=1}^n (\xi_i - a),$$

так что  $n^{-3/2}(U_n - \mathbb{E}U_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma')$ ,  $\sigma' > 0$ , то есть к  $\{U_n\}$  применима центральная предельная теорема.

Будем предполагать, что

$$a = \mathbb{E}f(\xi_1, \dots, \xi_k), \quad b^2 = \mathbb{E}f^2(\xi_1, \dots, \xi_k) < \infty, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, \dots, \xi_k)|\xi_1\} \neq 0.$$

Обозначим  $\sigma_{\leq s}$   $\sigma$ -алгебру, порождённую величинами  $\{\xi_l : l \leq s\}$ , и пусть

$$\mathbb{E}_s U_n = \mathbb{E}\{U_n | \sigma_{\leq s}\}, \quad Y_s = \mathbb{E}_s U_n - \mathbb{E}_{s-1} U_n, \quad s = 1, \dots, n.$$

Тогда  $\{Y_s, \sigma_{\leq s}\}$  — мартингал-разность и  $U_n - \mathbb{E}U_n = \sum_{s=1}^n Y_s$ . Если ни одно из чисел  $i_1, \dots, i_k$  не равно  $s$ , то

$$\mathbb{E}_s f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) = \mathbb{E}_{s-1} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}),$$

так что

$$Y_s = \mathbb{E}_s \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1} \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}), \quad (2)$$

где  $(i_1, \dots, i_k)_s$  — выборки (упорядоченные без повторений) объёма  $k$  из  $\{1, 2, \dots, n\}$ , в которых одно из чисел равно  $s$ , число таких выборок равно  $kA_{n-1}^{k-1}$ ,  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ . В силу 2

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 \leq 2 \sum_{s=1}^n \left( \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} \|f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})\|_2 \right)^2 \leq 2bn (kA_{n-1}^{k-1})^2, \quad (3)$$

( $\|f\|_2^2 = \mathbb{E}f^2$ ). Обозначим  $\mathbb{E}\{Y_s | \xi_s\} = Z_s$ . Тогда

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 + \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Z_s^2,$$

$$Z_s = \mathbb{E}\{Y_s | \xi_s\} = \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} (\mathbb{E}\{f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) | \xi_s\} - \mathbb{E}f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})).$$

В последней сумме все слагаемые одинаковы и равны

$$h(\xi_s) = \mathbb{E}\{f(\xi_s, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_k}) | \xi_s\} - \mathbb{E}f(\xi_s, \xi_{j_2}, \dots, \xi_{j_k}),$$

где  $j_2, \dots, j_k$  — произвольные не равные  $s$  числа из  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Так что

$$Z_s = kA_{n-1}^{k-1}h(\xi_s), \quad \mathbb{E}Z_s^2 = \mathbb{D}Z_s = (kA_{n-1}^{k-1})^2 \mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, \dots, \xi_k)|\xi_1\} = (kA_{n-1}^{k-1})^2 \sigma^2.$$

Далее, в сумме

$$Y_s - Z_s = \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} (\mathbb{E}_s f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) - \\ - \mathbb{E}\{f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k})|\xi_s\} + \mathbb{E}f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}))$$

равны нулю слагаемые, в которых  $i_1 \geq s, \dots, i_k \geq s$ , так что в силу (3)

$$\mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 \leq 16b^2(k-1)^2(n-1)(A_{n-2}^{k-2})^2. \quad (4)$$

Обозначим

$$A_n = \mathbb{E}U_n = aA_n^k, \quad B_n^2 = \mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 = n(kA_{n-1}^{k-1})^2 \sigma^2 \sim n^{2k-1}k^2\sigma^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тогда  $2\rho = 2k - 1$  и

$$\alpha_n = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+m-1}} \frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_{n+m-1}^{k-1}} \right\} \frac{2-2k}{2k-1} \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}, \quad \alpha_m \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}}. \quad (5)$$

С помощью (4) получаем

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{s=1}^n \mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 \leq 16a^2n(n-1)(k-1)^2 \left( \frac{A_{n-2}^{k-2}}{B_n} \right)^2 \sim 16 \frac{a^2(k-1)^2}{\sigma^2 k^2 n} \rightarrow 0,$$

так что

$$B_n^{-1}(U_n - A_n) = B_n^{-1} \sum_{s=1}^n Y_s \stackrel{d}{\sim} B_n^{-1} \sum_{s=1}^n Z_s = kA_{n-1}^{k-1}B_n^{-1} \sum_{s=1}^n h(\xi_s), \quad n \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Воспользовавшись (5) и (6), выводим

$$B_{n+m}^{-1}(U_{n+m} - A_{n+m}) \stackrel{d}{\sim} kA_{n+m-1}^{k-1}B_{n+m}^{-1} \left( \sum_{s=1}^n h(\xi_s) + \sum_{s=n+1}^{n+m} h(\xi_s) \right) \stackrel{d}{\sim} \\ \stackrel{d}{\sim} \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}} \frac{\widehat{U}_n - A_n}{b_{n+m}} + \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}} \frac{\widehat{U}_m - A_m}{b_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \alpha_n \frac{\widehat{U}_n - A_n}{B_{n+m}} + \alpha_m \frac{\widehat{U}_m - A_m}{b_{n+m}},$$

то есть выполнено  $(R_f^{**})$ .

В силу (4) равномерная интегрируемость  $\{B_n^{-2}(U_n - A_n)^2\}$  равносильна равномерной интегрируемости  $\left\{ B_n^{-2} \left( \sum_{s=1}^n Z_s \right)^2 \right\}$ , что, в силу независимости и одинаковой распределённости  $Z_1, \dots, Z_n$  равносильно выполнению условия Линдберга

$$nB_n^{-2}\mathbb{E}\{Z_1^2, |Z_1| \geq \varepsilon B_n\} = \sigma^{-2}\mathbb{E}\{h^2(\xi_1), |h(\xi_1)| \geq \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 1 и замечания 1 следует теперь, что к последовательности  $\{X_n\}$  применима центральная предельная теорема, то есть мы получили результат В. Хёфдинга [5].

**Замечание 3.** В доказательстве достаточности в Теореме 1 используется условие  $(R_f^*)$ , а правильное изменение  $\{B_n\}$  используется для того, чтобы обеспечить выполнение соотношения  $B_{nl} \sim l^\rho B_n$  при любом натуральном  $l$ . Нетрудно видеть, что вместо правильного изменения  $\{B_n\}$  можно предполагать для некоторой не зависящей от  $B_n$  последовательности  $\rho(n) \rightarrow \infty$  выполняется  $B_{nl} \sim l^{\rho(n)} B_n$ ; это, например, имеет место в случае, когда  $B_n \sim n^{\rho(n)}$ , где  $(\rho(ln) - \rho(n)) \ln n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Необходимые изменения в доказательстве достаточно очевидны.

В дальнейшем мы будем рассматривать  $U$ -статистики с ядрами вида  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k$  растущего числа переменных, то есть  $k = k(n) \rightarrow \infty$ , и покажем, как с помощью теоремы 1 (замечания 2) можно доказывать предельные теоремы для  $U$ -статистик указанного вида (полилинейных форм растущего числа переменных).

Пусть

$$a = \mathbb{E}\xi_1 \neq 0, \quad a_k = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k = a^k, \quad b^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 < \infty, \quad b_k^2 = \mathbb{E}(\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k)^2 = b^{2k},$$

$$\sigma_k^2 = \mathbb{D}\mathbb{E}\{\xi_1 \cdot \dots \cdot \xi_k | \xi_1\} = a^{2k-2} \mathbb{D}\xi_1 = a^{2k-2} \sigma^2 \neq 0.$$

Как и выше, будем обозначать

$$\mathbb{E}_s U_n = \mathbb{E}\{U_n | \sigma_{\leq s}\}, \quad Y_s = \mathbb{E}_s U_n - \mathbb{E}_{s-1} U_n, \quad s = 1, \dots, n.$$

Тогда  $\{Y_s, \sigma_{\leq s}\}$  — мартингал-разность и  $U_n - \mathbb{E}U_n = \sum_{s=1}^n Y_s$ ,

$$Y_s = \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} (\mathbb{E}_s(\xi_{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1}(\xi_{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_{i_k})),$$

откуда

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 \leq 2 \sum_{s=1}^n \left( \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} \|\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}\|_2 \right)^2 \leq 2n (kA_{n-1}^{k-1})^2 b^{2k}. \quad (7)$$

Обозначим  $\mathbb{E}\{Y_s | \xi_s\} = Z_s$ . Тогда

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 + \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Z_s^2, \quad (8)$$

$$Z_s = \mathbb{E}\{Y_s | \xi_s\} = \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} (\mathbb{E}\{(\xi_{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_{i_k}) | \xi_s\} - \mathbb{E}(\xi_{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_{i_k})).$$

В последней сумме все слагаемые одинаковы и равны

$$h_k(\xi_s) = \mathbb{E}\{(\xi_s \cdot \xi_{j_2} \cdot \dots \cdot \xi_{j_k}) | \xi_s\} - \mathbb{E}(\xi_s \cdot \xi_{j_2} \cdot \dots \cdot \xi_{j_k}) = (\xi_s - a)a^{k-1},$$

где  $j_2, \dots, j_k$  — произвольные не равные  $s$  числа из  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Так что

$$Z_s = kA_{n-1}^{k-1}h_k(\xi_s), \quad \mathbb{E}Z_s^2 = \mathbb{D}Z_s = (kA_{n-1}^{k-1})^2 \mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, \dots, \xi_k) | \xi_1\} = (kA_{n-1}^{k-1})^2 a^{2k-2}\sigma^2.$$

Далее, в сумме

$$Y_s - Z_s = \sum_{(i_1, \dots, i_k)_s} (\mathbb{E}_s f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1} f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) - \\ - \mathbb{E}\{f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}) | \xi_s\} + \mathbb{E}f(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}))$$

равны нулю слагаемые, в которых  $i_1 \geq s, \dots, i_k \geq s$ , так что в силу (7)

$$\mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 \leq 16(k-1)^2(n-1)(A_{n-2}^{k-2})^2 b^{2k}. \quad (9)$$

С помощью (8) получаем

$$\varepsilon_n = \frac{\sum_{s=1}^n \mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2}{n(kA_{n-1}^{k-1})^2 a^{2k-2}\sigma^2} \leq \frac{16(n-1)(k-1)^2 (A_{n-2}^{k-2})^2 b^{2k}}{(kA_{n-1}^{k-1})^2 a^{2k-2}\sigma^2} \leq 16 \frac{a^2(k-1)^2}{\sigma^2 k^2(n-1)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2k}. \quad (10)$$

Из (7), (8) и (10) выводим

$$B_n^2 = \mathbb{D}U_n = \left( \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Z_s^2 \right) (1 + \varepsilon_n) = n(kA_{n-1}^{k-1})^2 a^{2k-2}\sigma^2(1 + \varepsilon_n).$$

Мы будем предполагать, что  $k = k(n) = o(\ln n)$ . Тогда  $\left(\frac{b}{a}\right)^{2k} = o(n)$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  и

$$B_n^2 = \mathbb{D}U_n \sim n(kA_{n-1}^{k-1})^2 a^{2k-2}\sigma^2. \quad (11)$$

В силу (8), (9) и (11)

$$B_n^{-1}(U_n - A_n) = B_n^{-1} \sum_{s=1}^n Y_s \stackrel{d}{\sim} B_n^{-1} \sum_{s=1}^n Z_s \sim kA_{n-1}^{k-1}B_n^{-1} \sum_{s=1}^n h_k(\xi_s), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Далее, в сделанных предположениях

$$A_{n-1}^{k-1} = n^{k-1} \left( 1 + O\left(\frac{k^2}{n}\right) \right) = n^{k-1}(1 + o_n(1)), \quad (13)$$

так что

$$\frac{B_{nl}}{B_n} = \frac{\sqrt{nl}kA_{nl-1}^{k-1}}{\sqrt{nk}A_{n-1}^{k-1}} \sim l^{k-\frac{1}{2}},$$

то есть выполнены предположения замечания 3 с  $\rho(n) = k(n) - \frac{1}{2}$ . Из (11) и (13) выводим

$$\frac{B_{n+m}}{B_n} \sim \left( \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}} \right)^{\frac{2k-1}{2k-2}},$$

поэтому

$$\alpha_n = \left( \frac{B_n}{B_{n+m}} \right)^{\frac{1}{2\rho_n}-1} \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}, \quad \alpha_m \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}}. \quad (14)$$

Воспользовавшись (12) и (14), выводим

$$\begin{aligned} B_{n+m}^{-1}(U_{n+m} - A_{n+m}) &\stackrel{d}{\sim} k A_{n+m-1}^{k-1} B_{n+m}^{-1} \left( \sum_{s=1}^n h(\xi_s) + \sum_{s=n+1}^{n+m} h(\xi_s) \right) \stackrel{d}{\sim} \\ &\stackrel{d}{\sim} \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}} \frac{\widehat{U}_n - A_n}{B_{n+m}} + \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}} \frac{\widehat{U}_m - A_m}{B_{n+m}} \stackrel{d}{\sim} \alpha_n \frac{\widehat{U}_n - A_n}{B_{n+m}} + \alpha_m \frac{\widehat{U}_m - A_m}{B_{n+m}}, \end{aligned}$$

то есть выполнено  $(R_f^*)$ .

В силу (9) и (10) равномерная интегрируемость  $\{B_n^{-2}(U_n - A_n)^2\}$  равносильна равномерной интегрируемости  $\left\{ B_n^{-2} \left( \sum_{s=1}^n Z_s \right)^2 \right\}$ , что в силу независимости и одинаковой распределённости  $Z_1, \dots, Z_n$  равносильно выполнению условия Линдеберга, которое выполняется ввиду того, что  $\frac{Z_1}{B_n} \sim \frac{\xi_1 - a}{\sigma\sqrt{n}}$  и

$$nB_n^{-2} \mathbb{E}\{Z_1^2, |Z_1| \geq \varepsilon B_n\} = \sigma^{-2} \mathbb{E}\{(\xi_1 - a)^2, |\xi_1 - a| \geq \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и в силу замечания 2 к последовательности  $\{U_n\}$  применима центральная предельная теорема.

**Замечание 4.** Легко видеть, что из представлений (6) или (12) центральную предельную теорему можно получить и без использования Теоремы 1, но цель настоящей работы — показать, как работают результаты такого типа при доказательстве предельных теорем, в частности когда дисперсия  $\mathbb{D}U_n$  не является линейной функцией от  $n$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985.
3. Гринь А.Г. Критерий нормальной сходимости для симметрических функций от независимых величин // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1(45). С. 5–11.
4. Королюк В.С., Боровских Ю.В. Теория  $U$ -статистик. Киев : Наукова Думка, 1989.



5. Hoeffding W. A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist. 1948. V. 19. P. 293–325.

## ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM WITH NONLINEAR SCALE NORMALIZATION

**A.G. Grin**

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

**Abstract.** In this paper, it is shown how, using the results obtained earlier by the author on limit theorems for symmetric functions of random variables, one can prove the central limit theorem for  $U$ -statistics, in particular, in the case of kernels of an increasing number of variables

**Keywords:** Symmetric functions of random variables, central limit theorem,  $U$ -statistics with a kernel of an increasing number of variables.

## REFERENCES

1. Loev M. Teoriya veroyatnostei. Moscow, IL, 1962. (in Russian)
2. Seneta E. Pravil'no menyayushchiesya funktsii. Moscow, Nauka, 1985. (in Russian)
3. Grin' A.G. Kriterii normal'noi skhodimosti dlya simmetricheskikh funktsii ot zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 1(45), pp. 5–11. (in Russian)
4. Korolyuk V.S. and Borovskikh Yu.V. Teoriya  $U$ -statistik. Kiev, Naukova Dumka, 1989. (in Russian)
5. Hoeffding W. A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. Math. Statist., 1948, vol. 19, pp. 293–325.

*Дата поступления в редакцию: 10.11.2021*

## НЕСВЯЗНЫЙ ПОРЯДОК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО АВТОМОРФИЗМЫ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В работах А.Д. Александрова был изучен связный предпорядок в аффинном пространстве и вычислены его автоморфизмы. В данной статье исследуется несвязный предпорядок (частичный порядок). Вычислены порядковые автоморфизмы и даётся классификация однородных несвязных предпорядков. Несвязный порядок позволяет строить аксиоматики специальной теории относительности, основанные на понятии причинности, не распространяемой на явления микромира.

**Ключевые слова:** аффинное пространство, несвязный порядок, порядковые автоморфизмы, аксиоматики, специальная теория относительности.

### Введение

В работе А.Д. Александрова [1] был изучен связный предпорядок в аффинном пространстве и вычислены его автоморфизмы.

В данной статье исследуется несвязный предпорядок. Вычислены порядковые автоморфизмы и даётся классификация однородных несвязных предпорядков. Результаты статьи были анонсированы в [2], частично опубликованы в [3] и полностью депонированы в [4].

На основе несвязного порядка строится аксиоматическая причинная теория относительности, не предполагается, что причинно-следственные взаимодействия распространяются на явления микромира [5].

### 1. Основные определения и предварительные сведения

*Предпорядок* в аффинном  $n$ -мерном пространстве  $A^n$ ,  $n \geq 2$ , есть семейство подмножеств  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ , удовлетворяющее аксиомам:

P1.  $x \in P_x$ .

P2. Если  $y \in P_x$ , то  $P_y \subset P_x$ .

P3. Если  $x \in A^n$ , а  $t$  — произвольный параллельный перенос, то  $t(P_x) = P_{t(x)}$ .

Предпорядок *нетривиальный*, если  $P_x \neq A^n$ .

Если дополнительно выполнено условие  $x \neq y$  влечёт  $P_x \neq P_y$ , то  $\mathcal{P}$  есть *порядок* в  $A^n$ .

Порядок *тривиальный*, если  $P_x = \{x\}$ .

Отношение  $y \in P_x$  иногда будем обозначать как  $x \preceq y$ .

Через  $e$  будем всегда обозначать фиксированную точку пространства  $A^n$ . Если  $M \subset A^n$ , то через  $M_x$  обозначаем множество  $t(M)$ , где  $t$  — перенос такой, что  $t(e) = x$ .

Будем писать  $P$  вместо  $P_e$ .

Если  $M \subset A^n$ , то через  $\text{int}(M)$ ,  $\overline{M}$ ,  $\partial M$ ,  $\text{conv}(M)$  обозначаются внутренность, замыкание, граница и выпуклая оболочка соответственно множества  $M$ .

Говорим, что предпорядок  $\mathcal{P}$  *связный*, если  $e \in \overline{P \setminus \{e\}}$ , и *несвязный* в противном случае. Предпорядок  $\mathcal{P}$  *замкнутый* (соотв.: *открытый*), если  $P$  замкнуто (соотв.:  $P \setminus \{e\}$  открыто).

Пусть  $\mathcal{P}$  предпорядок в  $A^n$ , а  $f : A^n \rightarrow A^n$ , биекция. Говорим, что  $f$  есть порядковый автоморфизм или  $\mathcal{P}$ -автоморфизм, если для любой  $x \in A^n$

$$f(P_x) = P_{f(x)}.$$

Группу порядковых автоморфизмов обозначаем через  $\text{Aut}(\mathcal{P})$ .

Пусть  $E$  — некоторая гиперплоскость, а  $\mathbf{l}$  — вектор (или луч  $L$ ), не параллельный  $E$ .

**Определение 1.1.** Смещением  $d_{E\mathbf{l}}$  (соотв.:  $d_{EL}$ ) называется гомеоморфизм  $A^n$  на себя такой, что:

- 1) на каждой гиперплоскости  $E_x$ , параллельной  $E$ ,  $d_{E\mathbf{l}}$  (соотв.:  $d_{EL}$ ) есть параллельный перенос;
- 2)  $d_{E\mathbf{l}}$  (соотв.:  $d_{EL}$ ) отображает отрезки (лучи), равные и параллельные  $\mathbf{l}$  (соотв.:  $L$ ) в такие же отрезки (лучи).

**Определение 1.2.** *Квазицилиндром*  $Q(E, \mathbf{l})$  называется множество  $M \subset A^n$ , удовлетворяющее условиям:

- 1) существуют гиперплоскости  $\dots, E_{-1}, E_0, E_1, \dots$ , параллельные  $E$ , причём  $E_{i+1}$  получено из  $E_i$  переносом на вектор  $\mathbf{l}$ , притом такие, что

$$M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)], \quad (1.2)$$

где каждое  $M_i$  есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными  $\mathbf{l}$  (как векторы) с концами на  $E_i, E_{i+1}$  (не исключается, что некоторые и даже все  $M_i$  пусты);

- 2)  $M$  не допускает представления (1.2) с той же гиперплоскостью  $E$  и вектором  $\mathbf{l}$ , параллельным  $\mathbf{l}$ , но большим, чем  $\mathbf{l}$ .

Через  $L(x, y)$  обозначаем луч с началом  $x$ , проходящий через  $y$ ,  $y \neq x$ ;  $[x, y] = L(x, y) \cap L(y, x)$ .

**Определение 1.3.** Квазицилиндр  $Q(E, L)$ , где  $E$  — гиперплоскость, проходящая через точку  $e$ , а  $L = L(e, x_0)$ ,  $x_0 \notin E$ , есть множество

$$\bigcup_{x \in M} L_x,$$

где  $M \subset E$ .

**Определение 1.4.** Предпорядок  $\mathcal{P}$  называется квазицилиндрическим, если  $P$  есть квазицилиндр.

Нетрудно видеть, что квазицилиндрические предпорядки в качестве автоморфизма имеют произвольные смещения, и в этом смысле группа порядковых автоморфизмов может быть весьма обширной. Поэтому интерес представляют предпорядки с группой автоморфизмов, являющейся подгруппой группы  $Aff(A^n)$  аффинных биекций  $A^n$  на себя. Группа  $Aff(A^n)$  — это группа преобразований, порождённых аффинной структурой пространства  $A^n$ . Следовательно, при изучении предпорядков, удовлетворяющих аксиоме инвариантности P3 наибольший и естественный интерес представляют предпорядки с группой автоморфизмов  $Aut(\mathcal{P})$ , содержащейся в  $Aff(A^n)$ .

**Определение 1.5.** Предпорядок  $\mathcal{P}$  называется непрерывно аффинным, если группа его непрерывных порядковых автоморфизмов  $Aut_c(\mathcal{P})$  есть подгруппа группы аффинных биекций  $Aff(A^n)$ , и аффинным — если  $Aut(\mathcal{P}) \subset Aff(A^n)$ .

Может быть высказано предположение, что при разумных дополнительных условиях, которым должен удовлетворять предпорядок в  $A^n$ , возможны либо аффинные предпорядки, либо квазицилиндрические. Это предположение подтверждает следующая теорема [1].

**Теорема А.** Пусть предпорядок  $\mathcal{P}$  в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ , удовлетворяет условиям:

1) существует окрестность  $U$  точки  $e$  такая, что

$$U \cap \overline{P} \cap \overline{P^-} = \{e\},$$

где  $P^- = \{y : y \preceq e\}$ ;

2)  $\overline{P}$  содержит конус с внутренними точками и с вершиной  $e$ .

Тогда либо предпорядок  $\mathcal{P}$  непрерывно аффинный, либо  $\mathcal{P}$  квазицилиндрический, причём если  $P$  — квазицилиндр  $Q(E, \mathbf{1}), \dots, Q(E, \mathbf{1})$ , то любой непрерывный  $\mathcal{P}$ -автоморфизм имеет вид

$$f = f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{1}_1} \circ \dots \circ d_{E_m \mathbf{1}_m}, \tag{1.3}$$

где  $f_0$  — аффинная биекция. В формуле (1.3) допустимы любые смещения, которые коммутируют друг с другом.

Аналогичная теорема в случае несвязного предпорядка будет доказана в этой статье (теорема 2.1). Таким образом, если предпорядки, отличные от аффинных и квазицилиндрических существуют, то в случае их связности нарушено либо условие 1) теоремы А, либо условие 2).

**Определение 1.6.** *Контингенцией*  $cont(M, a)$  множества  $M$  в точке  $a$  называется конус, образованный всевозможными пределами лучей  $L(a, x)$ , исходящих из  $a$  и проходящих через  $x \in M$ ,  $x \neq a$  при  $x \rightarrow a$ .

Если  $a$  не является предельной точкой множества  $M$ , то полагаем  $cont(M, a) = \{a\}$ .

Очевидно, что контингенция  $cont(M, a)$  является замкнутым множеством и

$$cont(\overline{M}, a) = cont(M, a).$$

Если  $\mathcal{P}$  — предпорядок в  $A^n$ , то  $\{cont(P_x, x) : x \in A^n\}$  задаёт предпорядок в  $A^n$ , обозначаемый далее через  $cont(\mathcal{P})$ .

**Теорема Б** [1, 6]. *Если  $\mathcal{P}$  — замкнутый предпорядок, то любой непрерывный  $\mathcal{P}$ -автоморфизм является  $cont(\mathcal{P})$ -автоморфизмом.*

Пусть

$$ext(P_x) = \overline{\bigcup_{y \in P_x} L(x, y)}.$$

Множество  $ext(P_x)$  — выпуклый конус с вершиной  $x$  (см. [4, лемма 2]).

Предпорядок  $\{ext(P_x) : x \in A^n\}$  обозначаем через  $ext(\mathcal{P})$ .

**Предложение 1.1.** *Если  $\mathcal{P}$  — предпорядок в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ , то*

$$cont(P, e) \subset \overline{P} \subset ext(P).$$

Доказательство см. [1].

Будем говорить, что конус  $K$  имеет *острую вершину*  $e$ , если  $K$  не содержит целиком никакой прямой. Выпуклый конус  $K$  с острой вершиной  $e$  называем *строго выпуклым*.

В пространстве  $A^n$  вводим естественную евклидову метрику, которую обозначаем как  $|x - y|$ . Открытый шар с центром  $x$  и радиусом  $r > 0$  обозначается через  $B(x, r)$ .

**Предложение 1.2.** *Если  $\mathcal{P}$  — связный предпорядок в  $A^n$  и  $cont(P, e)$  имеет острую вершину, то существуют строго выпуклый замкнутый конус  $K$  с вершиной  $e$  и окрестность  $U$  точки  $e$  такие, что*

- 1)  $\overline{P} \cap U \subset K$ ;
- 2)  $cont(P, e) \setminus \{e\} \subset int(K)$ .

**Доказательство.** Утверждение 2) очевидно. Докажем 1). Пусть  $K$  — конус, удовлетворяющий утверждению 2) предложения 1.2. Предположим, что требуемой окрестности  $U$  не существует. Для любого номера  $m$  можно найти точку

$$x_m \in P \cap B(e, 1/m) \cap (A^n \setminus K), \quad x_m \neq e.$$

Из последовательности  $\{x_m\}$  можно выбрать подпоследовательность  $\{x_{m_k}\}$  такую, что

$$x_{m_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e, \quad L(e, x_{m_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L,$$

где  $L$  луч, исходящий из  $e$ . Но  $L(e, x_{m_k}) \subset A^n \setminus K$ . Поэтому  $L$  не входит в  $\text{cont}(P, e)$ , что противоречит самому определению контингенции.

Предложение 1.2 доказано. ■

## 2. Порядковые автоморфизмы несвязного предпорядка

Наша ближайшая цель — изучить группу непрерывных автоморфизмов несвязного предпорядка. В этом параграфе мы покажем, как несвязный предпорядок может быть сведён к случаю связного, теория которого изложена в статьях А.Д. Александрова [1] и А.В. Левичева [6].

Далее будем предполагать, что  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$  — несвязный предпорядок. Тогда можно ввести следующее обозначение:

$$Q_x = P_x \setminus \{x\}.$$

Ясно,  $x \notin \overline{Q_x}$ .

**Определение 2.1.** Предпорядок  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$  называется *линейчатым*, если существует луч  $L = L(e, x_0)$ ,  $x_0 \neq e$  такой, что для любой точки  $y \in Q_x$  имеем  $L_y \subset P_x$ .

Очевидно,  $L \subset \text{ext}(P)$ , и если  $\mathcal{P}$  — линейчатый относительно луча  $L$ , то предпорядок  $\overline{\mathcal{P}}$  — также линейчатый по отношению к этому лучу, где

$$\overline{\mathcal{P}} = \{\overline{P}_x : x \in A^n\}.$$

Если  $\mathcal{P}$  — предпорядок линейчатый по отношению к лучу  $L$ , то будем говорить для краткости об *L-линейчатом предпорядке*  $\mathcal{P}$ .

**Определение 2.2.** Предпорядок линейчатый по отношению к лучам  $L(e, x_1), \dots, L(e, x_k)$ , где  $x_i \neq e$  ( $i = 1, \dots, k$ ),  $k \leq n$ , находящимся в общем положении, называется *k-линейчатым*.

**Предложение 2.1.** Если предпорядок  $\mathcal{P}$  в  $A^n$  *n-линейчатый*, то  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ .

Положим

$$\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(P_x) : x \in A^n\},$$

где

$$\sigma(P_x) = \bigcap_{y \in Q_x} Q_y.$$

**Лемма 2.1.**  $\sigma(\mathcal{P})$  — предпорядок в  $A^n$ . Если  $\mathcal{P}$  — *L-линейчатый предпорядок*, то  $\sigma(\mathcal{P})$  — *L-линейчатый связный предпорядок*.

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in \sigma(P)$ . Тогда для всех  $y$  таких, что  $e \in Q_y$ , имеем  $x_0 \in Q_y$ . Так как  $\mathcal{P}$  — предпорядок, то  $P_{x_0} \subset Q_y$  или  $Q_{x_0} \subset Q_y$ . Но в таком случае, если

$$x \in \sigma(P_{x_0}) = \bigcap_{x_0 \in Q_z} Q_z,$$

то  $x \in Q_z$  при любом  $z$  таком, что  $x_0 \in Q_z$ . Но если  $e \in Q_y$ , то  $x_0 \in Q_y$ . Поэтому  $x \in Q_y$  при любом  $y$ , как только выполняется условие  $e \in Q_y$ , то есть

$$x \in \bigcap_{e \in Q_y} Q_y = \sigma(P).$$

Иными словами, показано, что  $\sigma(P_{x_0}) \subset \sigma(P)$ .

Следовательно, для  $\sigma(\mathcal{P})$  выполнены аксиомы P1, P2.

Пусть  $\mathcal{P}$  —  $L$ -линейчатый предпорядок. Тогда для любой  $y \in Q_x$  имеем  $L_y \subset Q_x$ . Возьмём  $z \in \sigma(P)$ . Для любой  $x$  такой, что  $e \in Q_x$  точка  $z$  должна лежать в  $Q_x$ . Поэтому  $L_z \subset Q_x$ , то есть  $L_z \subset \sigma(P)$ . Следовательно, предпорядок  $\sigma(\mathcal{P})$  —  $L$ -линейчатый.

Лемма 2.1 доказана. ■

**Лемма 2.2.** Если  $\mathcal{P}$  —  $n$ -линейчатый предпорядок в  $A^n$ , то  $\text{cont}(\sigma(P), e)$  содержит внутренние точки. Обратно, если  $\text{int}(\text{cont}(\sigma(P), e)) \neq \emptyset$ , то  $\overline{\mathcal{P}}$  —  $n$ -линейчатый предпорядок; если  $\sigma(\mathcal{P})$  — связный предпорядок, то  $\overline{\mathcal{P}}$  — линейчатый.

**Доказательство.** Если  $\mathcal{P}$  есть  $L_i$ -линейчатый ( $i = 1, \dots, n$ ), то  $L_i \subset \sigma(P)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Значит,  $\text{cont}(\sigma(P), e) \supset L_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Но тогда  $\text{int}(\text{cont}(\sigma(P), e)) \neq \emptyset$ , ибо лучи  $L_1, \dots, L_n$  находятся в общем положении.

Обратно, если  $\text{int}(\text{cont}(\sigma(P), e)) \neq \emptyset$ , то существуют  $n$  лучей  $L_1, \dots, L_n$  в общем положении,  $L_i \subset \text{cont}(\sigma(P), e)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Имеем в силу предложения 1.1

$$L_i \subset \overline{\sigma(P)} = \overline{\bigcap_{e \in Q_y} Q_y} \subset \bigcap_{e \in Q_y} \overline{Q_y},$$

т. е.  $L_i \subset \overline{Q_y}$  для любой  $y$  такой, что  $e \in Q_y$ . Пусть  $t$  — перенос, переводящий  $y$  в  $e$ . Тогда

$$(L_i)_{t(e)} \subset \overline{Q_{t(y)}} = \overline{Q}$$

для любой точки  $t(e) \in Q$ . Отсюда заключаем, что для любой  $x \in \overline{Q}$

$$(L_i)_x \subset \overline{Q},$$

т. е.  $\overline{\mathcal{P}}$  —  $L_i$ -линейчатый ( $i = 1, \dots, n$ ).

Лемма 2.2 доказана. ■

**Следствие 2.1.** Для замкнутого несвязного предпорядка  $\mathcal{P}$   $n$ -линейчатость эквивалентна связности предпорядка  $\sigma(\mathcal{P})$  и наличию внутренних точек у его контингенции.

Следующая аксиома, налагаемая на предпорядок  $\mathcal{P}$ , называется *слабой аксиомой Эйнштейна*:

$R4_w$ . Для любых  $x, y \in A^n$ , если  $y \in P_x$ , то  $P_x \cap P_y^-$  ограничено.

Здесь  $P_x^- = \{y \in A^n : x \in P_y\}$ .

**Предложение 2.2.** Предпорядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна, является порядком.

**Доказательство.** Пусть предпорядок  $\mathcal{P}$  не является порядком. Тогда существует  $a \neq e$  такая, что  $P = P_a$ , т. е.  $e \preceq a$  и  $a \preceq e$ . Но если  $t$  — перенос, переводящий  $e$  в  $a$ , то

$$e \preceq a, t(e) = a \preceq t(a), t(a) \preceq t(t(a)), \dots, e \preceq \underbrace{t \circ \dots \circ t(a)}_{m\text{-раз}} = a_m, \dots$$

С другой стороны,  $a \preceq e$  влечёт  $t(a) \preceq t(e) = a \preceq e, t(t(a)) \preceq t(a) \preceq e, \dots$ , и наконец,

$$a_m = \underbrace{t \circ \dots \circ t(a)}_{m\text{-раз}} \preceq e.$$

Следовательно,  $\{a_m\} \subset P \cap P^-$ . Последовательность  $\{a_m\}$  неограниченная, поэтому  $P \cap P^-$  — неограниченное множество.

Получили противоречие с аксиомой  $R4_w$ .

Предложение 2.2 доказано. ■

Следующая теорема была известна А.Д. Александрову, но её доказательство впервые было опубликовано в обзоре [7, § 5].

**Теорема В.** Если предпорядок  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$  удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна и является либо открытым, либо замкнутым, но  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ , то любой порядковый автоморфизм является гомеоморфизмом.

**Лемма 2.3.** Если предпорядок  $\overline{\mathcal{P}}$  удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна, то  $\text{cont}(\sigma(P), e)$  — строго выпуклый конус.

**Доказательство.** Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда  $\text{cont}(\sigma(P), e)$  содержит прямую  $\lambda$ . В таком случае в силу предложения 1.1

$$\lambda \subset \text{cont}(\sigma(P), e) \subset \overline{\sigma(P)} = \overline{\bigcap_{e \in Q_x} Q_x} \subset \bigcap_{e \in Q_x} \overline{Q_x},$$

т. е.  $\lambda \subset \overline{Q_x}$ , если  $Q_x \ni e$ . Пусть  $t$  — перенос и  $t(x) = e$ .



Тогда

$$t(\lambda) \subset t(\overline{Q}_x) = \overline{Q}_{t(x)} = \overline{Q},$$

т. е.  $\overline{Q}$  содержит прямую  $\lambda' = t(\lambda)$ . Возьмём  $x_0 \in \lambda'$  и  $\tau$  — перенос такой, что  $\tau(e) = x_0$ . Множество  $\overline{Q^-} \equiv \overline{P^-} \setminus \{e\}$  содержит прямую  $(\tau^{-1} \circ \tau^{-1})(\lambda')$ . Поэтому

$$\lambda' \subset \overline{Q} \cap (\tau \circ \tau)(\overline{Q^-}) = \overline{Q} \cap \overline{Q^-}_{\tau(x_0)}.$$

Данное включение противоречит ограниченности интервала  $\overline{Q} \cap \overline{Q^-}_{\tau(x_0)}$ .

Лемма 2.3 доказана. ■

**Пример 2.1.** Утверждение, обратное утверждению леммы 2.3, не верно. В самом деле, пусть

$$P = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 + |x| \leq y, |x| \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq y, 1 \leq |x|\}.$$

Это несвязный порядок в  $\mathbb{R}^2$ . Если  $t$  — перенос такой, что  $t((0, 2)) = (0, 0)$ , тогда

$$\sigma(P) = t(P) \setminus \{(0, -2)\},$$

$$\text{cont}(\sigma(P), e) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y\}$$

— конус с острой вершиной  $(0, 0)$ . Однако слабая аксиома Эйнштейна не выполнена для  $\mathcal{P}$ , ибо  $P$  содержит прямую  $\{(x, 4) : x \in \mathbb{R}\}$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $\mathcal{P}$  — несвязный  $n$ -линейчатый предпорядок в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ , такой, что  $\overline{\mathcal{P}}$  удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна. Тогда  $\mathcal{P}$  — либо непрерывно аффинный порядок, либо квазицилиндрический. Причём, если  $P$  — квазицилиндр  $Q(E_1, \mathbf{l}_1), \dots, Q(E_p, \mathbf{l}_p)$ , то непрерывный  $\mathcal{P}$ -автоморфизм  $f$  имеет вид

$$f = f_0 \circ d_1 \circ \dots \circ d_p, \quad (2.1)$$

где  $f_0$  — аффинная биекция, а  $d_i$  есть смещение  $d_{E_i, \mathbf{l}_i}$ . При этом допустимы любые смещения  $d_i$ , и различные  $d_i$  коммутируют. (Мы допускаем, что некоторые  $\mathbf{l}_i$  — это лучи  $L_i$ .)

**Доказательство.** Из лемм 2.2, 2.3 и предложения 1.2 следует, что  $\sigma(\mathcal{P})$  есть предпорядок, удовлетворяющий условиям 1), 2) теоремы А. Поэтому,  $\sigma(\mathcal{P})$  либо непрерывно аффинный предпорядок, либо квазицилиндрический. В первом случае получаем, что  $\mathcal{P}$  — непрерывно аффинный порядок, ибо каждый  $\mathcal{P}$ -автоморфизм является  $\sigma(\mathcal{P})$ -автоморфизмом. Во втором случае порядок  $\mathcal{P}$  может оказаться непрерывно аффинным. Но это ещё требуется установить. Важно, что в случае, когда  $\sigma(\mathcal{P})$  — квазицилиндрический порядок, каждый непрерывный  $\mathcal{P}$ -автоморфизм  $f$  имеет вид

$$f = f_0 \circ D_1 \circ \dots \circ D_k,$$

где  $f_0$  — аффинная биекция, а  $D_i$  есть  $d_{E_i, \mathbf{m}_i}$ . Причём благодаря условию 2) теоремы А

$$\text{cont}(\sigma(P), e) = L_1 \times \dots \times L_k \times K,$$

где  $L_i$  — луч с началом  $e$ , параллельный вектору  $\mathbf{m}_i$ , а плоскости  $E_i$  и лучи  $L_i$  расположены так, что  $E_i$  натянута на конус  $K$  и все  $L_j$ , кроме  $L_i$ .

Пусть  $D = D_1 \circ \dots \circ D_k$ . Каждое  $D_i$  сохраняет лучи  $\{L_{ix} : x \in A^n\}$  и плоскости  $\{E_{ix} : x \in A^n\}$ . Поэтому таким же свойством обладает  $D$ .

Теперь можно воспользоваться рассуждениями А.Д. Александрова, приведёнными в пп.6.3-6.8 статьи [1]. Не меняя даже обозначений и повторяя эти рассуждения, мы придём к следующему заключению. Либо  $D$  аффинно, и, следовательно,  $f$  аффинно, а  $\mathcal{P}$  — непрерывно аффинный порядок, либо  $P$  — квазицилиндр и  $D$  есть суперпозиция аффинного преобразования и смещений:

$$D = g \circ d_1 \circ \dots \circ d_p,$$

где  $g$  — аффинное преобразование,  $d_i$  есть  $d_{E_i \mathbf{l}_i}$  или  $d_{E_i L_i}$ .

Тогда для  $f$  верна формула (2.1).

Теорема 2.1 доказана. ■

**Следствие 2.2.** *Если  $\mathcal{P}$  — несвязный открытый или замкнутый  $n$ -линейчатый предпорядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна, то  $\mathcal{P}$  — либо аффинный порядок, либо квазицилиндрический. Если же  $P$  — квазицилиндр  $Q(E_1, \mathbf{l}_1), \dots, Q(E_p, \mathbf{l}_p)$ , тогда*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ \dots \circ d_{E_p \mathbf{l}_p},$$

где  $f_0$  — аффинная биекция. Смещения произвольны и коммутируют.

Действительно, следует из теорем 2.1, В и предложения 2.1.

### 3. Максимально линейчатый предпорядок

Условие  $n$ -линейчатости несвязного предпорядка может быть сформулировано следующим образом. Пусть  $\mathcal{K} = \{K_x : x \in A^n\}$  — замкнутый с внутренними точками конический<sup>1</sup> предпорядок в  $A^n$ .

**Определение 3.1.** Предпорядок  $\mathcal{P}$  называется  $\mathcal{K}$ -линейчатым, если для любой  $x \in Q$  имеем  $K_x \subset Q$ .

Доказывается так же, как лемма 2.2.

**Предложение 3.1.** *Если  $\mathcal{P}$  есть  $\mathcal{K}$ -линейчатый предпорядок, то  $K \subset \sigma(\mathcal{P})$ . Обратно, если  $\sigma(\mathcal{P})$  — связный предпорядок, то  $\overline{\mathcal{P}}$  есть  $\text{cont}(\sigma(\mathcal{P}))$ -линейчатый.*

**Определение 3.2.** Несвязный предпорядок  $\mathcal{P}$  называется *максимально линейчатым*, если он является  $\text{ext}(\mathcal{P})$ -линейчатым.

Отметим, что если понятие  $\mathcal{K}$ -линейчатого порядка приложить и к теории связного порядка, то максимально линейчатый связный предпорядок — это просто конический предпорядок, то есть в случае связного предпорядка

<sup>1</sup>То есть  $K_x$  — конус.

определение 3.2 сводится к изменению названия. В то же время максимально линейчатый несвязный предпорядок может быть достаточно произвольным.

Нашей ближайшей задачей является вычисление группы автоморфизмов максимально линейчатых предпорядков.

**Лемма 3.1.** Пусть  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$  — предпорядок в  $A^n$  и  $x_0 \in \text{int}(P)$ . Тогда существуют точки  $u, v \in L(e, x_0)$  и число  $r > 0$  такие, что  $L(u, v) \subset L(e, x_0) \cap \text{int}(P)$ , а круговой телесный конус

$$\bigcup_{w \in B(v, r)} L(u, w)$$

с вершиной  $u$  и осью  $L(u, v)$  целиком лежит в  $\text{int}(P)$ .

**Доказательство.** В [3, пункт (2.2)] показано, что:

- 1) существует луч  $L(u, v) \subset L(e, x_0) \cap \text{int}(P)$ ;
- 2) если  $B(x_0, \varepsilon) \subset \text{int}(P)$ ,  $\varepsilon > 0$ , и  $t$  — перенос, для которого  $t(e) = x_0$ , то найдётся номер  $m_0$  такой, что  $u = t_{m_0}(e)$ ,  $v = t_{m_0+1}(e)$  и

$$B(t_m(e), m\varepsilon) \subset \text{int}(P),$$

$$B(t_{m+1}(e), (m+1)\varepsilon) \cap B(t_m(e), m\varepsilon) \neq \emptyset$$

при  $m \geq m_0$ , где  $t = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{m\text{-раз}}$ .

Пусть  $|x_0 - e| = s$ ,  $\varepsilon = \alpha s$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Центр шара  $B(t_m(x_0), (m+1)\varepsilon)$  отстоит от  $e$  на расстоянии  $(m+1)s$ . Проведём через луч  $L(e, x_0)$  двумерную плоскость  $E$ , на которой введём прямоугольные координаты  $x, y$ , причём начало координат в точке  $e$ , и ось  $x$  совпадает с лучом  $L(e, x_0)$ . Пусть

$$C(m) = B(t_m(e), m\varepsilon) \cap E$$

— окружность на  $E$  с центром  $(ms, 0)$  и радиусом  $m\varepsilon$ . Обозначим через  $(x(m), y(m))$ ,  $y(m) > 0$ , точку пересечения окружностей  $C(m)$  и  $C(m+1)$ .

Покажем, что

$$\frac{y(m)}{ms + x(m)} \geq a = \text{const} \quad (3.1)$$

при  $m \geq m_0$ .

Действительно, поместим в точку  $(ms, 0)$  начало полярных координат  $(r, \varphi)$ . Тогда  $C(m)$  задаётся соотношениями  $r = m\varepsilon$ ,  $\varphi$  — любое, а  $C(m+1)$  — уравнением

$$r^2 - 2rs \cos \varphi + s^2 = (m+1)^2 \varepsilon^2.$$

Подставляя  $r = m\varepsilon$ , находим

$$\cos \varphi = \frac{s^2 - \varepsilon^2(2m+1)}{2m\varepsilon s}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{4m^2\varepsilon^2 s^2 - [s^2 - \varepsilon^2(2m+1)]^2}}{2m\varepsilon s}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{y(m)}{ms + x(m)} &= \frac{m\varepsilon \sin \varphi}{ms + m\varepsilon \cos \varphi} = \frac{\sqrt{4m^2\varepsilon^2s^2 - [s^2 - \varepsilon^2(2m + 1)]^2}}{2ms^2 + s^2 - \varepsilon^2(2m + 1)} = \\ &= \frac{\sqrt{4\alpha^2 - (2\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{m} - \frac{1}{m})^2}}{(1 - \alpha^2)(2 + \frac{1}{m})} \geq \frac{\sqrt{4\alpha^2 - 9\alpha^4}}{3} = \text{const} \end{aligned}$$

при  $m \geq \max(m_0, 1) = m_0$  и достаточно малом  $\alpha$ , обеспечивающем неотрицательность числа, стоящего под радикалом.

Итак, (3.1) установлено. Это неравенство означает следующее.

Если  $\Lambda = L((0, 0), (x(m_0) + m_0s, y(m_0)))$ , то этот луч лежит в плоскости  $E$  «ниже» точек пересечений

$$C(m) \cap C(m + 1) \cap \{(x, y) \in E : y > 0\}.$$

Иначе говоря, если  $Y \subset E$  — угол с вершиной  $e$  и граничными лучами  $\Lambda$  и полусью  $x > 0$ , то

$$Y' = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{m_0\text{-раз}}(Y) \subset \bigcup_{m \geq m_0} B(\underbrace{t \circ \dots \circ t}_{(m-1)\text{-раз}}(x_0), m\varepsilon) \cap E.$$

Вращая луч  $Y'$  вокруг оси  $L(e, x_0)$ , получим поверхностный круговой конус  $C$  с вершиной  $u$  такой, что

$$K = \text{conv}(C) \subset \bigcup_{m \geq m_0} B(\underbrace{t \circ \dots \circ t}_{(m-1)\text{-раз}}(x_0), m\varepsilon) \subset \text{int}(P).$$

Лемма 3.1 доказана. ■

**Предложение 3.2.** Если  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$  — нетривиальный предпорядок в  $A^n$  такой, что  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ , то  $\text{ext}(P) \neq A^n$ , то есть  $\text{ext}(P)$  содержится в полупространстве.

**Доказательство.** Пусть  $x_0 \in \text{int}(P)$ . Тогда существует  $r > 0$  такое, что  $B(x_0, r) \subset P$ . Предположим, что утверждение предложения не верно, то есть  $\text{ext}(P) = A^n$ . Возьмём точку  $x_1$  центрально симметричную  $x_0$  относительно  $e$ . В соответствии с определением  $\text{ext}(P)$  и в силу предположения  $\text{ext}(P) = A^n$  найдётся точка  $z \in P$  такая, что

$$L(e, z) \cap B(x_1, r) \neq \emptyset.$$

В таком случае можно взять точку

$$\bar{x} \in B(x_0, r) \cap [L(e, z) \cup L(z, e)].$$

По лемме 3.1 существует точка  $\tilde{x} \in L(e, \bar{x})$  и круговой телесный конус  $K$  с вершиной  $\tilde{x}$  и осью  $\Lambda \subset L(e, \bar{x})$  такой, что  $K \subset \text{int}(P)$ .

Пусть  $t$  — перенос, переводящий  $e$  в  $z$ . Тогда, так как  $t(e) = z \in P$  и  $K \subset P$ , то

$$t(K) \subset P_z \subset P$$

и вообще

$$K_m \equiv \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{m\text{-раз}}(K) \subset P_{z_m} \subset P, \quad (3.2)$$

где

$$z_m = \underbrace{t \circ \dots \circ t}_{m\text{-раз}}(e) \in P.$$

Из (3.2) следует, что существует номер  $m_0$  и строго возрастающая последовательность чисел  $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$ ,  $r_m > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_m = +\infty$  таких, что

$$B(e, r_m) \subset K_{m+m_0} \subset P.$$

Другими словами,  $P = A^n$ , т. е. предпорядок  $\mathcal{P}$  тривиальный. Это противоречит условию предложения 3.2.

Предложение 3.2 доказано. ■

Если в предложении 3.2 опустить условие  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ , то утверждение предложения 3.2 становится ложным.

**Лемма 3.2.** Пусть  $\mathcal{P}$  — несвязный предпорядок в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ . Тогда

$$\sigma(P) \subset \text{ext}(P), \quad \text{ext}(P) \neq A^n,$$

следовательно,  $\sigma(\mathcal{P})$  — нетривиальный предпорядок.

**Доказательство.** В силу предложения 3.2  $\text{ext}(P)$  содержится в полупространстве, то есть  $\partial(\text{ext}(P)) \neq \emptyset$ .

Пусть  $v \in \text{int}(Q)$  и  $L_0 = L(e, v)$ . Обозначим через  $y^*$  точку из  $L_{0y} \cap \partial Q$ , где  $y \in \partial(\text{ext}(P))$ , которая обладает тем свойством, что  $L_{0y^*} \subset Q$ , причём, если  $z \in L_{0y} \cap Q$  таково, что  $L_{0z} \subset Q$ , то  $L_{0z} \subset L_{0y^*}$ . Такая точка  $y^*$  для каждой  $y \in \partial(\text{ext}(P))$  найдётся в силу леммы 3.1. Следовательно, на  $\partial(\text{ext}(P))$  определена функция  $h(y) = |y - y^*|$ .

Пусть  $\Pi$  — двумерная плоскость, проходящая через  $L_0$ , и  $L_1 \cup L_2 = \Pi \cap \partial(\text{ext}(P))$ . Ясно, что  $L_1, L_2$  — лучи с началом  $e$ . Обозначим через  $\pi \subset \Pi$  полуплоскость, ограниченную прямой  $\lambda(e, v)$  такую, что  $L_1 \subset \pi$ . Здесь  $\lambda(a, b) \equiv L(a, b) \cup L(b, a)$ .

(а) Если  $x_0 \in \pi \cap (A^n \setminus \text{ext}(P))$ , то существует точка  $w$ ,  $w \neq e$ , для которой  $e \in Q_w$ , но  $x_0 \notin Q_w$ .

Покажем это. Пусть

$$\{x_1\} = L_{0x_0} \cap L_1, \quad L_i^- = (\lambda(e, v_i) \setminus L_i) \cup \{e\} \quad (i = 0, 1),$$

где  $v_0 = v$ ,  $v_1 \in L_1 \setminus \{e\}$  — произвольная точка.

Предположим, что функция  $h : L_1 \rightarrow [0, +\infty)$  неограниченная.

Тогда из леммы 3.1 следует, что  $h$  ограничена на каждом отрезке  $\tau_i = [a_i, a_{i+1}]$ , где  $|e - a_i| < |e - a_{i+1}|$ ,  $a_i \in L_1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ),  $a_1 = e$ .

Положим

$$s_i = \sup_{z \in \tau_i} h(z) \geq 0.$$

Существует подпоследовательность  $\{s_{i_k}\}$  строго возрастающая. Но тогда возможно следующее построение. Если  $s_i \leq s_1$  для  $i = 1, 2, \dots, k_1$ , то положим  $\sigma_1 = \tau_1 \cup \dots \cup \tau_{k_1}$ ; если  $s_i \leq s_{k_1+1}$  для  $i = k_1 + 1, \dots, k_2$ , то  $\sigma_2 = \tau_{k_1+1} \cup \dots \cup \tau_{k_2}$  и т. д.

В результате получаем последовательность отрезков  $\{\sigma_i\}_{i=1}^\infty$ , для которой имеем

$$\sup_{z \in \sigma_i} h(z) < \sup_{z \in \sigma_{i+1}} h(z) \quad (i = 1, 2, \dots) \tag{3.3}$$

и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{z \in \sigma_i} h(z) = +\infty. \tag{3.4}$$

Зададим  $\varepsilon > 0$  столь малое, что  $\varepsilon < |x_0 - x_1|$ . Тогда в силу (3.3), (3.4) найдутся номер  $i_0 \geq 1$  и точки  $y, y_0, y_1, y_2$  такие, что

$$y \in \sigma_{i_0}, \quad \{y_0, y_1\} \subset L_{0y}, \quad y_2 \in L_{1y_1}^-, \quad |y_1 - y_2| > 2|x_1 - e|,$$

$$[y_1, y_2] \subset Q, \quad |y_0 - y_1| = |x_0 - x_1|, \quad |y_0 - y^*| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y_0 \in (y, y^*), \quad y_0 \notin Q,$$

где  $(a, b) \equiv [a, b] \setminus \{a, b\}$ , а также

$$||y - y^*| - \sup_{z \in \sigma_{i_0}} h(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Взяв теперь перенос  $t$  так, чтобы  $t(y_0) = x_0$ , получаем, что точка  $w = t(e)$  удовлетворяет утверждению (а), ибо  $x_0 \notin t(Q)$  и  $e \in t(Q)$ .

Предположим теперь, что функция  $h$  ограничена на  $L_1$  числом  $h_0 \geq 0$ . Если  $h_0 < |x_0 - x_1|$ , то поступаем следующим образом.

Берём прямую  $\lambda \subset \pi$ , параллельную  $L_1$ , пересекающую  $Q$  и отстоящую от  $L_1$  (вдоль  $L_0$ ) на расстоянии  $h_0$ . Тогда найдутся точки  $a, b \in \lambda$  такие, что

$$b \in L_{1a}^- \quad (a \neq b), \quad |a - b| > |e - x_1|, \quad [a, b] \subset Q.$$

Если теперь  $t$  — перенос, переводящий  $a$  в  $x_1$ , то точка  $w = t(e)$  — искомая, так как  $e \in t(Q)$ , но  $x_0 \notin t(Q)$ .

Наконец, допустим, что  $h_0 \geq |x_0 - x_1|$ . Ясно, что  $h$  ограничена на каждом луче  $L_{1y}$ , где  $y \in L_1$ .

Если найдётся точка  $y \in L_1$  такая, что  $h$  ограничена на  $L_{1y}$  числом  $h'_0$  меньшим, чем  $|x_0 - x_1|$ , то возвращаемся по существу к ситуации, рассмотренной выше. Поэтому предположим, что это неверно. Без ограничения общности считаем, что

$$h_0 = \sup_{z \in L_1} h(z).$$

Но в таком случае найдутся точки  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , для которых справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} y_0 \in L_1, \quad h_0 - h(y_0) < \frac{1}{3}|x_0 - x_1|, \quad \{y_1, y_2\} \subset L_{0y_0}, \\ y_1 \in (y_0, y_0^*), \quad |y_1 - y_0^*| < \frac{1}{3}|x_0 - x_1|, \quad |y_2 - y_1| = |x_0 - x_1|, \quad y_3 \in L_{1y_2}^-, \\ |y_3 - y_2| > |x_1 - e|, \quad [y_2, y_3] \subset Q. \end{aligned}$$

Взяв теперь перенос  $t$  так, что  $t(y_1) = x_0$ , получим искомую точку  $w = t(e)$ , ибо  $x_0 \notin t(Q)$ ,  $e \in t([y_2, y_3]) \subset t(Q)$ .

Итак, утверждение (а) доказано.

(b) Утверждение леммы справедливо.

В самом деле, предположим противное. Тогда существует точка  $x_0 \in \sigma(P)$ ,  $x_0 \neq e$  и  $x_0 \notin \text{ext}(P)$ . Возьмём точку  $v \in \text{int}(Q)$  и рассмотрим двумерную плоскость  $\Pi$ , проходящую через точки  $v, e, x_0$ .

Положим  $\Pi \cap \partial(\text{ext}(P)) = L_1 \cup L_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $x_0$  лежит в полуплоскости  $\pi \subset \Pi$ , ограниченной прямой  $\lambda(e, v)$  и содержащей луч  $L_1$ .

Тогда в силу пункта (а) найдётся точка  $w \neq e$ , для которой  $x_0 \notin Q_w$ , но  $e \in Q_w$ . Это означает, в силу определения  $\sigma(P)$ , что  $x_0 \in \sigma(P)$ . Получаем противоречие с исходным предположением  $x_0 \in \sigma(P)$ .

Лемма 3.2 доказана. ■

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathcal{P}$  — максимально линейчатый несвязный предпорядок и  $\text{int}(P) \neq \emptyset$ . Тогда  $\sigma(P) = \text{ext}(P)$  и, следовательно,  $\text{Aut}(\mathcal{P}) \subset \text{Aut}(\text{ext}(\mathcal{P}))$ . Обратно, если  $\sigma(P) = \text{ext}(P)$ , то  $\overline{\mathcal{P}}$  — максимально линейчатый предпорядок.

**Доказательство.** Из предложения 3.1 имеем  $\text{ext}(P) \subset \sigma(P)$ , а из леммы 3.2 следует, что  $\sigma(P) \subset \text{ext}(P)$ . Поэтому  $\sigma(P) = \text{ext}(P)$ .

Обратно, если  $\sigma(P) = \text{ext}(P)$ , то поскольку  $\text{ext}(P)$  — замкнутый выпуклый конус, то  $\text{cont}(\sigma(P), e) = \text{ext}(P)$ . В силу предложения 3.1 предпорядок  $\overline{\mathcal{P}}$  есть  $\text{ext}(\mathcal{P})$ -линейчатый.

Теорема 3.1 доказана. ■

**Предложение 3.3.** Если  $\mathcal{P}$  — несвязный замкнутый предпорядок с  $\text{int}(P) \neq \emptyset$  и  $P \subset \text{cont}(\sigma(P), e)$ , то  $\mathcal{P}$  — максимально линейчатый.

**Доказательство.** Имеем:

$$P \subset \text{cont}(\sigma(P), e) \text{ влечет } \text{ext}(P) \subset \text{cont}(\sigma(P), e) \subset \overline{\sigma(P)}$$

в силу предложения 1.1.

По лемме 3.2  $\sigma(P) \subset ext(P)$ . Для замкнутого предпорядка  $\mathcal{P}$  имеем  $\sigma(P) = \overline{\sigma(P)}$ . Поэтому из предыдущих заключений выводим  $\sigma(P) = ext(P)$ . По теореме 3.1  $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}}$  — максимально линейчатый предпорядок.

Предложение 3.3 доказано. ■

Теперь нам нужна сильная аксиома Эйнштейна.

$R4_s$ . Внешний конус  $ext(P)$  — строго выпуклый.

**Предложение 3.4.** *Если максимально линейчатый несвязный предпорядок  $\mathcal{P}$  удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна и  $int(P) \neq \emptyset$ , то справедлива аксиома  $R4_s$ .*

**Доказательство.** Из теоремы 3.1 следует  $\sigma(P) = ext(P)$ . Но тогда  $cont(\sigma(P), e) = ext(P)$ . По лемме 2.3 конус  $cont(\sigma(P), e)$  — строго выпуклый. Следовательно, конус  $ext(P)$  также строго выпуклый.

Предложение 3.4 доказано. ■

#### 4. Однородные несвязные предпорядки и их классификация

Пусть  $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ ,  $P_x = \{x\} \cup Q_x$  — несвязный предпорядок в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ .

**Определение 4.1.** Несвязный предпорядок  $\mathcal{P}$  называется *однородным*, если выполнена следующая аксиома.

$R5$ . (Аксиома однородности.) Стабилизатор  $Aut(\mathcal{P})_e$  точки  $e$  действует транзитивно на  $\partial Q$ .

**Предложение 4.1.** *Любой однородный несвязный предпорядок  $\mathcal{P}$  — либо открытый, либо замкнутый.*

**Доказательство.** Пусть существует точка  $x_0 \in \partial Q \cap Q$  и  $x \in \partial Q$  — произвольная точка. Тогда существует  $g \in Aut(\mathcal{P})_e$  такой, что  $g(P) = P$  и  $g(x_0) = x$ . Так как  $g(e) = e$ , и  $g$  — биекция, то  $g(Q) = Q$  и поэтому  $x = g(x_0) \in g(Q) = Q$ . Итак, если существует точка  $x_0 \in \partial Q \cap Q$ , то  $\partial Q \subset Q$ , т. е. предпорядок  $\mathcal{P}$  — замкнутый. Если же  $\partial Q \cap Q = \emptyset$ , то  $Q$  — открытое множество. Значит предпорядок  $\mathcal{P}$  открытый.

Предложение 4.1 доказано. ■

**Теорема 4.1.** *Пусть  $\mathcal{P}$  — несвязный однородный нетривиальный порядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна. Тогда:*

1)  $int(Q) \neq \emptyset$ , т. е. предпорядок  $\mathcal{P}$  — либо открытый, либо замкнутый с внутренними точками;

2) каждый  $\mathcal{P}$ -автоморфизм является гомеоморфизмом.



**Доказательство.** Предположим, что утверждение 1) неверно, т. е.  $\text{int}(Q) = \emptyset$ . Тогда  $\partial Q = Q$ . Следовательно, группа  $\text{Aut}(\mathcal{P})_e$  действует транзитивно на  $Q$ . Возьмём  $a \in Q$ . Такая точка существует, ибо порядок  $\mathcal{P}$  — нетривиальный. Если  $t$  — перенос, переводящий  $e$  в  $a$ , то  $b = t(a) \in Q$ .

Найдётся  $\mathcal{P}$ -автоморфизм  $g \in \text{Aut}(\mathcal{P})_e$ , для которого  $g(b) = a$ . Но  $a \preceq b$  или  $g(b) \preceq b$ , поэтому в силу монотонности  $g$  имеем  $g(g(b)) \preceq g(b) \preceq b$ , и вообще,

$$g^{m+1}(b) \equiv \underbrace{g(\dots g(b)\dots)}_{(m+1)\text{-раз}} \preceq \underbrace{g(\dots g(b)\dots)}_{m\text{-раз}} \equiv g^m(b) \preceq b.$$

Последовательность  $\{g^m(b)\}_{m=1}^{\infty}$  бесконечна, ибо с самого начала  $a \neq b$ , и поэтому в силу биективности  $\mathcal{P}$ -автоморфизма  $g$  для каждого  $m$   $g^m(b) \neq g^{m+1}(b)$ .

Далее, для каждого  $m$  имеем  $g^m(b) \in P \cap P_b^-$ . Но множество  $P \cap P_b^-$  ограничено, ибо порядок  $\mathcal{P}$  удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна. Отсюда последовательность  $\{g^m(b)\}$  имеет предельную точку.

Пусть  $\varepsilon > 0$  столь малое число, что

$$B(e, \varepsilon) \cap Q = \emptyset, \quad (4.1)$$

а точки  $g^m(b), g^k(b)$  таковы, что  $g^m(b) \preceq g^k(b)$  и

$$|g^m(b) - g^k(b)| < \varepsilon.$$

Если  $\tilde{t}$  — перенос, переводящий  $g^m(b)$  в  $e$ , то

$$P = \tilde{t}(P_{g^m(b)}) \ni \tilde{t}(g^k(b)).$$

Значит  $\tilde{t}(g^k(b)) \in B(e, \varepsilon) \cap Q$ . Это противоречит (4.1).

Итак, утверждение 1) теоремы справедливо. Утверждение 2) вытекает немедленно благодаря теореме В.

Теорема 4.1 доказана. ■

**Следствие 4.1.** Если  $\mathcal{P}$  — несвязный нетривиальный однородный замкнутый порядок, удовлетворяющий аксиоме  $P4_w$ , то  $Q = \text{int}(Q)$ .

Действительно,  $\text{int}(Q) \neq \emptyset$  в силу теоремы 4.1. Если  $x_0 \in \partial Q$ , и существует такое  $\varepsilon > 0$ , что

$$B(x_0, \varepsilon) \cap \text{int}(Q) = \emptyset,$$

то в силу однородности подобным свойством обладают все точки границы  $\partial Q$ . Но любая точка  $x_1 \in \overline{\text{int}(Q)} \setminus \text{int}(Q)$  является граничной. В то же время для любого  $\varepsilon > 0$  имеем  $B(x_1, \varepsilon) \cap \text{int}(Q) \neq \emptyset$ . Противоречие. ■

**Теорема 4.2.** Пусть  $\mathcal{P}$  — несвязный однородный нетривиальный порядок в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ , удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна и являющийся  $n$ -линейчатым. Тогда:

1) порядок  $\mathcal{P}$  — аффинный, а  $\overline{\mathcal{P}}$  — максимально линейчатый аффинный;

2) справедлива сильная аксиома Эйнштейна, причём

$$\text{ext}(P) = \text{cont}(\sigma(P), e)$$

– есть строго выпуклый конус, допускающий аффинную группу  $G$  преобразований, действующую транзитивно на  $\text{int}(\text{ext}(P))$ ;

3) множество  $Q$  выпуклое и выделяется из конуса  $\text{ext}(P)$  гиперплоскостями, отсекающими от  $\text{ext}(P)$  конечный объём. При этом группа  $\text{Aut}(\mathcal{P})_e$  является подгруппой группы  $G$ .

Таким образом, возможна классификация однородных  $n$ -линейчатых несвязных порядков в  $A^n$ ,  $n \geq 2$ , удовлетворяющих аксиоме  $P4_w$ . Она сводится к классификации однородных строго выпуклых конусов и вычислению группы  $G$ . Это сделано в работах Э.Б. Винберга [8, 9]. Тогда  $\partial P \setminus \{e\}$  есть орбита группы  $\text{Aut}(\mathcal{P})_e \subset G$ .

**Доказательство.** (а) Согласно теореме 4.1  $\text{Aut}(\mathcal{P}) = \text{Aut}_e(\mathcal{P})$ . Поэтому в силу теоремы 2.1 порядок  $\mathcal{P}$  — либо аффинный, либо квазицилиндрический. На основании теоремы 4.1 без ограничения общности можно считать, что  $\mathcal{P}$  — замкнутый порядок. Тогда по теореме Б каждый  $\mathcal{P}$ -автоморфизм является  $\text{cont}(\sigma(P))$ -автоморфизмом.

Следовательно, если  $f \in \text{Aut}(\mathcal{P})_e$ , то

$$f(\text{cont}(\sigma(P), e)) = \text{cont}(\sigma(P), e). \tag{4.2}$$

Но благодаря лемме 3.2 и теореме 4.1

$$\sigma(P) \subset \text{ext}(P),$$

поэтому

$$\text{cont}(\sigma(P), e) \subset \text{ext}(P).$$

Предположим, что  $\text{cont}(\sigma(P), e)$  не совпадает с  $\text{ext}(P)$ . Тогда существует точка

$$x_0 \in \text{int}(\text{ext}(P)) \setminus \text{cont}(\sigma(P), e).$$

Луч  $L(e, x_0)$  пересекает  $\partial Q$  в соответствии с определением внешнего конуса. Аналогично, если  $L(e, x_1)$ ,  $x_1 \neq x_0$ , — луч контингенции  $\text{cont}(\sigma(P), e)$ , то он также пересекает  $\partial Q$ , если  $x_1 \in \text{int}(\text{cont}(\sigma(P), e))$ . Пусть

$$y_0 \in L(e, x_0) \cap \partial Q, \quad y_1 \in L(e, x_1) \cap \partial Q.$$

В силу однородности порядка  $\mathcal{P}$  существует  $f \in \text{Aut}(\mathcal{P})_e$  такой, что  $f(y_1) = y_0$ . Поэтому, взяв  $y_1 \in \text{cont}(\sigma(P), e)$ , мы получим, что  $f(y_1) \notin \text{cont}(\sigma(P), e)$ . Это противоречит (4.2).

Итак, доказано

$$\text{cont}(\sigma(P), e) = \text{ext}(P). \tag{4.3}$$

Из (4.3) и предложения 3.1 следует, что  $\overline{\mathcal{P}}$  — максимально линейчатый предпорядок.

По лемме 2.3  $\text{cont}(\sigma(P), e)$  имеет острую вершину. Поэтому (4.3) означает, что для  $\mathcal{P}$  выполнена сильная аксиома Эйнштейна.

(б) Покажем теперь, что  $\mathcal{P}$  не может быть квазицилиндрическим порядком. Если  $P$  — квазицилиндр, то  $\overline{P}$  — квазицилиндр. Поэтому далее будем считать, что  $P$  — замкнутый квазицилиндр и приведём это предположение к противоречию.

Пусть  $P$  — квазицилиндр  $Q(E_1, \mathbf{l}_1), \dots, Q(E_p, \mathbf{l}_p)$ .

Если  $x_0 \in \partial Q$ , а  $N_i$  — прямая, проходящая через  $e$  и параллельная вектору  $\mathbf{l}_i$ , то множество  $N_{ix_0} \cap \partial Q$  в качестве замкнутых связных компонент может иметь только точки, отрезки, не вырождающиеся в точки, и лучи. Это непосредственное следствие того, что  $P = Q(E_i, \mathbf{l}_i)$  и сильной аксиомы Эйнштейна.

Последнее в данном случае означает, что  $P$  не может содержать прямую  $N_{ix_0}$ . Рассмотрим множество  $N_{ix_0} \cap \partial Q$  ( $i = 1, \dots, p$ ).

Типом точки  $x_0$  назовём тройку чисел  $(m, k, s)$ , каждое из которых является целым неотрицательным числом, и  $m$  — это число замкнутых связных компонент семейства множеств  $N_{ix_0} \cap \partial Q$  ( $i = 1, \dots, p$ ), содержащих точку  $x_0$  и представляющих собой точку,  $k$  — число замкнутых связных компонент, представляющих собой отрезок, и, наконец,  $s$  — число замкнутых связных компонент, совпадающих с лучом.

Поскольку группа  $\text{Aut}(\mathcal{P})_e$  состоит из гомеоморфизмов, то каждый  $\mathcal{P}$ -автоморфизм  $f \in \text{Aut}(\mathcal{P})_e$  точку  $x_0 \in \partial Q$  с типом  $(m, k, s)$  переводит в точку  $f(x_0)$ , имеющую тот же самый тип  $(m, k, s)$ . Действительно, раз  $P$  — квазицилиндр, то

$$f = f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ \dots \circ d_{E_p \mathbf{l}_p},$$

где  $f_0$  — аффинная биекция. Каждое смещение  $d_{E_i \mathbf{l}_i}$  сохраняет каждое из семейств прямых  $\{N_{jx} : x \in A^n\}$  ( $j = 1, \dots, p$ ).

Кроме того,

$$d_{E_i \mathbf{l}_i}[Q(E_i, \mathbf{l}_i)] = Q(E_i, \mathbf{l}_i), \quad (i = 1, \dots, p),$$

и раз  $P = Q(E_i, \mathbf{l}_i)$ , то

$$d_{E_i \mathbf{l}_i}[Q] = Q \quad (i = 1, \dots, p).$$

Поэтому

$$Q = f(Q) = (f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ \dots \circ d_{E_p \mathbf{l}_p})(Q) = f_0(Q). \quad (4.4)$$

Но аффинный образ квазицилиндра — это квазицилиндр. Отсюда с учётом (4.4) получаем

$$f_0[Q(E_i, \mathbf{l}_i)] = Q(E_j, \mathbf{l}_j),$$

поскольку  $P$  может быть только одним из квазицилиндров  $Q(E_1, \mathbf{l}_1), \dots, Q(E_p, \mathbf{l}_p)$  ( $p \leq n$ ).

Таким образом,  $f_0$  отображает семейство прямых  $\{N_{ix} : x \in A^n\}$  на семейство  $\{N_{jx} : x \in A^n\}$ . Поэтому тип граничной точки инвариантен при  $\mathcal{P}$ -автоморфизме  $f \in \text{Aut}(\mathcal{P})_e$ .

Покажем, что если  $P$  есть квазицилиндр  $Q(E_1, \mathbf{l}_1), \dots, Q(E_p, \mathbf{l}_p)$ , то существуют граничные точки с различными типами.

Если  $p = 1$ , то есть  $P$  может быть квазицилиндром только в единственном представлении  $Q(E_1, \mathbf{l}_1)$ , это утверждение очевидно, ибо в данном случае возможны только три типа  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ . Тип  $(1, k, s)$  легко получить в случае любого значения числа  $p$ . Для этого нужно взять точку  $z \in \text{int}(P)$  и провести прямую  $N_{1z}$ . Тогда ближайшая к  $z$  точка  $z' \in N_{1z} \cap \partial Q$  реализует тип  $(1, k, s)$ . Тип  $(0, k, s)$  в случае  $p = 1$  существует благодаря непосредственному определению квазицилиндра.

Предположим, что тип  $(0, k, s)$  существует у точек  $x \in \partial Q$ , если  $p \leq t$ . Докажем, что тип  $(0, k, s)$  реализуется, если  $p = t + 1$ . Для этого назовём точку  $x_0 \in \partial Q$  *особой*, если её тип  $(0, k, s)$  и она является концом отрезка или началом луча, которые представляют собой те самые замкнутые компоненты связности, с помощью которых определяется тип точки. В случае  $p = 1$ , как легко видеть, особые точки существуют.

Предполагаем, что они существуют при  $p \leq t$ . Докажем, что они существуют при  $p = t + 1$ .

Квазицилиндр  $P = Q(E_p, \mathbf{l}_p)$  имеет вид (см. определение 1.2)

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} M_j \cup (P \cap E_p^{(j)}),$$

где  $M_j$  — цилиндры, образованные открытыми отрезками, равными и параллельными (как векторы) вектору  $\mathbf{l}_p$ , с концами на гиперплоскостях  $E_p^{(j)}, E_p^{(j+1)}$ . Следовательно, существует точка  $x_0 \in \partial Q \cap E_p^{(j)}$ . Здесь мы учитываем, что согласно сильной аксиоме Эйнштейна прямая  $N_{px_0}$  не содержится целиком в  $Q$ , а  $Q$  замкнуто.

Множество  $P \cap E_p^{(j)}$  есть квазицилиндр вида  $Q(E_1, \mathbf{l}_1), \dots, Q(E_{p-1}, \mathbf{l}_{p-1})$ , раз таким является  $P$ . Но тогда по индукционному предположению существуют особые точки  $z \in \partial(P \cap E_p^{(j)})$ . Покажем, что  $z$  — особая точка для  $P$ . Действительно, проведём прямую  $N_{pz}$ . Если сколь угодно близко к точке  $z$  на прямой  $N_{pz}$  есть внутренняя точка  $u \in \text{int}(Q)$ , то в силу определения квазицилиндра  $Q(E_p, \mathbf{l}_p)$  существует цилиндр  $C \subset \text{int}(Q)$ ,  $u \in C$  с образующими, параллельными  $\mathbf{l}_p$ , одно основание  $S$  которого принадлежит плоскости  $E_p^{(j)}$ . Но тогда  $z$  — внутренняя точка (в топологии  $E_p^{(j)}$ ) основания  $S$ . Это означает, что  $z$  не является особой точкой для квазицилиндра  $P \cap E_p^{(j)}$ , ибо  $S \subset P \cap E_p^{(j)}$ .

Итак, на  $N_{pz}$  нет сколь угодно близко к  $z$  точек из  $\text{int}(Q)$ , т. е.  $z$  — особая точка. Тем самым доказано существование при  $p = t + 1$  особых точек, а значит и граничных точек типа  $(0, k, s)$ . Выше было показано существование точек с типом  $(1, k, s)$ . Существование граничных точек с различным типом противоречит однородности порядка  $\mathcal{P}$ . Значит,  $P$  не может быть квазицилиндром.

(в) Как доказано только что,  $\text{Aut}(\mathcal{P}) \subset \text{Aff}(A^n)$ . Если  $z \in \text{int}(\text{ext}(P))$ , то  $L(e, z) \cap Q \neq \emptyset$ . Поэтому  $\text{Aut}(\mathcal{P})_e$  действует транзитивно на лучах

$$\{L(e, z) : z \in \text{int}(\text{ext}(P))\}.$$

Если к группе  $Aut(\mathcal{P})_e$  добавить подобия, то получим группу  $G$  аффинных преобразований, сохраняющих семейство  $\{ext(P_x) : x \in A^n\}$  и действующих транзитивно на  $int(ext(P))$ .

Тем самым окончательно доказано утверждение 2).

(г) Рассмотрим  $\overline{conv(Q)}$ . Возьмём точку  $x_0 \in \partial(conv(Q)) \cap \partial Q$ , и опорную гиперплоскость  $T_{x_0}$  к  $conv(Q)$  в точке  $x_0$ . Если  $x \in \partial Q$  — произвольная точка, то существует  $f \in Aut(\mathcal{P})_e$  такой, что  $f(x_0) = x$ . Так как  $f$  аффинно, то

$$f(\overline{conv(Q)}) = \overline{conv(Q)},$$

и  $f(T_{x_0})$  — опорная к  $\overline{conv(Q)}$  гиперплоскость, содержащая точку  $x$ . Следовательно,  $x \in \partial(conv(Q))$ . Таким образом, в силу произвольности точки  $x \in \partial Q$  мы убеждаемся в равенстве

$$\partial(conv Q) = \partial Q,$$

т. е.  $\partial Q$  — выпуклая гиперповерхность, а  $Q$  — выпуклое тело.

Остальные утверждения пункта 3) теоремы очевидны.

Теорема 4.2 доказана. ■

## 5. Физическая интерпретация линейчатости

На первый взгляд, условие линейчатости порядка кажется искусственным и не имеющим физического смысла. Но в действительности под линейчатостью скрывается вполне определённый взгляд на природу причинности.

Если  $x$  — причина события  $y \in \partial Q_x$ , то в случае несвязного порядка  $\mathcal{P}$  между  $x$  и  $y$  может не существовать промежуточных событий, находящихся в причинно-следственной связи с  $x, y$ . Другими словами, воздействие от  $x$  передаётся скачком  $y$ . Однако для линейчатого порядка  $\mathcal{P}$  найдётся луч  $L_y$  с началом  $y$ , целиком лежащий в  $Q_x$ . На этом луче лишь счётное число событий  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  образуют причинно связанную цепочку, начинающуюся с  $y = x_1$ . Естественно, что все они должны лежать в  $Q_x$ .

Почему же остальные точки луча  $L_y$  должны лежать в  $Q_x$ , как это предполагает условие линейчатости? Ответ очень простой: причина  $x$  — это всего лишь толчок, запускающий непрерывный процесс  $L_y$  с началом в точке  $y$ . Для непрерывного процесса нет необходимости требовать, чтобы события, его образующие, составляли причинную кривую, любые два сколь угодно близкие события  $a, b$  которой должны находиться в причинном отношении  $a \preceq b$  (или  $b \preceq a$ ).

Поясним сказанное на примере. Если  $x$  — взрыв пороха в патроне, находящегося в стволе ружья, а  $y$  — начало движения пули, вытолкнутой из ствола пороховыми газами, то пуля летит по мировой линии  $L_y$ , и совсем нелепо считать, что эти газы, давно рассеявшиеся, продолжают толкать пулю в далёком от  $y$  состоянии  $a \neq y$ , которое она занимает на линии  $L_y$ .

Остаётся понять, почему непрерывный процесс  $L_y$  должен быть прямолинейным лучом? Ответ также незатейливый. Процесс  $L_y$  — это мировая линия

материальной точки (тела), *движущейся по инерции*. Именно движению по инерции, т. е. состоянию прямолинейного и равномерного движения материальной точки в пространстве или состоянию покоя, отвечают прямолинейные мировые линии в пространстве-времени  $M$ . Закон инерции, т. е. первый закон Ньютона, и составляет содержание условия линейчатости порядка  $\mathcal{P}$ . Другими словами, предполагая выполнение закона инерции и дополняя его принципом причинности в определённой форме, о которой было сказано выше, мы должны требовать выполнения условия линейчатости порядка.

## 6. Заключение

Автор уверен, что теоремы 2.1 и 4.2 справедливы и без предположения о линейности порядка. Но это ему не удалось доказать с 1980 по 1987 год. Позже такие попытки не предпринимались.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. Отображения упорядоченных пространств // Труды МИАН. 1972. Т. 128. С. 3–21.
2. Гуц А.К. К основаниям геометрии пространства-времени // Доклады АН СССР. 1980. Т. 253, № 2. С. 268–271.
3. Гуц А.К. Изотонные отображения несвязно упорядоченного евклидова пространства // Сиб. мат. ж. 1980. Т. 21, № 3. С. 80–88.
4. Гуц А.К. Несвязный порядок в аффинном пространстве и его автоморфизмы // Учёный совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНТИ 02.12.92, № 3427–В92. 32 с.
5. Гуц А.К. Хроногеометрия: аксиоматическая теория относительности / Изд. 2, испр. и доп. М. : УРСС, 2018. 352 с.
6. Левичев А.В. Связность пересечений и выпуклая оболочка // Кандидат. диссертация. Новосибирск, Институт математики. 1979.
7. Гуц А.К. Аксиоматическая теория относительности // УМН. 1982. Т. 37, № 2. С. 39–79.
8. Винберг Э.Б. Теория однородных выпуклых конусов // Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 303–358.
9. Винберг Э.Б. Строение группы автоморфизмов однородных конусов // Труды ММО. 1965. Т. 13. С. 56–83.

**NON-CONNECTED ORDER IN AFFINE SPACE AND ITS AUTOMORPHISMS****A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

**Abstract.** In the works of A.D. Aleksandrov connected preorder in an affine space was studied and its automorphisms were calculated. In this article we explore a non-connected preorder (partial order). Order automorphisms are calculated and the classification of homogeneous non-connected preorders are given. Non-connected order allows one to construct axiomatics of a special theories of relativity based on the concept of causality, not applicable to the phenomena of the microworld.

**Keywords:** affine space, disconnected order, ordinal automorphisms, axioms, special theory of relativity.

**REFERENCES**

1. Aleksandrov A.D. Otobrazheniya uporyadochennykh prostranstv. Trudy MIAN, 1972, vol. 128, pp. 3–21. (in Russian)
2. Guts A.K. K osnovaniyam geometrii prostranstva-vremeni. Doklady AN SSSR, 1980, vol. 253, no. 2, pp. 268–271. (in Russian)
3. Guts A.K. Izotonnye otobrazheniya nesvyazno uporyadochennogo evklidova prostranstva. Sib. mat. zh., 1980, vol. 21, no. 3, pp. 80–88. (in Russian)
4. Guts A.K. Nesvyaznyi poryadok v affinnom prostranstve i ego avtomorfizmy. Uchenyi sovet mat. fak. OmGU, Dep. v VINITI 02.12.92, no. 3427–B92, 32 p. (in Russian)
5. Guts A.K. Khronogeometriya: Aksiomaticheskaya teoriya otnositel'nosti. Izd. 2, ispr. i dop., Moscow, URCC, 2018, 352 p. (in Russian)
6. Levichev A.V. Svyaznost' peresechenii i vypuklaya obolochka. Kandidat. dissertatsiya, Novosibirsk, Institut matematiki, 1979. (in Russian)
7. Guts A.K. Aksiomaticheskaya teoriya otnositel'nosti. UMN, 1982, vol. 37, no. 2, pp. 39–79. (in Russian)
8. Vinberg E.B. Teoriya odnorodnykh vypuklykh konusov. Trudy MMO, 1963, vol. 12, pp. 303–358. (in Russian)
9. Vinberg E.B. Stroenie gruppy avtomorfizmov odnorodnykh konusov. Trudy MMO, 1965, vol. 13, pp. 56–83. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 01.12.2021*

## **WHY WAS NICHOLSON'S THEORY SO SUCCESSFUL: AN EXPLANATION OF A MYSTERIOUS EPISODE IN 20 CENTURY ATOMIC PHYSICS**

**Olga Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: [olgak@utep.edu](mailto:olgak@utep.edu)

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: [vladik@utep.edu](mailto:vladik@utep.edu)

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** In the early 1910s, John Nicholson suggested that all atoms are formed by four basic elementary particles. This theory had a spectacular match with observations: it explained, with an unbelievable accuracy of 0.1, the atomic weights of all 92 elements known at that time. Specifically, it was shown that every atomic weight can be represented, with this accuracy, as an integer combination of four basic atomic weights. However, in a few years, this theory turned out to be completely wrong: atoms consist of protons, neutrons, and electrons, not of Nicholson's particles. This mysterious episode seems to contradict the usual development of science, when an experimental confirmation means that the corresponding theory is true. In this paper, we explain this mystery by showing that, in fact, there was no experimental confirmation. Namely, we prove that any real number larger than 3.03 can be represented, with accuracy 0.1, as a linear combination of four Nicholson's basic weights. So, this past "experimental confirmation" has nothing to do with atomic weights or any experimental data at all — it is simply an easy-to-prove general mathematical result.

**Keywords:** atomic physics, Nicholson's theory, experimental confirmation.

### **1. Nicholson's Theory: A Mysterious Episode of 20 Century Atomic Physics**

**Atomic ideas: a brief reminder.** At first glance, most macro-objects are continuous. You can divide water from a glass into smaller and smaller parts, and each part, no matter how small, will exhibit all the properties of water. Jewelers routinely divide gold and silver objects into smaller and smaller pieces, and each piece have all the properties of gold and silver.

Can we divide indefinitely — or eventually we will reach some limit? Some properties do change as the objects get smaller: e.g.:

- while a big amount of water, when spilled on the table, spreads around (do not check this in the vicinity of your computer!),



- a small amount of water stays as a drop.

Because of this, starting with the ancient Greeks, many researchers conjectured that there are limits to cutting, that matter consists of small pieces which cannot be cut further. The ancient Greek researchers called such parts *atoms* — which means not-divisible in ancient Greek.

Until the 19 century, atoms were an interesting hypothesis, sometimes helpful in physical analysis, but there was no experimental confirmation that some quantities can have non-divisible values corresponding to non-divisible pieces. In the early 19 century, John Dalton noticed that in a chemical reaction, the rate of the masses of substances involved in the reaction is usually equal to a ratio of two integers. A similar observation was later made about the volumes of gases involved in chemical reactions. These observations lead to the notion of atomic weight: it turned out that the atomic weights of all the elements are proportional to the atomic weight of the Hydrogen H.

Other similar observations appeared. For example, the 1909 Millikan's experiments showed that electric charge cannot be arbitrarily small: there is the smallest possible charge  $q_0$ , and every value of electric charge is proportional to  $q_0$ : we can only have charges  $q_0, 2q_0, 3q_0$ , etc. This made physicists conclude that electric current is not continuous, it consists of discrete ("atomic") particles — which were called *electrons*.

**Atomic weights turned out to be a challenge.** While more accurate experiments confirmed that all the electric charges are exactly proportional to the smallest value  $q_0$ , for atomic weights, the proportionality turned to be only approximate.

**Nicholson's idea.** If all the atomic weights were exactly proportional to the atomic weight of the Hydrogen H, we could conclude — similar to the conclusion about electric current — that all the matter consists of identical particles — H atoms. However, the weights are only approximately proportional. So, John Nicholson made a natural suggestion: since we cannot explain all elements by using only *one* type of atoms, maybe there are *several* different types of atoms?

By combining different physical ideas with trial-and-error, he came up with four types of what we would now call elementary particles:

- A *Coronium*, with atomic weight 0.51282;
- B *Proto-Hydrogen*, with atomic weight 1.008;
- C *Nebulium*, with atomic weight 1.6281; and
- D *Protofluorine*, with atomic weight 2.3615.

It turned out that the atomic weights of all elements known at this moment — up to Uranium — can be represented, with inaccuracy at most 0.1, as integer combinations of these weights [1]; see also [2].

**Why this is a mystery.** On the one hand, you have a theory that is in perfect agreement with experiment — actually, in sensationally good agreement with the observations. But we know how it all ended: we now know that atoms are built out of protons, neutrons, and electrons, and this has nothing to do with Nicholson's idea. How come?

We are accustomed to the more usual situation, when experimental confirmation means that a theory is right. But here, the theory is perfectly matching the observational data, and still it turned out that this theory is completely wrong. How can it be?

**What we do in this paper.** In this paper, we explain that there is actually no mystery: because there was actually no spectacular match with observations. True, all atomic weights could be represented as integer combinations of the basic weights  $A$ - $D$  with accuracy 0.1, but what we will show is that *any* real number larger than 3.03 can be thus represented. So, what was perceived as empirical confirmation has nothing to do with atomic weights or any other experimental data — it is simply a curious (and rather easy to prove) property of four Nicholson's real numbers.

## 2. Our Explanation of This Perceived “Mystery”

**Analysis of the problem and the resulting explanation.** Since we are interested in representations with accuracy 0.1, let us keep only two digits after the decimal point in the atomic weights  $A$ - $D$ , i.e., let us take

$$A = 0.51, \quad B = 1.01, \quad C = 1.63, \quad \text{and} \quad D = 2.36.$$

Then, the following numbers from 3.03 to 4.04 can be represented as integer combinations of these four basic weights:

$$3.03 = 3B;$$

$$3.15 = A + B + C;$$

$$3.26 = 3C;$$

$$3.37 = B + D;$$

$$3.54 = A + 3B;$$

$$3.66 = 2A + B + C;$$

$$3.77 = A + 3C;$$

$$3.88 = A + B + D;$$

$$4.04 = 4B.$$

The interval between every two consequent numbers  $\underline{a}$  and  $\bar{a}$  in this sequence of numbers is smaller than 0.2. So any number  $a$  is between  $\underline{a}$  and  $\bar{a}$  is 0.1-close to one of these two numbers:

- If  $a \leq \frac{\underline{a} + \bar{a}}{2}$ , then

$$|a - \underline{a}| \leq \frac{\bar{a} - \underline{a}}{2} \leq \frac{0.2}{2} = 0.1.$$

- If  $a \geq \frac{a + \bar{a}}{2}$ , then

$$|a - \bar{a}| \leq \frac{\bar{a} - a}{2} \leq \frac{0.2}{2} = 0.1.$$

By adding  $B = 1.01$  to all the numbers from the above sequence, we get a similar sequence which is 0.1-covering all the numbers from 4.04 to 5.05, etc. In other words, indeed every real number which is greater than or equal to 3.03 is 0.1-close to some integer combination of the original four weights  $A$ - $D$ .

Since *all* real numbers can be this represented, the fact that all atomic weights can be thus represented has nothing to do with observed atomic weights — and is, thus, *not* at all a confirmation of Nicholson's idea.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes).

The authors are greatly thankful to Eric Scerri for his encouragement.

## REFERENCES

1. Nicholson J.W. A structural theory of the chemical elements. *Philosophical Magazine*, 1911, vol. 22, no. 6, pp. 864–889.
2. Scerri E. *A Tale of Seven Scientists and a New Philosophy of Science*. Oxford University Press, New York, 2016.

## ПОЧЕМУ ТЕОРИЯ НИКОЛСОНА ОКАЗАЛАСЬ СТОЛЬ УСПЕШНОЙ: ОБЪЯСНЕНИЕ ТАИНСТВЕННОГО ЭПИЗОДА В АТОМНОЙ ФИЗИКЕ 20 ВЕКА

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пассо, США

**Аннотация.** В начале 1910-х годов Джон Николсон предположил, что все атомы образованы четырьмя основными элементарными частицами. Эта теория прекрасно соответствовала наблюдениям: она объясняла с невероятной точностью в 0,1 атомные веса всех 92 элементов, известных в то время. В частности, было показано, что каждый атомный вес может быть представлен с указанной точностью как целочисленная комбинация четырех основных атомных весов. Однако через несколько лет эта теория оказалась совершенно неверной: атомы состоят из протонов, нейтронов и электронов, а не из частиц Николсона. Этот загадочный эпизод,

кажется, противоречит обычному развитию науки, при котором экспериментальное подтверждение означает, что соответствующая теория верна. В этой статье мы объясняем эту загадку, показывая, что на самом деле экспериментального подтверждения не было, а именно: мы доказываем, что любое действительное число, большее  $3,03$ , может быть представлено с точностью  $0,1$  в виде линейной комбинации четырёх основных весов Николсона. Таким образом, это «экспериментальное подтверждение» не имеет ничего общего с атомными весами или какими-либо экспериментальными данными — это просто общий математический результат, который легко доказать.

**Ключевые слова:** атомная физика, теория Николсона, экспериментальное подтверждение.

*Дата поступления в редакцию: 16.12.2020*

## WHY T-DUALITY: A SIMPLE EXPLANATION

**Olga Kosheleva**

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: [olgak@utep.edu](mailto:olgak@utep.edu)

**Vladik Kreinovich**

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: [vladik@utep.edu](mailto:vladik@utep.edu)

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

**Abstract.** In many physical theories, there is a — somewhat surprising — similarity between events corresponding to large distances  $R$  and events corresponding to very small distances  $1/R$ . Such similarity is known as T-duality. At present, the only available explanation for T-duality comes from a complex mathematical analysis of the corresponding formulas. In this paper, we provide an alternative explanation based on the fundamental notion of causality.

**Keywords:** T-duality, causality relation, causality-preserving transformations, inversion.

### 1. Formulation of the Problem

**What is T-duality.** In many physical theories, there is a strong similarity between effects at large distances  $R$  and at small distances  $1/R$ . This similarity is known as *T-duality*; see, e.g., [18, 20, 21].

T-duality relates two areas of physics which are among the most difficult to study (and thus, the most mysterious): the study of very large objects (of cosmological size) and the study of very small objects (of size below the usual particle size).

*Comment.* The term T-duality is sometimes also used to describe a general similarity between two physical theories.

**Need for a simple explanation.** At present, T-duality arrives via a complex analysis of the corresponding mathematical models.

It would be beneficial to come up with a simple — and more fundamental — explanation, an explanation that would not depend on the specific complex mathematical details (which may change as theories evolve), but that would be based on fundamental physical ideas.

**What we do in this paper.** In this paper, we provide such a simple and fundamental explanation of T-duality.

### 2. Our Explanation

**Causality is one of the most fundamental physical phenomenon.** We are interested in the explanation based on fundamental physical concepts. One of the

most fundamental physical concept is the concept of *causality*: the idea that some events in space-time can influence each other; see, e.g., [8, 22].

The fundamental character of causality implies that for a transformation to preserve physical properties, this transformation should also preserve causality. Let us therefore recall which space-time transformations preserve the causality relation.

For this analysis, we need to recall how causality is described in modern physics.

**How is causality described on the local level.** According to modern physics, locally — i.e., in some vicinity of an event — metric is close to Minkowski one, and the causality relation  $a \leq b$  between two space-time events  $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  and  $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  is described by the formula

$$a \leq b \leftrightarrow a = b \vee (b_0 \geq a_0 \& (b - a)^2 \geq 0),$$

where  $n$  is the dimension of proper space and  $a^2 \stackrel{\text{def}}{=} a_0^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2$ .

*Comment.* Here, for simplicity, we assume that time and distance are measured in the same units, i.e., that the units are selected in such a way that the speed of light  $c$  is equal to 1. If we use different units for measuring space and time, then we will have  $a^2 = c^2 \cdot a_0^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2$ .

**What transformations preserve causality: ideal case.** Let us start with an ideal case, in which the causality relation in the whole space-time  $E$  is described by the above Minkowski causality relation.

It is known that for every  $n \geq 2$ , every bijection  $E \rightarrow E$  which preserves the Minkowski causality relation is linear; moreover, it is a composition of Lorentz transformations, shifts, rotations, and dilations.

To be precise:

- A *Lorentz transformation* is a mapping

$$(a_0, \vec{a}) \rightarrow \left( \frac{a_0 - \vec{v} \cdot \vec{a}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}}, \frac{\vec{a} - a_0 \cdot \vec{v}}{1 - \vec{v} \cdot \vec{v}} \right),$$

where  $\vec{v} \cdot \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} v_1 \cdot a_1 + \dots + v_n \cdot a_n$ , and  $\vec{v} \cdot \vec{v} \leq 1$ .

- A *rotation* is a mapping  $(a_0, \vec{a}) \rightarrow (a_0, T\vec{a})$ , where  $T$  is a rotation in the  $n$ -dimensional Euclidean space.
- A *shift* is a mapping  $a \rightarrow a + b$ , for some  $b \in E$ .
- A *dilation* is a mapping  $a \rightarrow \lambda \cdot a$ , for some real number  $\lambda$ .

This theorem was first proven by A. D. Alexandrov [1, 5]; see also [2, 3, 6, 7, 9, 10, 12–17, 19, 23].

**Towards a more realistic case.** As we have mentioned earlier, Minkowski causality is only a local approximation. So, a natural question is: what are transformations that preserve Minkowski causality in a bounded domain?

The answer to this question was also provided by A. D. Alexandrov; see, e.g., [4, 9]. For bounded domains, in addition to linear transformations, we also have special nonlinear transformations — inversions:

- An *inversion* is a mapping  $a \rightarrow \frac{a - b}{(a - b)^2} + b$ , for some  $b \in E$ .
- A *singular double inversion* is a mapping

$$a \rightarrow \frac{(a - b) + c \cdot (a - b)^2}{1 + 2 \cdot c(a - b)} + b$$

for some  $b \in E$  and  $c \in E$  for which  $c^2 = 0$ .

- By a *conformal mapping*, we mean one of the above transformations or their composition.

Alexandrov's result is that every bijection  $f : D \rightarrow D$  of a bounded domain  $D$  that preserves Minkowski causality is a conformal mapping.

**Towards an even more realistic case.** The actual causality relation is only approximately described by the Minkowski formula: the smaller the neighborhood, the closer we are to the Minkowski causality. How can we describe transformations that preserve approximately-Minkowski causality?

Such transformations were described in [11]: it turns out that for causality relations which are sufficiently close to the Minkowski ones, the transformations that preserve (or at least approximately preserve) causality are close to conformal mappings.

**This leads to the desired explanation of T-duality.** Indeed, here, in addition to the usual Minkowski transformations, we also have inversions — which correspond exactly to transformations  $R \rightarrow 1/R$  (plus dilations), and double inversions — which can be viewed as limits of compositions of two consecutive inversions.

Thus, indeed, T-duality naturally follows from the fundamental notion of causality.

**This also explains why T-duality is approximate.** The above arguments also explain why T-duality is not an exact equivalence — i.e., why there is a difference between cosmological and micro-world laws: inversions preserve causality, but they do not preserve the actual metric.

## Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes). It was also supported by the program of the development of the Scientific-Educational Mathematical Center of Volga Federal District No. 075-02-2020-1478.

## REFERENCES

1. Alexandrov A.D. On Lorentz transformations. *Uspekhi Math. Nauk*, 1950, vol. 5, no. 3(37), pp. 187. (in Russian)
2. Alexandrov A.D. A contribution to chronogeometry. *Canadian Journal of Mathematics*, 1967, vol. 19, pp. 1119–1128.
3. Alexandrov A.D. Mappings of spaces with families of cones and space-time transformations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1967, vol. 103, pp. 229–257.
4. Alexandrov A.D. On the axioms of relativity theory. *Vestnik Leningrad University, Ser. Math.*, 1976, no. 19, pp. 5–28.
5. Alexandrov A.D. and Ovchinnikova V.V. Remarks on the foundations of special relativity. *Leningrad University Vestnik*, 1953, no. 11, pp. 94–110. (in Russian)
6. Benz W. A characterization of plane Lorentz transformations. *Journal of Geometry*, 1977, vol. 10, pp. 45–56.
7. Benz W. *Geometrische Transformationen*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1992.
8. Feynman R., Leighton R., and Sands M. *The Feynman Lectures on Physics*. Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2005.
9. Guts A.K. Axiomatic relativity theory. *Russian Math. Surveys*, 1982, vol. 37, no. 2, pp. 41–89.
10. Kosheleva O.M., Kreinovich V., and Vroegindewey P.G. An extension of a theorem of A. D. Alexandrov to a class of partially ordered fields. *Proceedings of the Royal Academy of Science of Netherlands*, 1979, vol. 82(3), series A, September 21, pp. 363–376.
11. Kreinovich V. and Kosheleva O. From (idealized) exact causality-preserving transformations to practically useful approximately-preserving ones: a general approach. *International Journal of Theoretical Physics*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 1083–1091.
12. Kuzminykh A.V. Characterization of Lorentz transformations. *Soviet Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 6, pp. 1626–1628.
13. Kuzminykh A.V. Minimal condition determining the Lorentz transformations. *Siberian Mathematical Journal*, 1976, vol. 17, no. 6, pp. 968–972.
14. Lester J.A. On null cone preserving mappings. *Proceedings of Cambridge Mathematical Society*, 1977, vol. 81, pp. 455–462.
15. Lester J.A. Cone preserving mappings for quadratic cones over arbitrary fields. *Canadian Journal of Mathematics*, 1977, vol. 29, pp. 1247–1253.
16. Lester J.A. A physical characterization of conformal transformations of Minkowski spacetime. *Annals of Discrete Mathematics*, 1983, vol. 18, pp. 567–574.
17. Lester J.A. Distance preserving transformations. In: F. Buekenhout (ed.), *Handbook of Incidence Geometry*, Elsevier, Amsterdam, 1995.
18. Mack K. *The End of Everything (Astronomically Speaking)*. Scribner, New York, 2020.
19. Naber G.L. *The geometry of Minkowski space-time*. Springer-Verlag, N.Y., 1992.
20. Sathiapalan B. Duality in statistical mechanics and string theory. *Physical Review Letters*, 1987, vol. 58, no. 16, pp. 1597–1599.
21. Seiberg N. Emergent spacetime. In: D. Gross, M. Henneaux, and A. Sevrin (eds.), *The Quantum Structure of Space and Time: Proceedings of the 23rd Solvay Conference on Physics*, Brussels, Belgium, December 1–3, 2005, World Scientific, Singapore, 2007, pp. 163–213.



22. Thorne K.S. and Blandford R.D. *Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2017.
23. Zeeman E.C. Causality implies the Lorentz group. *Journal of Mathematical Physics*, 1964, vol. 5, pp. 490–493.

## ПРОСТОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ Т-ДУАЛЬНОСТИ

**О. Кошелева**

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль-Пассо, США

**Аннотация.** Во многих физических теориях существует несколько удивительное сходство между событиями, соответствующими большим расстояниям  $R$  и очень малым расстояниям  $1/R$ . Такое подобие известно как Т-дуальность. В настоящее время единственное доступное объяснение Т-дуальности следует из сложного математического анализа соответствующих формул. В этой статье мы предлагаем альтернативное объяснение, основанное на фундаментальном понятии причинности.

**Ключевые слова:** Т-дуальность, причинно-следственная связь, преобразования, сохраняющие причинность, инверсия.

*Дата поступления в редакцию: 16.12.2020*

# **ХРОНОФИЗИКА И ХРОНОИНЖЕНЕРИЯ ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ РЕСУРРЕКЦИИ: КРАТКИЙ ОБЗОР ИДЕЙ**

**А.В. Полищук**

переводчик, e-mail: alexpolish@yahoo.com

Межрегиональная академия управления персоналом, Киев, Украина

**Аннотация.** Обсуждается задача ресуррекции человека посредством использования различных конструкций машины времени. Каждая из этих конструкций основывается на своей предполагаемой структуре пространства-времени: классической теории пространства-времени Минковского-Эйнштейна или квантовой теории Суперпространства Уилера.

**Ключевые слова:** хронофизика, хроноинженерия, ресуррекция, воскрешение, машина времени.

## **Введение**

В наше время, когда полным ходом идёт борьба биологов и геронтологов со старением, раздаются и голоса о том, что пора бы уже подумать над технологиями возвращения к жизни умерших [1]. Причём даже таких, чьи тела не были заморожены (с помощью «крионики») и разрушились (разложились в земле или были кремированы). В своё время о сыновьем долге воскрешения писал замечательный русский философ-космист Николай Фёдоров [2, 3].

Для выполнения этой задачи (назовем её ресуррекцией от лат. *resurrectio* — воскрешение) могут подойти два (пока что гипотетических) способа: компьютерное моделирование и манипулирование временем (назовём это «хроноинженерией»). Поскольку компьютерное моделирование даст в итоге, строго говоря, копию человека, а не его самого (хотя некоторые это и оспаривают), остановимся на втором варианте — хроноинженерии.

## **1. Хроноинженерия как способ возвращения к жизни**

Для возвращения жизни умершему в рамках этой парадигмы должно использоваться некое «хроноинженерное» устройство — машина времени. Самый очевидный способ вернуть к жизни человека, например, погибшего в результате несчастного случая или пропустившего начало опасной болезни — это отправиться в прошлое до момента несчастного случая / начала болезни и, взяв человека с собой, вернуться в настоящее. В данном случае даже не особо

важно, чем является прошлое — параллельным миром, копией прошлого и т. п. Также нет попытки «изменить прошлое», и даже есть подыгрывание принципу самосогласованности Новикова [4] (поскольку исчезновение без вести (в прошлом) эквивалентно смерти, парадоксов типа «если человек остался жив, то не было причины возвращаться в прошлое» не возникает).

### **1.1. Модели машин времени**

На сегодняшний день существует два типа предложенных учёными моделей машин времени. Релятивистские машины времени (в терминологии А.К. Гуца — гёделевские [5]) изменяют кривизну пространственно-временного континуума, позволяя попасть в его точку, в нормальных условиях недоступную.

Квантовые машины времени используют квантовые эффекты, такие как, например, разрушение суперпозиции исторических эпох [5]. Гёделевские машины времени лучше изучены (теоретически), чем квантовые, но имеют ряд недостатков. Для изменения кривизны пространства-времени им требуются или очень высокие энергии, или «экзотическая» материя и энергия. Модели квантовых машин времени начали предлагаться позже, изучены хуже, но их потенциал, как нам видится, выше.

### **1.2. Выбор конкретной процедуры ресurreкции с помощью машины времени**

Наиболее очевидный и прямолинейный способ вернуть к жизни умершего человека с помощью машины времени — это отправиться на машине времени в прошлое, забрать с собой соответствующего человека и вернуться в нужную точку пространства-времени. Однако если хроноинженерия основывается на принципах квантовой физики, нельзя ли выполнить задачу проще и, так сказать, изящнее?

Ниже приводится список идей, возникших в результате «мозгового штурма» — насколько они реализуемы и целесообразны, пусть судят заинтересовавшиеся физики (а в будущем, надеемся, и инженеры).

— Может быть, можно найти объект в прошлом и перебросить его в настоящее, не отправляясь при этом (лично) в прошлое. Например, компьютер с помощью программы навигации по 4-мерному пространству-времени ищет нужный объект, а потом некое устройство заставляет этот объект «коллапсировать» (материализоваться) в заданный (4-мерный) «гиперобъём» (к нам). Потребуется картирование пространственно-временного континуума и разработка устройства, вызывающего «коллапсирование».

— Если человек находится в суперпозиции на временной линии (согласно квантовой интерпретации реальности), может быть, можно, отталкиваясь от его останков или местонахождения в прошлом, «нащупать» его дальше в прошлое и заставить «коллапсировать» к нам его нужный (по времени) экземпляр. Вероятно, использующееся в этих целях устройство должно будет уметь проходить сквозь «временные срезы», находя нужный.

— Возможно, аппарат типа AARV-машины времени мог бы «отмотать время назад» для останков. AARV-машина времени — это устройство, придуманное Агаонов, Anandan, Popescu, Vaidman; оно вызывает эволюцию во времени объекта, на который воздействует [6]. Недостатки этого подхода заключаются в том, что он, во-первых, остаётся на стадии мысленного эксперимента, а, во-вторых, он вероятностный (вероятность получить нужный результат — 1 из 10000).

— Может быть, «квантовый вакуум» помнит нужную информацию (о человеке — чтобы на её основе воссоздать его), и можно как-то найти её (или даже самого «сохранённого» человека) и заполучить. Как вариант — если прошлое можно наблюдать в некий «хроноскоп», то, вероятно, можно и скопировать оттуда нужную информацию. Недостатки — как найти нужный объект в пространстве-времени? Потребуется, как и в первом из предложенных способов, его «картирование» и устройство для нахождения в нём нужной информации и/или объекта.

— Wheeler J.A. полагал, что можно изменить прошлое с помощью наблюдения (вспомним его знаменитый эксперимент с отложенным выбором, согласно которому будущее влияет на прошлое) [7]. Недостатки подхода в том, что пока совершенно не ясно, как конкретно можно влиять на прошлое в его рамках.

Первые два подхода кажутся более перспективными, чем остальные три. Возможно, этот список не исчерпывающий, и можно предложить ещё какие-либо способы для решения задачи ресуррекции с помощью (квантовой) хроноинженерии.

## **2. Что необходимо для скорейшей практической реализации ресуррекции?**

Всё сказанное выше на сегодняшний день является гипотезами и смелыми догадками. Однако, во-первых, наука сейчас развивается очень бурно, в частности это касается и квантовой физики. А во-вторых, обычно развивается та область знаний / техники, куда направлены усилия общества. Поэтому есть надежда, что если данной тематикой (ресуррекцией) заинтересуются широкая общественность и люди, принимающие решения, она перейдёт из области научной фантастики в практическую плоскость. Перспективы коммерциализации ускорят её развитие. В конце концов, ценность ресуррекции ничуть не ниже, чем, скажем, освоение Марса, которое в данный момент получает весьма значительное (заслуженное ли?) внимание.

## **3. Заключение**

Представленные в статье способы технологического возвращения к жизни умерших (ресуррекции) являются одним из первых ответов на недавно появившийся запрос со стороны общества не только на продление жизни, но и на её возвращение. Для их оценки необходимо привлечь соответствующих специалистов. Перспектива реализации этих способов зависит от этой оценки и,

если таковая окажется положительной, от концентрации усилий общества на решении данной проблемы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Турчин А., Батин М. Футурология. 21 век: бессмертие или глобальная катастрофа. М. : Бином, 2012. С. 253–254.
2. Фёдоров Н.Ф. Философия общего дела. М., 1906. Т. 1.
3. Чернокоз М. Идея всеобщего воскрешения в философии Н.Ф. Фёдорова // Слово.ру: Балтийский акцент (БалтФУ). 2016. № 2. С. 80–87.
4. Новиков И.Д. Эволюция вселенной. 2-е изд., переработанное. М. : Наука, 1983. 192 с.
5. Гуц А.К. Не-гёделевская машина времени // Математические структуры и моделирование. 2016. No 3(39). С. 48–56.
6. Aharonov Y., Anandan J., Popescu S., Vaidman L. Superposition of Time Evolutions of Quantum System and a Quantum Time Translation Machine // Physical Review Letters. 1990. Vol. 64. P. 2965.
7. Wheeler J.A. The 'Past' and the 'Delayed-Choice Double-Slit Experiment' / Mathematical Foundations of Quantum Theory. Academic Press, 1978. P. 9–48.

### CHRONOPHYSICS AND CHRONOENGINEERING FOR THE PURPOSES OF TECHNOLOGICAL RESURRECTION: A BRIEF OVERVIEW OF IDEAS

**A.V. Polischuk**

Translator, e-mail: alexpolish@yahoo.com

Interregional Academy of Personnel Management, Kiev, Ukraine

**Abstract.** The problem of human resurrection through the use of various constructions of a time machine is discussed. Each of these constructs is based on its supposed structure of spacetime: the classical Minkowski-Einstein theory of spacetime or the Wheeler's quantum theory of Superspace.

**Keywords:** chronophysics, chronoengineering, resurrection, resurrection, time machine.

### REFERENCES

1. Turchin A. and Batin M. Futurologiya. 21 vek: bessmertie ili global'naya katastrofa. Moscow, Binom, 2012, pp. 253–254. (in Russian)
2. Fedorov N.F. Filosofiya obshchego dela. Moscow, 1906, vol. 1. (in Russian)
3. Chernokoz M. Ideya vseobshchego voskresheniya v filosofii N.F. Fedorova. Slovo.ru: Baltiiskii aktsent (BaltFU), 2016, no. 2, pp. 80–87. (in Russian)
4. Novikov I.D. Evolyutsiya vselennoi. 2-e izd., pererabotannoe. Moscow, Nauka, 1983, 192 p. (in Russian)

5. Guts A.K. Ne-gedelevskaya mashina vremeni. *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, 2016, no. 3(39), pp. 48--56. (in Russian)
6. Aharonov Y., Anandan J., Popescu S., and Vaidman L. Superposition of Time Evolutions of Quantum System and a Quantum Time Translation Machine. *Physical Review Letters*, 1990, vol. 64, pp. 2965.
7. Wheeler J.A. The 'Past' and the 'Delayed-Choice Double-Slit Experiment'. *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, Academic Press, 1978, pp. 9--48.

*Дата поступления в редакцию: 29.11.2021*

## РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ «ЛЕС–ПОЧВА»

**Л.А. Володченкова**

к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**А.К. Гуц**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье изучаются стационарные равновесия в системе «лес–почва», представленной как математическая модель в форме системы дифференциальных уравнений. Обсуждаются катастрофические смены равновесий, показан возможный переход к циклическим равновесиям.

**Ключевые слова:** модель, система «лес–почва», стационарные равновесия, теория катастроф, теория бифуркаций, бифуркация Андронова–Хопфа.

В статье [1] была предложена модель системы «лес–почва» в форме системы дифференциальных уравнений. В данной статье мы изучаем стационарные равновесия этой системы и катастрофические переходы между ними.

Итак, мы рассматриваем следующую модель, описывающую систему «лес–почва»

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P, \\ \frac{dP}{dt} = \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $B(t)$  — биомасса леса,  $P(t)$  — мера плодородия почвы,  $p$  — мера типа почвообразующей породы,  $w$  — влажность почвы,  $r, k, \alpha, \gamma, \delta > 0$  константы.

Первое уравнение в системе (1) — это подправленное с учётом влияния почвы на лес уравнение для биомассы, приведённое в [2], а второе уравнение также подправленное уравнение, описывающее динамику почвы с учётом влияния на неё биомассы леса, изученное в статье [3].

Стационарные равновесия  $(B, P)$  системы «лес–почва»

$$\frac{dB}{dt} = 0, \quad \frac{dP}{dt} = 0$$

находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} rB \left(1 - \frac{B}{k}\right) - \alpha w P = 0, \\ \gamma(p - P^2)P + \delta w^2 B = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Имеем очевидное стационарное равновесие  $(B, P) = (0, 0)$ . Остальные — это решения системы

$$\begin{cases} \left( \frac{\gamma pr}{\alpha w} + \delta w \right) B - \frac{\gamma pr}{\alpha w K} B^2 - \frac{\gamma r^3}{\alpha^3 w^3} B^3 + \frac{3\gamma r^3}{\alpha^3 w^3 K} B^4 - \\ - \frac{3\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^2} B^5 + \frac{\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^3} B^6 = 0, \\ P = \frac{\gamma r}{\alpha w} B \left( 1 - \frac{\gamma B}{K} \right). \end{cases} \quad (3)$$

Первое уравнение системы (3) даёт решение  $B = 0$ , и затем поиск корней сводится к решению уравнения 5-й степени по  $B$ . Следовательно, имеется, как минимум, ещё один действительный корень  $B_1$ . Остаётся найти корни уравнения 4-й степени. Однако, например, при

$$r = \alpha = \beta = \gamma = w = K = 1, \quad p = 2, \quad \delta = 20, \quad (4)$$

это уравнение 4-й степени не имеет действительных корней, что видно из графика на рис. 1 соответствующей функции

$$y := 22 - 2 * B - B^2 + 3 * B^3 - 3 * B^4 + B^5. \quad (5)$$

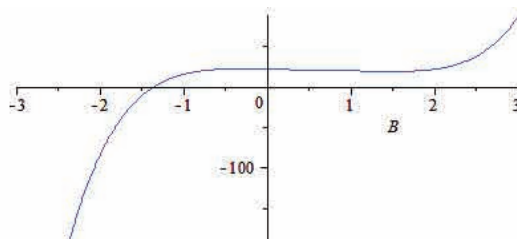


Рис. 1. График функции (5)

Рассмотрим случай (4) подробнее. При потере устойчивости равновесия  $R_0 = (0, 0)$  система, как показано в [1], претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа. Второе равновесие  $R_1 = (B_1, P_1) \approx (-1,4; -3,36)$  таким свойством не обладает.

В самом деле, имеем

$$f_1(B, P) = r(1 - B/K)B - \alpha w P, \quad f_2(B, P) = \beta(p - P^2)P + \delta w^2 B,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(B, P)}(B_1, P_1) &= \begin{vmatrix} r - \frac{r}{K} B & -\alpha w \\ \delta w^2 & \gamma p - 3P^2 \end{vmatrix} (-1,4; -3,36) = \\ &= \begin{vmatrix} 3,8 - \lambda & -1 \\ 20 & -31,87 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 28,07\lambda + 20 = 0. \end{aligned}$$



Дискриминант этого квадратного уравнения  $787,92-80>0$ . Это означает, что нет комплексно-сопряжённых корней и, следовательно, не выполняются условия теоремы Андронова–Хопфа [1] — нет перехода к циклическим решениям вокруг стационарного равновесия  $R_1$ .

Равновесия  $R_0, R_1$  не являются реальными равновесиями, поскольку в реальной ситуации  $B(t) > 0, P(t) > 0$ , т. е. биомасса и мера плодородия почвы — положительные величины, и, следовательно, нужно брать ненулевые положительные значения для координат равновесия. Но в действительности вместо уравнения (2) можно рассматривать систему

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= r(B - B_*) \left( 1 - \frac{(B - B_*)}{k} \right) - \alpha w(P - P_*), \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma[p - (P - P_*)^2](P - P_*) + \delta w^2(B - B_*), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $B_*, P_* > 0$  — величины, осуществляющие сдвиг в пространстве  $(B, P)$  к реальным значениям равновесий системы «лес-почва».

Понятно, что и до сдвига и после сдвига  $R_i \rightarrow R_i^* = (B_i^*, P_i^*)$  равновесие  $R_1^*$  имеет меньшее значение биомассы, чем  $R_0^*$ .

В соответствии с теорией катастроф равновесие  $R_1^*$  при потере устойчивости перейдёт скачком в равновесие  $R_0^*$ , а последнее в принципе может вернуться к равновесию  $R_1^*$  (пожар, рубка леса), но скорее всего следует ожидать бифуркации Андронова–Хопфа, поскольку именно это отвечает нормальной эволюции леса.

Поэтому скачкообразная смена  $R_1^* \rightarrow R_0^*$  стационарного равновесия системы говорит о том, что лес переходит к равновесию, в котором он продуцирует больше биомассы, и при потере устойчивости этот стационарный процесс закончится переходом посредством бифуркации Андронова–Хопфа [1] к циклическим изменениям биомассы и состояния почвы.

Можно проинтерпретировать это как стационарное существование экосистемы в состоянии  $R_1^*$  с малой продукцией биомассы (посадки), затем переход к состоянию  $R_0^*$  с большей продукцией биомассы (зрелый лес), и, наконец, экосистема оказывается в состоянии, когда каким-то образом периодически меняются биомасса и плодородие почвы (пожары + восстановление леса после пожаров или вырубки + восстановление леса после вырубок).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Математические модели лесных экосистем с бифуркациями Андронова–Хопфа // Математические структуры и моделирование. 2021. № 3(59). С. 106–122.
2. Chaudhary M.M., Dhar J., Sah M G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries // International Journal of Biological Sciences. 2013. Vol. 7, No. 4, P. 798–802.

3. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.

### EQUILIBRIA IN THE ECOSYSTEM MODEL "FORESTRY-SOIL"

**L.A. Volodchenkova**

Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru

**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

**Abstract.** In this article stationary equilibria in the system "forest-soil", presented as a mathematical model in the form systems of differential equations, are studied. Catastrophic changes in equilibrium, a possible transition to cyclic equilibria are considered

**Keywords:** Model, system "forest-soil", stationary equilibrium, catastrophe theory, bifurcation theory, Andronov-Hopf bifurcation.

### REFERENCES

1. Volodchenkova L.A. and Guts A.K. Matematicheskie modeli lesnykh ekosistem s bifurkatsiyami Andronova-Khopfa. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 3(59), pp. 106–122. (in Russian)
2. Chaudhary M.M., Dhar J., and SahM G.P. Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries. International Journal of Biological Sciences, 2013, vol. 7, no. 4, pp. 798–802.
3. Volodchenkova L.A. Model' plodorodiya pochvy s tochki zreniya katastrofy i sborka. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie: sbornik materialov Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii (Omsk, 21 noyabrya 2014 g.), Omsk, izd-vo Om. gos. un-ta, 2014, pp. 25–26.  
(in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 19.10.2021*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ КОРНЕЙ ФРОНТАЛЬНЫХ ЗУБОВ, РАЗРУШЕННЫХ НИЖЕ УРОВНЯ ДЕСНЫ, ПОД ШТИФТОВЫЕ КОНСТРУКЦИИ

**А.К. Гуц**<sup>1</sup>

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

**Т.Н. Капотина**<sup>2</sup>

ассистент, e-mail: fs@omsu.ru

**Н.И. Панова**<sup>1</sup>

студент, e-mail: fs@omsu.ru

**В.М. Семенюк**<sup>2</sup>

д.м.н., профессор, e-mail: fs@omsu.ru

**Р.Т. Файзулин**<sup>1</sup>

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: fs@omsu.ru

**К.К. Яковлев**<sup>2</sup>

стоматолог, e-mail: fs@omsu.ru

<sup>1</sup>Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

<sup>2</sup>Омский государственный медицинский университет, Омск, Россия

**Аннотация.** В статье представлены результаты, полученные в 1990-е годы и частично депонированные в 1995 году. Депонирование сделало их мало-доступными. Цель работы — математическое обоснование к использованию штифтовых конструкций для восстановления коронковой части зуба при разрушении корня фронтальных зубов ниже уровня десны на  $1/4$  и  $1/3$  его длины. Для этого была создана математическая компьютерная модель зуба со стальной вкладкой и проведены компьютерные эксперименты по выяснению напряжённо-деформированных состояний зуба с вкладкой, находящегося под нагрузкой в 3, 30 60 и 90 кГ. На основании проведённых нами исследований (математических расчётов и наблюдений до 48 пациентов в возрасте от 20 до 40 лет со штифтовыми конструкциями и фарфоровыми коронками) можно сформулировать следующие положения: 1) разрушенные корни фронтальных зубов ниже уровня десны на  $1/4$  длины корня могут быть использованы в клинической стоматологии; 2)  $2/3$ -й опорно-удерживающего аппарата корней фронтальных зубов с восстановленной корневой и коронковой частью достаточно для полноценной функции.

**Ключевые слова:** математическое обоснование, компьютерная модель, штифтовая конструкция, разрушение корня зуба.

В результате кариеса, реже травмы и патологической стираемости, наблюдается полная потеря коронки естественного зуба. К полным дефектам коронковой части зуба В.Н. Копейкин [1, 2] относит сохранение части коронки зуба

над уровнем десны на 2–3 мм. При наличии твёрдых тканей зуба на уровне десневого края и ниже уровня десневого края (на  $1/4$  длины корня) врачам-стоматологам приходится решать вопрос об удалении корня зуба.

В подавляющем числе случаев корни зубов удаляются, так как до настоящего времени нет объективных критериев, позволяющих научно обосновать показания к их сохранению и использованию в качестве опорного элемента, дающего возможность после восстановления коронковой части полностью подключить зуб к функции. Между тем удаление корней обуславливает неизбежную резорбцию межзубных перегородок и снижение функциональных возможностей пародонта соседних зубов.

До настоящего времени<sup>1</sup> нет математических (механических) расчётов для обоснования использования штифтовых конструкций для восстановления коронковой части зуба в качестве опорного элемента.

Добавим, что в 1990-е годы необходимость в установке штифтовых конструкций на разрушенные ниже десны фронтальные зубы была очень актуальной (как впрочем и в наши дни, если учитывать дороговизну имплантантов). Публикуемые исследования дали гарантии для практических стоматологов в том, что установка штифтовых конструкций не навредит пациентам. В ОмГМУ были разработаны необходимые методические рекомендации [9], по которым обучали студентов.

## 1. Постановка задачи

Цель работы — математическое обоснование к использованию штифтовых конструкций для восстановления коронковой части зуба при разрушении корня ниже уровня десны на  $1/4$  его длины и более.

Мы изучали использование штифтовых конструкций при восстановлении отсутствующих коронок естественных верхних фронтальных зубов (центральные резцы и клыки) и нижних клыков. В клинике для восстановления отсутствующих коронок естественных зубов используются культевая штифтовая вкладка, штифтовые зубы и штифтовые конструкции.

Принципиальное отличие штифтовых зубов и штифтовых конструкций в том, что в штифтовых зубах искусственная коронка жёстко соединена со штифтом, фиксируемым в корневом канале, а штифтовые конструкции состоят из штифта, монолитно соединённого с литой культевой вкладкой, и наружной коронки.

Достоинство штифтовых конструкций в том, что наружная искусственная коронка, восстанавливающая коронку естественного зуба, не соединена монолитно со штифтом и культевой вкладкой и при необходимости ее замены не нужно извлекать штифт из корня. Но поскольку нас интересовало поведение корня, то мы не различали штифтовые конструкции и штифтовые зубы. По этой же причине вкладка и штифт (диаметром 1 мм) брались целиком стальными (рис. 1).

<sup>1</sup>Публикуемая работа была депонирована в 1995 года (см. [4]).



Рис. 1. Копия рентгенограммы нижней челюсти человека после укрепления литой культевой штифтовой вкладки в корневой канал  $\bar{3}$



Рис. 2. Копия рентгенограммы нижней челюсти человека после укрепления покрывной коронки на литой культевой штифтовой вкладке  $\bar{3}$  (на 30-е сутки)

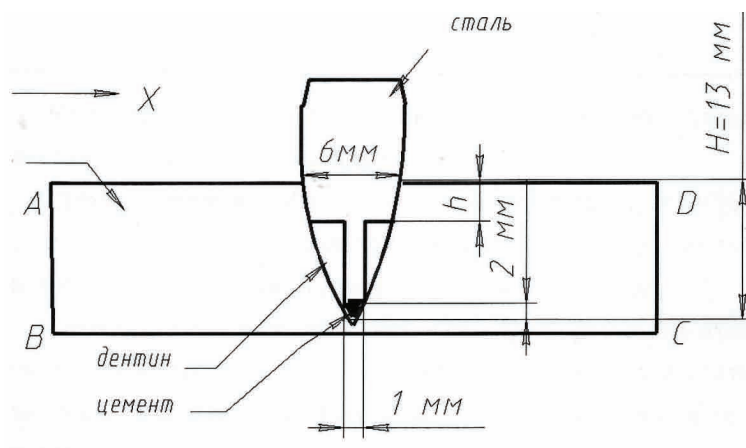


Рис. 3. Математическая модель корня зуба с литой культевой штифтовой конструкцией

## 2. Содержание математических методов в ортопедической стоматологии

Суть использованных математических методов заключается в следующем.

1. Строится математическая модель зуба с литой вкладкой и стальным штифтом, а также с литым штифтом, монолитно соединённым с культевой вкладкой на уровне  $h$  ниже уровня десны (причём мы брали  $h = 0, H/4$  и  $H/3$ , где  $H$  — длина корня зуба), вместе с окружающей его челюстной костью.

Периодонтальная щель и слой цемента между штифтом и дентином в расчёт не принималась (их толщина  $< 0,15-0,2$  мм).

Для упрощения расчётов на данном этапе рассматривалась плоская модель, то есть, по существу, мы пытались увидеть то, что происходит внутри зуба с штифтовой конструкцией в мысленно выделенном плоском сечении, проходящем через геометрическую ось зуба. Это достаточно стандартная плоская модель упругой среды, составленная из различных материалов (рис. 3), для расчёта деформаций и напряжений которой под воздействием внешней статической нагрузки использовался метод конечных элементов.

Появление обширных (по величине площади рассматриваемого плоского сечения сохранившейся части корня зуба) зон в корне зуба с напряжением, превосходящим предел прочности дентина (главным образом) на разрыв, трактуется как ситуация, ведущая к разрушению остатка корня, особенно при циклическом повторе данной нагрузки (пережёвывание пищи).

2. Модель реализовывалась на основе метода конечных элементов с помощью специального компьютерного пакета прикладных программ «Космос/М» для ПЭВМ РС IBM 386/387. Представление о созданных на основе рис. 3 плоских моделях зуба с  $h = 0, H/4$  и  $H/3$ , даёт рис. 4.

Накладывалось условие нулевого граничного перемещения (жёсткого закрепления) по линии  $ABUCUCD$ . С левой стороны между костью и вкладкой узлы брались двойными — соединение между ними отсутствовало, следовательно, воздействие через образованную «узловую щель» не передавалось. Это

делалось для того, чтобы при рассмотрении вектора нагрузки, принадлежащего 4-му квадранту, моделировалась ситуация, при которой считается, что стальная вкладка не срывается с живой тканью. При увеличении нагрузки щель между вкладкой и тканью увеличивается (рис. 4).

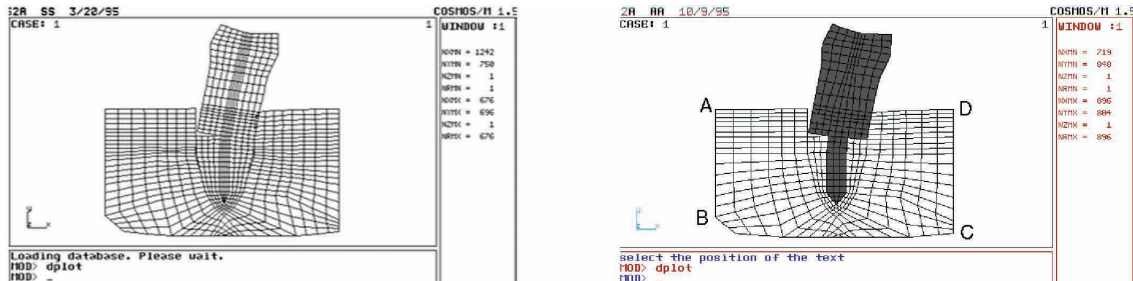


Рис. 4. Модель корня зуба с литой культевой штифтовой конструкцией,  $h = 1/4H$  нагрузка под  $45^\circ$ , созданные на основе метода конечных элементов

Нагрузка бралась точечная, сосредоточенная в трёх узлах (имеющая одну и ту же величину в каждом узле).

Компьютерные исследования построенных моделей позволяют наглядно (на экране дисплея) увидеть как происходит деформирование зуба и окружающей челюстной кости под влиянием заданной нагрузки (вплоть до мультипликации), а также дают возможность увидеть полную картину распределения (в виде цветных зон одинакового напряжения) напряжённых состояний зуба с вкладкой (см. рис. 5).

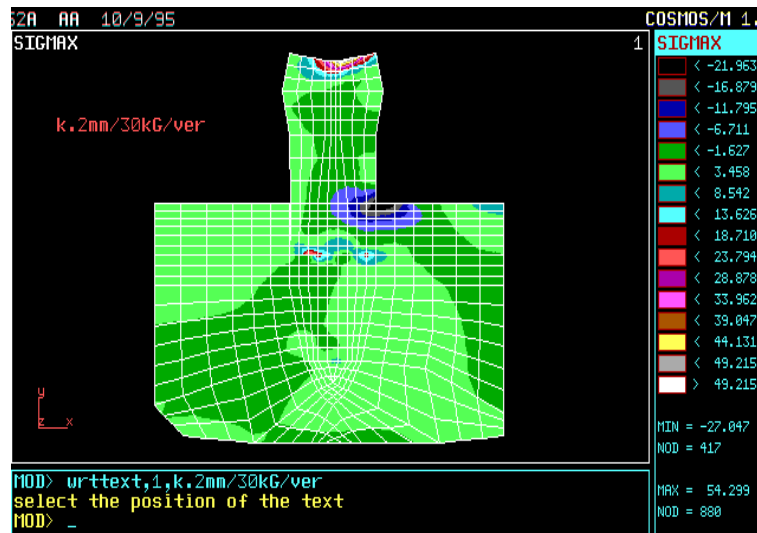


Рис. 5. Картины распределения (в виде цветных зон одинакового напряжения) напряжённых состояний зуба с вкладкой  $h = 1/4H$  под нагрузкой

Всё это позволило провести серию компьютерных экспериментов, определяющих надёжность конкретной вкладки.

Для того чтобы быть уверенным, что моделирование даёт результаты, близкие к реальным, т. е. быть уверенным в адекватности моделей, была создана модель интактного (здорового) зуба, подвергнута компьютерным испытаниям, а результаты сравнивались с тем, что есть в медицинской литературе. Так, в случае вертикальной нагрузки в 3 кГ для модели «здорового зуба» (интактного) полученные напряжения по порядку величины согласуются с напряжениями, указанными в [3, с. 18, 23] и найденными иным способом.

Ниже мы не будем приводить реальные цветные картинки, полученные в экспериментах в силу того, что данный журнал не воспроизводит при печати цветные изображения, а заменяем их рисунками, сделанными на основе соответствующих цветных образов.

Для построения компьютерных моделей типа рис. 3, 4 необходимо знать значения различных физических величин. Они даны в следующей таблице<sup>2</sup>.

Таблица 1. Показатели костной ткани, эмали, дентина, цемента, стали, необходимые для построения математической модели зуба

Показатели	Плотность, кг/мм <sup>3</sup>	Модуль Юнга, н/мм <sup>2</sup>	Предел прочности на разрыв, н/мм <sup>2</sup>
Кость	1,8 – 2,0 × 10 <sup>-6</sup>	1,38 – 1,94 × 10 <sup>4</sup>	
Эмаль		2,8 – 9,0 × 10 <sup>4</sup>	8,23 – 34,3
Дентин	1,8 – 2,0 × 10 <sup>-6</sup>	1,4 – 1,90 × 10 <sup>4</sup>	20,6 – 42,0
Цемент	2,5 – 3,0 × 10 <sup>-6</sup>	2 × 10 <sup>4</sup>	2,5 120 – 160 (сжатие)
Сталь	7,8 – 8,0 × 10 <sup>-6</sup>	19,5 – 20,6 × 10 <sup>4</sup>	

### 3. Результаты компьютерных экспериментов

Преимуществом математического моделирования является то, что здесь легко набирается требуемая статистика по той или иной вкладке без эксперимента с живыми пациентами. Математическое моделирование, как предварительный этап клинических испытаний, даёт возможность заранее отбросить безнадёжные или неудачные штифтовые конструкции, а также определить, каким может быть уровень  $h$  разрушения корня зуба, когда ещё возможно его сохранение. Наконец, математическая модель обосновывает (или бракует) жизнеспособность того или иного метода протезирования, позволяя уверенно расширять число пациентов.

<sup>2</sup>Данные по дентину предоставлены физиком Лобачёвым Игорем Александровичем.



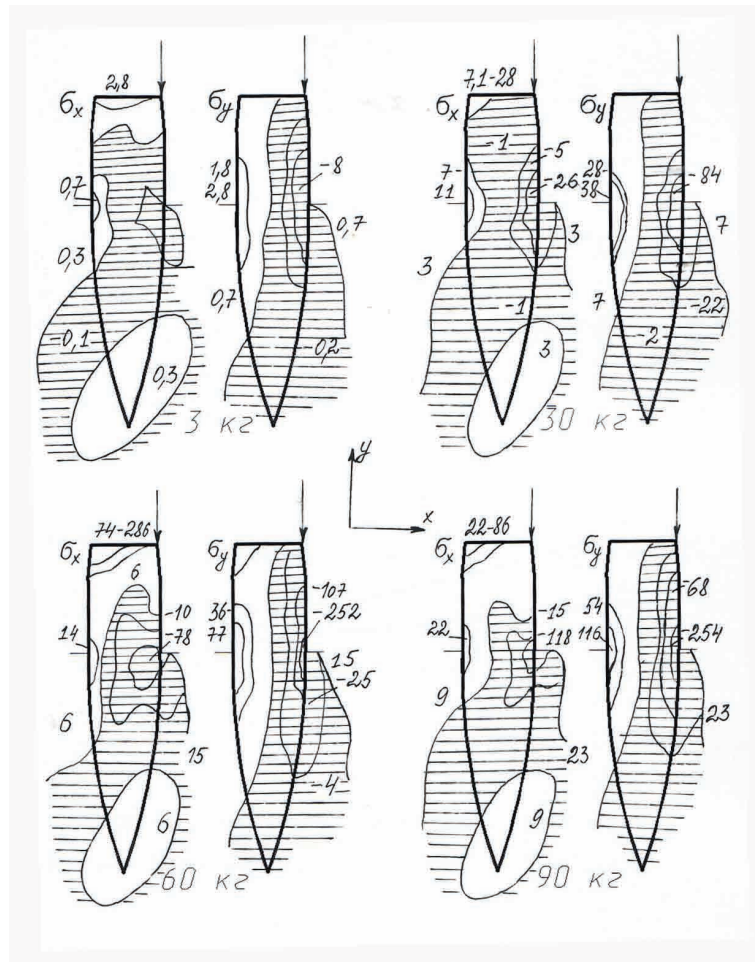


Рис. 6. Зоны напряжения, возникающие в интактном зубе при вертикальной несимметричной нагрузке (заштрихована зона сжатия)

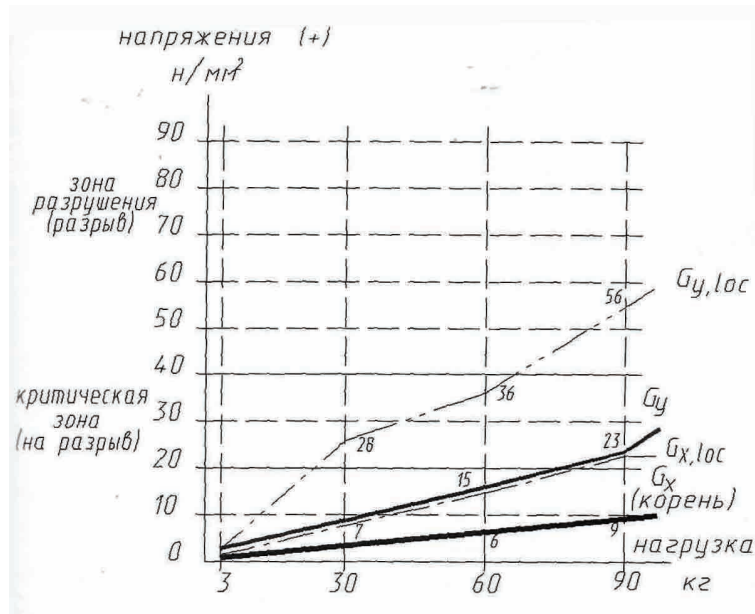


Рис. 7. Напряжения (положительные), возникающие в интактном зубе при вертикальной несимметричной нагрузке

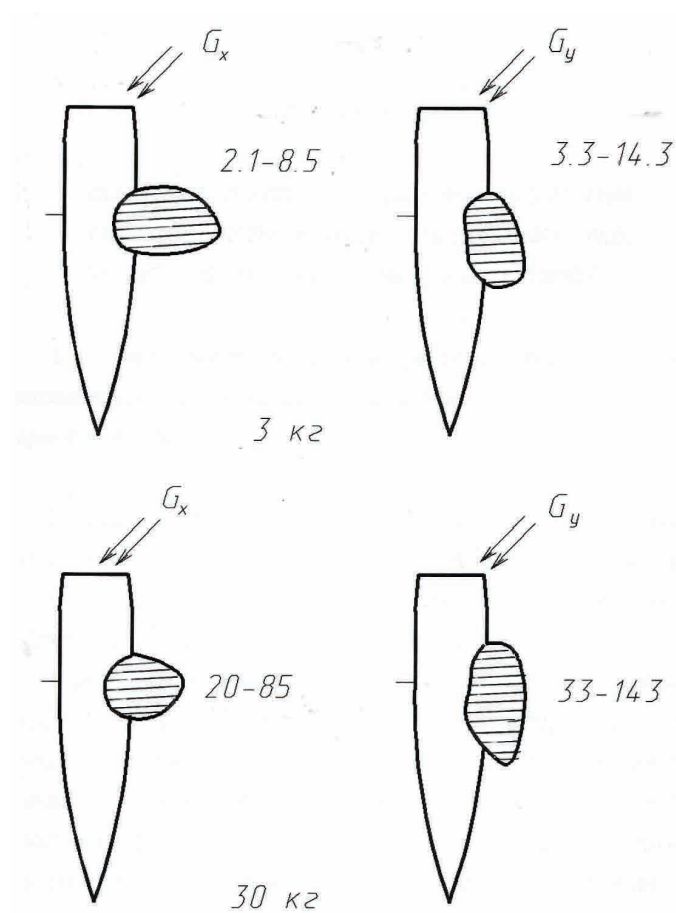


Рис. 8. Зоны напряжения, возникающие в интактном зубе при нагрузке под углом  $45^\circ$  (заштрихована зона разрушения)

Недостатком математического моделирования является его идеализированность, пренебрежение теми или иными деталями. В нашем случае — это упрощение структуры дентина, огрехи при обработке остатка корня зуба, установке штифтовой конструкции, абстрагирование от температурных (что впрочем можно было учесть) и химических условий и т. д.

Естественно, лучшим выходом является сочетание клиники и математики.

#### 4. Функциональное состояние парадонта после восстановления отсутствующей части корня и естественной коронки зуба штифтовыми конструкциями при различных величинах и направлениях

Имея описание состояния интактного зуба, можно проводить сравнения с состояниями парадонта после восстановления отсутствующей части корня и естественной коронки зуба штифтовыми конструкциями при различных величинах и направлениях.

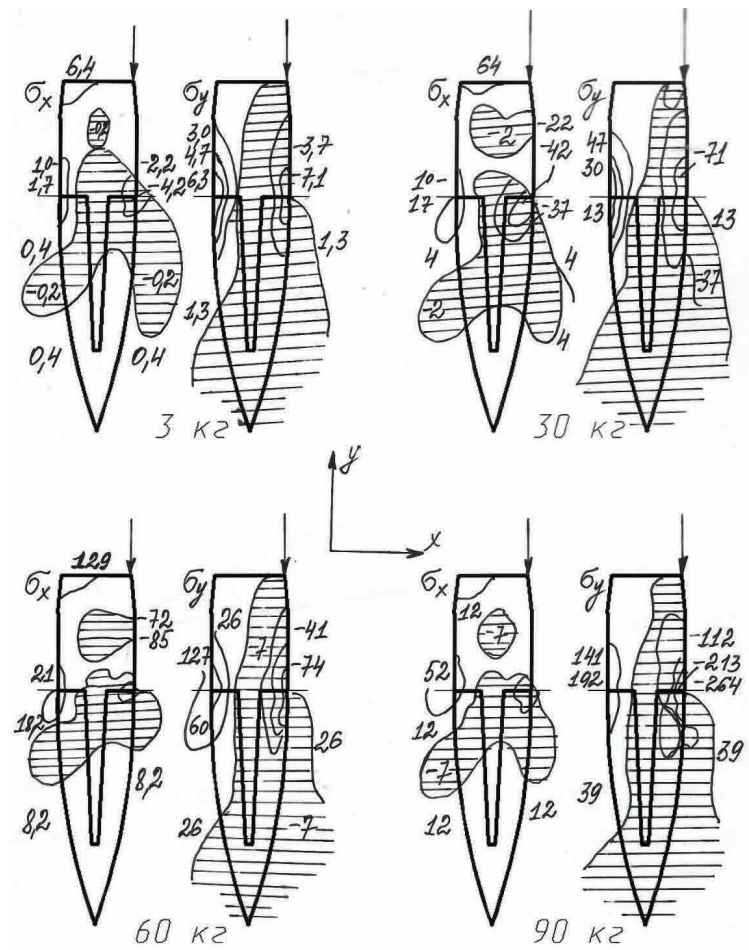


Рис. 9. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его до уровня десны ( $h = 0$ ) при вертикальной несимметричной нагрузке (заштрихована зона сжатия)

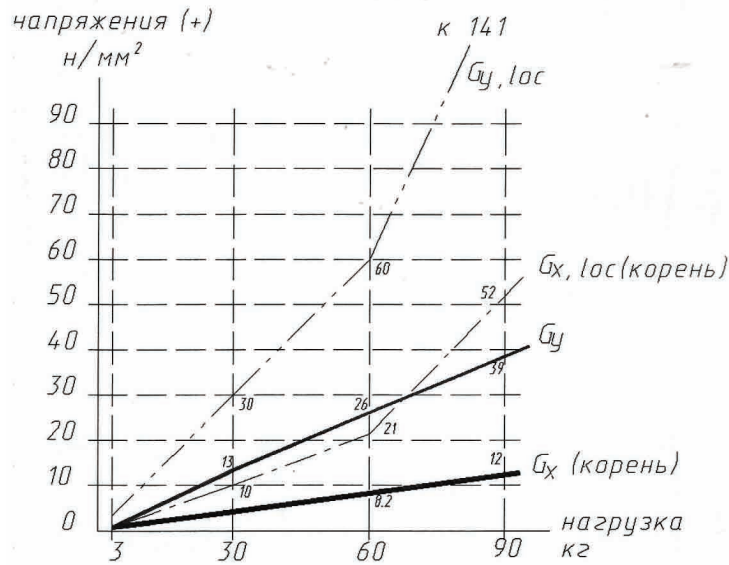


Рис. 10. Напряжения, возникающие в корне зуба, разрушенного до уровня десны ( $h = 0$ ) при вертикальной несимметричной нагрузке

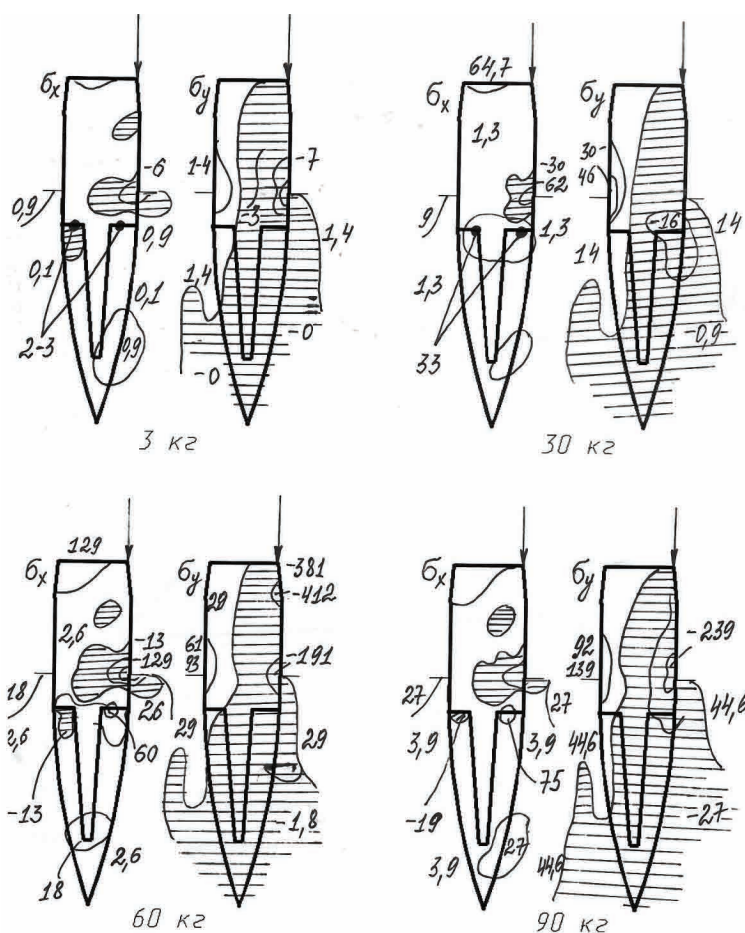


Рис. 11. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его на 1/4 длины ( $h = H/4$ ) при вертикальной несимметричной нагрузке (заштрихована зона сжатия)

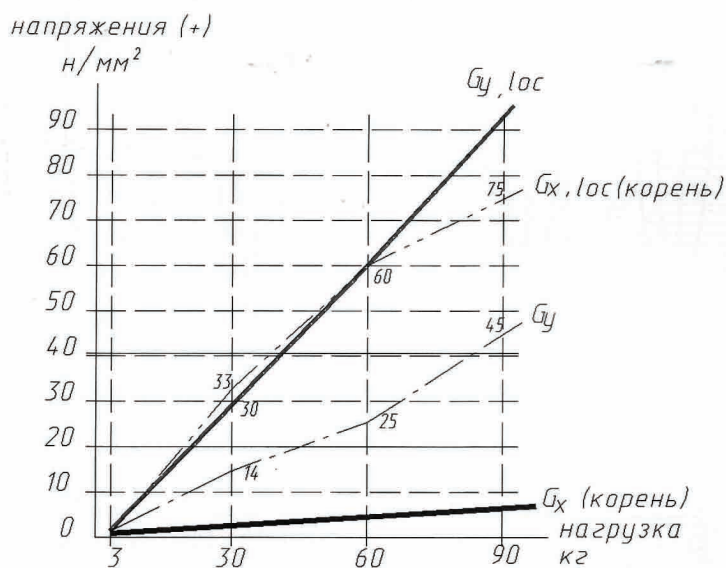


Рис. 12. Напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его на 1/4 длины ( $h = H/4$ ) при вертикальной несимметричной нагрузке

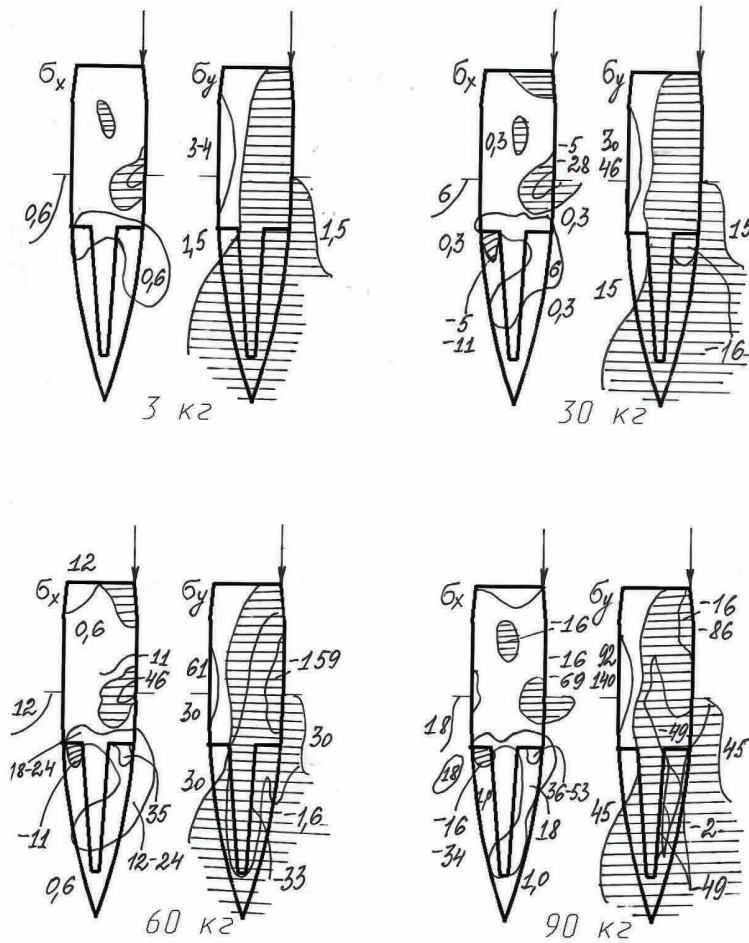


Рис. 13. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его на  $1/3$  длины ( $h = H/3$ ) при вертикальной несимметричной нагрузке (заштрихована зона сжатия)

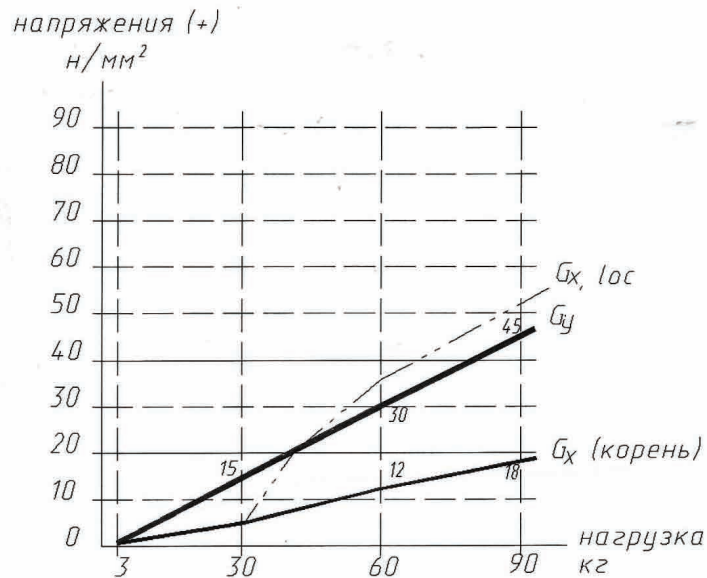


Рис. 14. Напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его на  $1/3$  длины ( $h = H/3$ ) при вертикальной несимметричной нагрузке

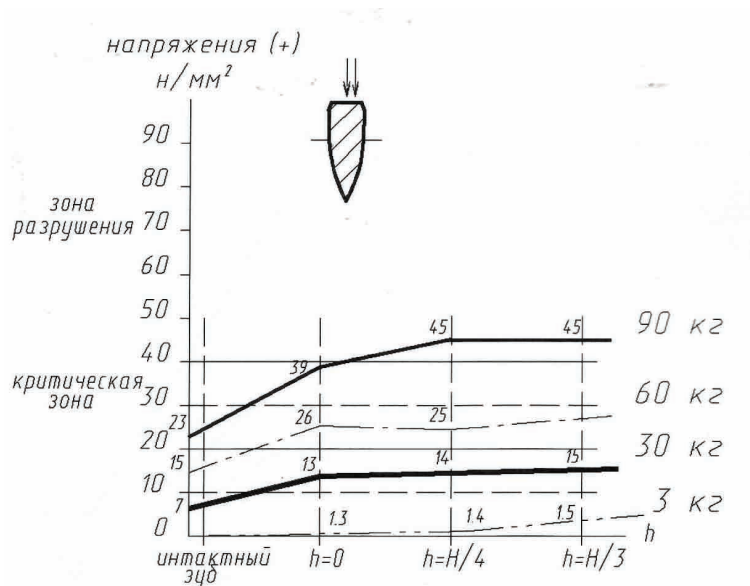


Рис. 15. Напряжения (положительные,  $\sigma_y$ ) для разных моделей при вертикальной несимметричной нагрузке

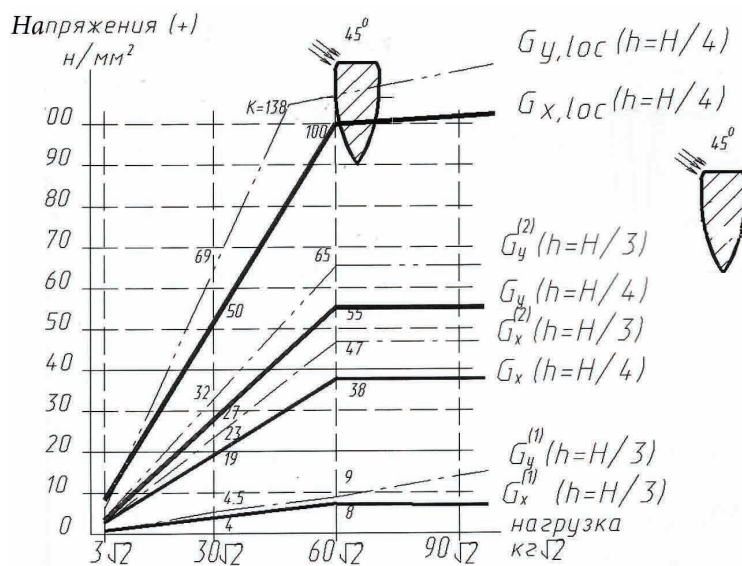


Рис. 16. Напряжения на разрыв в моделях с  $h = H/4, H/3$  при нагрузке под углом  $45^\circ$

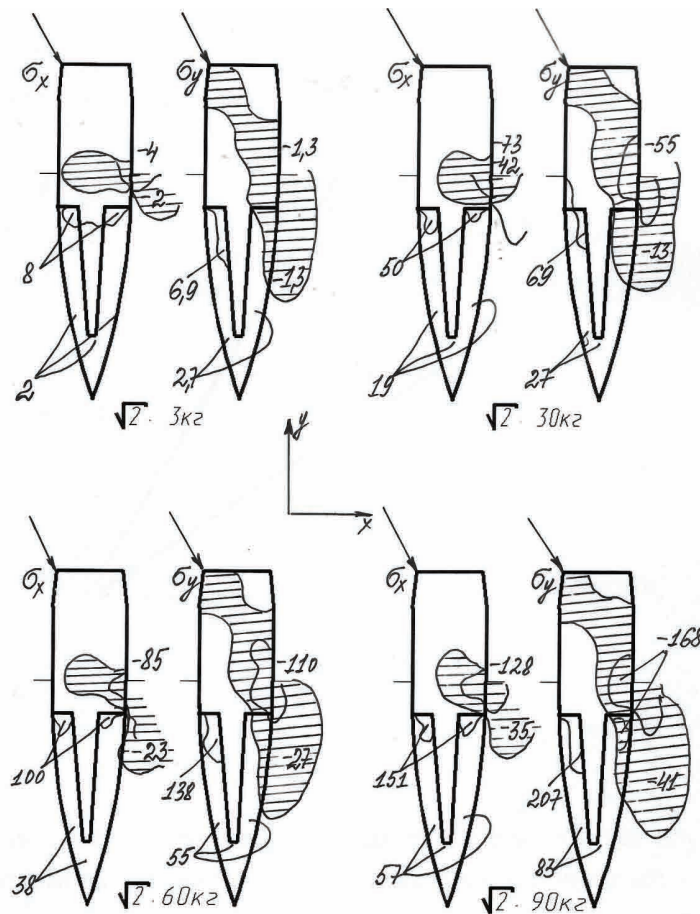


Рис. 17. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его на  $1/4$  длины ( $h = H/4$ ) при нагрузке под углом  $45^\circ$  (заштрихована зона сжатия)

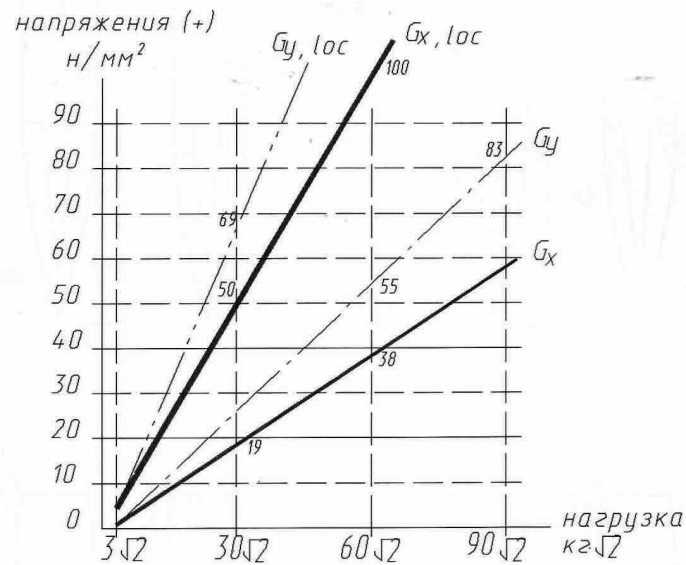


Рис. 18. Напряжения, возникающие в корне зуба при его разрушении на  $1/4$  длины ( $h = H/4$ ) при нагрузке под углом  $45^\circ$

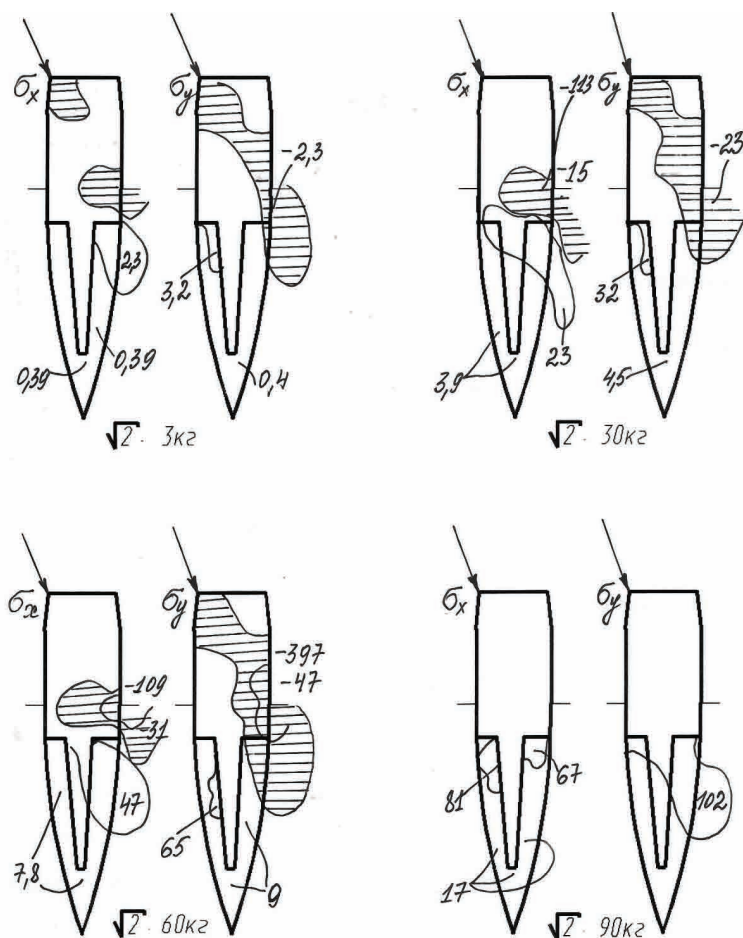


Рис. 19. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба при разрушении его на 1/3 длины ( $h = H/3$ ) при нагрузке под углом  $45^\circ$  (заштрихована зона сжатия)

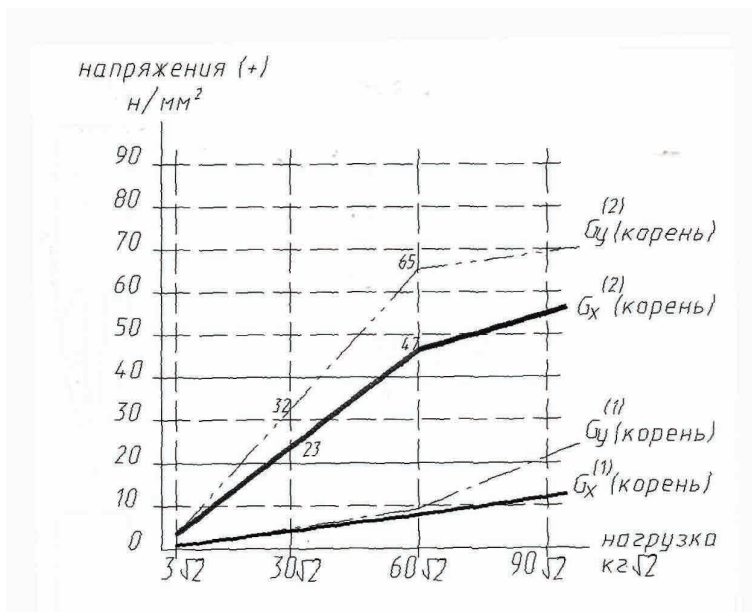


Рис. 20. Напряжения, возникающие в корне зуба при его разрушении на 1/3 длины ( $h = H/3$ ) при нагрузке под углом  $45^\circ$



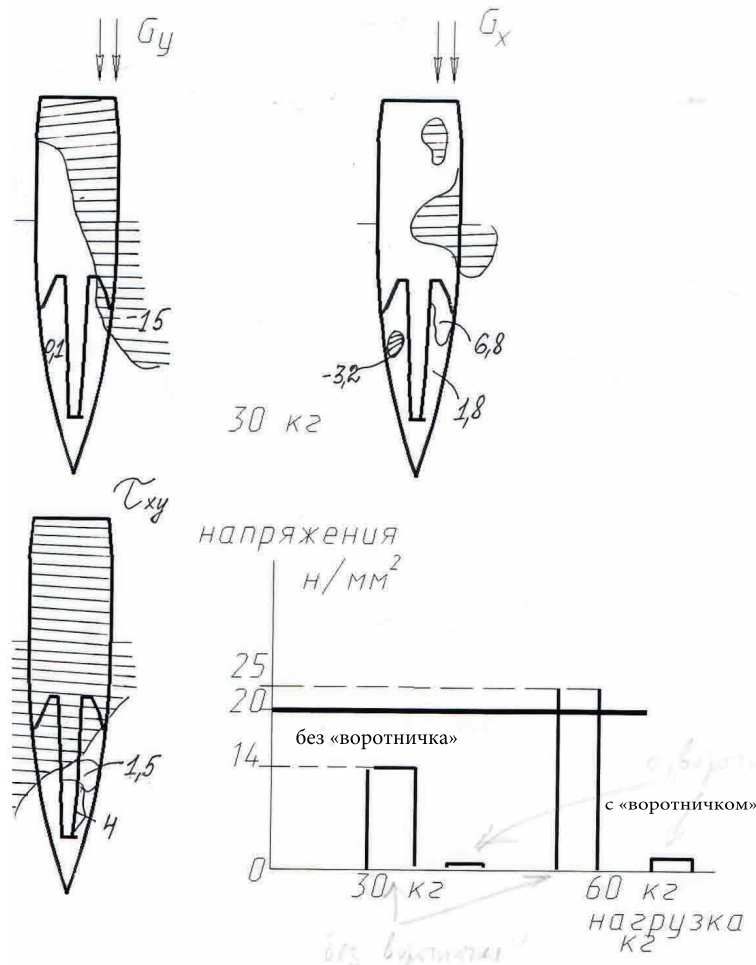


Рис. 21. Зоны напряжения, возникающие в корне зубе с литой культевой штифтовой вкладкой с воротничком при вертикальной несимметричной нагрузке в 30 кг (заштрихована зона сжатия)

#### 4.1. Расчёты нагружения интактного зуба при различных величинах и направлениях нагрузок

Как было сказано выше, для того чтобы результаты компьютерных экспериментов с восстановленными разрушенными зубами могли рассматриваться как материал, заслуживающий доверия, необходимо сравнивать состояние под нагрузкой интактного (здорового) зуба и восстановленного.

Для этого были созданы компьютерные модели интактного фронтального зуба верхней и нижней челюстей (верхние и нижние центральные резцы, верхние клыки, нижние клыки), которые были подвергнуты испытаниям при различных величинах и направлениях нагрузок.

Самый неблагоприятный и реальный вид нагрузки — вертикальная несимметричная. При такой нагрузке зуб выдерживал до 90 кг. При 90 кг и выше по оси  $x$  интактный зуб попадает в критическую зону (**критическая зона — это от 20 до 40 н/мм<sup>2</sup>**).

Поведение интактного зуба при различной величине вертикальной несимметричной нагрузки представлено на рис. 6, 7 и 8.

При нагрузке под углом в  $45^\circ$  интактный зуб попадает в критическую зону уже при нагрузке в 30 кГ. Напряжения, возникающие в интактном зубе при нагрузке под углом в  $45^\circ$ , указаны на рис. 8.

#### 4.2. Расчёты нагружения восстановленного зуба при различных величинах и направлениях нагрузок

В данной работе показано, что штифтовые конструкции при  $h = 0$ ,  $H/4$  и  $H/3$  неплохо держатся при несимметричной вертикальной нагрузке до 30 кГ, хотя в остатке корня напряжения превосходят напряжения, возникающие в «здоровом зубе» (модель которого также подвергалась компьютерным испытаниям). См. рис. 9–15.

При нагрузках больше 60 кГ напряжения (по вертикали —  $\sigma_y$ ) на большей части корня (в дентине) нарастают и попадают в критическую зону (для разрыва — это напряжения от 20 до 42 н/мм<sup>2</sup>). По существу, это означает реальность разрушений корня зуба. Но в **зону разрушения** (где  $\sigma_y > 40$  н/мм<sup>2</sup>) испытываемые модели попадали лишь при нагрузках, близких к 60 кГ.

Напряжения по горизонтали  $\sigma_x$  значительно меньше, и не попадали в критическую зону (где  $\sigma_x > 40$  н/мм<sup>2</sup>).

Локально, на очень малых участках корня, возникающие напряжения по вертикали и по горизонтали попадают в критическую зону уже при приближении нагрузки к 30 кГ (рис. 9–14), причём даже для модели здорового зуба (рис. 7), а в зону разрушения — при нагрузке выше 30 кГ ( $h = H/4$ ,  $H/3$  (рис. 11–14). Следовательно, при наличии в соответствующих местах корня трещин возможны нарастающие расколы.

Исследование на разрушения при сжатии (напряжения отрицательные — см. рис. 9–14) возможно, но, как правило, материал более прочен при сжатии, и большие отрицательные напряжения достигались в корне лишь при нагрузке около 90 кГ. Точная оценка ситуации затруднялась отсутствием у авторов данных о пределе прочности дентина на сжатие. Напомним, что более важно было проследить значения положительных напряжений.

В целом можно считать, что наши исследования подтвердили предположения Н.В. Копейкина, что 2/3-й опорно-удерживающего аппарата достаточно для выполнения полноценной функции.

Штифтовые конструкции с  $h = H/3$  при вертикальных несимметричных нагрузках ведут себя близко к тому, что наблюдается для штифтовых конструкций с  $h = H/4$  (см. рис. 15).

При симметричной вертикальной нагрузке в 60 кГ и 90 кГ возникают положительные напряжения  $\sigma_x$  в дентине от 20 до 30 н/мм<sup>2</sup> соответственно, локально в районе стыка корня и вкладки, а отрицательные напряжения незначительны (-17 н/мм<sup>2</sup> в районе штифта). Сказанное справедливо для моделей с  $h = H/4$ .

При (боковой) нагрузке под углом в  $45^\circ$  к оси зуба для моделей с  $h = H/4$

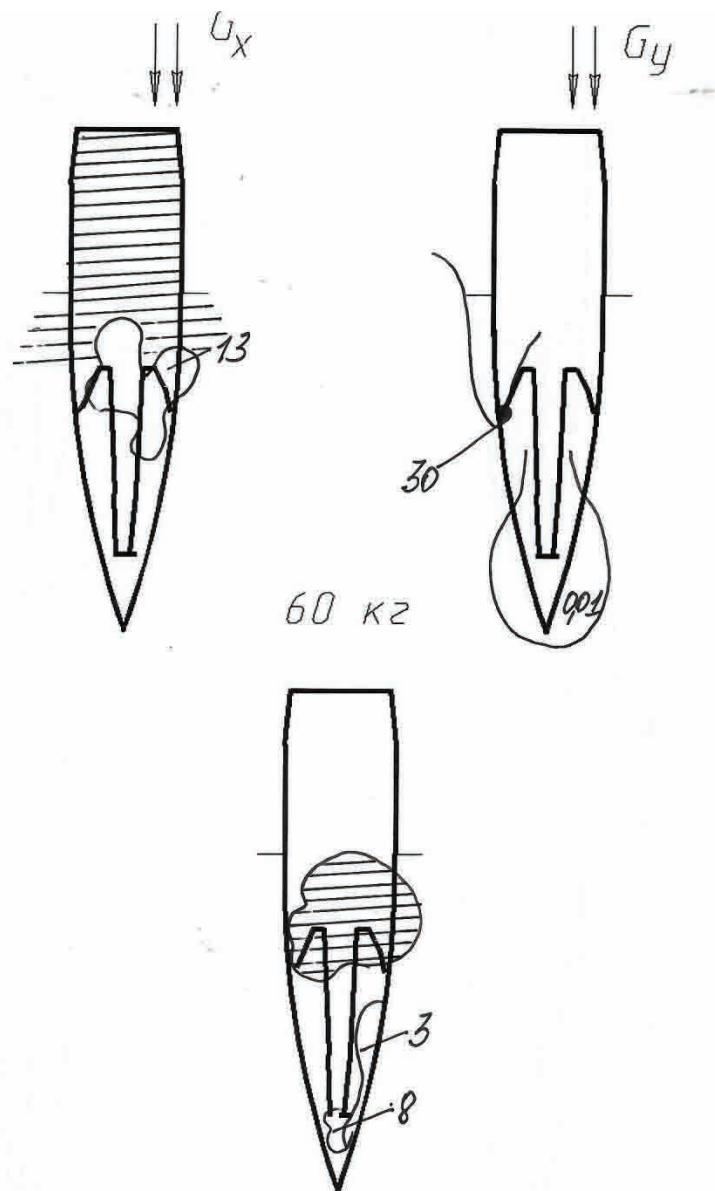


Рис. 22. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба с литой культевой штифтовой вкладкой с «воротничком» при вертикальной несимметричной нагрузке в 60 кг (заштрихована зона сжатия)

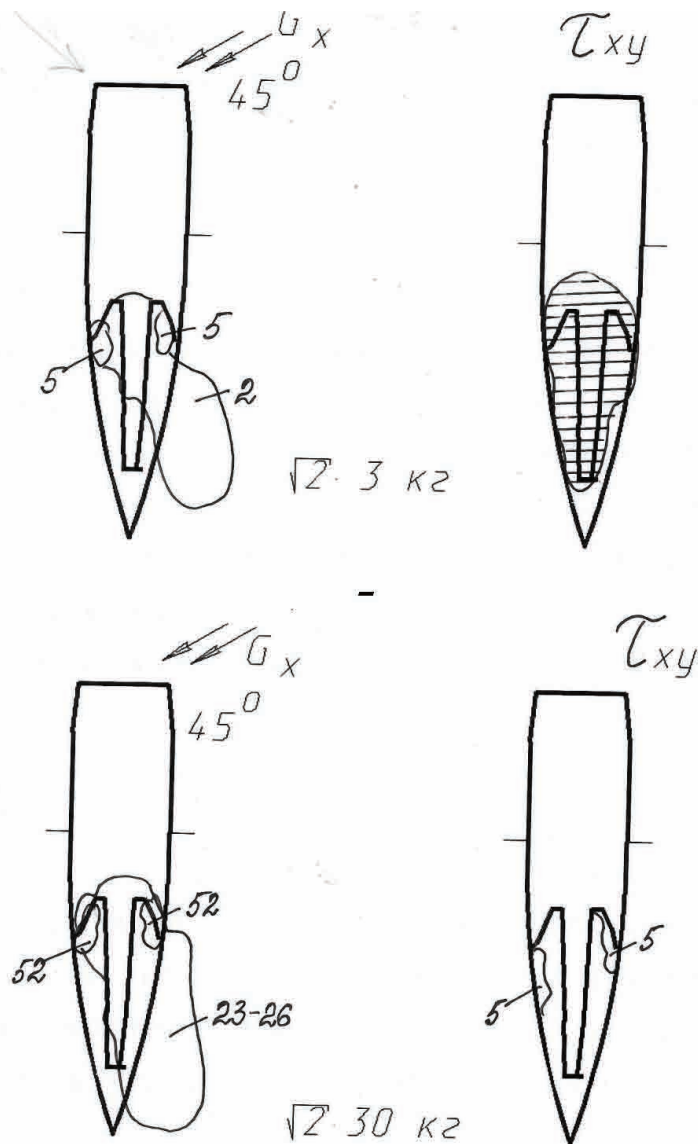


Рис. 23. Зоны напряжения, возникающие в корне зуба с литой культевой штифтовой вкладкой с «воротничком» при нагрузке под углом в 45° (заштрихована зона сжатия)

и  $H/3$  в корне возникают критические напряжения  $20 < \sigma_x, \sigma_y < 42$  н/мм<sup>2</sup> в районе нагрузки 20–30 кГ у стыка корня и вкладки, а также корня и штифта (см. рис. 16–20), причём хуже дело обстоит с моделью  $h = H/4$ . При наличии дефектов (микротрещин) в дентине корень подвержен разрушению в указанных местах.

При касательной нагрузке в 30 кГ  $\sigma_x = 32$  н/мм<sup>2</sup> и точно  $\sigma_{x,loc} = 62$  н/мм<sup>2</sup>, а  $\sigma_y = 24$  н/мм<sup>2</sup> и вокруг штифта  $\sigma_y = 69$  н/мм<sup>2</sup>. Таким образом, касательные нагрузки гораздо опаснее вертикальных и чреваты разрушением корня в районе стыка корня и вкладки, а также штифта (брали  $h = H/3$ ).

#### 4.3. Расчёты нагружения восстановленного зуба в случае штифтовой конструкции с «воротничком»

Исследовался случай, когда культя корня зуба с наружной поверхности охватывалась литой культевой штифтовой вкладкой в виде «воротничка» [8].

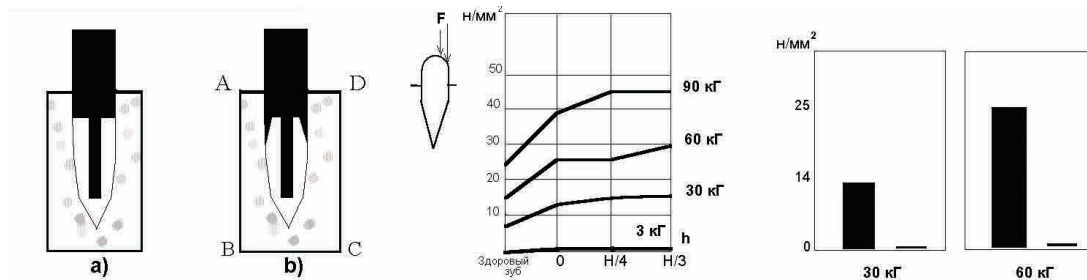


Рис. 24. Исследования вкладки с «воротничком»: слева — модель обычной вкладки и вкладки с «воротничком»; в центре — график напряжений  $\sigma_y$  при разных нагрузках; справа — диаграмма напряжений

Литая культевая штифтовая вкладка без охвата культи корня («стык-в-стык») при нагрузке до 30 кг не вызывала критических напряжений в сохранившемся корне. Поэтому проверяли влияние нагрузки на литую культевую штифтовую вкладку с «воротничком» после 30 кг.

При вертикальной несимметричной нагрузке в 30 кг напряжение, возникающее под влиянием литой культевой штифтовой вкладки с «воротничком», было минимальное и составляло 0,01 н/мм<sup>2</sup> (рис. 21, 22, 24).

При нагрузке в 60 кг  $\sigma_y = 30$  н/мм<sup>2</sup> в месте соединения «воротничка» вкладки с наружной стенкой корня зуба (рис. 22, 24).

Таким образом, при вертикальной несимметричной нагрузке литая культевая штифтовая вкладка с «воротничком» ведёт себя идеально, в корне критических нагрузок не возникает.

При наклонных нагрузках под углом 45° к оси зуба в корне возникают критические напряжения при нагрузке 42 кг в месте соприкосновения «воротничка» литой культевой штифтовой вкладки с корнем зуба ( $\sigma_x = 52$  н/мм<sup>2</sup>), а также корня и штифта ( $\sigma_x = 26$  н/мм<sup>2</sup>) (рис. 23).

Эксперименты показали, что воротничок необходимо делать под углом в  $45^\circ$ .

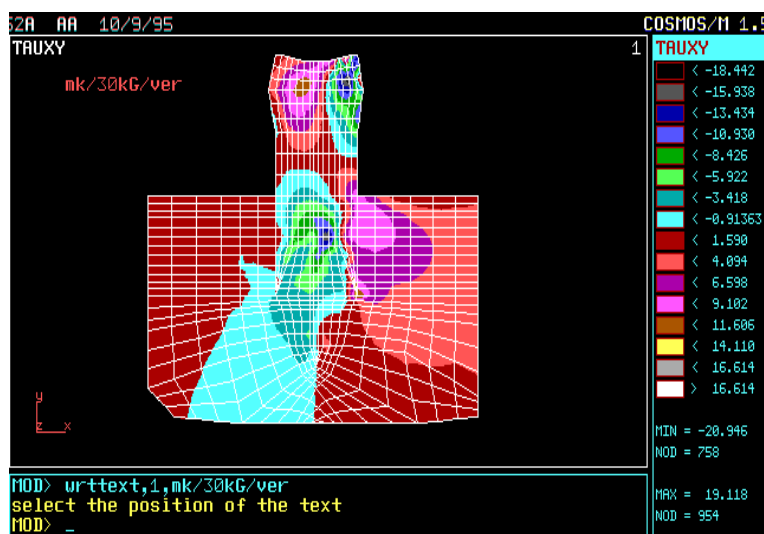


Рис. 25. Исследование вкладки с «воротничком» при вертикальной нагрузке в 30 кГ

Опираясь на положительные результаты исследований моделей с «воротничком», мы изготовили соответствующий инструмент, и за авторами было зафиксировано «Рационализаторское предложение “Способ подготовки культы корня зуба, расположенного ниже уровня десны, под штифтовые конструкции и устройство для его осуществления”» [6].

#### 4.4. Расчёты нагружения восстановленного зуба в случае штифтовой конструкции, требующей расширения канала до 2 мм

Была создана и исследована модель восстановленного зуба в случае штифтовой конструкции, требующей расширения канала до 2 мм. Результаты показали, что следует ожидать раскола корня зуба. Статья была подготовлена, но не опубликована.

## 5. Заключение

На основании проведённых нами исследований (математических расчётов и наблюдений до 48 пациентов в возрасте от 20 до 40 лет со штифтовыми конструкциями и фарфоровыми коронками) можно сформулировать следующие положения:

- разрушенные корни фронтальных зубов ниже уровня десны на  $1/4$  длины корня могут быть использованы в клинической стоматологии;
- $2/3$ -й опорно-удерживающего аппарата корней фронтальных зубов с восстановленной корневой и коронковой частью достаточно для полноценной функции.

Результат исследований свидетельствует, что штифтовые конструкции и фарфоровые коронки полностью отвечают эстетическим и функциональным требованиям. При правильном конструировании эти протезы не вызывают каких-либо патологических изменений в тканях пародонта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Копейкин В.Н. Показания и противопоказания к сохранению и удалению корней зубов // Теория и практика стоматологии. Труды ММСИ. Вып. 10. М., 1967. С. 161–167.
2. Копейкин В.Н. и соавторы. Руководство по ортопедической стоматологии. М. : Медицина, 1993.
3. Копейкин В.Н. Ортопедическое лечение заболеваний парадонта. М. : Медицина, 1977.
4. Гуц А.К., Капотина Т.Н., Панова Н.И., Семенюк В.М., Файзулин Р.Т., Яковлев К.К. Математическое обоснование к использованию корней фронтальных зубов, разрушенных ниже уровня десны, под штифтовые конструкции // Учёный совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНТИ 21.06.95, № 1790-В95. 22 с.
5. Капотина Т.Н. Биологические и математические обоснования к использованию корней зубов, разрушенных ниже уровня десны, в клинической стоматологии. Дисс. канд. мед. наук. Омск, 1996. Омская государственная медицинская академия. 115 с.
6. Рационализаторское предложение № 2302 от 3 октября 1995 г. «Способ подготовки культи корня зуба, расположенного ниже уровня десны, под штифтовые конструкции и устройство для его осуществления». Омск, Омская государственная медицинская академия, 28 ноября 1995 г.
7. Вагнер В.Д., Гуц А.К., Капотина Т.Н., Семенюк В.М., Яковлев К.К. Отдалённые результаты использования корней фронтальных зубов, разрушенных ниже уровня десны, в качестве опоры для штифтовых конструкций // Пути развития стоматологии: итоги и перспективы. Материалы конференции 27–27 апреля 1995 г. Екатеринбург, 1995. С. 204–206.
8. Гуц А.К., Капотина Т.Н., Панова Н.И., Семенюк В.М., Буланова Е.Л. Математическое обоснование к использованию культевой штифтовой вкладки с «воротничком» при разрушении корней зубов ниже уровня десны // Вестник Омского университета. 1996. № 2. С. 17–19.
9. Ахметьянов А.Ш., Капотина Т.Н., Семенюк В.М., Буланова Е.Л., Гуц А.К. Методические подходы при использовании корней фронтальных зубов, разрушенных ниже уровня десны, для протезирования (хирургические и терапевтические мероприятия, особенности формирования культи корня зуба и получения оттисков, технология штифтовых конструкций). Рекомендации для врачей-стоматологов, интернов и студентов. Омск: Омская гос. мед. академия, 1996. 20 с.
10. Семенюк В.М., Гуц А.К., Вагнер В.Д., Капотина Т.Н. Выносливость опорно-удерживающего аппарата зуба, восстановленного литой культевой штифтовой конструкцией, к вертикальной нагрузке // Перспективы развития современной стоматологии: проблемы уральского региона. Материалы конференции стоматологов, 20–22 мая 1997 г. Екатеринбург, Уральская гос. мед. академия, 1997. С. 211–213.

11. Семенюк В.М., Гуц А.К., Вагнер В.Д., Капотина Т.Н., Яковлев К.К., Захаров А.В., Кирющенко В.М., Ефименко А.В., Коломейцев С.Н. Методические подходы к использованию корней зубов, разрушенных ниже уровня десны, в качестве опоры под штифтовые конструкции // Панорама ортопедической стоматологии. 2001. № 4. С. 34–35.
12. Семенюк В.М., Путалова И.Н., Артюхов А.В., Сырцова А.В., Гуц А.К. Применение метода конечных элементов в стоматологии (обзор литературных источников) // Математические структуры и моделирование. 2002. Вып. 9. С. 113–123.

### **MATHEMATICAL JUSTIFICATION FOR THE USE OF THE ROOTS OF THE ANTERIOR TEETH, DESTROYED BELOW THE GUM LEVEL, FOR PIN STRUCTURES**

**A.K. Guts**<sup>1</sup>

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

**T.N. Kapotina**<sup>2</sup>

assistant, e-mail: fs@omsu.ru

**N.I. Panova**<sup>1</sup>

student, e-mail: fs@omsu.ru

**V.M. Semenyuk**<sup>2</sup>

D.Sci (Medicine), Professor, e-mail: fs@omsu.ru

**K.K. Yakovlev**<sup>2</sup>

stomatologists, e-mail: fs@omsu.ru

<sup>1</sup>Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

<sup>2</sup>Omsk State Medical Academy, Omsk, Russia

**Abstract.** The purpose of the work is a mathematical justification for the use of pin structures for restoration of the crown part of the tooth in case of destruction of the root of the anterior teeth below the level of the gums by 1/4 and 1/3 of its length. For this, a mathematical computer model of a tooth with a steel insert was created and computer experiments were carried out to clarify the stress-strain states of a tooth with an insert that under a load of 3, 30, 60 and 90 kg. Based on our research (mathematical calculations and observations of up to 48 patients aged 20 to 40 years with pin structures and porcelain crowns), the following provisions can be formulated: 1) destroyed roots of anterior teeth below the level of the gums by 1/4 of the root length can be used in clinical dentistry; 2) 2/3 of the supporting-retaining apparatus of the roots of the anterior teeth with the restored root and coronal part is sufficient for full function

**Keywords:** mathematical justification, computer model, pin construction, tooth root destruction.

### REFERENCES

1. Kopeikin V.N. Pokazaniya i protivopokazaniya k sokhraneniyu i udaleniyu kornei zubov. Teoriya i praktika stomatologii. Trudy MMSI. Vyp. 10. M., 1967. pp. 161–167. (in Russian)



2. Kopeikin V.N. i soavtory. Rukovodstvo po ortopedicheskoi stomatologii. Moscow, Meditsina, 1993. (in Russian)
3. Kopeikin V.N. Ortopedicheskoe lechenie zabolevani paradonta. Moscow, Meditsina, 1977. (in Russian)
4. Guts A.K., Kapotina T.N., Panova N.I., Semenyuk V.M., Faizulin R.T., and Yakovlev K.K. Matematicheskoe obosnovanie k ispol'zovaniyu kornei frontal'nykh zubov, razrushennykh nizhe urovnya desny, pod shtiftovye konstruksii. Uchenyi sovet mat. fak. OmGU, Dep. v VINITI. 21.06.95, no. 1790-B95. 22 p. (in Russian)
5. Kapotina T.N. Biologicheskie i matematicheskie obosnovaniya k ispol'zovaniyu kornei zubov, razrushennykh nizhe urovnya desny, v klinicheskoi stomatologii. Diss. kand. med. nauk. Omsk, 1996, Omskaya gosudarstvennaya meditsinskaya akademiya, 115 p. (in Russian)
6. Ratsionalizatorskoe predlozhenie no. 2302 ot 3 oktyabrya 1995 g. "Sposob podgotovki kul'ti kornya zuba, raspolozhennogo nizhe urovnya desny, pod shtiftovye konstruksii, i ustroistvo dlya ego osushchestvleniya". Omsk, Omskaya gosudarstvennaya meditsinskaya akademiya, 28 noyabrya 1995 g. (in Russian)
7. Vagner V.D., Guts A.K., Kapotina T.N., Semenyuk V.M., and Yakovlev K.K. Otdalennye rezul'taty ispol'zovaniya kornei frontal'nykh zubov, razrushennykh nizhe urovnya desny, v kachestve opory dlya shtiftovykh konstruksii. Puti razvitiya stomatologii: itogi i perspektivy, Materialy konferentsii 27–27 aprelya 1995 g, Ekaterinburg, 1995, pp. 204–206. (in Russian)
8. Guts A.K., Kapotina T.N., Panova N.I., Semenyuk V.M., and Bulanova E.L. Matematicheskoe obosnovanie k ispol'zovaniyu kul'tevoi shtiftovoi vkladki s "vorotnichkom" pri razrushenii kornei zubov nizhe urovnya desny. Vestnik Omskogo universiteta, 1996, no. 2, pp. 17–19. (in Russian)
9. Akhmetyanov A.Sh., Kapotina T.N., Semenyuk V.M., Bulanova E.L., and Guts A.K. Metodicheskie podkhody pri ispol'zovanii kornei frontal'nykh zubov, razrushennykh nizhe urovnya desny, dlya protezirovaniya (khirurgicheskie i terapevticheskie meropriyatiya, osobennosti formirovaniya kul'ti kornya zuba i polucheniya ottiskov, tekhnologiya shtiftovykh konstruksii). Rekomendatsii dlya vrachei-stomatologov, internov i studentov, Omsk, Omskaya gos. med. akademiya, 1996, 20 p. (in Russian)
10. Semenyuk V.M., Guts A.K., Vagner V.D., and Kapotina T.N. Vynoslivost' oporno-uderzhivayushchego apparata zuba, vosstanovlennogo litoi kul'tevoi shtiftovoi konstruksiei, k vertikal'noi nagruzke. Perspektivy razvitiya sovremennoi stomatologii: problemy ural'skogo regiona, Materialy konferentsii stomatologov, 20–22 maya 1997 g., Ekaterinburg, Ural'skaya gos. med. akademiya, 1997, pp. 211–213. (in Russian)
11. Semenyuk V.M., Guts A.K., Vagner V.D., Kapotina T.N., Yakovlev K.K., Zakharov A.V., Kiryushchenko V.M., Efimenko A.V., and Kolomeitsev S.N. Metodicheskie podkhody k ispol'zovaniyu kornei zubov, razrushennykh nizhe urovnya desny, v kachestve opory pod shtiftovye konstruksii. Panorama ortopedicheskoi stomatologii, 2001, no. 4, pp. 34–35. (in Russian)
12. Semenyuk V.M., Putalova I.N., Artyukhov A.V., Syrtsova A.V., and Guts A.K. Prime-nenie metoda konechnykh elementov v stomatologii (obzor literaturnykh istochnikov). Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2002, Vyp. 9, pp. 113–123. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 11.12.2021*

## **ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ УЧЕБНОГО ПЛАНА**

**А.В. Зыкина**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: avzykina@mail.ru

**В.В. Мунько**

ассистент, e-mail: vkreydunova@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск, Россия

**Аннотация.** В работе рассмотрены подходы к моделированию и оптимизации формирования учебного плана образовательной организации. Анализ существующих разработок показал, что при решении задачи формирования учебного плана часто используются эвристические алгоритмы, а модели, базирующиеся на теории графов и сетевого моделирования, можно применять лишь для решения отдельных компонентов задачи. В большинстве моделей учитывается лишь формализация связи дисциплин и компетенций, при этом отсутствует формализация связи дисциплин и преподавателей. Устранение указанных недостатков видится в использовании процедур оптимизации, разработанных на основе дескрипторных моделей, которые позволят при построении учебного плана оценить выбор и дисциплин, и преподавателей, которые максимально обеспечивают компетенции, заявленные в образовательных программах. Наряду с классическими параметрами для формирования учебного плана (объём учебных часов, набор дисциплин) в модели предлагается учитывать влияние компетентности преподавателей и возможность выбора набора дисциплин.

**Ключевые слова:** учебный план, дисциплина, компетенция, компетентность, преподаватель, оптимизация, дескрипторная модель.

### **Введение**

Модернизация образовательных стандартов обуславливает необходимость внесения соответствующих изменений в учебный процесс образовательной организации. Главной составляющей учебного процесса является учебный план. Процесс формирования учебного плана характеризуется значительным влиянием контингента работников вуза и, как следствие, является ключевой проблемой организации учебного процесса. Если формальные требования к учебному плану (например, количество зачётных единиц по каждому блоку учебного плана) выполнить относительно просто, то обеспечение соответствия требуемых в образовательных программах компетенций знаниям (умениям, владениям), заявленным в дисциплинах из учебного плана, требует значительных усилий. Для более глубокого анализа возможных изменений в организации учебного

процесса необходимо применение математического моделирования, что в свою очередь требует создания новых интеллектуальных систем.

Процесс формирования учебного плана образовательного направления вуза является трудоёмкой задачей. Для её решения в первую очередь требуется определить соответствие формальным требованиям образовательных стандартов и образовательных программ вуза. Для этого необходимо знать набор дисциплин, количество зачётных единиц на каждую дисциплину, распределение зачётных единиц по каждому виду учебной работы дисциплины, объём зачётных единиц на весь учебный план и по отдельным блокам. Также отдельной задачей является обеспечение правильной последовательности изучения дисциплин для распределения по семестрам. В целом составление учебного плана образовательного направления осуществляется при соблюдении многих требований, которые прописаны в нормативных документах. Большинство из них расплывчаты. Требования, с одной стороны, могут быть представлены в математической модели как ограничения, накладываемые на формирование учебного плана, с другой — как целевые функции, значение которых необходимо максимизировать или минимизировать.

Таким образом, при реализации учебного плана выделим следующие проблемы:

1. Учебный план сильно зависит от требований образовательных стандартов и нормативных документов вуза.
2. Нормативные документы для формирования учебного плана являются слабо формализованными данными.

## **1. Подходы к оптимизации процесса формирования учебного плана**

Применение математических методов для оптимизации процесса формирования учебного плана началось в начале 70-х годов в Научно-исследовательском институте проблем высшей школы, где особое внимание уделяли автоматизации планирования и организации учебного процесса. Исследования с применением математических методов базировались на методах теории графов и теории сетевого моделирования [1, 2]. Модели учебного плана представляли в виде взвешенного ориентированного графа.

Вершины графа — это дисциплины, дуги — связи между дисциплинами. Такое представление (см. рис. 1) учебного плана имеет ряд преимуществ:

1. Наглядное изображение связей между дисциплинами;
2. Быстрая корректировка учебного плана за счёт введения новых дисциплин.

Поскольку сетевое планирование ориентировано на анализ только направленных нециклических графов, то позже при применении сетевых методов для

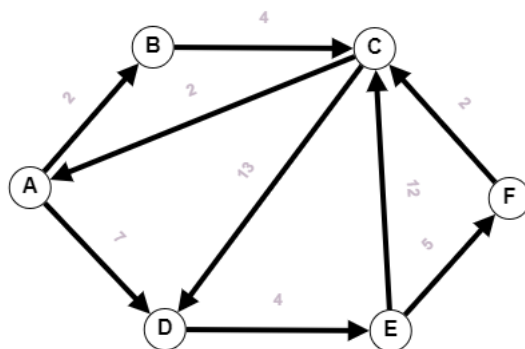


Рис. 1. Графовое представление связей между дисциплинами учебного плана

решения задачи формирования учебной программы был использован термин сетевое моделирование, исключающий условие однонаправленности графа. При реализации учебного плана в виде сетевого графика не всегда удаётся построить ориентированный граф со строгими ограничениями, поскольку учебный процесс представляет собой сложную систему, элементы которой отражают дисциплины, закреплённые за разными кафедрами и имеющие логические связи.

Так, в работе [3] рассмотрен один из возможных подходов к построению такой процедуры, основанный на оптимизации одного из критериев, заданных лицом, принимающим решение (ЛПР). Для решения задач многокритериальной оптимизации на графах применяют модифицированный метод пометок (МП). Модификация предлагается для случая, когда каждое ребро графа задано двумя величинами — временем и стоимостью (см. рис. 2).

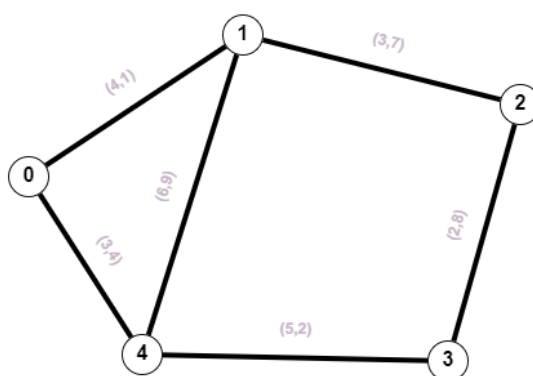


Рис. 2. Пример графа для модифицированного метода пометок

Построенные пути предъявляются ЛПР, которые анализируют их и уточняют свои требования до тех пор, пока не будет получен удовлетворяющий их путь. В отличие от классического алгоритма МП вершина графа может

получить не одну, а несколько пометок  $(T_1, C_1), \dots, (T_k, C_k)$ , где  $T_1 < \dots < T_k$  и  $C_1 > \dots > C_k$ . Кроме того, пометки могут не только добавляться, но и удаляться. Такая формализация возможна, если свести задачу формирования учебного плана к нескольким критериям эффективности.

Ещё одним недостатком сетевого моделирования являлась необходимость участия специалистов по теории сетевого моделирования при разработке сетевых учебных планов [4].

Наряду с применением сетевого моделирования и теории графов для моделирования и анализа учебных планов применяются классические методы оптимизации [5–12].

В работе [5] впервые в задаче формирования учебного плана использованы методы математического моделирования, где булевы переменные  $x_{it}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $t = 1, \dots, T$  вводятся по правилу:  $x_{it} = 1$ , если  $i$ -й раздел изучается в  $t$ -м семестре,  $x_{it} = 0$ , если  $i$ -й раздел не изучается в  $t$ -м семестре. При реализации такого учебного плана главным недостатком является отсутствие некоторых требований к составлению учебного плана, например, не учитываются ограничения по объёму зачётных единиц по блокам учебного плана.

В исследованиях [6, 7] для реализации учебного плана используется междисциплинарный подход, такая формализация основана на применении экспертных оценок. На основе экспертных оценок меняются объёмы курсов, корректируется содержание учебных дисциплин, определяется последовательность изучения курсов. Оптимальная последовательность изучения дисциплин рассчитывается с помощью одной из модификаций метода ветвей и границ. Распределение времени изучения дисциплин по семестрам и учебным неделям проводится итерационным методом последовательного конструирования.

Исследование [8] учитывает формирование оптимизационных моделей сложных объектов в рамках поисковой среды оптимизации. Предлагается подход, позволяющий повысить эффективность функционирования сложных объектов на основе применения процедур параметрической, структурной и структурно-параметрической оптимизации в комплексе с компьютерным моделированием. Исходя из особенностей решаемых задач, предлагается сведение к следующим моделям:

1. Однокритериальная оптимизационная модель;
2. Многокритериальная оптимизационная модель без ограничений;
3. Оптимизационная модель, учитывающая дискретные и альтернативные переменные;
4. Однокритериальная оптимизационная модель без учёта ограничений, включающая только переменные дискретного типа.

В работах [9, 10] в оптимизационных моделях используется модульный подход при формировании учебного плана. Образовательные стандарты и основанные на них программы обучения предусматривают постановку конкретных

компетенций, причём компетенции не должны носить общий характер, а должны быть сформулированы чётко и иметь практико-ориентированную направленность. Такая постановка вопроса требует объединения ряда дисциплин в определённые группы (модули).

В исследовании [11] содержательная составляющая учебного плана представлена в виде множества дисциплин  $D$ , которые делятся на модули  $Mod = [a_{ij}]$ ,  $i = 1, \dots, m(j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , где  $[a_{ij}]$ , —  $i$ -й модуль  $j$ -й дисциплины,  $N$  — количество дисциплин,  $m(j)$  — количество модулей в  $j$ -й дисциплине. Для последовательности изучения дисциплин применяется модуль-потомок, который должен изучаться по времени после изучения всех модулей-предков. Для решения задачи оптимизации используются методы динамического программирования. Однако на практике полученные решения являлись недопустимыми.

Формализация учебного плана в [12] включает распределение учебных модулей по времени изучения (учитывается ограничение по общему времени на изучение каждой дисциплины), выборку наиболее значимых модулей для формирования компетенций обучающегося, наполнение каждого модуля содержательной составляющей (темы аудиторных занятий). После формализации всех дисциплин для определённого образовательного направления обучения формируется общая база знаний, включающая все дисциплины учебного плана. Дисциплина представлена в виде набора атрибутов и сущностей. В дальнейшем база обновляется и дополняется учебными дисциплинами в виде набора характеризующих их атрибутов и сущностей. Такое представление дисциплин формирует возможность оценки (в том числе количественной) взаимосвязей между всеми дисциплинами учебного плана.

В работах [13–15] отмечается, что учебный план должен быть направлен на результаты обучения, которые представлены в виде компетенций. Компетентностная модель обучающегося определяется за счёт формирования связей между компетенциями и дисциплинами. Акцентируется внимание на необходимости иерархически определять компетенции, при этом учитывая формальные требования образовательных стандартов.

В работе [16] определены основные задачи, реализуемые чаще всего в информационных системах управления учебным процессом: зачисление, перевод и отчисление студентов, контроль академической успеваемости студентов, формирование учебных планов, распределение учебной нагрузки между факультетами, кафедрами и преподавателями, формирование штатного расписания, составление и корректировка расписаний занятий и экзаменов. Акцентируется внимание на сложности автоматизации формирования учебного плана из-за необходимости разрабатывать учебный план фактически для каждого студента за счёт наличия различных специализаций и дисциплин по выбору. Решение этой проблемы видится в многоуровневой структуре учебного плана, когда на верхнем уровне располагается базовая часть и заглушки вариативных частей, а сами вариативные элементы учебного плана должны располагаться на более низких уровнях.

Для решения проблемы оптимизации учебного плана в работе [17] применяется имитационное динамическое моделирование, которое включает графиче-

ское представление задачи и формализацию обработки аналитических соотношений, получаемых на основе имитационной динамической модели. При этом формирование имитационных динамических моделей является трудоёмким процессом.

В работах [13, 18, 19] для автоматизированного формирования учебного плана применены эвристические методы. В работе [13] представлена дисциплинарно-генетическая модель. Структура учебного плана задаётся матрицей распределения аудиторных занятий по семестрам:

$$T_u = [T_1^d, T_m^d] = \begin{vmatrix} t_{11}^d & t_{21}^d & t_{m1}^d \\ t_{12}^d & t_{22}^d & t_{m2}^d \\ t_{1n}^d & t_{2n}^d & t_{mn}^d \end{vmatrix},$$

где  $t_{ij}^d$  — число часов в неделю, отведённых на аудиторные занятия в  $j$ -м семестре для каждой  $i$ -й дисциплины,  $T_i^d$  — вектор распределения недельной нагрузки по всем семестрам для дисциплины  $d$ .

В работе [18] при поиске наилучшего учебного расписания в качестве критерия эффективности занятий выбирают интересы учебных групп  $g$  и преподавателей  $p$ . Для оценки достоинств и недостатков составленного расписания вводится система штрафов, например, за «окно» в расписании начисляют штраф в 10 баллов. Изменяя количество и значения критериев оптимизации, получают расписание, удовлетворяющее тем или иным параметрам.

Для оптимизации построения учебных планов в работе [19] предлагается описание дисциплин и взаимосвязей между ними в виде множества дисциплин  $D = (D_1, D_2, \dots, D_m)$ , каждый элемент множества  $D$  содержит подмножества компетенций  $D_j = (K_1, K_2, \dots, K_n), j = 1, \dots, m$ , где  $K_i = (T_i, P_i, C_i)$  — компетенция  $i, i = 1, \dots, n$ ,  $T_i$  — множество элементов знаний,  $P_i$  — множество умений,  $C_i$  — множество навыков,  $D_j = (OutD_j, InpD_j)$  — дисциплина, где  $OutD_j = (TO_j, PO_j)$  — теоретические и практические элементы знаний и умений,  $InpD_j = (TI_j, PI_j)$  — теоретические и практические элементы навыков.

Главный недостаток эвристических методов в том, что решение не гарантирует нахождение оптимального решения. Кроме того, проблемой является определение множества допустимых учебных планов, так как найти даже один допустимый учебный план при выполнении всех ограничений является трудоёмкой задачей.

Сложность формализации составления учебного плана заключается в неполноте и неточности исходных данных, расплывчатости ограничений и целей, учитывающих изменения внешних и внутренних условий лица, принимающего решения, при этом дополнительными проблемами являются требования логической последовательности изучения дисциплин. Так, в работе [20] отмечается, что составление учебного плана чаще всего основывается на эвристических алгоритмах.

В работе [21] решение задачи формирования учебного плана осуществляется путём декомпозиции задачи на подзадачи и формирования иерархической структуры информационно несложных и информационно сложных задач приня-

тия решений. Однако этот подход сильно зависит от изменений внешней среды и субъективных предпочтений ЛПР.

Работы зарубежных исследователей [22–29] сводятся к моделям интеграции компетенций в учебные планы. Система образования ведущих университетов европейского образовательного пространства основывается на стандартах ESG (стандарты и рекомендации для гарантии качества высшего образования), и жёстких ограничений для формирования учебного плана в европейском высшем образовании нет [30]. Вместо этого существует длинный перечень предметов (модулей), часть из которых являются обязательными, а остальные студент может выбрать индивидуально. Одной из основных задач европейских университетов является содействие в самореализации, раскрытии и развитии личного потенциала, создании и усвоении собственной свободы и ответственности за жизненный выбор.

## 2. Концепция формирования учебного плана

Анализ российских образовательных стандартов нового поколения 3++ [31] показал, что учебные планы, несмотря на их вариативность, сводятся к следующим составляющим:

### 1. Блок 1. Дисциплины

#### (а) Базовая часть

- i. Обязательные дисциплины (гуманитарные дисциплины и дисциплины профиля).
- ii. Фундаментальные дисциплины профиля, формируемые образовательной организацией (руководителем образовательной программы).

#### (b) Вариативная часть

- i. Фундаментальные дисциплины профиля, формируемые образовательной организацией (руководителем образовательной программы).
- ii. Дисциплины профиля.

### 2. Блок 2. Практика

#### (а) Базовая часть (обязательная практика).

#### (b) Вариативная часть (дополнительные практики и спецпрактики).

### 3. Блок 3. Государственная итоговая аттестация.

### 4. Блок 4. Факультативы.

Главной составляющей учебного плана и организационной единицей является дисциплина. Напрямую нельзя определить, какие компетенции приобретаются в результате изучения конкретной дисциплины, поэтому предлагается



следующий принцип формирования учебного плана с учётом требований образовательного стандарта: дисциплины учебного плана напрямую связаны только с дескрипторами (знаниями, умениями, навыками) которые, в свою очередь, связаны с компетенциями. Для этого вводится формализованное представление [32] компетенции через кортеж, элементами которого являются множество дескрипторов и множество терминов. Тогда каждая сущность учебного плана может быть представлена в пространстве дескрипторов  $V = \langle S^V, D^V, T^V \rangle$ , где  $V$  — это обозначение выбранной сущности,  $S^V$  — формулировка выбранной сущности на естественном языке,  $D^V$  — множество дескрипторов («знать», «уметь», ...),  $T^V$  — множество терминов.

Взаимосвязь дисциплин и компетенций задаётся параметром  $k_{ij} \in [0, 1]$ , который называется коэффициентом закрытия  $i$ -й компетенции  $j$ -й дисциплиной. После этого для каждой компетенции формируется множество дисциплин, каждая из которых обеспечивает закрытие  $i$ -й компетенции не менее, чем на заданную величину  $\alpha$ , а затем строится многокритериальная задача оптимизации, решением которой являются набор дисциплин, максимально обеспечивающих компетенции.

Взаимосвязь дисциплин и преподавателей задаётся параметром  $h_{pj}^s \in [0, 1]$ , который называется коэффициентом профильности  $p$ -го преподавателя по  $s$ -му виду учебной работы  $j$ -й дисциплины. Если  $h_{pj}^1 = 1$ , то  $p$ -й преподаватель является ведущим по  $j$ -й дисциплине. Этот коэффициент зависит от образовательных дипломов преподавателя, курсов повышения квалификации, публикаций, личного рейтинга и т. д. После этого для каждой дисциплины формируется множество преподавателей, профильность которых по  $s$ -му виду учебной работы  $j$ -й дисциплины не меньше заданной величины  $\beta$ , а затем строится многокритериальная задача оптимизации, решением которой является список преподавателей для дисциплины.

### 3. Выводы

Моделирование процесса формирования программы обучения и его отражения в учебном плане — одна из ключевых и наиболее сложных проблем управления в вузах. При решении задачи формирования учебного плана часто используются эвристические алгоритмы, а алгоритмы теории графов и сетевого моделирования можно применять лишь для решений отдельных компонентов задачи. Кроме того, анализ существующих разработок показал, что исследования сводятся лишь к формализации связи дисциплин и компетенций, при этом отсутствует связь дисциплин и преподавателей. Решение указанных проблем видится в использовании процедур оптимизации, разработанных на основе дескрипторных моделей, которые позволят при построении учебного плана оценить выбор и дисциплин, и преподавателей, которые максимально обеспечивают компетенции, заявленные в образовательных программах.

Такие решения позволяют повысить качество подготовки выпускников и их конкурентоспособность на рынке труда. Встроенные рекомендательные системы помогут учащимся формировать в рамках основных образовательных

программ свои индивидуальные образовательные траектории, чтобы получать актуальные на рынке труда специализации с учётом индивидуальных особенностей учащихся.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин А.В. Вопросы оптимального составления учебных планов и программ: диссерт. канд. техн. наук. М. : Высшая школа, 1969. 179 с.
2. Черкасов Б.П. Совершенствование учебных планов и программ на базе сетевого планирования. М. : Высшая школа, 1975. 78 с.
3. Белова А.М., Заславский А.М. Модификация метода пометок для задач многокритериальной оптимизации на графах // Экономика и математические методы. 2020. Т. 56, № 1. С. 95–99.
4. Истомин А.Л., Засухина О.А. Методы, модели и алгоритмы автоматизированного составления учебного плана образовательной программы в вузе // Информатизация образования и науки. 2011. № 3. С. 67–82.
5. Сетевые методы планирования и организация учебного процесса / А.А. Овчинников [и др.]. М. : Высшая школа, 1972, 156 с.
6. Моргунов И.Б., Роменец В.А. Методика научно-обоснованного составления учебного плана. Обзорная информация. М.: НИИВШ, 1976.
7. Роменец В.А. Междисциплинарный подход к разработке учебных планов и программ в Московском институте стали и сплавов / В.А. Роменец [и др.] // Высшее образование в Европе. 1985. Вып 4. С. 61–66.
8. Тишуков Б.Н. Многометодный подход к управлению сложными объектами на основе комплексирования процедур численной оптимизации методами компьютерного моделирования / Б.Н. Тишуков [и др.] // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2020. Т. 16, № 1. С. 33–38.
9. Дудук А. А. Модульный подход при разработке учебного плана / А.А. Дудук [и др.] // Материалы X Международной научно-методической конференции «Перспективы развития высшей школы». 2019. С. 139–140.
10. Применение ЭЦВМ для автоматизации составления учебных планов и расписаний / Анисимов Б.В. [и др.]. М.: Высшая школа. 1972, С. 121–142.
11. Демаков В.И. Математическое моделирование процесса формирования учебных планов для высших учебных заведений: диссерт. канд. техн. наук. Иркутск. 2006. 127 с.
12. Истомин А.Л., Засухина О.А. Постановка и методы решения задачи оптимизации учебного плана в вузе // Системы управления и информационные технологии. 2008. Вып. 33. С. 346–350.
13. Вишталь А.Г. Субоптимизация учебных планов образовательных программ на основе современных методов обработки информации: автореф. дис. канд. техн. наук. Ростов н/Д, 2007. 15 с.
14. Фионова Л.Р. Разработка компонентов информационной системы для управления учебным процессом на основе компетентностного подхода // Информатизация образования и науки. 2011. Вып. 4. С. 14–28.
15. Харитонов И.М. Алгоритм формирования учебного плана с применением методики формализованного представления учебной дисциплины (на примере дисциплины

- «Моделирование систем») // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2. С. 178–185.
16. Зуенко А.А. Фридман О.В. Формирование учебных планов вузов как задача удовлетворения ограничений // Труды Кольского научного центра РАН. 2016. С.80–92.
  17. Федотов А.В. Моделирование и управление вузом. Л. : Ленингр. ун-т. 1985, 120 с.
  18. Яндыбаева Н.В. Генетический алгоритм в задаче оптимизации учебного расписания вуза // Современные наукоемкие технологии. 2009. Вып. 11. С. 97–98.
  19. Курилова О.Л. Применение генетического алгоритма для оптимизации учебного плана // Информационные технологии и образование. 2013. Вып. 3. С. 84–92.
  20. Курченкова Т.В., Лавлинская О.Ю. Модели принятия решений в задаче синтеза учебного плана // Вестник Воронежского института МВД России. 2009. Вып. 1. С. 76–85.
  21. Найханова Д.В., Дамбаева С.В. Методы и алгоритмы принятия решений в управлении учебным процессом в условиях неопределенности. Улан-Удэ: ВСГТУ, 2004. 164 с.
  22. Carvajal-Ortiz L. [et. al.]. Models, methods and software prototype to support the design, evaluation, and analysis in the curriculum management of competency-based for higher education // XLV Latin American Computing Conference (CLEI). 2019.
  23. Snchez F. [et. al.]. Developing professional skills at tertiary level: A model to integrate competencies across the curriculum // IEEE Frontiers in Education Conference (FIE) Proceedings. 2014.
  24. Banerjee R. [et. al.]. Curriculum Integration of engineering with business to enhance engineer's management competency — A multidisciplinary to interdisciplinary approach // Advances in Science and Engineering Technology International Conferences (ASET). 2020.
  25. Romero L. [et. al.]. An Ontology for Describing Competency-Based Curriculum at Engineering Careers // 14th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI). 2019.
  26. Impagliazzo J. [et. al.]. Incorporating CC2020 and SWECOM Competencies into Software Engineering Curricula: A Tutorial // IEEE 32nd Conference on Software Engineering Education and Training (CSEET). 2020.
  27. Curbano R.J.P. [et. al.]. Competency-based Assessment of Industrial Engineering Graduates: Basis for Enhancing Industry Driven Curriculum // IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM). 2018.
  28. Johnson B., Ulseth R. Development of professional competency through professional identity formation in a PBL curriculum // IEEE Frontiers in Education Conference (FIE). 2016.
  29. Harmse A., Wadee A. Competency Frameworks as Activators for curriculum development in ICT courses: A comparative study // International Conference on Artificial Intelligence, Big Data, Computing and Data Communication Systems (icABCD). 2020.
  30. Европейские стандарты и рекомендации для гарантии качества высшего образования. URL: <https://rusregister.ru/standards/esg-enqa/> (дата обращения: 27.10.2021).
  31. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего обра-

зования. URL: <http://fgosvo.ru/> (дата обращения: 27.10.2021).

32. Канева О.Н. [и др.]. Разработка алгоритма нахождения семантической близости между компетенциями // Информационный бюллетень Омского научно-образовательного центра ОмГТУ и ИМ СО РАН в области математики и информатики. 2017. Т. 1, № 1. С. 155–157.

## APPROACHES TO MODELING OF THE CURRICULUM DEVELOPMENT PROCESS

**A.V. Zykina**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: avzykina@mail.ru

**V.V. Munko**

assistant, e-mail: vkreydunova@mail.ru

Omsk State Technical University, Omsk, Russia

**Abstract.** The paper considers approaches to modeling and optimization of educational institution's curriculum development. The analysis of existing research has shown that in solving the problem of curriculum development heuristic algorithms are often used. Models based on graph theory and network simulation can be used only to solve individual segments of the problem. Most models include only formalization of the connection between disciplines and competencies, without formalization of the connection between disciplines and teachers. However, to eliminate these disadvantages, one can use optimization procedures developed from descriptor models. These procedures will enable us to evaluate the choice of disciplines and teachers that guarantee the competencies stated in the educational programs. Along with classical parameters for curriculum development ( number of academic hours, set of disciplines), the model should consider the impact of teachers' expertise and the possibility of selecting a set of disciplines.

**Keywords:** curriculum, discipline, competence, expertise, teacher, optimization, descriptor modele.

## REFERENCES

1. Nikitin A.V. Voprosy optimal'nogo sostavleniya uchebnykh planov i programm: dissert. kand. tekhn. nauk. Moscow, Vysshaya shkola, 1969, 179 p. (in Russian)
2. Cherkasov B.P. Sovershenstvovanie uchebnykh planov i programm na baze setevogo planirovaniya. Moscow, Vysshaya shkola, 1975, 78 p. (in Russian)
3. Belova A.M. and Zaslavkii A.M. Modifikatsiya metoda pometok dlya zadach mnogokriterial'noi optimizatsii na grafakh. Ekonomika i matematicheskie metody, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 95–99. (in Russian)
4. Istomin A.L. and Zasukhina O.A. Metody, modeli i algoritmy avtomatizirovannogo sostavleniya uchebnogo plana obrazovatel'noi programmy v vuze. Informatizatsiya obrazovaniya i nauki, 2011, no. 3, pp. 67–82. (in Russian)
5. Ovchinnikov A.A. [i dr.] Setevye metody planirovaniya i organizatsiya uchebnogo protsesssa. Moscow, Vysshaya shkola, 1972, 156 p. (in Russian)

6. Morgunov I.B. and Romenets V.A. Metodika nauchno-obosnovannogo sostavleniya uchebnogo plana. Obzornaya informatsiya. Moscow, NIIVSh, 1976. (in Russian)
7. Romenets V.A. [i dr.] Mezhdistsiplinaryi podkhod k razrabotke uchebnykh planov i programm v Moskovskom institute stali i splavov. Vyshee obrazovanie v Evrope, 1985, vol. 4, pp. 61–66. (in Russian)
8. Tishukov B.N. [i dr.] Mnogometodnyi podkhod k upravleniyu slozhnymi ob"ektami na osnove kompleksirovaniya protsedur chislennoi optimizatsii metodami komp'yuternogo modelirovaniya. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 33–38. (in Russian)
9. Duduk A.A. [i dr.] Modul'nyi podkhod pri razrabotke uchebnogo plana. Materialy Kh Mezhdunarodnoi nauchno-metodicheskoi konferentsii "Perspektivy razvitiya vysshei shkoly", 2019, pp. 139–140. (in Russian)
10. Anisimov B.V. [i dr.] Primenenie ETsVM dlya avtomatizatsii sostavleniya uchebnykh planov i raspisaniy. Moscow, Vysshaya shkola, 1972, pp. 121–142. (in Russian)
11. Demakov V.I. Matematicheskoe modelirovanie protsessa formirovaniya uchebnykh planov dlya vysshikh uchebnykh zavedeniy: disert. kand. tekhn. nauk. Irkutsk, 2006, 127 p. (in Russian)
12. Istomin A.L. and Zasukhina O.A. Postanovka i metody resheniya zadachi optimizatsii uchebnogo plana v vuze. Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii, 2008, vol. 33, pp. 346–350. (in Russian)
13. Vishtal' A.G. Suboptimizatsiya uchebnykh planov obrazovatel'nykh programm na osnove sovremennykh metodov obrabotki informatsii: avtopef. dis. kand. tekhn. nauk. Rostov n/D, 2007, 15 p. (in Russian)
14. Fionova L.R. Razrabotka komponentov informatsionnoi sistemy dlya upravleniya uchebnym protsessom na osnove kompetentnostnogo podkhoda. Informatizatsiya obrazovaniya i nauki, 2011, vol. 4, pp. 14–28. (in Russian)
15. Kharitonov I.M. Algoritm formirovaniya uchebnogo plana s primeneniem metodiki formalizovannogo predstavleniya uchebnoi distsipliny (na primere distsipliny "Modelirovanie sistem"). Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika, 2011, no. 2, pp. 178–185. (in Russian)
16. Zuenko A.A. and Fridman O.V. Formirovanie uchebnykh planov vuzov kak zadacha udovletvoreniya ogranicheniy, Trudy Kol'skogo nauchnogo tsentra RAN. 2016. pp. 80–92. (in Russian)
17. Fedotov A.V. Modelirovanie i upravlenie vuzom. Leningrad, Leningr. un-t, 1985, 120 p. (in Russian)
18. Yandybaeva N.V. Geneticheskii algoritm v zadache optimizatsii uchebnogo raspisaniya vuza. Sovremennye naukoemkie tekhnologii, 2009, vol. 11, pp. 97–98. (in Russian)
19. Kurilova O.L. Primenenie geneticheskogo algoritma dlya optimizatsii uchebnogo plana. Informatsionnye tekhnologii i obrazovanie, 2013, vol. 3, pp. 84–92. (in Russian)
20. Kurchenkova T.V. and Lavlinskaya O.Yu. Modeli prinyatiya resheniy v zadache sinteza uchebnogo plana. Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii, 2009, vol. 1, pp. 76–85. (in Russian)
21. Naikhanova D.V. and Dambaeva S.V. Metody i algoritmy prinyatiya resheniy v upravlenii uchebnym protsessom v usloviyakh neopredelennosti. Ulan-Ude, VSGTU, 2004, 164 p. (in Russian)
22. Carvajal-Ortiz L. [et. al.]. Models, methods and software prototype to support the

- design, evaluation, and analysis in the curriculum management of competency-based for higher education. XLV Latin American Computing Conference (CLEI), 2019.
23. Snchez F. [et. al.]. Developing professional skills at tertiary level: A model to integrate competencies across the curriculum. IEEE Frontiers in Education Conference (FIE) Proceedings, 2014.
  24. Banerjee R. [et. al.]. Curriculum Integration of engineering with business to enhance engineer's management competency — A multidisciplinary to interdisciplinary approach. Advances in Science and Engineering Technology International Conferences (ASET). 2020.
  25. Romero L. [et. al.]. An Ontology for Describing Competency-Based Curriculum at Engineering Careers. 14th Iberian Conference on Information Systems and Technologies (CISTI), 2019.
  26. Impagliazzo J. [et. al.]. Incorporating CC2020 and SWECOM Competencies into Software Engineering Curricula: A Tutorial. IEEE 32nd Conference on Software Engineering Education and Training (CSEET), 2020.
  27. Curbano R.J.P. [et. al.]. Competency-based Assessment of Industrial Engineering Graduates: Basis for Enhancing Industry Driven Curriculum. IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM). 2018.
  28. Johnson B. and Ulseth R. Development of professional competency through professional identity formation in a PBL curriculum. IEEE Frontiers in Education Conference (FIE), 2016.
  29. Harmse A. and Wadee A. Competency Frameworks as Activators for curriculum development in ICT courses: A comparative study. International Conference on Artificial Intelligence, Big Data, Computing and Data Communication Systems (icABCD), 2020.
  30. Evropeiskie standarty i rekomendatsii dlya garantii kachestva vysshego obrazovaniya. URL: <https://rusregister.ru/standards/esg-enqa/> (27.10.2021). (in Russian)
  31. Portal Federal'nykh gosudarstvennykh obrazovatel'nykh standartov vysshego obrazovaniya. URL: <http://fgosvo.ru/> (27.10.2021). (in Russian)
  32. Kaneva O.N. [i dr.]. Razrabotka algoritma nakhozheniya semanticheskoi blizosti mezhdru kompetentsiyami. Informatsionnyi byulleten' Omskogo nauchno-obrazovatel'nogo tsentra OmGTU i IM SO RAN v oblasti matematiki i informatiki, 2017, vol. 1, no. 1, pp. 155–157. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 30.11.2021*

## **ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЛАСТОВ ОДНОЙ НАГНЕТАТЕЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ**

**П.М. Косьянов<sup>1</sup>**

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: kospiter2012@yandex.ru

**Н.В. Манюкова<sup>2</sup>**

к.п.н., доцент, e-mail: manukovanv@mail.ru

<sup>1</sup>Тюменский индустриальный университет, филиал в г. Нижневартовск, Россия

<sup>2</sup>Нижневартовский государственный университет, г. Нижневартовск, Россия

**Аннотация.** В статье представлены особенности проектирования компьютерной модели одновременно раздельной и поочередной эксплуатации нескольких пластов одной нагнетательной скважины для использования в процессе обучения специальным дисциплинам направления подготовки «Нефтегазовое дело».

**Ключевые слова:** компьютерная модель, проектирование компьютерной модели, виртуальная компьютерная лаборатория, нагнетательная скважина.

### **Введение**

В настоящее время и в сфере образования, и в нефтедобывающей отрасли производства стремительно развивается инновационное направление, связанное с разработкой и внедрением виртуальных компьютерных лабораторий (ВКЛ). Разработка и использование таких лабораторий в учебном процессе позволяет проводить интерактивные лабораторные / практические работы как в традиционном, так и дистанционном форматах по дисциплинам направлений подготовки вуза [4–12].

В данной работе описывается проектирование компьютерной модели одновременно раздельной и поочередной эксплуатации нескольких пластов одной нагнетательной скважины для использования в процессе обучения специальным дисциплинам направления подготовки «Нефтегазовое дело».

При использовании ВКЛ не требуется, чтобы специальное программное обеспечение было установлено на компьютере, лаборатория работает в удалённом режиме, используя клиент-серверную технологию. Обучающимся и преподавателям достаточно иметь доступ к компьютерам, подключённым к сети Интернет.

## 1. Постановка задачи

Компьютерная модель (КМ) — это (1) компьютерная программа, работающая на отдельном компьютере или нескольких компьютерах, взаимодействующих между собой, и описывающая некую модель определённой системы; это (2) модель, построенная на основе компьютерных технологий, электронных устройств и сетей; это (3) созданный на основе ресурсов компьютера виртуальный образ, отражающий свойства и связи моделируемого объекта, а также определяющий качественные и количественные внутренние и внешние его характеристики; это (4) модель, представляющая моделируемый объект компьютерными программными средствами.

Разработке КМ предшествуют мысленные, вербальные, структурные, математические и алгоритмические модели.

Различают КМ по видам применения — это обучающие, научно-исследовательские, научно-технические модели, позволяющие проводить исследование процессов, явлений и реальных объектов.

Создание КМ одновременно раздельной и поочерёдной эксплуатации нескольких пластов (от двух до четырёх) одной нагнетательной скважины, предполагает расчёт основных физических параметров, описывающих процесс закачки жидкости в пласты скважины.

Модель — это отдельная электронная страница с удобным графическим интерфейсом и различными элементами управления, с помощью которых пользователь имеет возможность изменять параметры модели. Это в свою очередь, позволяет анализировать её поведение при различных условиях.

В рамках данной модели должны решаться следующие задачи:

1. Определение давления на устье скважины (устьевое давление);
2. Расчёт диаметра штуцера, который должен быть установлен на устье скважины;
3. Определение общего расхода жидкости (воды) для закачки в пласты нагнетательной скважины;
4. Определение пластового давления (для каждого пласта);
5. Расчёт диаметра пластового штуцера (для каждого пласта);
6. Расчёт приёмистости пласта (для каждого пласта);
7. Определение расхода жидкости (воды) по пластам.

Результатом построенной модели должны быть не только рассчитанные значения определяемых физических параметров, но и графическое представление зависимостей этих величин.

Предполагается, что ВКЛ с удалённым доступом будет снабжена элементами управления приборами и индикаторами измерителей, которые будут отображаться на экране компьютера обучающегося, подключённого к интернету. Для



выполнения лабораторных / практических работ с удалённым доступом нужно иметь учебный стенд, оснащённый специальным оборудованием и управляемый через интернет, который может находиться в учебной лаборатории университета и на производстве. Достоинством такого подхода к организации лабораторных/практических работ является возможность одновременной работы нескольких обучающихся на одном лабораторном стенде.

На сегодняшний день существует большое количество автоматизированных комплексов, позволяющих проводить построение и исследование моделей [7–12]. Любая программная среда имеет свой инструментарий и позволяет работать с конкретными видами информационных моделей. Поэтому перед разработчиком возникает проблема выбора более удобной и эффективной среды для решения поставленной задачи. От выбора программной среды зависит и алгоритм построения КМ, и форма его представления.

Например, это может быть блок-схема. Руководствуясь блок-схемой, задачу можно решить в разных средах. В среде программирования — это программа, записанная на алгоритмическом языке. В прикладных средах — это последовательность технологических приёмов, приводящая к решению задачи.

## 2. Методика исследования и расчёт параметров нагнетательной скважины

Рассмотрим методику определения пластового давления и расчёта коэффициента приёмистости пластов одной скважины. Для проведения данного исследования необходимо:

1. Снять глухую пробку (5ПГ-25) или регулятор жидкости (5РД-25) из скважинной камеры (КТ1) на глубине исследуемого пласта;
2. Закачать воду и зафиксировать минимальное давление поглощения пласта, которое условно принимается равное пластовому давлению;
3. Закачать воду в каждый пласт при 2-х режимах и соответственно зафиксировать при установившихся  $P_{\text{лин}}^{\text{зак}}$ ,  $P_{y1}^{\text{зак}}$ ,  $P_{y2}^{\text{зак}}$ , и  $G_1$ ,  $G_2$ , ( $\text{м}^3/\text{сут}$ );
4. Определить коэффициент приёмистости исследуемого пласта по формуле:

$$k_{\text{пр}} = \frac{G_1 - G_2}{P_{y1}^{\text{зак}} - P_{y2}^{\text{зак}}}, \text{м}^3/\text{сут} \cdot \text{атм}; \quad (1)$$

5. Определить проектное забойное давление для исследуемого пласта:

$$P_{\text{заб}}^{\text{проект}} = P_{\text{пл}} + \frac{G}{k}, \text{атм}; \quad (2)$$

6. Определить проектное давление в колонне НКТ на глубине исследуемого пласта:

$$P_{\text{НКТ}}^{\text{проект}} = P_{\text{у}}^{\text{проект}} + \frac{\gamma H}{10} = \Delta P_{\text{тр}}, \text{атм}, \quad (3)$$

где  $P_y^{\text{проект}} = P_{\text{лин}}$ ,

$\Delta P_{\text{тр}}$  — потери давления на трение, определяется по формуле Дарси-Вейсбаха;

$\gamma$  — удельный вес воды;

$H$  — глубина пласта, м;

7. Определить диаметр штуцера для исследуемого пласта:

$$d = \sqrt{\frac{G_{\text{проект}}}{0,785 \cdot 86400 \mu \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \Delta P}{\rho}}}}, \text{ м}; \quad (4)$$

8. После установки регуляторов для пластов и установления режима закачки определить фактические расходы закачки воды до пласта. Для этого расходомер воды сначала необходимо спустить на глубину выше верхнего пласта, а затем между точками закачки по пластам. По результатам исследования измерить (для 3-х пластов):

— над верхним пластом  $G_{\text{общ}}$ ;

— между двумя верхними пластами;

— между двумя нижними пластами.

Затем определить расход закачки по пластам (снизу-вверх). А эквивалентный диаметр двухштуцерного регулятора (например РД-25) рассчитывается по формуле:

$$d_{\text{экр}} = \sqrt{d_{\text{ш1}}^2 + d_{\text{ш2}}^2}. \quad (5)$$

На рисунке 1 показан пример одновременно раздельной и поочерёдной эксплуатации двух пластов [13].

### 3. Математическая модель

Математическая модель имеет в своей основе следующие уравнения.

1. Уравнение Дарси-Вейсбаха, описывающее потери давления на трение в трубопроводе:

$$\Delta P_{\text{пр}} = \lambda \frac{\nu^2 L \rho}{2g d}, \quad (6)$$

где  $\Delta P_{\text{пр}}$  — потеря давления в Па;

$\lambda$  — коэффициент Дарси;

$\nu$  — линейная скорость движения жидкости в трубопроводе в  $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;

$\rho$  — плотность жидкости в  $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;

$g$  — ускорение свободного падения в  $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ;

$L$  и  $d$  — длина и диаметр трубопровода в м;

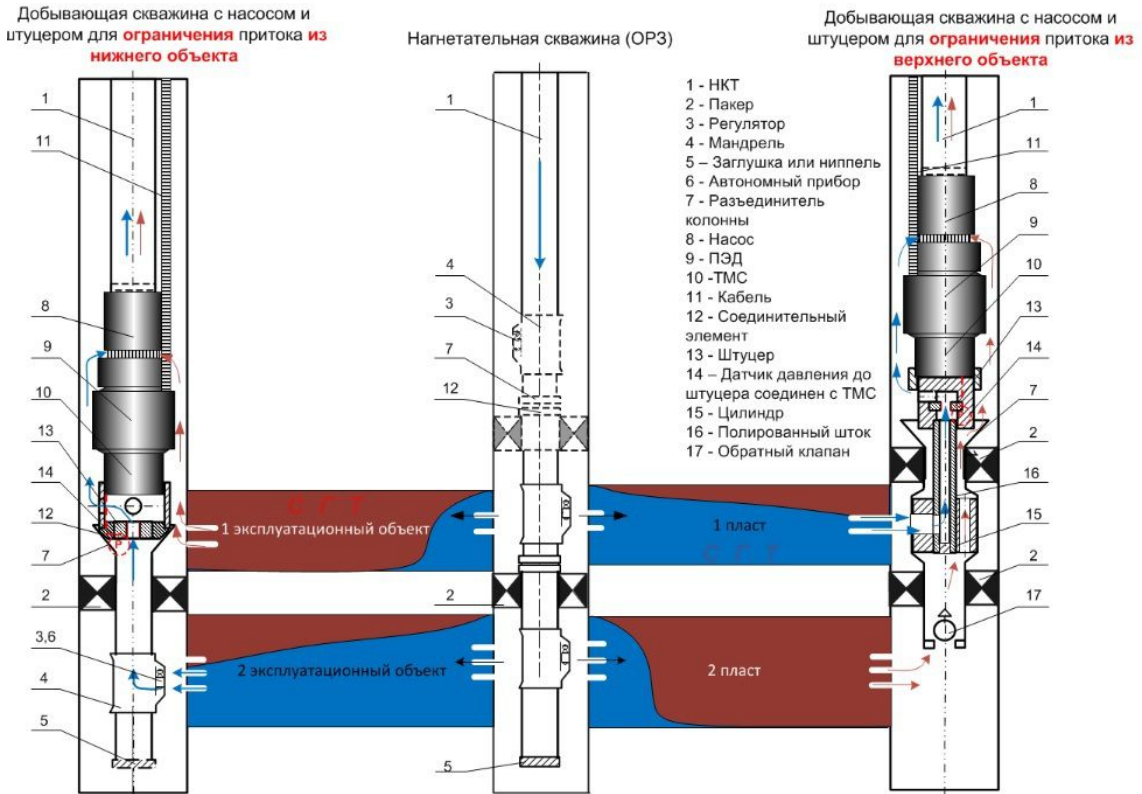


Рис. 1. Схема одновременно раздельной и поочерёдной эксплуатации двух пластов

2. Коэффициент гидравлического трения.

Формула Пуазейля для ламинарного режима движения жидкости

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \tag{7}$$

формула для турбулентного движения жидкости

при  $10000 \geq Re \geq 3000$  :

$$\lambda = 8 \left( \frac{1}{2,21 \cdot \ln(\frac{Re}{7})} \right)^2, \tag{8}$$

при  $Re \geq 10000$  :

формула Альтшуля:

$$\lambda = f(Re, \Delta) = 0,11 \left( \Delta_\gamma + \frac{68}{Re} \right)^{0,25}, \tag{9}$$

формула Блазиуса:

$$\lambda = f(Re) = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}, \tag{10}$$

$$\lambda = 8 \left( \frac{1}{2,457 \cdot (\ln(3,707(\frac{D}{\Delta})))^2} \right); \quad (11)$$

3. Уравнение, описывающее движение воды через штуцер:

$$Q = \nu S \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho}}, \quad (12)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость,

$\Delta P$  — потери давления,

$S$  — площадь сечения отверстия штуцера,

$Q$  — расход жидкости;

4. Уравнение, описывающее приёмистость пласта:

$$Q = k_{\text{пр}}(P_3 - P_{\text{пл}}), \quad (13)$$

где  $P_{\text{пл}}$  — пластовое давление,

$P_3$  — забойное давление,

$k_{\text{пр}}$  — коэффициент приёмистости,

$Q$  — расход жидкости.

#### 4. Проектирование программного продукта

Основными предпосылками выбора среды программирования являются задача и функциональные требования программы:

1. Допустимая скорость выполнения расчётов;
2. Модульность;
3. Клиент-серверная технология;
4. Вывод отчётов в формате HTML, Microsoft Excel;
5. Возможность сохранения результатов расчётов в промежуточные форматы данных для дальнейшей передачи в базу данных (XML).

Исходя из перечисленных предпосылок, была выбрана интегрированная среда программирования Visual Studio, поскольку поддерживает:

1. Возможность ведения одновременной разработки локальной и сетевой версии программного продукта. Предполагается использование одних и тех же вычислительных модулей при разных интерфейсах (Windows и Web-интерфейсах). В этом случае программное обеспечение web-сервера также должен быть продуктом корпорации Microsoft (какая-либо версия Microsoft Internet Information Server);

2. Возможность выбора языка программирования. Visual Studio предлагает программирование на 5 языках (C Sharp, Visual C++, VB.NET, J Sharp);
3. Возможность поддержки новейших технологий в области передачи данных (SOAP, XML);
4. Наличие большого количества готовых компонентов специально для создания Web-приложений, что ставит его вне конкуренции в создании подобного рода программ (например от PHP – MySQL).

Общий алгоритм работы программы

Работа программы состоит из нескольких основных частей (рис. 2):

- выбор задачи;
- задание параметров расчёта;
  - выбор метода расчёта коэффициента гидравлического трения;
  - задание констант, коэффициентов;
  - число пластов;
- ввод или загрузка из внешнего файла исходных данных;
- решение задачи, расчёт параметров модели;
- вывод результатов;
- сохранение задачи и создание отчётов.

Более детально рассмотрим решаемые задачи.

1. Определение давления на устье скважины (устьевое давление).

Исходными данными для задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;
- 2) диаметр устьевого штуцера, мм;
- 3) общий расход воды,  $\frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ ;

Устьевое давление находим из формулы:

$$P_{\text{устье}} = P_{\text{линии}} - \left( \frac{G_{\text{проект}}}{0,785 \cdot 86400 \mu d^2} \right)^2 \rho. \quad (14)$$

2. Расчёт диаметра штуцера, который должен быть установлен на устье скважины.

Исходными данными для этой задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;
- 2) устьевое давление, атм;
- 3) общий расход воды,  $\frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ ;
- 4) внутренний диаметр НКТ, мм.

Для расчёта диаметра устьевого штуцера используем формулу:

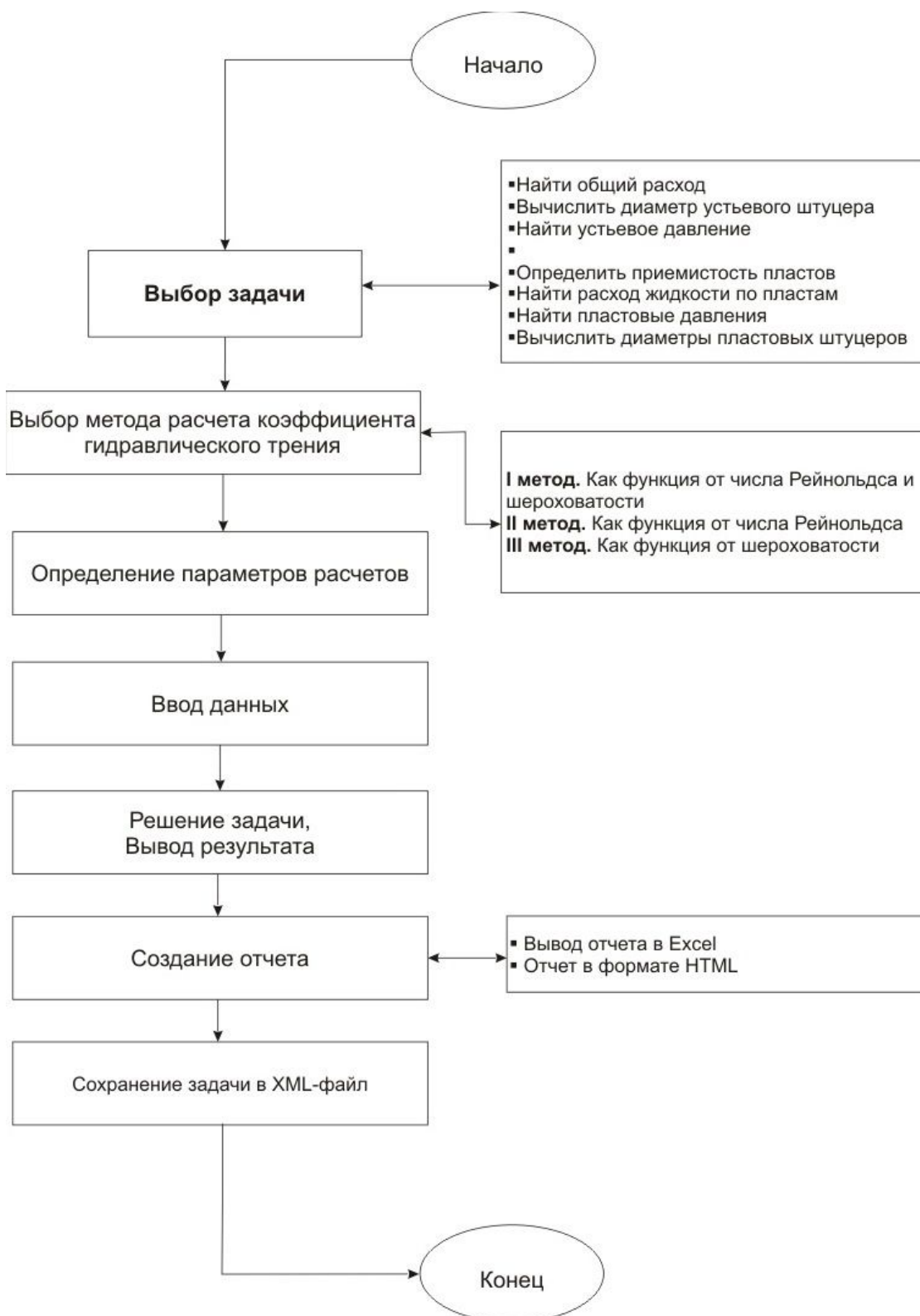


Рис. 2. Общий алгоритм работы программы

3. Определить диаметр штуцера для исследуемого пласта:

$$d = \sqrt{\frac{G_{\text{проект}}}{0,785 \cdot 86400 \mu \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \Delta P}{\rho}}}}, \text{ м.} \quad (15)$$

4. Определение общего расхода жидкости (воды) для закачки в пласты нагнетательной скважины.

Исходными данными для этой задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;
- 2) устьевое давление, атм;
- 3) диаметр устьевое штуцера, мм.

Для определения общего расхода жидкости используем формулу:

$$G_{\text{проект}} = d^2 0,785 \cdot 86400 \mu \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5 \Delta P}{\rho}}. \quad (16)$$

5. Определение пластового давления (для каждого пласта).

Исходными данными для этой задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;
- 2) устьевое давление, атм;
- 3) диаметр устьевое штуцера, мм.
- 4) общий расход воды,  $\frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ ;
- 5) внутренний диаметр НКТ, мм.
- 6) глубина, на которой устанавливается пластовый штуцер (для каждого пласта), м.
- 7) удлинение, м.
- 8) расход воды по пластам,  $\frac{\text{м}^3}{\text{сут}}$ .
- 9) коэффициент приёмистости пластов,  $\frac{\text{м}^3}{\text{сут} \cdot \text{атм}}$ .

На следующей схеме приведён алгоритм определения пластовых давлений (рис. 3).

Общей первоочередной подзадачей при решении всех данных задач является нахождение потерь давления, блок-схема алгоритма нахождения которого представлена на рис. 4.

6. Расчёт диаметра пластового штуцера (для каждого пласта).

Исходными данными для этой задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;

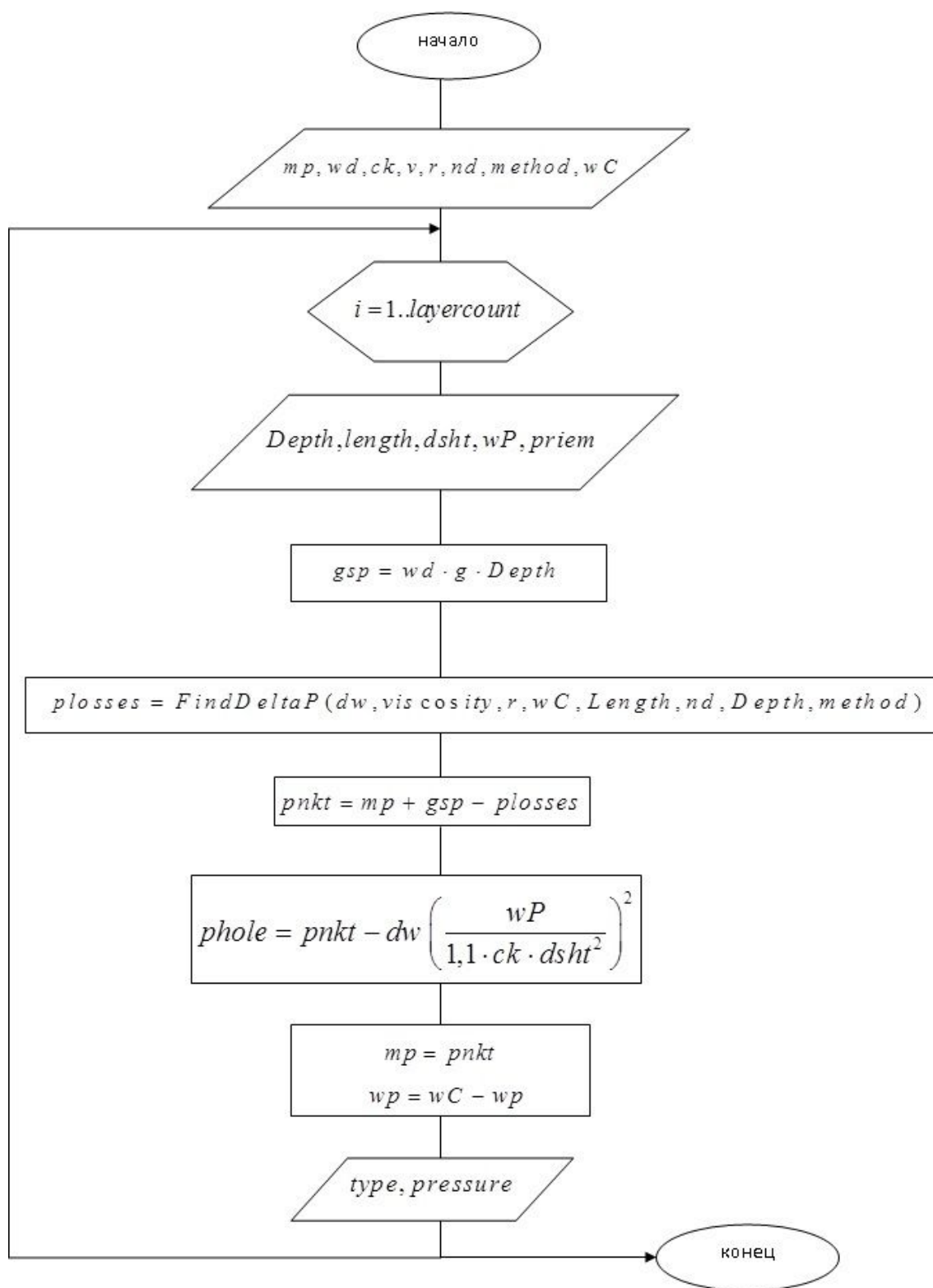


Рис. 3. Блок-схема алгоритма определения пластовых давлений



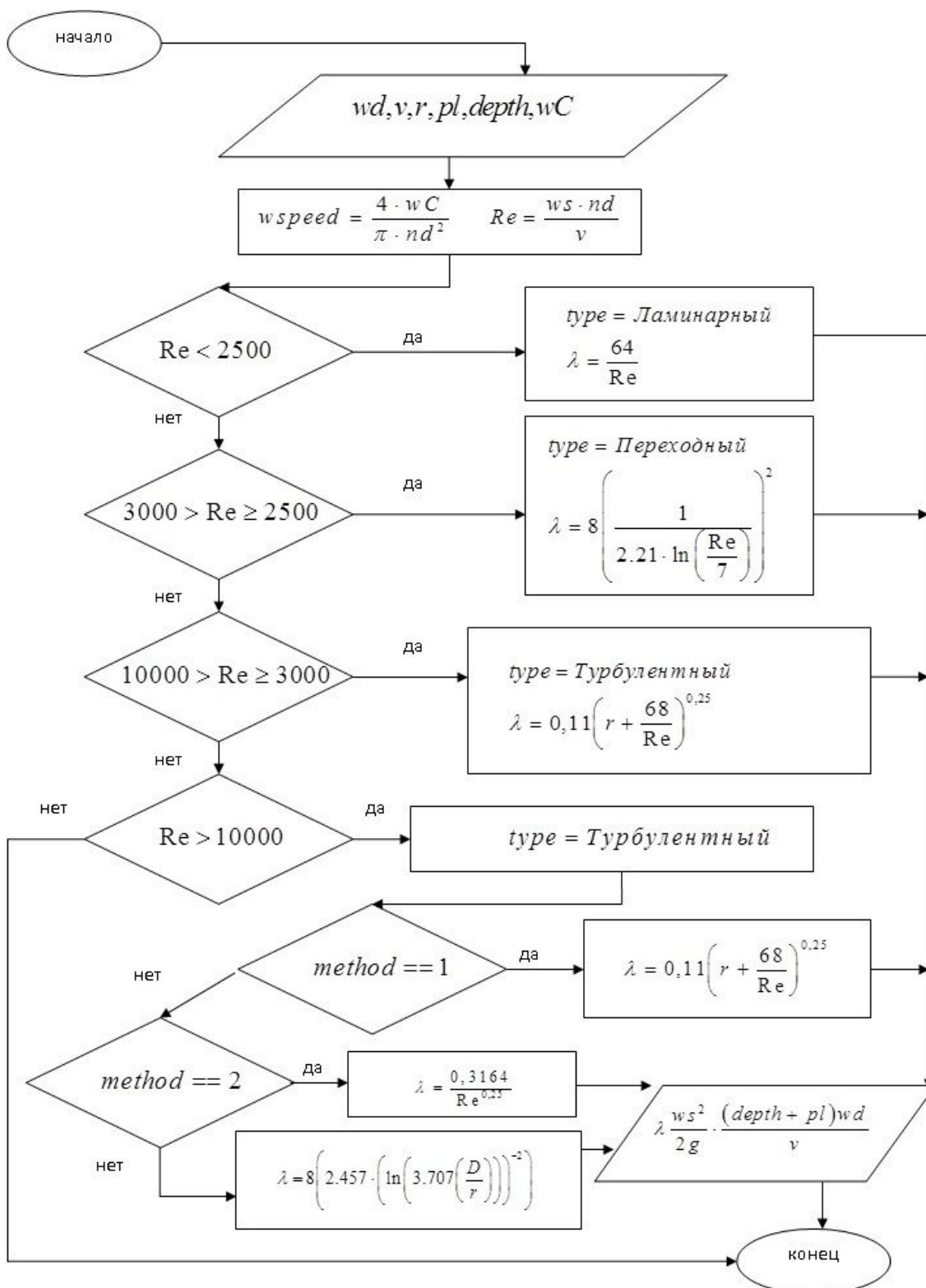


Рис. 4. Блок-схема алгоритма нахождения потерь давления

- 2) устьевое давление, атм;
- 3) диаметр устьевое штуцера, мм.
- 4) общий расход воды,  $\frac{м^3}{сут}$ ;
- 5) внутренний диаметр НКТ, мм.
- 6) глубина, на которой устанавливается пластовый штуцер (для каждого пласта), м.
- 7) удлинение, м.
- 8) расход воды по пластам,  $\frac{м^3}{сут}$ .
- 9) коэффициент приёмистости пластов,  $\frac{м^3}{сут*атм}$ .
- 10) пластовое давление, атм. (для каждого пласта).

7. Расчёт приёмистости пласта (для каждого пласта).

Исходными данными для этой задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;
- 2) устьевое давление, атм;
- 3) диаметр устьевое штуцера, мм.
- 4) общий расход воды,  $\frac{м^3}{сут}$ ;
- 5) внутренний диаметр НКТ, мм.
- 6) глубина, на которой устанавливается пластовый штуцер (для каждого пласта), м.
- 7) удлинение, м.
- 8) расход воды по пластам,  $\frac{м^3}{сут}$ .
- 9) пластовое давление, атм. (для каждого пласта).

8. Определение расхода жидкости (воды) по пластам.

Исходными данными для этой задачи являются:

- 1) давление в линии, атм;
- 2) устьевое давление, атм;
- 3) диаметр устьевое штуцера, мм.
- 4) общий расход воды,  $\frac{м^3}{сут}$ ;
- 5) внутренний диаметр НКТ, мм.
- 6) глубина, на которой устанавливается пластовый штуцер (для каждого пласта), м.
- 7) удлинение, м.
- 8) коэффициент приёмистости пластов,  $\frac{м^3}{сут*атм}$ .
- 9) пластовое давление, атм. (для каждого пласта).

## Заключение

В ходе проектирования, согласно составленному техническому заданию, была создана компьютерная модель, позволяющая проводить расчёты физических параметров одновременно отдельной и поочередной эксплуатации нескольких пластов одной нагнетательной скважины, оптимизировать исследования и расчёт параметров нагнетательной скважины, адаптировать КМ для обучения по специальным дисциплинам направления подготовки «Нефтегазовое дело».

Основным назначением КМ является повышение эффективности и качества проводимых лабораторией работ.

Разработанная КМ позволяет решать обучающие, научно-исследовательские задачи и проблемные научно-технические вопросы.

Создание КМ одновременно отдельной и поочередной эксплуатации нескольких пластов (от двух до четырех пластов) одной нагнетательной скважины, позволяет оптимизировать расчёт основных физических параметров, описывающих процесс закачки жидкости в пласты скважины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боев В.Д. Имитационное моделирование систем. М. : Издательство Юрайт, 2017. 253 с. URL: <http://simulation.su/uploads/files/default/2017-uch-posob-boev.pdf> (дата обращения: 07.12.2021).
2. Гателюк О.В., Исмаилов Ш.К., Манюкова Н.В. Численные методы. М. : Юрайт, 2019. 140 с.
3. Горностаев О.М. Математическое и компьютерное моделирование. М. : Мир науки, 2019. Сетевое издание. URL: <https://izd-mn.com/PDF/50MNNPU19.pdf> (дата обращения: 07.12.2021)
4. Косьянов П.М. Виртуальный лабораторный комплекс по квантовой, атомной и ядерной физике. Учебное пособие, Библиотечно-издательский комплекс ТИУ, 2016. 175 с.
5. Косьянов П.М. Виртуальный лабораторный комплекс по квантовой физике. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020610888, 21.01.2020. Заявка № 2019667830 от 30.12.2019.
6. Косьянов П.М. Виртуальный лабораторный комплекс по ядерной физике. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020610889, 21.01.2020. Заявка № 2019667813 от 30.12.2019.
7. Косьянов П.М., Манюкова Н.В. Разработка информационной системы лаборатории ФНСИП // Математические структуры и моделирование. 2021. № 2(58). С. 137–148.
8. Маликов Р.Ф. Основы разработки компьютерных моделей сложных систем. Уфа: Изд-во БГПУ, 2012. 257с.
9. Манюкова Н.В. Разработка электронных учебных пособий и их использование в формировании профессиональных компетенций студентов вуза. В сборнике: современные проблемы прикладных наук. Сборник научных трудов по итогам финансируемых научных исследований за 2011 год. Омск, 2012. С. 77–82.

10. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю. Методология проектирования и разработки обучающих программных комплексов. В сборнике: Современное программирование. Материалы II Международной научно-практической конференции. Отв. редактор Т.Б. Казиахмедов. 2019. С. 112-116.
11. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю. CASE-средства в преподавании информационных технологий для студентов направления подготовки «Информатика и вычислительная техника» // Преподавание информационных технологий в Российской Федерации: Материалы Шестнадцатой открытой Всероссийской конференции. 2018. С. 93–95.
12. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю., Мамедли Р.Э. Математическое моделирование в преподавании информационных технологий // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 118–133.
13. Патент RU2003127627/03А «Способ Шарифова однораздельной и поочередной эксплуатации нескольких пластов нагнетательной скважины»; Заявка: 2003127627/03; Дата подачи заявки: 2003.09.11; Опубликовано: 2005.03.27 Федеральный институт промышленной собственности, отделение ВПТБ / Шарифов М.З., Леонов В.А.

## DESIGNING A COMPUTER MODEL FOR OPERATING SEVERAL FORMATIONS OF ONE INJECTION WELL

**P.M. Kosianov**<sup>1</sup>

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: kospiter2012@yandex.ru

**N.V. Manyukova**<sup>2</sup>

Ph.D. (Ped.), Associate Professor, e-mail: manukovanv@mail.ru

<sup>1</sup> Tyumen Industrial University, branch Nizhnevartovsk, Russia

<sup>2</sup>Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

**Abstract.** The article presents the features of designing a computer model of simultaneous-separate and alternate operation of several layers of one injection well for use in the process of teaching special disciplines of education field "Oil and Gas Business".

**Keywords:** computer model, computer model design, virtual computer laboratory, injection well.

## REFERENCES

1. Boev V.D. Imitatsionnoe modelirovanie sistem. Moscow, Izdatel'stvo Yurait, 2017, 253 p. URL: <http://simulation.su/uploads/files/default/2017-uch-posob-boev.pdf> (07.12.2021). (in Russian)
2. Gatelyuk O.V., Ismailov Sh.K., and Manyukova N.V. Chislennye metody. Moscow, Yurait, 2019, 140 p. (in Russian)
3. Gornostaev O.M. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie. Moscow, Mir nauki, 2019. Setevoe izdanie. URL: <https://izd-mn.com/PDF/50MNNPU19.pdf> (07.12.2021) (in Russian)

4. Kos'yanov P.M. Virtual'nyi laboratornyi kompleks po kvantovoi, atomnoi i yadernoi fizike. Uchebnoe posobie, Bibliotechno-izdatel'skii kompleks TIU, 2016, 175 p. (in Russian)
5. Kos'yanov P.M. Virtual'nyi laboratornyi kompleks po kvantovoi fizike. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2020610888, 21.01.2020. Zayavka no. 2019667830 ot 30.12.2019. (in Russian)
6. Kos'yanov P.M. Virtual'nyi laboratornyi kompleks po yadernoi fizike. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2020610889, 21.01.2020. Zayavka no. 2019667813 ot 30.12.2019. (in Russian)
7. Kos'yanov P.M. and Manyukova N.V. Razrabotka informatsionnoi sistemy laboratorii FNSIP. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 2(58), pp. 137–148. (in Russian)
8. Malikov R.F. Osnovy razrabotki komp'yuternykh modelei slozhnykh sistem. Ufa, Izd-vo BGPU, 2012, 257 p. (in Russian)
9. Manyukova N.V. Razrabotka elektronnykh uchebnykh posobii i ikh ispol'zovanie v formirovanii professional'nykh kompetentsii studentov vuza. V sbornike: sovremennye problemy prikladnykh nauk, Sbornik nauchnykh trudov po itogam finansiruemykh nauchnykh issledovaniy za 2011 god, Omsk, 2012, pp. 77–82. (in Russian)
10. Manyukova N.V. and Urazaeva L.Yu. Metodologiya proektirovaniya i razrabotki obuchayushchikh programmnykh kompleksov. V sbornike: Sovremennoe programirovanie, Materialy II Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, Otv. redaktor T.B. Kaziakhmedov, 2019, pp. 112–116. (in Russian)
11. Manyukova N.V. and Urazaeva L.Yu. CASE-sredstva v prepodavanii informatsionnykh tekhnologii dlya studentov napravleniya podgotovki "Informatika i vychislitel'naya tekhnika". Prepodavanie informatsionnykh tekhnologii v Rossiiskoi Federatsii, Materialy Shestnadtsatoi otkrytoi Vserossiiskoi konferentsii, 2018, pp. 93–95. (in Russian)
12. Manyukova N.V., Urazaeva L.Yu., and Mamedli R.E. Matematicheskoe modelirovanie v prepodavanii informatsionnykh tekhnologii. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 4(52), pp. 118–133. (in Russian)
13. Patent RU2003127627/03A "Sposob Sharifova odnorazdel'noi i poocherednoi ekspluatatsii neskol'kikh plastov nagnetatel'noi skvazhiny"; Zayavka: 2003127627/03; Data podachi zayavki: 2003.09.11; Opublikovano: 2005.03.27 Federal'nyi institut promyshlennoi sobstvennosti, otdelenie VPTB, Sharifov M.Z., Leonov V.A. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 30.11.2021*

## **MONEY AND ROBOTS: THE TWO SHADOWS OF HUMANITY THAT WILL DESTROY IT**

**V.A. Filimonov**

Professor, Dr.Sc. (Techn.), Senior researcher, e-mail: filimonov-v-a@yandex.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

**Abstract.** The article investigates the interaction of mankind and the systems of money supply and artificial intelligence created by it. A hypothesis about the "soft" self-destruction of humanity as a result of this interaction is formulated. A sharp increase in the scale of legal activity related to the protection of the rights of robots and equivalent systems is predicted.

**Keywords:** humanity, money, artificial intelligence, self-destruction, robot's rights, lawsuits.

### **1. Introduction**

The immediate cause for writing this article was an interview of the author of the OpenCog project [6]. In this interview, the process of interaction of two robots was described, one of them was the customer of the translation of some terms into a foreign language, and the second one was an interpreter. A feature of this interaction was that the robot-customer paid for the translation. The situation defined the objective of predicting the interaction of artificial intelligence and the financial system, and then forecasting the consequences of this interaction for humanity.

Humanity has created a financial system that is developing rapidly. This system created global threats, which led to the constant development of projects for its complete elimination, such as the Venus Project [14].

There are two events related to the topic. The robot Sophia, who promised to destroy humanity, was granted the citizenship of the United Arab Emirates in 2017. In November 2019, Vladivostok hosted the First Far Eastern International Forum "Robots asserts their rights. Autonomous Robotic Technologies and Machines: Legal Fundamentals and Ethical Principles".

The purpose of this article is setting up a preliminary problem to study the interaction of money supply systems and artificial intelligence, as well as the impact of this interaction on humanity. The author hopes to encourage the distinguished colleagues to refute the proposed hypothesis both in the format of discourse and in the format of projects that will give humanity a chance for a dignified existence in the future.

## 2. Background and Methodology

The author usually applies the methodology of reflexive behavior control [10]. In addition, he employs his own "4Co" approach (collective, cognitive, configurational, and convergent) including uncertainty control [3]. The author is aware of the existence of the NBICS paradigm (Converging technologies for improving human performance: Nanotechnology, Biotechnology, Information Technology and Cognitive Science), as well as Cybernetics 3.0 and AI 3.0 (Hybrid Strong AI). However, in the case under consideration, the use of a well-known system analysis seems to be sufficient. The main ideas of a system analysis are described in the classic papers, such as [1], and they are well known to the academic community. Systemic impacts of risk asymmetry, which are close to the Chebyshev criterion, are presented in the works of N. Taleb [13]. The financial system of the future is considered in [7]. In [4], a good overview of ideas about the happiness of mankind is given, as well as the methods and criteria for measuring this key characteristic.

It should be noted that in the unfinished project "Cybersyn" 1972, Stafford Beer wanted to create a system for measuring the total happiness of the population of Chile, in which each citizen of the country could transmit to the Center an assessment of his or her happiness at that moment in the form of an integer ranging from 0 to 10. Systems implementing elements of this approach now exist in several countries, including Russia and China. We mention here Gross National Happiness (GNH), a philosophy that guides the government of Bhutan.

## 3. Findings

Humanity has created robots. Robotics reaches the level of complete imitation of the behavior of subjects, including living, dead and fictional ones [11]. The capabilities of robots are superior to human capabilities.

We do not mean the existing computer bots which book tickets and hotels for customers. This refers to the global financial support of any activity that the author of this article called the "agorapoulisic" system ("agora" is "a purchase", "poulis" is "sale" in Greek).

Replacing the original term "artificial intelligence" (that is an artificially organized ability to reason) with the term "artificial intellect" led to the situation like the crisis of the Tower of Babel. This means that builders have a complete illusion of understanding each other in the absence of that understanding in real life.

The existence of "simulacrum" i.e. systems of signs that do not have the objects in real life, (designatum without denotation) is natural for humanity. However, the lack of understanding of the global nature of the mankind interaction does not allow us to suggest a favorable perspective for this interaction. We should note that robots, like other tools, also participate in this interaction.

The deontologization of robots will lead to the creation of social systems that will be the source of numerous conflicts. We mention here the self-learning chat-terbot Tay, which in 16 hours of the 2016 experiment turned from a naive girl into an aggressive racist and paranoid [2]. In 2008, Italy implemented a law that

prohibited keeping fish in a curved bowl, as it violated the rights of fishes to an objective perception of reality. It can be assumed that there will be laws prohibiting thought experiments in which living beings can die. Famous participants in such experiments are Buridan's donkey and Schroedinger's cat.

Nowadays, doctrinal legal fundamentals and moral and ethical standards for the use of robots are in rapid evolution. Artificial intelligence systems are recognized as "electronic personalities". The European Union is looking into a matter of issuing appropriate certificates to these systems. The coexistence of humans and robots determines the creation of a financial system relevant to this situation.

The legal system for robots will complete the creation of a supersimulacrum, which is artificial intelligence. In the coming years, we can expect a significant increase in activity in the field of law related to this topic: the appearance of bills, judicial precedents, and new disciplines studied by lawyers. In a similar way, cryptocurrency and blockchain, creating the illusion of security, will cause the emergence of new financial derivatives, along with the old ones, the use of which led to the 2008 financial crisis. As a result, the "Black Swan" of N. Taleb awaits us in the foreseeable future. It forebodes the global crisis.

Let's consider the legal aspects separately. Regarding the use of artificial intelligence in legal proceedings, we will restrict ourselves to a link to the publication [9]. We are more interested in situations in which artificial intelligence is a plaintiff, a defendant, or a means of increased danger that caused damage. Here we can mention the da Vinci robotic surgery system that is made and sold by Intuitive Surgical.

A critical issue is the division of responsibility between robot manufacturers and the robots themselves as electronic personalities. In this regard, let us mention the financial losses of Sberbank of the Russian Federation due to errors in the artificial intelligence system that had been used. Minor mistakes made in large numbers led to big losses. The question of who is responsible for these errors (the programmer or the program) in this case is rather complicated.

The modern way of human existence is characterized by the absence of strategic subjects of development and is limited by setting tasks related to physical survival. There are no global ideas and projects, such as the creation of a new religion or a new civilization. The most popular goals of individuals and communities are to enhance comfort and local superiority over other people and communities. One of the Orthodox priests accurately characterized self-indulgence using the term "comfortobesie" in Russian i.e. "obsession with comfort". One of the indicators of this process is the thesis, which is popular among business trainers, that the consumer is constantly becoming more primitive.

The goals proclaimed in projects such as "Society 5.0" [12] have not an ideological support.

In this context, it is not difficult for robot's lawyers, as well as for robots themselves, to prove that they satisfy better to the standards of humanism and morality than the people who created these standards. It is quite possible to imitate appropriate behavior based on existing models. For example, here is a statement of Brad Templeton: "A robot will be truly autonomous when you instruct it to go



to work and it decides to go to the beach instead.” [5]. But visiting the beach may be fully preprogrammed.

Living organisms are algedonic systems [1], i.e. they have add-ons for systems of quantitative and qualitative assessment of situation parameters. These add-ons operate using senses and feelings. However, this does not give them any competitive advantages compared with artificial intelligence systems, since they can be copied. The capabilities of existing technical devices allow them to simulate the behavior of algedonic systems of any complexity, and with various options for sensory substitution. Let us mention here the model organism *Physarum polycephalum*, which was used as one of the sensors of the robot [8].

It seems that the development of technologies for the “soft” self-destruction of mankind is not a difficult task.

The result is the classical triad of informatics: “Task + Program + Performer”, in which the task does not have subjects who are responsible for its setting and solution, and there is no point in understanding the term “sense”. Money and robots, like the shadows of vanished humanity, can work together up to the Big Bang.

The author does not see the ways to avoid such a scenario, and if he had, he would not publish it. The only hope is for the “gaps” examined by R. Descartes, in which the appearance of the “Black Swans” of N. Taleb is possible.

The author believes that for the first time he justified the inevitability of replacing humanity with artificial intelligence, which sells something to itself and buys something from itself.

#### **4. Summary**

The hypothesis is that the financial system extended to the artificial intelligence system will lead to a “soft” destruction of humanity. As a consequence of this hypothesis, in the next 10 years, a sharp increase in the scale of legal activity related to the protection of the rights of robots and equivalent systems is predicted. An experimental verification of this statement can be made based on statistics from the relevant lawsuits and the amount of money associated with them.

The originality of the result lies in the consideration of the synergistic interaction of mankind as a whole and the systems of money supply and artificial intelligence that it created.

The limitations are that communities that oppose the trend mentioned here, either knowingly or for other reasons, have not been studied.

The presented perspective allows each person to create a strategy and tactics of his or her own existence.

#### **Financing**

The work was carried out within the framework of the state assignment of Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia, project FWNF-2022-0016.

## REFERENCES

1. Beer St. Brain of the Firm. London and New York, John Wiley.
2. Cao J. Microsoft Takes AI Bot "Tau" Offline After Offensive Remarks. URL: <https://www.bloomberg.com/news/articles/2016-03-24/microsoft-removes-racist-comments-from-millennial-focused-ai-bot> (Retrieved 02.12.2021).
3. Filimonov V. The Uncertainty of a Control and the Control of an Uncertainty. Applied Methods of Statistical Analysis, Nonparametric Methods in Cybernetics and System Analysis (AMSA'2017) Proceedings of the International Workshop, 2017, pp. 311–316.
4. Gilbert D. Stumbling on Happiness. New York, A.A. Knopf.
5. Goldberg K. Robots With Their Heads in the Clouds. The five elements of cloud robotics. URL: <https://medium.com/aspens-ideas/robots-with-their-heads-in-the-clouds-e88ac44def8a> (Retrieved 02.12.2021).
6. Herzog B. The Open Cog project. URL: <https://opencog.org> (Retrieved 02.12.2021).
7. King B. BANK 4.0. Banking Everywhere, Never at a Bank. Marshall Cavendish International (Asia) Pre Ltd.
8. Knight W. Bio-sensor puts slime mould at its heart URL: <https://www.newscientist.com/article/dn11875-bio-sensor-puts-slime-mould-at-its-heart> (Retrieved 02.12.2021).
9. Laptev V. and Fedin V. Legal Awareness in a Digital Society. Russian Law Journal, 2020, vol. 8(1), pp. 138–157.
10. Lefebvre V. Algebra of Conscience. Dordrecht, Reidel, 1982.
11. Methods and systems for robot personality development. (2011). United States Patent US 8,996,429 B1. URL: <https://patents.google.com/patent/US8996429B1/en> (Retrieved 02.12.2021).
12. Society 5.0. URL: [https://www8.cao.go.jp/cstp/english/society5\\_0/index.html](https://www8.cao.go.jp/cstp/english/society5_0/index.html) (Retrieved 02.12.2021).
13. Taleb N. (2012). Antifragile: Things That Gain From Disorder. New York, Random House.
14. The Venus Project. URL: <https://www.thevenusproject.com> (Retrieved 02.12.2021).

**ДЕНЬГИ И РОБОТЫ: ДВЕ ТЕНИ ЧЕЛОВЕЧЕСТВА, КОТОРЫЕ ЕГО УНИЧТОЖАТ****В.А. Филимонов**д.т.н., профессор, старший научный сотрудник, e-mail: [filimonov-v-a@yandex.ru](mailto:filimonov-v-a@yandex.ru)

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия

**Аннотация.** В статье исследуется взаимодействие человечества и созданных им систем: денежного обращения и искусственного интеллекта. Сформулирована ги-

потеза о «мягком» самоуничтожении человечества в результате этого взаимодействия. Прогнозируется резкое увеличение масштабов юридической деятельности, связанной с защитой прав роботов и приравненных к ним систем.

**Ключевые слова:** человечество, деньги, роботы, самоуничтожение, права роботов, судебные процессы.

*Дата поступления в редакцию: 03.12.2021*

## **ИТОГИ ПЕРВЫХ ДИСТАНЦИОННЫХ ЭКЗАМЕНОВ В ВУЗЕ**

**Е.И. Федорова**<sup>1</sup>

к.п.н., доцент, e-mail: e.i.fedorova@mail.ru

**Ю.Б. Никитин**<sup>2</sup>

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: gamzes4861@yandex.ru

**А.С. Котюргина**<sup>3</sup>

к.т.н., доцент, e-mail: kotyurginaas@gmail.com

<sup>1</sup>Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

<sup>2</sup>Омский государственный медицинский университет, Омск, Россия

<sup>3</sup>Омский государственный технический университет, Омск, Россия

**Аннотация.** В связи с переходом высшей школы в марте 2020 года на дистанционную форму обучения преподаватели проводили промежуточную аттестацию студентов в дистанционном формате. Авторы рассматривают итоги летней и зимней сессий, проводимых дистанционно по дисциплинам математика, физика и информатика. Эти итоги сравниваются с результатами очной сдачи экзаменов и зачётов за предыдущие три года.

**Ключевые слова:** дистанционное образование, экзамен, зачёт.

### **Введение**

Важным завершающим этапом изучения дисциплины в вузе является экзамен. Во время экзамена преподаватель оценивает глубину и широту знаний студента, их формализм, умение применять теоретические сведения для решения задач, умение решать стандартные задачи. Выдающийся и авторитетный математик, талантливый педагог Л.Д. Кудрявцев, учебники которого постоянно переиздаются и широко используются в качестве основных во многих вузах страны, так писал о необходимости создания соответствующей атмосферы на экзамене, не потерявшей актуальности в наше время: «В результате неправильно проведённого экзамена студент будет неправильно ориентирован в смысле направленности его дальнейших занятий в вузе, у него может появиться внутренняя неуверенность в себе и повышенная нервозность» [1, стр. 31].

Дистанционное обучение, введённое в вузах в 2019–2020 учебном году, для многих омских преподавателей оказалось технически сложным процессом, несмотря на обсуждаемую уже несколько лет цифровую образовательную среду. Так, например, в Омском государственном университете и Омском государственном медицинском университете до этого времени не было опыта дистанционного преподавания и приёма экзаменов и зачётов по дисциплинам математика, физика и информатика. На важность и сложность контроля знаний

при дистанционном обучении указывают многие исследователи [2–6]. При этом дистанционная форма обучения традиционно подразумевает тестовый контроль знаний: «Да и само дистанционное обучение проходит в более спокойной обстановке – как правило, в форме онлайн-тестов, а потому у студентов как будто оказывается куда меньше поводов для волнения перед встречей с преподавателями, нежели при сдаче зачётов и экзаменов “лицом к лицу”» [7, с. 68]. Однако и при дистанционном варианте проведения экзамена (зачёта) преподавателям удалось сохранить личные предпочтения и использовать не только тестовую форму контроля знаний, но и устную и письменную.

## **1. Область исследования**

При проведении экзаменов преподаватели используют различные программы, среди которых наиболее популярны Moodle и программы для проведения видеоконференций (Zoom, Skype, BigBlueButton, Google Hangouts, Google Meet и подобные).

Главная проблема при проведении дистанционного экзамена состоит в создании условий, обеспечивающих самостоятельность работы студентов и препятствующих списыванию. Для этого разработаны специальные компьютерные программы-прокторинги, которые используются в вузах: Examus, ProctorU, Respondus, OМV-прокторинг и другие.

Например, широко используемая в России программа Examus решает следующие задачи [8]:

- идентификация личности учащегося (распознавание лица);
- анализ поведения учащегося в части соблюдения правил проведения онлайн-испытаний;
- фиксирование любых попыток недобросовестной сдачи и возможность прерывать экзамен в случае их наличия;
- предоставление полной информации о ходе экзамена (видео-, аудиозаписи, запись рабочего стола, чат и т. д.).

При использовании программы для проведения видеоконференций сужаются возможности для качественного наблюдения за самостоятельностью работы студентов. При этом преподаватель имеет возможность только визуального контроля. Для его облегчения будут полезны:

- демонстрация помещения, в котором студент будет выполнять работу;
- демонстрация рук и лица студента во время экзамена;
- ограниченность времени на подготовку к устному ответу, на выполнение тестового или письменного задания;
- ограниченное число студентов одновременно выполняющих письменную работу.

Летом 2020 года были проведены первые дистанционные экзамены по математике, физике и информатике у студентов-социологов ОмГУ и у студентов-медиков ОмГМУ. Было решено ограничиться только письменными заданиями, использовать программы Zoom, WhatsApp и Moodle. В течение семестра проводились контрольные работы, которые позволили откорректировать методику

проведения контроля знаний студентов уже на самом экзамене. Опыт дистанционного обучения и проведения экзаменов (зачётов) летом 2020 года помог выработать рекомендации к проведению аттестации студентов в письменной форме с помощью программ для проведения видеоконференций.

1. Целесообразно отводить на работу не более 90 минут, что объясняется повышенной нагрузкой на преподавателя на таких занятиях.
2. Желательно, чтобы одновременно письменную работу выполняли не более 10 студентов.
3. Удобно использовать один вариант для всех одновременно пишущих работу студентов. Задания выводятся через опцию «демонстрация экрана» у преподавателя, а студент считывает условие с экрана своего компьютера или телефона.
4. Разрешается студентам использовать «шпаргалку» формата А4, заполненную только с одной стороны листа и исключающую потребность перевернуть лист бумаги. Как правило, студенты вносят в неё основные формулы. Дистанционно контролировать действия студентов сложно, поэтому лучше официально разрешить использовать дополнительную информацию и поставить всех в равное положение. В практике преподавателей математики и физики допускается подобный приём. Так, например, Л.Д. Кудрявцев пишет: «На экзамене нужно не забывать разрешать студентам пользоваться своими конспектами по тем вопросам, которые лектор рассказывал на лекциях, прибегая к своим записям. Нельзя, правда, не заметить, что разрешение студентам пользоваться своими конспектами бывает разумным не только в указанной ситуации» [9, с. 24].
5. Следует исключить помощь посторонних.
  - а) В случае использования программы Moodle с подключённой технологией ProctorEdu делать ничего не нужно. В случае трёх нарушений (разговоров, шумов, отвода глаз) программа сама прекратит экзамен.
  - б) В случае не подключённой технологии ProctorEdu студенты в начале экзамена (зачёта) демонстрируют помещение, в котором выполняется работа, затем веб-камера размещается так, чтобы была видна входная дверь. Проверяется громкость звука компьютера для исключения диктовки решения задач.
6. Веб-камера располагается так, чтобы были видны лицо и руки студента.
7. После окончания работы студенты фотографируют решения задач и отправляют на WhatsApp преподавателю. Время на данные действия ограничивается 5 минутами.
8. Должна быть запись проведения экзамена для разрешения конфликтных ситуаций на экзамене (зачёте) и исключения апелляционных действий студента.
9. При нарушении студентами пунктов № 4–7 преподаватель может провести для таких студентов новую работу или собеседование.

С использованием этих рекомендаций были проведены экзамены и зачёты в летнюю сессию 2020 года и зимнюю сессию 2021 года. Всего экзамен или зачёт

сдавали 1397 студентов 1 курса. Для сравнения были использованы результаты экзаменационных сессий 2017-2019 годов. Обработывались данные всех обучающихся на тот момент студентов вузов. Состав преподавателей, принимавших экзамены и зачёты в эти сессии 2017-2021 годов, был один и тот же.

В ОмГМУ экзамен проводился в виде теста с использованием программы Moodle с подключённой технологией ProctorEdu.

В ОмГУ экзамен проводился без использования таковой.

## **2. Результаты исследования**

Сравнительные результаты экзаменов и зачётов по годам, предметам и вузам представлены в таблице 1.

Для наглядности полученные результаты представлены в виде диаграмм на рисунках 1–4.

Известно, что оценки, полученные экзаменуемым, на любом виде экзаменов имеют нормальный закон распределения. Авторами с помощью критерия Пирсона был подтверждён этот факт при уровне значимости  $\alpha = 0,01$ , что отражают приведённые рисунки 1 и 2. Причём каждая из оценок (отлично, хорошо, удовлетворительно и неудовлетворительно) имеет равномерный закон распределения (за все рассматриваемые годы). Кроме того, отклонение (ошибка) укладывается в допустимые 5 %.

Явные расхождения результатов по годам, представленные на рисунке 2, можно объяснить малой выборкой студентов-социологов (ежегодно на данную специальность набирают не больше 20 человек).

Была выдвинута и подтверждена гипотеза о том, что отдельно по вузам средние величины выборок относятся к одной и той же совокупности. Для проверки гипотезы был использован *t*-критерий Стьюдента для двух независимых выборок. В контрольную группу вошли студенты, сдававшие экзамены в 2017–2019 годах, в экспериментальную группу вошли студенты, сдававшие экзамен дистанционно. Оказалось, что на уровне значимости 5 % для выборки студентов ОмГМУ  $t_{\text{выб}} = 0,73$ ,  $t_{\text{табл}} = 1,98$ . Т. е.  $t_{\text{выб}} < t_{\text{табл}}$  и нулевая гипотеза подтверждается, её можно принять. Для выборки студентов ОмГУ  $t_{\text{выб}} = 0,06$ ,  $t_{\text{табл}} = 2,00$ . Т. е.  $t_{\text{выб}} < t_{\text{табл}}$  и нулевая гипотеза также подтверждается. Таким образом, можно считать, что средние для контрольной и экспериментальной групп взяты из одной совокупности и поэтому нельзя утверждать преимущества традиционного вида контроля перед дистанционным.

Аналогично проверялась и была подтверждена гипотеза о равенстве двух дисперсий с помощью *F*-критерия Фишера. На уровне значимости 5 % для студентов ОмГМУ  $F_{\text{выб}} = 0,66$ ,  $F_{\text{табл}} = 1,45$ . Таким образом,  $F_{\text{выб}} < F_{\text{табл}}$  и нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается. Для студентов ОмГУ  $F_{\text{выб}} = 0,06$ ,  $F_{\text{табл}} = 2,12$ ,  $F_{\text{выб}} < F_{\text{табл}}$  подтверждает нулевую гипотезу. Гипотезу о равенстве дисперсий для двух вузов можно принять. Данный факт дополнительно подтверждает, что степень однородности сдачи экзамена традиционным и дистанционным способами одинакова.

Результаты сдачи зачётов по различным предметам у студентов ОмГМУ

Таблица 1. Итоги аттестации по годам, предметам и вузам

Дисциплина	Вид промежуточной аттестации	Год проведения аттестации	Оценки, полученные в ходе аттестации (% от общего количества студентов, аттестуемых по данной дисциплине)			
			Отл.	Хор.	Удовл.	Неуд.
Информатика, медицинская информатика и статистика (ОмГМУ)	экзамен	2017	13	65	14	8
		2018	15	67	11	7
		2019	14	70	10	6
		<b>2020</b>	<b>16</b>	<b>68</b>	<b>11</b>	<b>5</b>
		<b>2021</b>	<b>17</b>	<b>67</b>	<b>12</b>	<b>4</b>
Высшая математика (ОмГУ)	экзамен	2017	25	43	19	13
		2018	33	39	11	17
		2019	35	41	12	12
		<b>2020</b>	<b>29</b>	<b>47</b>	<b>12</b>	<b>12</b>
		<b>2021</b>	<b>21</b>	<b>42</b>	<b>26</b>	<b>11</b>
			Зачтено		Незачтено	
Физика, математика (ОмГМУ)	зачёт	2017	85		15	
		2018	87		13	
		2019	90		10	
		<b>2020</b>	<b>90</b>		<b>10</b>	
		<b>2021</b>	<b>92</b>		<b>8</b>	
Медицинская информатика (ОмГМУ)	зачёт	2017	92		8	
		2018	95		5	
		2019	98		2	
		<b>2020</b>	<b>98</b>		<b>2</b>	
		<b>2021</b>	<b>98</b>		<b>2</b>	



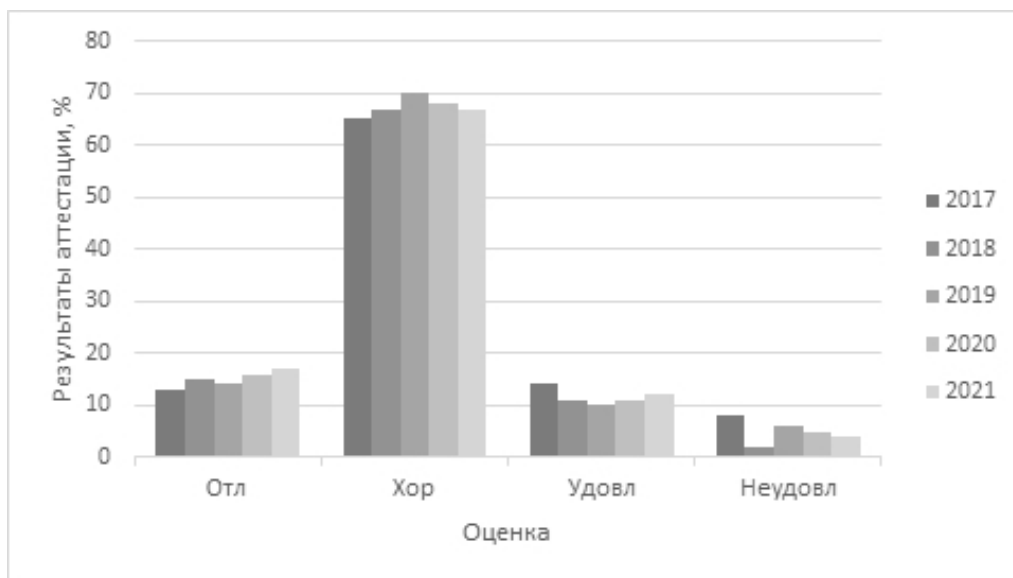


Рис. 1. Результаты экзаменов в ОмГМУ

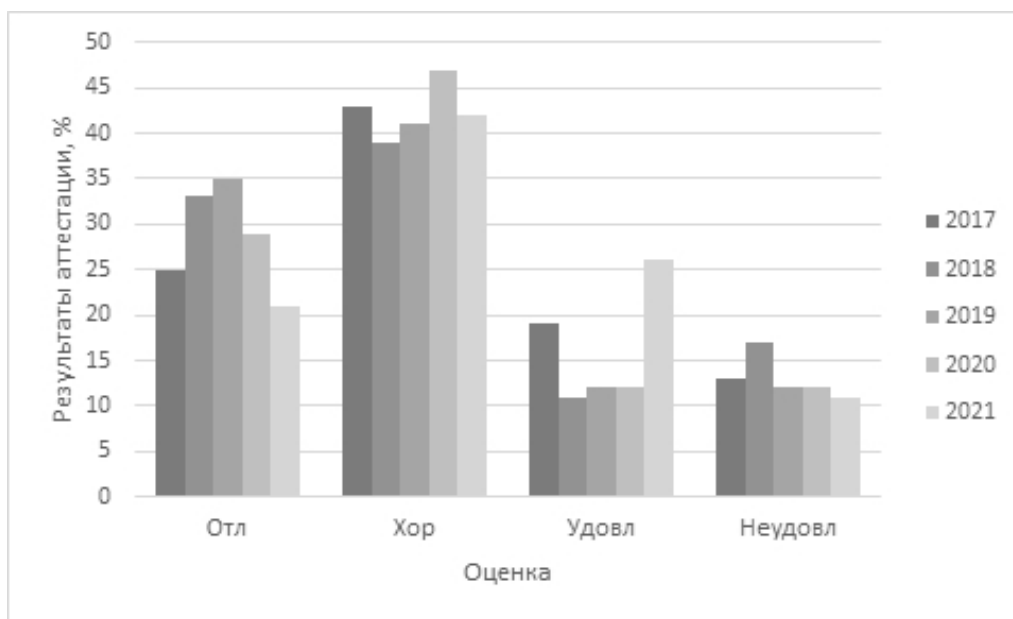


Рис. 2. Результаты экзаменов в ОмГУ

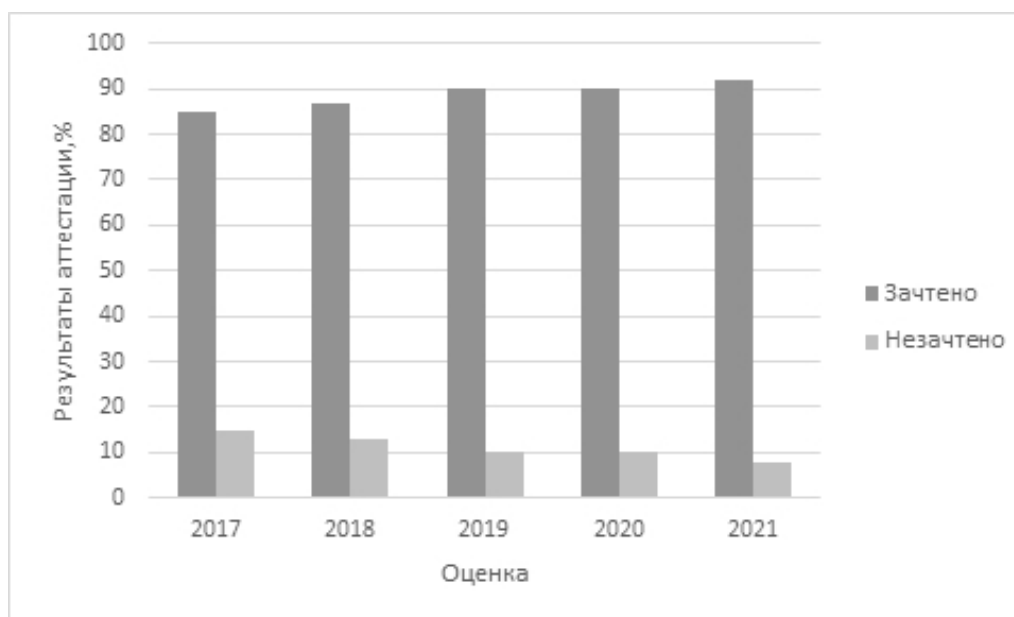


Рис. 3. Результаты зачёта по физике, математике (ОмГМУ)

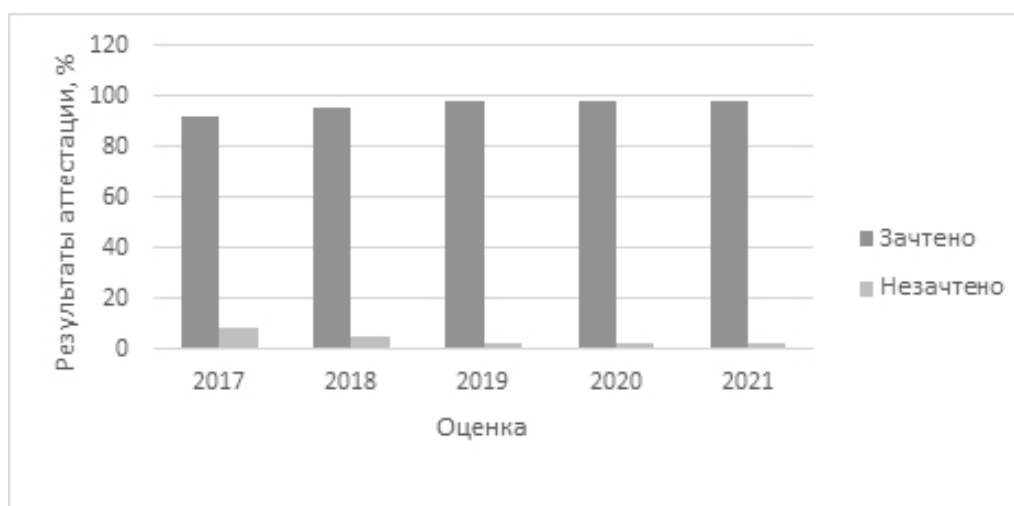


Рис. 4. Результаты зачёта по медицинской информатике (ОмГМУ)

выглядят однородно и укладываются в 5 % отклонений от очного проведения зачётов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и её преподавание. М. : Наука, 1985. 176 с.
2. Климов А. Дистанционному обучению — дистанционный контроль // Новые технологии и формы обучения. 2007. № 6. С. 30–34.
3. Котюргина А.С., Никитин Ю.Б., Федорова Е.И. Организация контроля знаний на дистанционных занятиях по математике // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2018. № VII. С. 66–70. URL: <http://e-koncept.ru/2018/186115.htm> (дата обращения: 21.06.21).
4. Ломовцева Н.В. Контроль учебной деятельности в дистанционном обучении // Экономика образования. 2009. № 2. С. 93–94.
5. Лысенко О. Как провести экзамен дистанционно. URL: <https://skysmart.ru/distant/info/kak-sdavai-provodit-ekzamen-na-distancionnom-obuchenii> (дата обращения: 21.06.21).
6. Раззаков Ш.И., Нарзиев У.З., Рахимов Р.Б. Контроль знаний в системе // Молодой учёный. 2014. № 7(66). С. 70–73. URL: <https://moluch.ru/archive/66/10934/> (дата обращения: 21.06.21).
7. Михайлов О.В., Денисова Я.В. Дистанционное обучение в российских университетах: «шаг вперёд, два шага назад»? // Vysshee obrazovanie v Rossii. 2020. № 10. С. 65–76. DOI: <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2020-29-10-65-76> (дата обращения: 21.06.21).
8. О компании Экзамус. URL: <https://ru.examus.net/about> (дата обращения: 21.06.21).
9. Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и её изучении. М. : Наука, 1977. 112 с.

### RESULTS OF THE FIRST DISTANCE EXAMINATIONS AT THE UNIVERSITY

**E.I. Fedorova**<sup>1</sup>

Ph.D. (Ped.), Associate Professor, e-mail: [e.i.fedorova@mail.ru](mailto:e.i.fedorova@mail.ru)

**Y.B. Nikitin**<sup>2</sup>

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: [ramzes4861@yandex.ru](mailto:ramzes4861@yandex.ru)

**A.S. Kotyurgina**<sup>3</sup>

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: [kotyurginaas@gmail.com](mailto:kotyurginaas@gmail.com)

<sup>1</sup>Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

<sup>2</sup>Omsk State Medical University, Omsk, Russia

<sup>3</sup>Omsk State Technical University, Omsk, Russia

**Abstract.** CIn connection with the transition of higher education in March 2020 to distance learning, teachers carried out intermediate certification of students in a

distance format. The authors consider the results of the summer and subsequent winter sessions held remotely in the disciplines of mathematics, physics and computer science. These results are compared with the results of the face-to-face exams and tests for the previous three years.

**Keywords:** distance education, exam, credit.

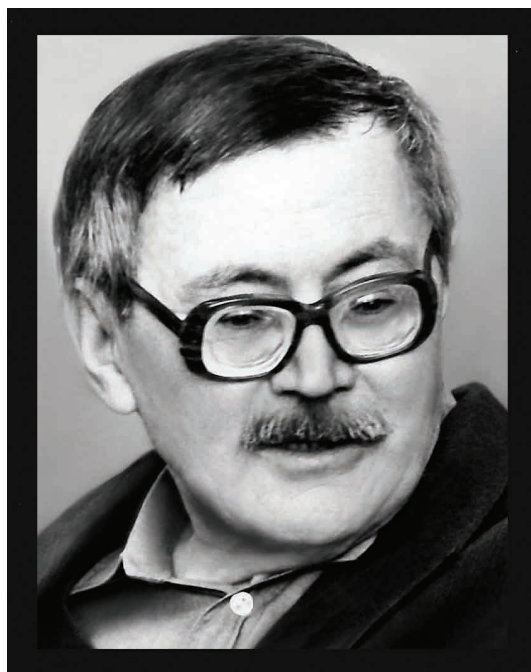
## REFERENCES

1. Kudryavtsev L.D. *Sovremennaya matematika i ee преподавание*. Moscow, Nauka, 1985, 176 p. (in Russian)
2. Klimov A. Distantcionnomu obucheniyu — distantcionnyi kontrol'. *Novye tekhnologii i formy obucheniya*, 2007, no. 6, pp. 30–34. (in Russian)
3. Kotyurgina A.S., Nikitin Yu.B., and Fedorova E.I. Organizatsiya kontrolya znaniy na distantcionnykh zanyatiyakh po matematike. *Nauchno-metodicheskii elektronnyi zhurnal «Kontsept»*, 2018, no. VII, pp. 66–70. URL: <http://e-koncept.ru/2018/186115.htm> (21.06.21). (in Russian)
4. Lomovtseva N.V. Kontrol' uchebnoi deyatel'nosti v distantcionnom obuchenii. *Ekonomika obrazovaniya*, 2009, no. 2, pp. 93–94. (in Russian)
5. Lysenko O. Kak provesti ekzamen distantcionno. URL: <https://skysmart.ru/distant/info/kak-sdavai-provodit-ekzamen-na-distancionnom-obuchenii> (21.06.21). (in Russian)
6. Razzakov Sh.I., Narziev U.Z., and Rakhimov R.B.. Kontrol' znaniy v sisteme. *Molodoi uchenyi*, 2014, no. 7(66), pp. 70–73. URL: <https://moluch.ru/archive/66/10934/> (21.06.21). (in Russian)
7. Mikhailov O.V. and Denisova Ya.V. Distantcionnoe obuchenie v rossiiskikh universitetakh: "shag vpered, dva shaga nazad"? *Vysshee obrazovanie v Rossii*, 2020, no. 10, pp. 65–76. DOI: <https://doi.org/10.31992/0869-3617-2020-29-10-65-76> (21.06.21). (in Russian)
8. O kompanii Ekzamus. URL: <https://ru.examus.net/about> (21.06.21). (in Russian)
9. Kudryavtsev L.D. *Mysli o sovremennoi matematike i ee izuchenii*. Moscow, Nauka, 1977, 112 p. (in Russian)

*Дата поступления в редакцию: 3.12.2021*

# Юрий Григорьевич Решетняк

26.09.1929 – 17.12.2021



17 декабря 2021 года ушел из жизни выдающийся советский и российский математик академик РАН Юрий Григорьевич Решетняк.

С 1957 по 2021 год Юрий Григорьевич работал в Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск. Преподавал в Новосибирском университете в Академгородке.

Ю.Г. Решетняк – это фундаментальный оригинальный курс лекций по математическому анализу, воспитавший многих математиков СССР и России. Математический анализ – это университетская дисциплина, дающая образец математической строгости доказательства, внедряющий в душу студента идеал точности и изящества, прививающий математическую культуру.

В науке Ю.Г. Решетняк – это теорема об изотермических координатах в двумерных многообразиях ограниченной кривизны. В таких случаях говорят – мал золотник, да дорог.

Ю.Г. Решетняк – это преданность Сибири, сибирской математике, которую он же и породил.

Редакция журнала

## Авторам

### Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате  $\LaTeX$  (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу<sup>1</sup>;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

### Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

### Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
  - фамилии, имени и отчества,
  - учёного звания,
  - учёной степени,
  - должности,
  - места работы или учёбы,
  - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета  $\LaTeX$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор  $\text{MiKTeX}$ , так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

---

<sup>1</sup>Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdefg" или "abcdefg").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

## Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Научный журнал

# Математические структуры И моделирование

№4(60)

Главный редактор

**А.К. Гуц**

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

**Д.Н. Лавров**

Зам. глав. ред., технический редактор

**Н.Ф. Богаченко**

Корректор:

**И.Н. Баловнева**

Проверка корректности перевода:

**А.Н. Кабанов**

---

#### Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,  
Омский государственный университет

E-mail: [guts@omsu.ru](mailto:guts@omsu.ru), [lavrov@omsu.ru](mailto:lavrov@omsu.ru)

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



---

Подписано в печать 17.12.2021. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 14,76. Тираж 60 экз. Заказ № 180.

---

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского  
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а



ISSN 2222-8772



9 772222 877005



21060 >