Математические структуры и моделирование 2021. №4(60). С. 17–38

УДК 519.46
DOI 10.24147/2222-8772.2021.4.17-38

НЕСВЯЗНЫЙ ПОРЯДОК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ЕГО АВТОМОРФИЗМЫ

А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работах А.Д. Александрова был изучен связный предпорядок в аффинном пространстве и вычислены его автоморфизмы. В данной статье исследуется несвязный предпорядок (частичный порядок). Вычислены порядковые автоморфизмы и даётся классификация однородных несвязных предпорядков. Несвязный порядок позволяет строить аксиоматики специальной теории относительности, основанные на понятии причинности, не распространяемой на явления микромира.

Ключевые слова: аффинное пространство, несвязный порядок, порядковые автоморфизмы, аксиоматики, специальная теория относительности.

Введение

В работе А.Д. Александрова [1] был изучен связный предпорядок в аффинном пространстве и вычислены его автоморфизмы.

В данной статье исследуется несвязный предпорядок. Вычислены порядковые автоморфизмы и даётся классификация однородных несвязных предпорядков. Результаты статьи были анонсированы в [2], частично опубликованы в [3] и полностью депонированы в [4].

На основе несвязного порядка строится аксиоматическая причинная теория относительности, не предполагается, что причинно-следственные взаимодействия распространяются на явления микромира [5].

1. Основные определения и предварительные сведения

Предпорядок в аффинном n-мерном пространстве A^n, $n \geqslant 2$, есть семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, удовлетворяющее аксиомам:

P1. $x \in P_x$.

P2. Если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$.

P3. Если $x \in A^n$, а t — произвольный параллельный перенос, то $t(P_x) = P_{t(x)}$.

Предпорядок *нетривиальный*, если $P_x \neq A^n$.

Если дополнительно выполнено условие $x \neq y$ влечёт $P_z \neq P_y$, то $\mathcal{P}$ есть *порядок* в A^n.

Порядок *тривиальный*, если $P_x = \{x\}$.

Отношение $y \in P_x$ иногда будем обозначать как $x \preceq y$.

Через e будем всегда обозначать фиксированную точку пространства A^n. Если $M \subset A^n$, то через M_x обозначаем множество $t(M)$, где t — перенос такой, что $t(e) = x$.

Будем писать P вместо P_e.

Если $M \subset A^n$, то через $int(M)$, $\overline{M}$, ∂M, $conv(M)$ обозначаются внутренность, замыкание, граница и выпуклая оболочка соответственно множества M.

Говорим, что предпорядок $\mathcal{P}$ *связный*, если $e \in \overline{P \setminus \{e\}}$, и *несвязный* в противном случае. Предпорядок $\mathcal{P}$ *замкнутый* (соотв.: *открытый*), если P замкнуто (соотв.: $P \setminus \{e\}$ открыто).

Пусть $\mathcal{P}$ предпорядок в A^n, а $f : A^n \to A^n$, биекция. Говорим, что f есть порядковый автоморфизм или $\mathcal{P}$-автоморфизм, если для любой $x \in A^n$

$$f(P_x) = P_{f(x)}.$$

Группу порядковых автоморфизмов обозначаем через $Aut(\mathcal{P})$.

Пусть E — некоторая гиперплоскость, а $\mathbf{l}$ — вектор (или луч L), не параллельный E.

Определение 1.1. Смещением $d_{E\mathbf{l}}$ (соотв.: d_{EL}) называется гомеоморфизм A^n на себя такой, что:

1) на каждой гиперплоскости E_x, параллельной E, $d_{E\mathbf{l}}$ (соотв.: d_{EL}) есть параллельный перенос;

2) $d_{E\mathbf{l}}$ (соотв.: d_{EL}) отображает отрезки (лучи), равные и параллельные $\mathbf{l}$ (соотв.: L) в такие же отрезки (лучи).

Определение 1.2. *Квазицилиндром* $Q(E, \mathbf{l})$ называется множество $M \subset A^n$, удовлетворяющее условиям:

1) существуют гиперплоскости $..., E_{-1}, E_0, E_1, ...$, параллельные E, причём E_{i+1} получено из E_i переносом на вектор $\mathbf{l}$, притом такие, что

$$M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)], \tag{1.2}$$

где каждое M_i есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными $\mathbf{l}$ (как векторы) с концами на E_i, E_{i+1} (не исключается, что некоторые и даже все M_i пусты);

2) M не допускает представления (1.2) с той же гиперплоскостью E и вектором $\mathbf{l}'$, параллельным $\mathbf{l}$, но большим, чем $\mathbf{l}$.

Через $L(x, y)$ обозначаем луч с началом x, проходящий через y, $y \neq x$; $[x, y] = L(x, y) \cap L(y, x)$.

Определение 1.3. *Квазицилиндр* $Q(E, L)$, где E — гиперплоскость, проходящая через точку e, а $L = L(e, x_0)$, $x_0 \notin E$, есть множество

$$\bigcup_{x \in M} L_x,$$

где $M \subset E$.

Определение 1.4. Предпорядок $\mathcal{P}$ называется *квазицилиндрическим*, если P есть квазицилиндр.

Нетрудно видеть, что квазицилиндрические предпорядки в качестве автоморфизма имеют произвольные смещения, и в этом смысле группа порядковых автоморфизмов может быть весьма обширной. Поэтому интерес представляют предпорядки с группой автоморфизмов, являющейся подгруппой группы $Aff(A^n)$ аффинных биекций A^n на себя. Группа $Aff(A^n)$ — это группа преобразований, порождённых аффинной структурой пространства A^n. Следовательно, при изучении предпорядков, удовлетворяющих аксиоме инвариантности $P3$ наибольший и естественный интерес представляют предпорядки с группой автоморфизмов $Aut(\mathcal{P})$, содержащейся в $Aff(A^n)$.

Определение 1.5. Предпорядок $\mathcal{P}$ называется *непрерывно аффинным*, если группа его непрерывных порядковых автоморфизмов $Aut_c(\mathcal{P})$ есть подгруппа группы аффинных биекций $Aff(A^n)$, и *аффинным* — если $Aut(\mathcal{P}) \subset Aff(A^n)$.

Может быть высказано предположение, что при разумных дополнительных условиях, которым должен удовлетворять предпорядок в A^n, возможны либо аффинные предпорядки, либо квазицилиндрические. Это предположение подтверждает следующая теорема [1].

Теорема А. *Пусть предпорядок $\mathcal{P}$ в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяет условиям:*

1) *существует окрестность U точки e такая, что*

$$U \cap \overline{P} \cap \overline{P^-} = \{e\},$$

где $P^- = \{y : y \preceq e\}$;

2) *$\overline{P}$ содержит конус с внутренними точками и с вершиной e.*

Тогда либо предпорядок $\mathcal{P}$ непрерывно аффинный, либо $\mathcal{P}$ квазицилиндрический, причём если P — квазицилиндр $Q(E, \mathbf{l}), ..., Q(E, \mathbf{l})$, то любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм имеет вид

$$f = f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ ... \circ d_{E_m \mathbf{l}_m}, \tag{1.3}$$

где f_0 — аффинная биекция. В формуле (1.3) *допустимы любые смещения, которые коммутируют друг с другом.*

Аналогичная теорема в случае несвязного предпорядка будет доказана в этой статье (теорема 2.1). Таким образом, если предпорядки, отличные от аффинных и квазицилиндрических существуют, то в случае их связности нарушено либо условие 1) теоремы А, либо условие 2).

Определение 1.6. *Контингенцией* $cont(M,a)$ множества M в точке a называется конус, образованный всевозможными пределами лучей $L(a,x)$, исходящих из a и проходящих через $x \in M$, $x \neq a$ при $x \to a$.

Если a не является предельной точкой множества M, то полагаем $cont(M,a) = \{a\}$.

Очевидно, что контингенция $cont(M,a)$ является замкнутым множеством и

$$cont(\overline{M},a) = cont(M,a).$$

Если $\mathcal{P}$ — предпорядок в A^n, то $\{cont(P_x,x) : x \in A^n\}$ задаёт предпорядок в A^n, обозначаемый далее через $cont(\mathcal{P})$.

Теорема Б [1,6]. *Если $\mathcal{P}$ — замкнутый предпорядок, то любой непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм является $cont(\mathcal{P})$-автоморфизмом.*

Пусть

$$ext(P_x) = \overline{\bigcup_{y \in P_x} L(x,y)}.$$

Множество $ext(P_x)$ — выпуклый конус с вершиной x (см. [4, лемма 2]).

Предпорядок $\{ext(P_x) : x \in A^n\}$ обозначаем через $ext(\mathcal{P})$.

Предложение 1.1. *Если $\mathcal{P}$ — предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$, то*

$$cont(P,e) \subset \overline{P} \subset ext(P).$$

Доказательство см. [1].

Будем говорить, что конус K имеет *острую вершину* e, если K не содержит целиком никакой прямой. Выпуклый конус K с острой вершиной e называем *строго выпуклым*.

В пространстве A^n вводим естественную евклидову метрику, которую обозначаем как $|x-y|$. Открытый шар с центром x и радиусом $r > 0$ обозначается через $B(x,r)$.

Предложение 1.2. *Если $\mathcal{P}$ — связный предпорядок в A^n и $cont(P,e)$ имеет острую вершину, то существуют строго выпуклый замкнутый конус K с вершиной e и окрестность U точки e такие, что*

1) $\overline{P} \cap U \subset K$;

2) $cont(P,e) \setminus \{e\} \subset int(K)$.

Доказательство. Утверждение 2) очевидно. Докажем 1). Пусть K — конус, удовлетворяющий утверждению 2) предложения 1.2. Предположим, что требуемой окрестности U не существует. Для любого номера m можно найти точку

$$x_m \in P \cap B(e,1/m) \cap (A^n \setminus K), \quad x_m \neq e.$$

Из последовательности $\{x_m\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ такую, что

$$x_{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} e, \quad L(e, x_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\to} L,$$

где L луч, исходящий из e. Но $L(e, x_{m_k}) \subset A^n \setminus K$. Поэтому L не входит в $cont(P, e)$, что противоречит самому определению контингенции.

Предложение 1.2 доказано.

■

2. Порядковые автоморфизмы несвязного предпорядка

Наша ближайшая цель — изучить группу непрерывных автоморфизмов несвязного предпорядка. В этом параграфе мы покажем, как несвязный предпорядок может быть сведён к случаю связного, теория которого изложена в статьях А.Д. Александрова [1] и А.В. Левичева [6].

Далее будем предполагать, что $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ — несвязный предпорядок. Тогда можно ввести следующее обозначение:

$$Q_x = P_x \setminus \{x\}.$$

Ясно, $x \notin \overline{Q}_x$.

Определение 2.1. Предпорядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ называется *линейчатым*, если существует луч $L = L(e, x_0)$, $x_0 \neq e$ такой, что для любой точки $y \in Q_x$ имеем $L_y \subset P_x$.

Очевидно, $L \subset ext(P)$, и если $\mathcal{P}$ — линейчатый относительно луча L, то предпорядок $\overline{\mathcal{P}}$ — также линейчатый по отношению к этому лучу, где

$$\overline{\mathcal{P}} = \{\overline{P}_x : x \in A^n\}.$$

Если $\mathcal{P}$ — предпорядок линейчатый по отношению к лучу L, то будем говорить для краткости об *L-линейчатом предпорядке $\mathcal{P}$*.

Определение 2.2. Предпорядок линейчатый по отношению к лучам $L(e, x_1), ..., L(e, x_k)$, где $x_i \neq e$ $(i = 1, ..., k)$, $k \leqslant n$, находящимся в общем положении, называется *k-линейчатым*.

Предложение 2.1. *Если предпорядок $\mathcal{P}$ в A^n n-линейчатый, то $int(P) \neq \emptyset$.*

Положим

$$\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(P_x) : x \in A^n\},$$

где

$$\sigma(P_x) = \bigcap_{x \in Q_y} Q_y.$$

Лемма 2.1. *$\sigma(\mathcal{P})$ — предпорядок в A^n. Если $\mathcal{P}$ — L-линейчатый предпорядок, то $\sigma(\mathcal{P})$ — L-линейчатый связный предпорядок.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \sigma(P)$. Тогда для всех y таких, что $e \in Q_y$, имеем $x_0 \in Q_y$. Так как $\mathcal{P}$ — предпорядок, то $P_{x_0} \subset Q_y$ или $Q_{x_0} \subset Q_y$. Но в таком случае, если

$$x \in \sigma(P_{x_0}) = \bigcap_{x_0 \in Q_z} Q_z,$$

то $x \in Q_z$ при любом z таком, что $x_0 \in Q_z$. Но если $e \in Q_y$, то $x_0 \in Q_y$. Поэтому $x \in Q_y$ при любом y, как только выполняется условие $e \in Q_y$, то есть

$$x \in \bigcap_{e \in Q_y} Q_y = \sigma(P).$$

Иными словами, показано, что $\sigma(P_{x_0}) \subset \sigma(P)$.

Следовательно, для $\sigma(\mathcal{P})$ выполнены аксиомы P1, P2.

Пусть $\mathcal{P}$ — L-линейчатый предпорядок. Тогда для любой $y \in Q_x$ имеем $L_y \subset Q_x$. Возьмём $z \in \sigma(P)$. Для любой x такой, что $e \in Q_x$ точка z должна лежать в Q_x. Поэтому $L_z \subset Q_x$, то есть $L_z \subset \sigma(P)$. Следовательно, предпорядок $\sigma(\mathcal{P})$ — L-линейчатый.

Лемма 2.1 доказана. ■

Лемма 2.2. *Если $\mathcal{P}$ — n-линейчатый предпорядок в A^n, то $cont(\sigma(P), e)$ содержит внутренние точки. Обратно, если $int(cont(\sigma(P), e)) \neq \emptyset$, то $\overline{\mathcal{P}}$ — n-линейчатый предпорядок; если $\sigma(\mathcal{P})$ — связный предпорядок, то $\overline{\mathcal{P}}$ — линейчатый.*

Доказательство. Если $\mathcal{P}$ есть L_i-линейчатый $(i = 1, ..., n)$, то $L_i \subset \sigma(P)$ $(i = 1, ..., n)$.

Значит, $cont(\sigma(P), e) \supset L_i$ $(i = 1, ..., n)$. Но тогда $int(cont(\sigma(P), e)) \neq \emptyset$, ибо лучи $L_1, ..., L_n$ находятся в общем положении.

Обратно, если $int(cont(\sigma(P), e)) \neq \emptyset$, то существуют n лучей $L_1, ..., L_n$ в общем положении, $L_i \subset cont(\sigma(P), e)$ $(i = 1, ..., n)$. Имеем в силу предложения 1.1

$$L_i \subset \overline{\sigma(P)} = \overline{\bigcap_{e \in Q_y} Q_y} \subset \bigcap_{e \in Q_y} \overline{Q}_y,$$

т. е. $L_i \subset \overline{Q}_y$ для любой y такой, что $e \in Q_y$. Пусть t — перенос, переводящий y в e. Тогда

$$(L_i)_{t(e)} \subset \overline{Q}_{t(y)} = \overline{Q}$$

для любой точки $t(e) \in Q$. Отсюда заключаем, что для любой $x \in \overline{Q}$

$$(L_i)_x \subset \overline{Q},$$

т. е. $\overline{\mathcal{P}}$ — L_i-линейчатый $(i = 1, ..., n)$.

Лемма 2.2 доказана. ■

Следствие 2.1. *Для замкнутого несвязного предпорядка $\mathcal{P}$ n-линейчатость эквивалентна связности предпорядка $\sigma(\mathcal{P})$ и наличию внутренних точек у его контингенции.*

Следующая аксиома, налагаемая на предпорядок $\mathcal{P}$, называется *слабой аксиомой Эйнштейна*:

$\mathrm{P4}_w$. Для любых $x, y \in A^n$, если $y \in P_x$, то $P_x \cap P_y^-$ ограничено.

Здесь $P_x^- = \{y \in A^n : x \in P_y\}$.

Предложение 2.2. *Предпорядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна, является порядком.*

Доказательство. Пусть предпорядок $\mathcal{P}$ не является порядком. Тогда существует $a \neq e$ такая, что $P = P_a$, т. е. $e \preceq a$ и $a \preceq e$. Но если t — перенос, переводящий e в a, то

$$e \preceq a,\ t(e) = a \preceq t(a),\ t(a) \preceq t(t(a)), ..., e \preceq \underbrace{t \circ ... \circ t}_{m-\text{раз}}(a) = a_m, ...$$

С другой стороны, $a \preceq e$ влечёт $t(a) \preceq t(e) = a \preceq e$, $t(t(a)) \preceq t(a) \preceq e, ...$, и наконец,

$$a_m = \underbrace{t \circ ... \circ t}_{m-\text{раз}}(a) \preceq e.$$

Следовательно, $\{a_m\} \subset P \cap P^-$. Последовательность $\{a_m\}$ неограниченная, поэтому $P \cap P^-$ — неограниченное множество.

Получили противоречие с аксиомой $\mathrm{P4}_w$.

Предложение 2.2 доказано. ■

Следующая теорема была известна А.Д. Александрову, но её доказательство впервые было опубликовано в обзоре [7, § 5].

Теорема B. *Если предпорядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна и является либо открытым, либо замкнутым, но с $int(P) \neq \emptyset$, то любой порядковый автоморфизм является гомеоморфизмом.*

Лемма 2.3. *Если предпорядок $\overline{\mathcal{P}}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна, то $cont(\sigma(P), e)$ — строго выпуклый конус.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно. Тогда $cont(\sigma(P), e)$ содержит прямую λ. В таком случае в силу предложения 1.1

$$\lambda \subset cont(\sigma(P), e) \subset \overline{\sigma(P)} = \overline{\bigcap_{e \in Q_x} Q_x} \subset \bigcap_{e \in Q_x} \overline{Q}_x,$$

т. е. $\lambda \subset \overline{Q}_x$, если $Q_x \ni e$. Пусть t — перенос и $t(x) = e$.

Тогда

$$t(\lambda) \subset t(\overline{Q}_x) = \overline{Q}_{t(x)} = \overline{Q},$$

т. е. $\overline{Q}$ содержит прямую $\lambda' = t(\lambda)$. Возьмём $x_0 \in \lambda'$ и τ — перенос такой, что $\tau(e) = x_0$. Множество $\overline{Q^-} \equiv \overline{P^-} \setminus \{e\}$ содержит прямую $(\tau^{-1} \circ \tau^{-1})(\lambda')$. Поэтому

$$\lambda' \subset \overline{Q} \cap (\tau \circ \tau)(\overline{Q^-}) = \overline{Q} \cap \overline{Q^-}_{\tau(x_0)}.$$

Данное включение противоречит ограниченности интервала $\overline{Q} \cap \overline{Q^-}_{\tau(x_0)}$.

Лемма 2.3 доказана. ■

Пример 2.1. Утверждение, обратное утверждению леммы 2.3, не верно. В самом деле, пусть

$$P = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 + |x| \leqslant y,\ |x| \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leqslant y,\ 1 \leqslant |x|\}.$$

Это несвязный порядок в $\mathbb{R}^2$. Если t — перенос такой, что $t((0,2)) = (0,0)$, тогда

$$\sigma(P) = t(P) \setminus \{(0,-2)\},$$
$$cont(\sigma(P), e) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant y\}$$

— конус с острой вершиной (0,0). Однако слабая аксиома Эйнштейна не выполнена для $\mathcal{P}$, ибо P содержит прямую $\{(x,4) : x \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — несвязный n-линейчатый предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$, такой, что $\overline{\mathcal{P}}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна. Тогда $\mathcal{P}$ — либо непрерывно аффинный порядок, либо квазицилиндрический. Причём, если P — квазицилиндр $Q(E_1, \mathbf{l}_1), ..., Q(E_p, \mathbf{l}_p)$, то непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм f имеет вид*

$$f = f_0 \circ d_1 \circ ... \circ d_p, \tag{2.1}$$

где f_0 — аффинная биекция, а d_i есть смещение $d_{E_i \mathbf{l}_i}$. При этом допустимы любые смещения d_i, и различные d_i коммутируют. (Мы допускаем, что некоторые $\mathbf{l}_i$ — это лучи L_i.)

Доказательство. Из лемм 2.2, 2.3 и предложения 1.2 следует, что $\sigma(\mathcal{P})$ есть предпорядок, удовлетворяющий условиям 1), 2) теоремы A. Поэтому, $\sigma(\mathcal{P})$ либо непрерывно аффинный предпорядок, либо квазицилиндрический. В первом случае получаем, что $\mathcal{P}$ — непрерывно аффинный порядок, ибо каждый $\mathcal{P}$-автоморфизм является $\sigma(\mathcal{P})$-автоморфизмом. Во втором случае порядок $\mathcal{P}$ может оказаться непрерывно аффинным. Но это ещё требуется установить. Важно, что в случае, когда $\sigma(\mathcal{P})$ — квазицилиндрический порядок, каждый непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм f имеет вид

$$f = f_0 \circ D_1 \circ ... \circ D_k,$$

где f_0 — аффинная биекция, а D_i есть $d_{E_i \mathbf{m}_i}$. Причём благодаря условию 2) теоремы A

$$cont(\sigma(P), e) = L_1 \times ... \times L_k \times K,$$

где L_i — луч с началом e, параллельный вектору $\mathbf{m}_i$, а плоскости E_i и лучи L_i расположены так, что E_i натянута на конус K и все L_j, кроме L_i.

Пусть $D = D_1 \circ ... \circ D_k$. Каждое D_i сохраняет лучи $\{L_{ix} : x \in A^n\}$ и плоскости $\{E_{ix} : x \in A^n\}$. Поэтому таким же свойством обладает D.

Теперь можно воспользоваться рассуждениями А.Д. Александрова, приведёнными в пп.6.3-6.8 статьи [1]. Не меняя даже обозначений и повторяя эти рассуждения, мы придём к следующему заключению. Либо D аффинно, и, следовательно, f аффинно, а $\mathcal{P}$ — непрерывно аффинный порядок, либо P — квазицилиндр и D есть суперпозиция аффинного преобразования и смещений:

$$D = g \circ d_1 \circ ... \circ d_p,$$

где g — аффинное преобразование, d_i есть $d_{E_i \mathbf{l}_i}$ или $d_{E_i L_i}$.

Тогда для f верна формула (2.1).

Теорема 2.1 доказана. ■

Следствие 2.2. *Если $\mathcal{P}$ — несвязный открытый или замкнутый n-линейчатый предпорядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна, то $\mathcal{P}$ — либо аффинный порядок, либо квазицилиндрический. Если же P — квазицилиндр $Q(E_1, \mathbf{l}_1), ..., Q(E_p, \mathbf{l}_p)$, тогда*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ ... \circ d_{E_p \mathbf{l}_p},$$

где f_0 — аффинная биекция. Смещения произвольны и коммутируют.

Действительно, следует из теорем 2.1, В и предложения 2.1.

3. Максимально линейчатый предпорядок

Условие n-линейчатости несвязного предпорядка может быть сформулировано следующим образом. Пусть $\mathcal{K} = \{K_x : x \in A^n\}$ — замкнутый с внутренними точками конический[1] предпорядок в A^n.

Определение 3.1. Предпорядок $\mathcal{P}$ называется *$\mathcal{K}$-линейчатым*, если для любой $x \in Q$ имеем $K_x \subset Q$.

Доказывается так же, как лемма 2.2.

Предложение 3.1. *Если $\mathcal{P}$ есть $\mathcal{K}$-линейчатый предпорядок, то $K \subset \sigma(P)$. Обратно, если $\sigma(\mathcal{P})$ — связный предпорядок, то $\overline{\mathcal{P}}$ есть $cont(\sigma(\mathcal{P}))$-линейчатый.*

Определение 3.2. Несвязный предпорядок $\mathcal{P}$ называется *максимально линейчатым*, если он является $ext(\mathcal{P})$-линейчатым.

Отметим, что если понятие $\mathcal{K}$-линейчатого порядка приложить и к теории связного порядка, то максимально линейчатый связный предпорядок — это просто конический предпорядок, то есть в случае связного предпорядка

[1] То есть K_x — конус.

определение 3.2 сводится к изменению названия. В то же время максимально линейчатый несвязный предпорядок может быть достаточно произвольным.

Нашей ближайшей задачей является вычисление группы автоморфизмов максимально линейчатых предпорядков.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$ *— предпорядок в* A^n *и* $x_0 \in int(P)$. *Тогда существуют точки* $u, v \in L(e, x_0)$ *и число* $r > 0$ *такие, что* $L(u, v) \subset L(e, x_0) \cap int(P)$, *а круговой телесный конус*

$$\bigcup_{w \in B(v,r)} L(u, w)$$

с вершиной u *и осью* $L(u, v)$ *целиком лежит в* $int(P)$.

Доказательство. В [3, пункт (2.2)] показано, что:

1) существует луч $L(u, v) \subset L(e, x_0) \cap int(P)$;

2) если $B(x_0, \varepsilon) \subset int(P)$, $\varepsilon > 0$, и t — перенос, для которого $t(e) = x_0$, то найдётся номер m_0 такой, что $u = t_{m_0}(e)$, $v = t_{m_0+1}(e)$ и

$$B(t_m(e), m\varepsilon) \subset int(P),$$

$$B(t_{m+1}(e), (m+1)\varepsilon) \cap B(t_m(e), m\varepsilon) \neq \emptyset$$

при $m \geqslant m_0$, где $t = \underbrace{t \circ ... \circ t}_{m-\text{раз}}$.

Пусть $|x_0 - e| = s$, $\varepsilon = \alpha s$, $0 < \alpha < 1$. Центр шара $B(t_m(x_0), (m+1)\varepsilon)$ отстоит от e на расстоянии $(m+1)s$. Проведём через луч $L(e, x_0)$ двумерную плоскость E, на которой введём прямоугольные координаты x, y, причём начало координат в точке e, и ось x совпадает с лучом $L(e, x_0)$. Пусть

$$C(m) = B(t_m(e), m\varepsilon) \cap E$$

— окружность на E с центром $(ms, 0)$ и радиусом $m\varepsilon$. Обозначим через $(x(m), y(m))$, $y(m) > 0$, точку пересечения окружностей $C(m)$ и $C(m+1)$.

Покажем, что

$$\frac{y(m)}{ms + x(m)} \geqslant a = const \tag{3.1}$$

при $m \geqslant m_0$.

Действительно, поместим в точку $(ms, 0)$ начало полярных координат (r, φ). Тогда $C(m)$ задаётся соотношениями $r = m\varepsilon$, φ — любое, а $C(m+1)$ — уравнением

$$r^2 - 2rs\cos\varphi + s^2 = (m+1)^2\varepsilon^2.$$

Подставляя $r = m\varepsilon$, находим

$$\cos\varphi = \frac{s^2 - \varepsilon^2(2m+1)}{2m\varepsilon s}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{4m^2\varepsilon^2 s^2 - [s^2 - \varepsilon^2(2m+1)]^2}}{2m\varepsilon s}.$$

Следовательно,

$$\frac{y(m)}{ms+x(m)} = \frac{m\varepsilon\sin\varphi}{ms+m\varepsilon\cos\varphi} = \frac{\sqrt{4m^2\varepsilon^2 s^2 - [s^2-\varepsilon^2(2m+1)]^2}}{2ms^2+s^2-\varepsilon^2(2m+1)} =$$

$$= \frac{\sqrt{4\alpha^2-(2\alpha^2+\frac{\alpha^2}{m}-\frac{1}{m})^2}}{(1-\alpha^2)(2+\frac{1}{m})} \geqslant \frac{\sqrt{4\alpha^2-9\alpha^4}}{3} = const$$

при $m \geqslant \max(m_0, 1) = m_0$ и достаточно малом α, обеспечивающем неотрицательность числа, стоящего под радикалом.

Итак, (3.1) установлено. Это неравенство означает следующее.

Если $\Lambda = L((0,0),(x(m_0)+m_0s, y(m_0)))$, то этот луч лежит в плоскости E «ниже» точек пересечений

$$C(m)\cap C(m+1)\cap\{(x,y)\in E : y>0\}.$$

Иначе говоря, если $Y\subset E$ — угол с вершиной e и граничными лучами Λ и полуосью $x>0$, то

$$Y' = \underbrace{t\circ\ldots\circ t}_{m_0-\text{раз}}(Y) \subset \bigcup_{m\geqslant m_0} B(\underbrace{t\circ\ldots\circ t}_{(m-1)-\text{раз}}(x_0), m\varepsilon)\cap E.$$

Вращая луч Y' вокруг оси $L(e,x_0)$, получим поверхностный круговой конус C с вершиной u такой, что

$$K = conv(C) \subset \bigcup_{m\geqslant m_0} B(\underbrace{t\circ\ldots\circ t}_{(m-1)-\text{раз}}(x_0), m\varepsilon) \subset int(P).$$

Лемма 3.1 доказана. ■

Предложение 3.2. *Если $\mathcal{P} = \{P_x : x\in A^n\}$ — нетривиальный предпорядок в A^n такой, что $int(P)\neq\emptyset$, то $ext(P)\neq A^n$, то есть $ext(P)$ содержится в полупространстве.*

Доказательство. Пусть $x_0\in int(P)$. Тогда существует $r>0$ такое, что $B(x_0,r)\subset P$. Предположим, что утверждение предложения не верно, то есть $ext(P)=A^n$. Возьмём точку x_1 центрально симметричную x_0 относительно e. В соответствии с определением $ext(P)$ и в силу предположения $ext(P)=A^n$ найдётся точка $z\in P$ такая, что

$$L(e,z)\cap B(x_1,r)\neq\emptyset.$$

В таком случае можно взять точку

$$\overline{x}\in B(x_0,r)\cap[L(e,z)\cup L(z,e)].$$

По лемме 3.1 существует точка $\widetilde{x} \in L(e,\overline{x})$ и круговой телесный конус K с вершиной $\widetilde{x}$ и осью $\Lambda \subset L(e,\overline{x})$ такой, что $K \subset int(P)$.

Пусть t — перенос, переводящий e в z. Тогда, так как $t(e) = z \in P$ и $K \subset P$, то

$$t(K) \subset P_z \subset P$$

и вообще

$$K_m \equiv \underbrace{t \circ ... \circ t}_{m-\text{раз}}(K) \subset P_{z_m} \subset P, \tag{3.2}$$

где

$$z_m = \underbrace{t \circ ... \circ t}_{m-\text{раз}}(e) \in P.$$

Из (3.2) следует, что существует номер m_0 и строго возрастающая последовательность чисел $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$, $r_m > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_m = +\infty$ таких, что

$$B(e, r_m) \subset K_{m+m_0} \subset P.$$

Другими словами, $P = A^n$, т. е. предпорядок $\mathcal{P}$ тривиальный. Это противоречит условию предложения 3.2.

Предложение 3.2 доказано. ■

Если в предложении 3.2 опустить условие $int(P) \neq \emptyset$, то утверждение предложения 3.2 становится ложным.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{P}$ — несвязный предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$, $int(P) \neq \emptyset$. Тогда*

$$\sigma(P) \subset ext(P), \quad ext(P) \neq A^n,$$

следовательно, $\sigma(\mathcal{P})$ — нетривиальный предпорядок.

Доказательство. В силу предложения 3.2 $ext(P)$ содержится в полупространстве, то есть $\partial(ext(P)) \neq \emptyset$.

Пусть $v \in int(Q)$ и $L_0 = L(e, v)$. Обозначим через y^* точку из $L_{0y} \cap \partial Q$, где $y \in \partial(ext(P))$, которая обладает тем свойством, что $L_{0y^*} \subset Q$, причём, если $z \in L_{0y} \cap Q$ таково, что $L_{0z} \subset Q$, то $L_{0z} \subset L_{0y^*}$. Такая точка y^* для каждой $y \in \partial(ext(P))$ найдётся в силу леммы 3.1. Следовательно, на $\partial(ext(P))$ определена функция $h(y) = |y - y^*|$.

Пусть Π — двумерная плоскость, проходящая через L_0, и $L_1 \cup L_2 = \Pi \cap \partial(ext(P))$. Ясно, что L_1, L_2 — лучи с началом e. Обозначим через $\pi \subset \Pi$ полуплоскость, ограниченную прямой $\lambda(e, v)$ такую, что $L_1 \subset \pi$. Здесь $\lambda(a, b) \equiv L(a, b) \cup L(b, a)$.

(a) Если $x_0 \in \pi \cap (A^n \setminus ext(P))$, то существует точка w, $w \neq e$, для которой $e \in Q_w$, но $x_0 \notin Q_w$.

Покажем это. Пусть

$$\{x_1\} = L_{0x_0} \cap L_1, \quad L_i^- = (\lambda(e, v_i) \setminus L_i) \cup \{e\} \quad (i = 0, 1),$$

где $v_0 = v$, $v_1 \in L_1 \setminus \{e\}$ — произвольная точка.

Предположим, что функция $h : L_1 \to [0, +\infty)$ неограниченная.

Тогда из леммы 3.1 следует, что h ограничена на каждом отрезке $\tau_i = [a_i, a_{i+1}]$, где $|e - a_i| < |e - a_{i+1}|$, $a_i \in L_1$ $(i = 1, 2, ...)$, $a_1 = e$.

Положим

$$s_i = \sup_{z \in \tau_i} h(z) \geqslant 0.$$

Существует подпоследовательность $\{s_{i_k}\}$ строго возрастающая. Но тогда возможно следующее построение. Если $s_i \leqslant s_1$ для $i = 1, 2, ..., k_1$, то положим $\sigma_1 = \tau_1 \cup ... \cup \tau_{k_1}$; если $s_i \leqslant s_{k_1+1}$ для $i = k_1 + 1, ..., k_2$, то $\sigma_2 = \tau_{k_1+1} \cup ... \cup \tau_{k_2}$ и т. д.

В результате получаем последовательность отрезков $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой имеем

$$\sup_{z \in \sigma_i} h(z) < \sup_{z \in \sigma_{i+1}} h(z) \quad (i = 1, 2, ...) \tag{3.3}$$

и

$$\lim_{i \to \infty} \sup_{z \in \sigma_i} h(z) = +\infty. \tag{3.4}$$

Зададим $\varepsilon > 0$ столь малое, что $\varepsilon < |x_0 - x_1|$. Тогда в силу (3.3), (3.4) найдутся номер $i_0 \geqslant 1$ и точки y, y_0, y_1, y_2 такие, что

$$y \in \sigma_{i_0}, \quad \{y_0, y_1\} \subset L_{0y}, \quad y_2 \in L^-_{1y_1}, \quad |y_1 - y_2| > 2|x_1 - e|,$$

$$[y_1, y_2] \subset Q, \quad |y_0 - y_1| = |x_0 - x_1|, \quad |y_0 - y^*| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y_0 \in (y, y^*), \quad y_0 \notin Q,$$

где $(a, b) \equiv [a, b] \setminus \{a, b\}$, а также

$$||y - y^*| - \sup_{z \in \sigma_{i_0}} h(z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Взяв теперь перенос t так, чтобы $t(y_0) = x_0$, получаем, что точка $w = t(e)$ удовлетворяет утверждению (a), ибо $x_0 \notin t(Q)$ и $e \in t(Q)$.

Предположим теперь, что функция h ограничена на L_1 числом $h_0 \geqslant 0$. Если $h_0 < |x_0 - x_1|$, то поступаем следующим образом.

Берём прямую $\lambda \subset \pi$, параллельную L_1, пересекающую Q и отстоящую от L_1 (вдоль L_0) на расстоянии h_0. Тогда найдутся точки $a, b \in \lambda$ такие, что

$$b \in L^-_{1a} \quad (a \neq b), \quad |a - b| > |e - x_1|, \quad [a, b] \subset Q.$$

Если теперь t — перенос, переводящий a в x_1, то точка $w = t(e)$ — искомая, так как $e \in t(Q)$, но $x_0 \notin t(Q)$.

Наконец, допустим, что $h_0 \geqslant |x_0 - x_1|$. Ясно, что h ограничена на каждом луче L_{1y}, где $y \in L_1$.

Если найдётся точка $y \in L_1$ такая, что h ограничена на L_{1y} числом h'_0 меньшим, чем $|x_0 - x_1|$, то возвращаемся по существу к ситуации, рассмотренной выше. Поэтому предположим, что это неверно. Без ограничения общности считаем, что

$$h_0 = \sup_{z \in L_1} h(z).$$

Но в таком случае найдутся точки y_0, y_1, y_2, y_3, для которых справедливы соотношения:

$$y_0 \in L_1, \quad h_0 - h(y_0) < \frac{1}{3}|x_0 - x_1|, \quad \{y_1, y_2\} \subset L_{0y_0},$$

$$y_1 \in (y_0, y_0^*), \quad |y_1 - y_0^*| < \frac{1}{3}|x_0 - x_1|, \quad |y_2 - y_1| = |x_0 - x_1|, \quad y_3 \in L^-_{1y_2},$$

$$|y_3 - y_2| > |x_1 - e|, \quad [y_2, y_3] \subset Q.$$

Взяв теперь перенос t так, что $t(y_1) = x_0$, получим искомую точку $w = t(e)$, ибо $x_0 \not\in t(Q)$, $e \in t([y_2, y_3]) \subset t(Q)$.

Итак, утверждение (a) доказано.

(b) Утверждение леммы справедливо.

В самом деле, предположим противное. Тогда существует точка $x_0 \in \sigma(P)$, $x_0 \neq e$ и $x_0 \not\in ext(P)$. Возьмём точку $v \in int(Q)$ и рассмотрим двумерную плоскость Π, проходящую через точки v, e, x_0.

Положим $\Pi \cap \partial(ext(P)) = L_1 \cup L_2$. Без ограничения общности можно считать, что x_0 лежит в полуплоскости $\pi \subset \Pi$, ограниченной прямой $\lambda(e, v)$ и содержащей луч L_1.

Тогда в силу пункта (a) найдётся точка $w \neq e$, для которой $x_0 \not\in Q_w$, но $e \in Q_w$. Это означает, в силу определения $\sigma(P)$, что $x_0 \not\in \sigma(P)$. Получаем противоречие с исходным предположением $x_0 \in \sigma(P)$.

Лемма 3.2 доказана. ■

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — максимально линейчатый несвязный предпорядок и $int(P) \neq \emptyset$. Тогда $\sigma(P) = ext(P)$ и, следовательно, $Aut(\mathcal{P}) \subset Aut(ext(\mathcal{P}))$. Обратно, если $\sigma(P) = ext(P)$, то $\overline{\mathcal{P}}$ — максимально линейчатый предпорядок.*

Доказательство. Из предложения 3.1 имеем $ext(P) \subset \sigma(P)$, а из леммы 3.2 следует, что $\sigma(P) \subset ext(P)$. Поэтому $\sigma(P) = ext(P)$.

Обратно, если $\sigma(P) = ext(P)$, то поскольку $ext(P)$ — замкнутый выпуклый конус, то $cont(\sigma(P), e) = ext(P)$. В силу предложения 3.1 предпорядок $\overline{\mathcal{P}}$ есть $ext(\mathcal{P})$-линейчатый.

Теорема 3.1 доказана. ■

Предложение 3.3. *Если $\mathcal{P}$ — несвязный замкнутый предпорядок с $int(P) \neq \emptyset$ и $P \subset cont(\sigma(P), e)$, то $\mathcal{P}$ — максимально линейчатый.*

Доказательство. Имеем:

$$P \subset cont(\sigma(P), e) \text{ влечет } ext(P) \subset cont(\sigma(P), e) \subset \overline{\sigma(P)}$$

в силу предложения 1.1.

По лемме 3.2 $\sigma(P) \subset ext(P)$. Для замкнутого предпорядка $\mathcal{P}$ имеем $\sigma(P) = \overline{\sigma(P)}$. Поэтому из предыдущих заключений выводим $\sigma(P) = ext(P)$. По теореме 3.1 $\mathcal{P} = \overline{P}$ — максимально линейчатый предпорядок.

Предложение 3.3 доказано. ■

Теперь нам нужна сильная аксиома Эйнштейна.

$\mathrm{P}4_s$. Внешний конус $ext(P)$ — строго выпуклый.

Предложение 3.4. *Если максимально линейчатый несвязный предпорядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна и $int(P) \neq \emptyset$, то справедлива аксиома* $\mathrm{P}4_s$.

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует $\sigma(P) = ext(P)$. Но тогда $cont(\sigma(P), e) = ext(P)$. По лемме 2.3 конус $cont(\sigma(P), e)$ — строго выпуклый. Следовательно, конус $ext(P)$ также строго выпуклый.

Предложение 3.4 доказано. ■

4. Однородные несвязные предпорядки и их классификация

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, $P_x = \{x\} \cup Q_x$ — несвязный предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$.

Определение 4.1. Несвязный предпорядок $\mathcal{P}$ называется *однородным*, если выполнена следующая аксиома.

P5. (Аксиома однородности.) Стабилизатор $Aut(\mathcal{P})_e$ точки e действует транзитивно на ∂Q.

Предложение 4.1. *Любой однородный несвязный предпорядок $\mathcal{P}$ — либо открытый, либо замкнутый.*

Доказательство. Пусть существует точка $x_0 \in \partial Q \cap Q$ и $x \in \partial Q$ — произвольная точка. Тогда существует $g \in Aut(\mathcal{P})_e$ такой, что $g(P) = P$ и $g(x_0) = x$. Так как $g(e) = e$, и g — биекция, то $g(Q) = Q$ и поэтому $x = g(x_0) \in g(Q) = Q$. Итак, если существует точка $x_0 \in \partial Q \cap Q$, то $\partial Q \subset Q$, т. е. предпорядок $\mathcal{P}$ — замкнутый. Если же $\partial Q \cap Q = \emptyset$, то Q — открытое множество. Значит предпорядок $\mathcal{P}$ открытый.

Предложение 4.1 доказано. ■

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — несвязный однородный нетривиальный порядок, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна. Тогда:*

1) $int(Q) \neq \emptyset$, *т. е. предпорядок $\mathcal{P}$ — либо открытый, либо замкнутый с внутренними точками;*

2) *каждый $\mathcal{P}$-автоморфизм является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Предположим, что утверждение 1) неверно, т. е. $int(Q) = \emptyset$. Тогда $\partial Q = Q$. Следовательно, группа $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на Q. Возьмём $a \in Q$. Такая точка существует, ибо порядок $\mathcal{P}$ — нетривиальный. Если t — перенос, переводящий e в a, то $b = t(a) \in Q$.

Найдётся $\mathcal{P}$-автоморфизм $g \in Aut(\mathcal{P})_e$, для которого $g(b) = a$. Но $a \preceq b$ или $g(b) \preceq b$, поэтому в силу монотонности g имеем $g(g(b)) \preceq g(b) \preceq b$, и вообще,

$$g^{m+1}(b) \equiv \underbrace{g(...g(b)...)}_{(m+1)-\text{раз}} \preceq \underbrace{g(...g(b)...)}_{m-\text{раз}} \equiv g^m(b) \preceq b.$$

Последовательность $\{g^m(b)\}_{m=1}^{\infty}$ бесконечна, ибо с самого начала $a \neq b$, и поэтому в силу биективности $\mathcal{P}$-автоморфизма g для каждого m $g^m(b) \neq g^{m+1}(b)$.

Далее, для каждого m имеем $g^m(b) \in P \cap P_b^-$. Но множество $P \cap P_b^-$ ограничено, ибо порядок $\mathcal{P}$ удовлетворяет слабой аксиоме Эйнштейна. Отсюда последовательность $\{g^m(b)\}$ имеет предельную точку.

Пусть $\varepsilon > 0$ столь малое число, что

$$B(e, \varepsilon) \cap Q = \emptyset, \tag{4.1}$$

а точки $g^m(b), g^k(b)$ таковы, что $g^m(b) \preceq g^k(b)$ и

$$|g^m(b) - g^k(b)| < \varepsilon.$$

Если $\widetilde{t}$ — перенос, переводящий $g^m(b)$ в e, то

$$P = \widetilde{t}(P_{g^m(b)}) \ni \widetilde{t}(g^k(b)).$$

Значит $\widetilde{t}(g^k(b)) \in B(e, \varepsilon) \cap Q$. Это противоречит (4.1).

Итак, утверждение 1) теоремы справедливо. Утверждение 2) вытекает немедленно благодаря теореме B.

Теорема 4.1 доказана. ■

Следствие 4.1. *Если $\mathcal{P}$ — несвязный нетривиальный однородный замкнутый порядок, удовлетворяющий аксиоме* P4$_w$, *то $Q = \overline{int(Q)}$.*

Действительно, $int(Q) \neq \emptyset$ в силу теоремы 4.1. Если $x_0 \in \partial Q$, и существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$B(x_0, \varepsilon) \cap int(Q) = \emptyset,$$

то в силу однородности подобным свойством обладают все точки границы ∂Q. Но любая точка $x_1 \in \overline{int(Q)} \setminus int(Q)$ является граничной. В то же время для любого $\varepsilon > 0$ имеем $B(x_1, \varepsilon) \cap int(Q) \neq \emptyset$. Противоречие. ■

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{P}$ — несвязный однородный нетривиальный порядок в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющий слабой аксиоме Эйнштейна и являющийся n-линейчатым. Тогда:*

1) *порядок $\mathcal{P}$ — аффинный, а $\overline{\mathcal{P}}$ — максимально линейчатый аффинный;*

2) *справедлива сильная аксиома Эйнштейна, причём*

$$ext(P) = cont(\sigma(P), e)$$

– есть строго выпуклый конус, допускающий аффинную группу G преобразований, действующую транзитивно на $int(ext(P))$;

3) *множество Q выпуклое и выделяется из конуса $ext(P)$ гиперплоскостями, отсекающими от $ext(P)$ конечный объём. При этом группа $Aut(\mathcal{P})_e$ является подгруппой группы G.*

Таким образом, возможна классификация однородных n-линейчатых несвязных порядков в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющих аксиоме P4$_w$. Она сводится к классификации однородных строго выпуклых конусов и вычислению группы G. Это сделано в работах Э.Б. Винберга [8, 9]. Тогда $\partial P \setminus \{e\}$ есть орбита группы $Aut(\mathcal{P})_e \subset G$.

Доказательство. (a) Согласно теореме 4.1 $Aut(\mathcal{P}) = Aut_c(\mathcal{P})$. Поэтому в силу теоремы 2.1 порядок $\mathcal{P}$ — либо аффинный, либо квазицилиндрический. На основании теоремы 4.1 без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{P}$ — замкнутый порядок. Тогда по теореме Б каждый $\mathcal{P}$-автоморфизм является $cont(\sigma(P))$-автоморфизмом.

Следовательно, если $f \in Aut(\mathcal{P})_e$, то

$$f(cont(\sigma(P), e)) = cont(\sigma(P), e). \tag{4.2}$$

Но благодаря лемме 3.2 и теореме 4.1

$$\sigma(P) \subset ext(P),$$

поэтому

$$cont(\sigma(P), e) \subset ext(P).$$

Предположим, что $cont(\sigma(P), e)$ не совпадает с $ext(P)$. Тогда существует точка

$$x_0 \in int(ext(P)) \setminus cont(\sigma(P), e).$$

Луч $L(e, x_0)$ пересекает ∂Q в соответствии с определением внешнего конуса. Аналогично, если $L(e, x_1)$, $x_1 \neq x_0$, – луч контингенции $cont(\sigma(P), e)$, то он также пересекает ∂Q, если $x_1 \in int(cont(\sigma(P), e)))$. Пусть

$$y_0 \in L(e, x_0) \cap \partial Q, \quad y_1 \in L(e, x_1) \cap \partial Q.$$

В силу однородности порядка $\mathcal{P}$ существует $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ такой, что $f(y_1) = y_0$. Поэтому, взяв $y_1 \in cont(\sigma(P), e)$, мы получим, что $f(y_1) \notin cont(\sigma(P), e)$. Это противоречит (4.2).

Итак, доказано

$$cont(\sigma(P), e) = ext(P). \tag{4.3}$$

Из (4.3) и предложения 3.1 следует, что $\overline{\mathcal{P}}$ — максимально линейчатый предпорядок.

По лемме 2.3 $cont(\sigma(P), e)$ имеет острую вершину. Поэтому (4.3) означает, что для $\mathcal{P}$ выполнена сильная аксиома Эйнштейна.

(б) Покажем теперь, что $\mathcal{P}$ не может быть квазицилиндрическим порядком. Если P — квазицилиндр, то $\overline{P}$ — квазицилиндр. Поэтому далее будем считать, что P — замкнутый квазицилиндр и приведём это предположение к противоречию.

Пусть P — квазицилиндр $Q(E_1, \mathbf{l}_1), ..., Q(E_p, \mathbf{l}_p)$.

Если $x_0 \in \partial Q$, а N_i — прямая, проходящая через e и параллельная вектору $\mathbf{l}_i$, то множество $N_{ix_0} \cap \partial Q$ в качестве замкнутых связных компонент может иметь только точки, отрезки, не вырождающиеся в точки, и лучи. Это непосредственное следствие того, что $P = Q(E_i, \mathbf{l}_i)$ и сильной аксиомы Эйнштейна.

Последнее в данном случае означает, что P не может содержать прямую N_{ix_0}. Рассмотрим множество $N_{ix_0} \cap \partial Q \quad (i = 1, ..., p)$.

Типом точки x_0 назовём тройку чисел (m, k, s), каждое из которых является целым неотрицательным числом, и m — это число замкнутых связных компонент семейства множеств $N_{ix_0} \cap \partial Q$ $(i = 1, ..., p)$, содержащих точку x_0 и представляющих собой точку, k — число замкнутых связных компонент, представляющих собой отрезок, и, наконец, s — число замкнутых связных компонент, совпадающих с лучом.

Поскольку группа $Aut(\mathcal{P})_e$ состоит из гомеоморфизмов, то каждый $\mathcal{P}$-автоморфизм $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ точку $x_0 \in \partial Q$ с типом (m, k, s) переводит в точку $f(x_0)$, имеющую тот же самый тип (m, k, s). Действительно, раз P — квазицилиндр, то

$$f = f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ ... \circ d_{E_p \mathbf{l}_p},$$

где f_0 — аффинная биекция. Каждое смещение $d_{E_i \mathbf{l}_i}$ сохраняет каждое из семейств прямых $\{N_{jx} : x \in A^n\}$ $(j = 1, ..., p)$.

Кроме того,

$$d_{E_i \mathbf{l}_i}[Q(E_, \mathbf{l}_i)] = Q(E_i, \mathbf{l}_i), \quad (i = 1, ..., p),$$

и раз $P = Q(E_i, \mathbf{l}_i)$, то

$$d_{E_i \mathbf{l}_i}[Q] = Q \quad (i = 1, ..., p).$$

Поэтому

$$Q = f(Q) = (f_0 \circ d_{E_1 \mathbf{l}_1} \circ ... \circ d_{E_p \mathbf{l}_p})(Q) = f_0(Q). \tag{4.4}$$

Но аффинный образ квазицилиндра — это квазицилиндр. Отсюда с учётом (4.4) получаем

$$f_0[Q(E_i, \mathbf{l}_i)] = Q(E_j, \mathbf{l}_j),$$

поскольку P может быть только одним из квазицилиндров $Q(E_1, \mathbf{l}_1), ..., Q(E_p, \mathbf{l}_p)$ $(p \leqslant n)$.

Таким образом, f_0 отображает семейство прямых $\{N_{ix} : x \in A^n\}$ на семейство $\{N_{jx} : x \in A^n\}$. Поэтому тип граничной точки инвариантен при $\mathcal{P}$-автоморфизме $f \in Aut(\mathcal{P})_e$.

Покажем, что если P есть квазицилиндр $Q(E_1,\mathbf{l}_1),...,Q(E_p,\mathbf{l}_p)$, то существуют граничные точки с различными типами.

Если $p=1$, то есть P может быть квазицилиндром только в единственном представлении $Q(E_1,\mathbf{l}_1)$, это утверждение очевидно, ибо в данном случае возможны только три типа (1,0,0), (0,1,0) и (0,0,1). Тип $(1,k,s)$ легко получить в случае любого значения числа p. Для этого нужно взять точку $z\in int(P)$ и провести прямую N_{1z}. Тогда ближайшая к z точка $z'\in N_{1z}\cap\partial Q$ реализует тип $(1,k,s)$. Тип $(0,k,s)$ в случае $p=1$ существует благодаря непосредственному определению квазицилиндра.

Предположим, что тип $(0,k,s)$ существует у точек $x\in\partial Q$, если $p\leqslant t$. Докажем, что тип $(0,k,s)$ реализуется, если $p=t+1$. Для этого назовём точку $x_0\in\partial Q$ *особой*, если её тип $(0,k,s)$ и она является концом отрезка или началом луча, которые представляют собой те самые замкнутые компоненты связности, с помощью которых определяется тип точки. В случае $p=1$, как легко видеть, особые точки существуют.

Предполагаем, что они существуют при $p\leqslant t$. Докажем, что они существуют при $p=t+1$.

Квазицилиндр $P=Q(E_p,\mathbf{l}_p)$ имеет вид (см. определение 1.2)

$$\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} M_j\cup(P\cap E_p^{(j)}),$$

где M_j — цилиндры, образованные открытыми отрезками, равными и параллельными (как векторы) вектору $\mathbf{l}_p$, с концами на гиперплоскостях $E_p^{(j)},E_p^{(j+1)}$. Следовательно, существует точка $x_0\in\partial Q\cap E_p^{(j)}$. Здесь мы учитываем, что согласно сильной аксиоме Эйнштейна прямая N_{px_0} не содержится целиком в Q, а Q замкнуто.

Множество $P\cap E_p^{(j)}$ есть квазицилиндр вида $Q(E_1,\mathbf{l}_1),...,Q(E_{p-1},\mathbf{l}_{p-1})$, раз таковым является P. Но тогда по индукционному предположению существуют особые точки $z\in\partial(P\cap E_p^{(j)})$. Покажем, что z — особая точка для P. Действительно, проведём прямую N_{pz}. Если сколь угодно близко к точке z на прямой N_{pz} есть внутренняя точка $u\in int(Q)$, то в силу определения квазицилиндра $Q(E_p,\mathbf{l}_p)$ существует цилиндр $C\subset int(Q)$, $u\in C$ с образуюшими, параллельными $\mathbf{l}_p$, одно основание S которого принадлежит плоскости $E_p^{(j)}$. Но тогда z — внутренняя точка (в топологии $E_p^{(j)}$) основания S. Это означает, что z не является особой точкой для квазицилиндра $P\cap E_p^{(j)}$, ибо $S\subset P\cap E_p^{(j)}$.

Итак, на N_{pz} нет сколь угодно близко к z точек из $int(Q)$, т. е. z — особая точка. Тем самым доказано существование при $p=t+1$ особых точек, а значит и граничных точек типа $(0,k,s)$. Выше было показано существование точек с типом $(1,k,s)$. Существование граничных точек с различным типом противоречит однородности порядка $\mathcal{P}$. Значит, P не может быть квазицилиндром.

(в) Как доказано только что, $Aut(\mathcal{P})\subset Aff(A^n)$. Если $z\in int(ext(P))$, то $L(e,z)\cap Q\neq\emptyset$. Поэтому $Aut(\mathcal{P})_e$ действует транзитивно на лучах

$$\{L(e,z): z\in int(ext(P))\}.$$

Если к группе $Aut(\mathcal{P})_e$ добавить подобия, то получим группу G аффинных преобразований, сохраняющих семейство $\{ext(P_x) : x \in A^n\}$ и действующих транзитивно на $int(ext(P))$.

Тем самым окончательно доказано утверждение 2).

(г) Рассмотрим $\overline{conv(Q)}$. Возьмём точку $x_0 \in \partial(conv(Q)) \cap \partial Q$, и опорную гиперплоскость T_{x_0} к $\overline{conv(Q)}$ в точке x_0. Если $x \in \partial Q$ — произвольная точка, то существует $f \in Aut(\mathcal{P})_e$ такой, что $f(x_0) = x$. Так как f аффинно, то

$$f(\overline{conv(Q)} = \overline{conv(Q)},$$

и $f(T_{x_0})$ — опорная к $\overline{conv(Q)}$ гиперплоскость, содержащая точку x. Следовательно, $x \in \partial(\overline{conv(Q)})$. Таким образом, в силу произвольности точки $x \in \partial Q$ мы убеждаемся в равенстве

$$\partial(convQ) = \partial Q,$$

т. е. ∂Q — выпуклая гиперповерхность, а Q — выпуклое тело.

Остальные утверждения пункта 3) теоремы очевидны.

Теорема 4.2 доказана. ■

5. Физическая интерпретация линейчатости

На первый взгляд, условие линейчатости порядка кажется искусственным и не имеющим физического смысла. Но в действительности под линейчатостью скрывается вполне определённый взгляд на природу причинности.

Если x — причина события $y \in \partial Q_x$, то в случае несвязного порядка $\mathcal{P}$ между x и y может не существовать промежуточных событий, находящихся в причинно-следственной связи с x, y. Другими словами, воздействие от x передаётся скачком y. Однако для линейчатого порядка $\mathcal{P}$ найдётся луч L_y с началом y, целиком лежащий в Q_x. На этом луче лишь счётное число событий $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют причинно связанную цепочку, начинающуюся с $y = x_1$. Естественно, что все они должны лежать в Q_x.

Почему же остальные точки луча L_y должны лежать в Q_x, как это предполагает условие линейчатости? Ответ очень простой: причина x — это всего лишь *толчок*, запускающий *непрерывный процесс* L_y с началом в точке y. Для непрерывного процесса нет необходимости требовать, чтобы события, его образующие, составляли причинную кривую, любые два сколь угодно близкие события a, b которой должны находиться в причинном отношении $a \preceq b$ (или $b \preceq a$).

Поясним сказанное на примере. Если x — взрыв пороха в патроне, находящегося в стволе ружья, а y — начало движения пули, вытолкнутой из ствола пороховыми газами, то пуля летит по мировой линии L_y, и совсем нелепо считать, что эти газы, давно рассеявшиеся, продолжают толкать пулю в далёком от y состоянии $a \neq y$, которое она занимает на линии L_y.

Остаётся понять, почему непрерывный процесс L_y должен быть *прямолинейным* лучом? Ответ также незатейливый. Процесс L_y — это мировая линия материальной точки (тела), *движущейся по инерции*. Именно движению по инерции, т. е. состоянию прямолинейного и равномерного движения материальной точки в пространстве или состоянию покоя, отвечают прямолинейные мировые линии в пространстве-времени $\mathcal{M}$. Закон инерции, т. е. первый закон Ньютона, и составляет содержание условия линейчатости порядка $\mathcal{P}$. Другими словами, предполагая выполнение закона инерции и дополняя его принципом причинности в определённой форме, о которой было сказано выше, мы должны требовать выполнение условия линейчатости порядка.

6. Заключение

Автор уверен, что теоремы 2.1 и 4.2 справедливы и без предположения о линейности порядка. Но это ему не удалось доказать с 1980 по 1987 год. Позже такие попытки не предпринимались.

Литература

1. Александров А.Д. Отображения упорядоченных пространств // Труды МИАН. 1972. Т. 128. С. 3–21.
2. Гуц А.К. К основаниям геометрии пространства-времени // Доклады АН СССР. 1980. Т. 253, № 2. С. 268–271.
3. Гуц А.К. Изотонные отображения несвязно упорядоченного евклидова пространства // Сиб. мат. ж. 1980. Т. 21, № 3. С. 80–88.
4. Гуц А.К. Несвязный порядок в аффинном пространстве и его автоморфизмы // Учёный совет мат. фак. ОмГУ. Деп. в ВИНИТИ 02.12.92, № 3427–В92. 32 с.
5. Гуц А.К. Хроногеометрия: аксиоматическая теория относительности / Изд. 2, испр. и доп. М. : УРСС, 2018. 352 с.
6. Левичев А.В. Связность пересечений и выпуклая оболочка // Кандидат. диссертация. Новосибирск, Институт математики. 1979.
7. Гуц А.К. Аксиоматическая теория относительности // УМН. 1982. Т. 37, № 2. С. 39–79.
8. Винберг Э.Б. Теория однородных выпуклых конусов // Труды ММО. 1963. Т. 12. С. 303–358.
9. Винберг Э.Б. Строение группы автоморфизмов однородных конусов // Труды ММО. 1965. Т. 13. С. 56–83.

NON-CONNECTED ORDER IN AFFINE SPACE AND ITS AUTOMORPHISMS

A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the works of A.D. Aleksandrov connected preorder in an affine space was studied and its automorphisms were calculated. In this article we explore a non-connected preorder (partial order). Order automorphisms are calculated and the classification of homogeneous non-connected preorders are given. Non-connected order allows one to construct axiomatics of a special theories of relativity based on the concept of causality, not applicable to the phenomena of the microworld.

Keywords: affine space, disconnected order, ordinal automorphisms, axioms, special theory of relativity.

References

1. Aleksandrov A.D. Otobrazheniya uporyadochennykh prostranstv. Trudy MIAN, 1972, vol. 128, pp. 3–21. (in Russian)
2. Guts A.K. K osnovaniyam geometrii prostranstva-vremeni. Doklady AN SSSR, 1980, vol. 253, no. 2, pp. 268–271. (in Russian)
3. Guts A.K. Izotonnye otobrazheniya nesvyazno uporyadochennogo evklidova prostranstva. Sib. mat. zh., 1980, vol. 21, no. 3, pp. 80–88. (in Russian)
4. Guts A.K. Nesvyaznyi poryadok v affinnom prostranstve i ego avtomorfizmy. Uchenyi sovet mat. fak. OmGU, Dep. v VINITI 02.12.92, no. 3427–B92, 32 p. (in Russian)
5. Guts A.K Khronogeometriya: Aksiomaticheskaya teoriya otnositel'nosti. Izd. 2, ispr. i dop., Moscow, URCC, 2018, 352 p. (in Russian)
6. Levichev A.V. Svyaznost' peresechenii i vypuklaya obolochka. Kandidat. dissertatsiya, Novosibirsk, Institut matematiki, 1979. (in Russian)
7. Guts A.K. Aksiomaticheskaya teoriya otnositel'nosti. UMN, 1982, vol. 37, no. 2, pp. 39–79. (in Russian)
8. Vinberg E.B. Teoriya odnorodnykh vypuklykh konusov. Trudy MMO, 1963, vol. 12, pp. 303–358. (in Russian)
9. Vinberg E.B. Stroenie gruppy avtomorfizmov odnorodnykh konusov. Trudy MMO, 1965, vol. 13, pp. 56–83. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 01.12.2021