Математические структуры и моделирование
2021. № 4(60). С. 9–16

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2021.4.9-16

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ МАСШТАБНОЙ НОРМИРОВКОЙ

А.Г. Гринь
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работе показано, как с помощью полученных ранее результатов о предельных теоремах для симметрических функций от случайных величин можно доказывать центральную предельную теорему для U-статистик, в частности в с случае ядер растущего числа переменных.

Ключевые слова: симметрические функции от случайных величин, центральная предельная теорема, U-статистики с ядрами растущего числа переменных.

Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин. Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$, $\xi_n \overset{d}{\to} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\sim} \eta_n$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают, $\{\xi_n\}$ сходится к η по распределению и когда последовательности $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ слабо эквивалентны (см., например, [1, § 28.1]).

Следуя [2], назовём $\{b_n, n = 1, 2, ...\}$ правильно меняющейся последовательностью порядка ρ, если $b_{[x]}$, $x > 0$ является правильно меняющейся функцией порядка ρ, где $[x]$ — целая часть x. Через $\hat{\xi}_1, ..., \hat{\xi}_n$ будем обозначать *независимые* случайные величины такие, что $\hat{\xi}_k \overset{d}{=} \xi_k$, $k = 1, 2, ..., n$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$ для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Пусть $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, $A_n = \mathbb{E}X_n$, $n = 1, 2, ...$, $B_n^2 = \mathbb{D}X_n \to \infty$, а $\mathcal{N}(0, 1)$ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Если

$$B_n^{-1}(X_n - A_n) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0, 1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Обозначим

$$\alpha_n = \left(\frac{B_n}{B_{n+m}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho} - 1}, \quad \alpha_m = \left(\frac{B_m}{B_{n+m}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho} - 1}, \quad \rho > 0.$$

Будем говорить, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию $(\mathrm{R_f})$, если

$$\frac{X_{n+m}}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\alpha_n \widehat{X}_n}{B_{n+m}} + \frac{\alpha_m \widehat{X}_m}{B_{n+m}}, \quad n+m \to \infty. \tag{$\mathrm{R_f}$}$$

Если $\{B_n\}$ является правильно меняющейся последовательностью порядка $\rho > 0$ и $\gamma_n = B_{n+m}^{-1}(\alpha_n A_n + \alpha_m A_m - A_{n+m}) \to 0$, $n+m \to \infty$, то будем говорить, что выполнены условия нормировки (N).

В [3] получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть* $\{\xi_n, n = 1, 2, ...\}$ *— стационарная последовательность и пусть* $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$. *Для того чтобы к последовательности* $\{X_n\}$ *была применима центральная предельная теорема и выполнялись условия нормировки* (N)*, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $(\mathrm{R_f})$ *и последовательность* $\{B_n^{-2}(X_n - A_n)^2\}$ *была равномерно интегрируема.*

Замечание 1. В предположениях теоремы 1 условие $(\mathrm{R_f})$ равносильно условию

$$\frac{X_{n+m} - A_{n+m}}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \frac{\alpha_n \left(\widehat{X}_n - A_n\right)}{B_{n+m}} + \frac{\alpha_m \left(\widehat{X}_m - A_m\right)}{B_{n+m}}, \quad n+m \to \infty. \tag{$\mathrm{R_f^*}$}$$

Этот факт по сути доказан в Теореме 2 в [3], где показано, что в условиях теоремы 1 из $(\mathrm{R_f})$ и равномерной интегрируемости $\{B_n^{-2}(X_n - a_n)^2\}$ следует условие нормировки (N) и, следовательно, $(\mathrm{R_f^*})$; если же выполняется условие (N), то очевидным образом из $(\mathrm{R_f^*})$ следует $(\mathrm{R_f})$.

Пусть f симметрическая вещественнозначная функция и пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых величин.

$$U_n = U_n(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \neq i_2 \neq, ..., \neq i_k \leqslant n} f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) \tag{1}$$

называют U-статистикой с ядром f (см., например [4]).

В. Хёфдингом [5] показано, что если $\mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, ..., \xi_k)|\xi_1\} \neq 0$, то к последовательности $\{U_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Замечание 2. Условие $\mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, ..., \xi_k)|\xi_1\} \neq 0$ просто означает, что $\mathbb{E}\{f(\xi_1, ..., \xi_k)|\xi_1\}$ — невырожденная случайная величина. Роль этого условия поясним на простом примере, когда $U_n = \sum\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} \xi_i \xi_j$, $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi_1 > 0$. Если $\mathbb{E}\xi_1 = 0$, (в этом случае U_n называют канонической или вырожденной U-статистикой), то $\mathbb{E}\{\xi_1\xi_2|\xi_1\} = 0$, а

$$n^{-1}U_n = n^{-1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}^2(0, \sigma) - \sigma^2, \quad n \to \infty,$$

то есть предельное распределение не является нормальным, и для $\{U_n\}$ центральная предельная теорема не выполняется. Если же $a = \mathbb{E}\xi_1 \neq 0$, то $\mathbb{E}\{\xi_1\xi_2|\xi_1\} = a\xi_1$, а

$$U_n - \mathbb{E}U_n = \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(\xi_i - a)(\xi_j - a) + 2(n-1)a\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - a),$$

так что $n^{-3/2}(U_n - \mathbb{E}U_n) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma')$, $\sigma' > 0$, то есть к $\{U_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Будем предполагать, что

$$a = \mathbb{E}f(\xi_1, ..., \xi_k),\ b^2 = \mathbb{E}f^2(\xi_1, ..., \xi_k) < \infty,\ \sigma^2 = \mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, ..., \xi_k)|\xi_1\} \neq 0.$$

Обозначим $\sigma_{\leqslant s}$ σ-алгебру, порождённую величинами $\{\xi_l : l \leqslant s\}$, и пусть

$$\mathbb{E}_s U_n = \mathbb{E}\{U_n|\sigma_{\leqslant s}\},\ Y_s = \mathbb{E}_s U_n - \mathbb{E}_{s-1}U_n,\ s = 1, ..., n.$$

Тогда $\{Y_s, \sigma_{\leqslant s}\}$ — мартингал-разность и $U_n - \mathbb{E}U_n = \sum\limits_{s=1}^{n} Y_s$. Если ни одно из чисел $i_1, ..., i_k$ не равно s, то

$$\mathbb{E}_s f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) = \mathbb{E}_{s-1} f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}),$$

так что

$$Y_s = \mathbb{E}_s \sum_{(i_1,...,i_k)_s} f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1} \sum_{(i_1,...,i_k)_s} f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}), \tag{2}$$

где $(i_1, ..., i_k)_s$ — выборки (упорядоченные без повторений) объёма k из $\{1, 2, ..., n\}$, в которых одно из чисел равно s, число таких выборок равно kA_{n-1}^{k-1}, $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. В силу 2

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}Y_s^2 \leqslant 2\sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{(i_1,...,i_k)_s}\|f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k})\|_2\right)^2 \leqslant 2bn\left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2, \tag{3}$$

($\|\xi\|_2^2 = \mathbb{E}\xi^2$). Обозначим $\mathbb{E}\{Y_s|\xi_s\} = Z_s$. Тогда

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}Y_s^2 = \sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}\left(Y_s - Z_s\right)^2 + \sum_{s=1}^{n}\mathbb{E}Z_s^2,$$

$$Z_s = \mathbb{E}\{Y_s|\xi_s\} = \sum_{(i_1,...,i_k)_s}\left(\mathbb{E}\{f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k})|\xi_s\} - \mathbb{E}f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k})\right).$$

В последней сумме все слагаемые одинаковы и равны

$$h(\xi_s) = \mathbb{E}\{f(\xi_s, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_k})|\xi_s\} - \mathbb{E}f(\xi_s, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_k}),$$

где $j_2, ..., j_k$ — произвольные не равные s числа из $\{1, 2, ..., n\}$. Так что

$$Z_s = kA_{n-1}^{k-1}h(\xi_s), \quad \mathbb{E}Z_s^2 = \mathbb{D}Z_s = \left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 \mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, ..., \xi_k)|\xi_1\} = \left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 \sigma^2.$$

Далее, в сумме

$$Y_s - Z_s = \sum_{(i_1,...,i_k)_s} (\mathbb{E}_s f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1} f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) -$$
$$- \mathbb{E}\{f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k})|\xi_s\} + \mathbb{E}f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}))$$

равны нулю слагаемые, в которых $i_1 \geqslant s, ..., i_k \geqslant s$, так что в силу (3)

$$\mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 \leqslant 16b^2(k-1)^2(n-1)\left(A_{n-2}^{k-2}\right)^2. \tag{4}$$

Обозначим

$$A_n = \mathbb{E}U_n = aA_n^k, \ B_n^2 = \mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 = n\left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 \sigma^2 \sim n^{2k-1}k^2\sigma^2, \ n \to \infty.$$

Тогда $2\rho = 2k - 1$ и

$$\alpha_n = \left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+m-1}} \frac{A_{n-1}^{k-1}}{A_{n+m-1}^{k-1}}\right\}^{\dfrac{2-2k}{2k-1}} \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}, \ \alpha_m \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}}. \tag{5}$$

С помощью (4) получаем

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{s=1}^n \mathbb{E}\left(Y_s - Z_s\right)^2 \leqslant 16a^2n(n-1)(k-1)^2\left(\frac{A_{n-2}^{k-2}}{B_n}\right)^2 \sim 16\frac{a^2(k-1)^2}{\sigma^2k^2n} \to 0,$$

так что

$$B_n^{-1}(U_n - A_n) = B_n^{-1}\sum_{s=1}^n Y_s \overset{d}{\sim} B_n^{-1}\sum_{s=1}^n Z_s = kA_{n-1}^{k-1}B_n^{-1}\sum_{s=1}^n h(\xi_s), \ n \to \infty. \tag{6}$$

Воспользовавшись (5) и (6), выводим

$$B_{n+m}^{-1}(U_{n+m} - A_{n+m}) \overset{d}{\sim} kA_{n+m-1}^{k-1}B_{n+m}^{-1}\left(\sum_{s=1}^n h(\xi_s) + \sum_{s=n+1}^{n+m} h(\xi_s)\right) \overset{d}{\sim}$$
$$\overset{d}{\sim} \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}\frac{\widehat{U}_n - A_n}{b_{n+m}} + \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}}\frac{\widehat{U}_m - A_m}{b_{n+m}} \overset{d}{\sim} \alpha_n\frac{\widehat{U}_n - A_n}{B_{n+m}} + \alpha_m\frac{\widehat{U}_m - A_m}{b_{n+m}},$$

то есть выполнено $(\mathrm{R}_\mathrm{f}^{**})$.

В силу (4) равномерная интегрируемость $\{B_n^{-2}(U_n - A_n)^2\}$ равносильна равномерной интегрируемости $\left\{B_n^{-2}\left(\sum\limits_{s=1}^n Z_s\right)^2\right\}$, что, в силу независимости и одинаковой распределённости $Z_1, ..., Z_n$ равносильно выполнению условия Линдеберга

$$nB_n^{-2}\mathbb{E}\{Z_1^2, |Z_1| \geqslant \varepsilon B_n\} = \sigma^{-2}\mathbb{E}\{h^2(\xi_1), |h(\xi_1)| \geqslant \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} \to 0, \ n \to \infty.$$

Из теоремы 1 и замечания 1 следует теперь, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, то есть мы получили результат В. Хёфдинга [5].

Замечание 3. В доказательстве достаточности в Теореме 1 используется условие (R_f^*), а правильное изменение $\{B_n\}$ используется для того, чтобы обеспечить выполнение соотношения $B_{nl} \sim l^\rho B_n$ при любом натуральном l. Нетрудно видеть, что вместо правильного изменения $\{B_n\}$ можно предполагать для некоторой не зависящей от B_n последовательности $\rho(n) \to \infty$ выполняется $B_{nl} \sim l^{\rho(n)} B_n$; это, например, имеет место в случае, когда $B_n \sim n^{\rho(n)}$, где $(\rho(ln) - \rho(n)) \ln n \to 0,\ n \to \infty$. Необходимые изменения в доказательстве достаточно очевидны.

В дальнейшем мы будем рассматривать U-статистики с ядрами вида $f(x_1, x_2, ..., x_k) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_k$ растущего числа переменных, то есть $k = k(n) \to \infty$, и покажем, как с помощью теоремы 1 (замечания 2) можно доказывать предельные теоремы для U-статистик указанного вида (полилинейных форм растущего числа переменных).

Пусть

$$a = \mathbb{E}\xi_1 \neq 0,\ a_k = \mathbb{E}\xi_1 \cdot ... \cdot \xi_k = a^k,\ b^2 = \mathbb{E}\xi_1^2 < \infty,\ b_k^2 = \mathbb{E}(\xi_1 \cdot, ..., \cdot \xi_k)^2 = b^{2k},$$

$$\sigma_k^2 = \mathbb{D}\mathbb{E}\{\xi_1 \cdot ... \cdot \xi_k | \xi_1\} = a^{2k-2}\mathbb{D}\xi_1 = a^{2k-2}\sigma^2 \neq 0.$$

Как и выше, будем обозначать

$$\mathbb{E}_s U_n = \mathbb{E}\{U_n | \sigma_{\leqslant s}\},\ Y_s = \mathbb{E}_s U_n - \mathbb{E}_{s-1} U_n,\ s = 1, ..., n.$$

Тогда $\{Y_s, \sigma_{\leqslant s}\}$ — мартингал-разность и $U_n - \mathbb{E}U_n = \sum\limits_{s=1}^n Y_s$,

$$Y_s = \sum_{(i_1,...,i_k)_s} \left(\mathbb{E}_s(\xi_{i_1} \cdot ..., \cdot \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1}(\xi_{i_1} \cdot ... \cdot \xi_{i_k})\right),$$

откуда

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 \leqslant 2 \sum_{s=1}^n \left(\sum_{(i_1,...,i_k)_s} \|\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}\|_2 \right)^2 \leqslant 2n \left(k A_{n-1}^{k-1}\right)^2 b^{2k}. \qquad (7)$$

Обозначим $\mathbb{E}\{Y_s | \xi_s\} = Z_s$. Тогда

$$\mathbb{D}U_n = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Y_s^2 = \sum_{s=1}^n \mathbb{E}\left(Y_s - Z_s\right)^2 + \sum_{s=1}^n \mathbb{E}Z_s^2, \qquad (8)$$

$$Z_s = \mathbb{E}\{Y_s | \xi_s\} = \sum_{(i_1,...,i_k)_s} \left(\mathbb{E}\{(\xi_{i_1} \cdot ... \cdot \xi_{i_k}) | \xi_s\} - \mathbb{E}(\xi_{i_1} \cdot ... \cdot \xi_{i_k})\right).$$

В последней сумме все слагаемые одинаковы и равны

$$h_k(\xi_s) = \mathbb{E}\{(\xi_s \cdot \xi_{j_2} \cdot ... \cdot \xi_{j_k})|\xi_s\} - \mathbb{E}(\xi_s \cdot \xi_{j_2} \cdot ... \cdot \xi_{j_k}) = (\xi_s - a)a^{k-1},$$

где $j_2, ..., j_k$ — произвольные не равные s числа из $\{1, 2, ..., n\}$. Так что

$$Z_s = kA_{n-1}^{k-1}h_k(\xi_s), \quad \mathbb{E}Z_s^2 = \mathbb{D}Z_s = \left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 \mathbb{D}\mathbb{E}\{f(\xi_1, ..., \xi_k)|\xi_1\} = \left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 a^{2k-2}\sigma^2.$$

Далее, в сумме

$$Y_s - Z_s = \sum_{(i_1,...,i_k)_s} (\mathbb{E}_s f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) - \mathbb{E}_{s-1} f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}) -$$

$$- \mathbb{E}\{f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k})|\xi_s\} + \mathbb{E}f(\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_k}))$$

равны нулю слагаемые, в которых $i_1 \geqslant s, ..., i_k \geqslant s$, так что в силу (7)

$$\mathbb{E}(Y_s - Z_s)^2 \leqslant 16(k-1)^2(n-1)\left(A_{n-2}^{k-2}\right)^2 b^{2k}. \tag{9}$$

С помощью (8) получаем

$$\varepsilon_n = \frac{\sum_{s=1}^{n} \mathbb{E}\left(Y_s - Z_s\right)^2}{n\left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 a^{2k-2}\sigma^2} \leqslant \frac{16(n-1)(k-1)^2\left(A_{n-2}^{k-2}\right)^2 b^{2k}}{\left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 a^{2k-2}\sigma^2} \leqslant 16\frac{a^2(k-1)^2}{\sigma^2 k^2(n-1)}\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}. \tag{10}$$

Из (7), (8) и (10) выводим

$$B_n^2 = \mathbb{D}U_n = \left(\sum_{s=1}^{n} \mathbb{E}Z_s^2\right)(1 + \varepsilon_n) = n\left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 a^{2k-2}\sigma^2(1 + \varepsilon_n).$$

Мы будем предполагать, что $k = k(n) = o(\ln n)$. Тогда $\left(\frac{b}{a}\right)^{2k} = o(n)$, $\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty$ и

$$B_n^2 = \mathbb{D}U_n \sim n\left(kA_{n-1}^{k-1}\right)^2 a^{2k-2}\sigma^2. \tag{11}$$

В силу (8), (9) и (11)

$$B_n^{-1}(U_n - A_n) = B_n^{-1}\sum_{s=1}^{n} Y_s \overset{d}{\sim} B_n^{-1}\sum_{s=1}^{n} Z_s \sim kA_{n-1}^{k-1}B_n^{-1}\sum_{s=1}^{n} h_k(\xi_s),\ n \to \infty. \tag{12}$$

Далее, в сделанных предположениях

$$A_{n-1}^{k-1} = n^{k-1}\left(1 + O\left(\frac{k^2}{n}\right)\right) = n^{k-1}(1 + o_n(1)), \tag{13}$$

так что

$$\frac{B_{nl}}{B_n} = \frac{\sqrt{nl}kA_{nl-1}^{k-1}}{\sqrt{n}kA_{n-1}^{k-1}} \sim l^{k-\frac{1}{2}},$$

то есть выполнены предположения замечания 3 с $\rho(n) = k(n) - \frac{1}{2}$. Из (11) и (13) выводим

$$\frac{B_{n+m}}{B_n} \sim \left(\frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}\right)^{\dfrac{2k-1}{2k-2}},$$

поэтому

$$\alpha_n = \left(\frac{B_n}{B_{n+m}}\right)^{\dfrac{1}{2\rho_n}-1} \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}, \quad \alpha_m \sim \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}}. \tag{14}$$

Воспользовавшись (12) и (14), выводим

$$B_{n+m}^{-1}(U_{n+m} - A_{n+m}) \overset{d}{\sim} kA_{n+m-1}^{k-1}B_{n+m}^{-1}\left(\sum_{s=1}^{n} h(\xi_s) + \sum_{s=n+1}^{n+m} h(\xi_s)\right) \overset{d}{\sim}$$

$$\overset{d}{\sim} \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{n-1}^{k-1}}\frac{\widehat{U}_n - A_n}{B_{n+m}} + \frac{A_{n+m-1}^{k-1}}{A_{m-1}^{k-1}}\frac{\widehat{U}_m - A_m}{B_{n+m}} \overset{d}{\sim} \alpha_n\frac{\widehat{U}_n - A_n}{B_{n+m}} + \alpha_m\frac{\widehat{U}_m - A_m}{B_{n+m}},$$

то есть выполнено $(\mathrm{R}_\mathrm{f}^*)$.

В силу (9) и (10) равномерная интегрируемость $\{B_n^{-2}(U_n - A_n)^2\}$ равносильна равномерной интегрируемости $\left\{B_n^{-2}\left(\sum\limits_{s=1}^{n} Z_s\right)^2\right\}$, что в силу независимости и одинаковой распределённости $Z_1, ..., Z_n$ равносильно выполнению условия Линдеберга, которое выполняется ввиду того, что $\frac{Z_1}{B_n} \sim \frac{\xi_1 - a}{\sigma\sqrt{n}}$ и

$$nB_n^{-2}\mathbb{E}\{Z_1^2, |Z_1| \geqslant \varepsilon B_n\} = \sigma^{-2}\mathbb{E}\{(\xi_1 - a)^2, |\xi_1 - a| \geqslant \varepsilon\sigma\sqrt{n}\} \to 0, \ n \to \infty,$$

и в силу замечания 2 к последовательности $\{U_n\}$ применима центральная предельная теорема.

Замечание 4. Легко видеть, что из представлений (6) или (12) центральную предельную теорему можно получить и без использования Теоремы 1, но цель настоящей работы — показать, как работают результаты такого типа при доказательстве предельных теорем, в частности когда дисперсия $\mathbb{D}U_n$ не является линейной функцией от n.

Литература

1. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962.
2. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1985.
3. Гринь А.Г. Критерий нормальной сходимости для симметрических функций от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2018. № 1(45). С. 5–11.
4. Королюк В.С., Боровских Ю.В. Теория U-статистик. Киев : Наукова Думка, 1989.

5. Hoeffding W. A class of statistics with asymptotically normal distribution // Ann. Math. Statist. 1948. V. 19. P. 293–325.

ON THE CENTRAL LIMIT THEOREM WITH NONLINEAR SCALE NORMALIZATION

A.G. Grin
Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. In this paper, it is shown how, using the results obtained earlier by the author on limit theorems for symmetric functions of random variables, one can prove the central limit theorem for U-statistics, in particular, in the case of kernels of an increasing number of variables

Keywords: Symmetric functions of random variables, central limit theorem, U-statistics with a kernel of an increasing number of variables.

References

1. Loev M. Teoriya veroyatnostei. Moscow, IL, 1962. (in Russian)
2. Seneta E. Pravil'no menyayushchiesya funktsii. Moscow, Nauka, 1985. (in Russian)
3. Grin' A.G. Kriterii normal'noi skhodimosti dlya simmetricheskikh funktsii ot zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 1(45), pp. 5–11. (in Russian)
4. Korolyuk V.S. and Borovskikh Yu.V. Teoriya U-statistik. Kiev, Naukova Dumka, 1989. (in Russian)
5. Hoeffding W. A class of statistics with asymptotically normal distribution. Ann. Math. Statist., 1948, vol. 19, pp. 293–325.

Дата поступления в редакцию: 10.11.2021