Математические структуры и моделирование
2021. № 2(58). С. 132–136

УДК 512.81+514.12
DOI 10.24147/2222-8772.2021.2.132-136

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ GAP В ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е.Н. Залесская[1]
к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики и информационных технологий,
e-mail: ZalesskayaEN@yandex.by
Е.М. Дрозд[1]
преподаватель-стажёр кафедры прикладного и системного программирования,
магистр, e-mail: elena_1998-1998@mail.ru

[1]Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается применение системы компьютерной алгебры GAP при решении задач теории классов конечных групп, в частности пакет CRISP. Приводятся типы задач теории классов конечных групп, которые можно решать при помощи системы компьютерной алгебры GAP, в частности, является ли класс конечных групп классом Фиттинга, классом Шунка или формацией.

Ключевые слова: конечные группы, класс групп, класс Фиттинга, класс Шунка, формация, система компьютерной алгебры.

1. Введение

В настоящее время на решение разнообразных математических задач направлено большое количество систем компьютерной математики. Системы компьютерной математики делают доступным применение мощных математических методов при решении прикладных задач, повышают наглядность и конкретность абстрактных концепций как в процессе обучения, так и в исследованиях. К системам компьютерной математики можно отнести: Maple, Mathcad, MATLAB, Wolfram Mathematica, GAP, MAGMA и др. Каждая из них направлена на решение задач в определённых областях науки. Система компьютерной алгебры Maple предназначена для символьных вычислений, способна выполнять сложнейшие аналитические вычисления, которые иногда не под силу даже опытным математикам [1]. Система компьютерной алгебры Mathcad ориентирована на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением [2]. Система компьютерной алгебры MATLAB решает множество компьютерных задач — от сбора и анализа данных до разработки готовых приложений [3]. Система компьютерной алгебры MAGMA направлена на решение задач в области алгебры, теории чисел, комбинаторики [4].

В связи с тем, что GAP является свободно распространяемым пакетом и помимо базовых математических возможностей GAP преимущественно представляет функционал для решения задач вычислительной теории групп, в частности, для работы с группами матриц и подстановок, конечными группами, классами конечных групп и др., для решения задач теории классов конечных групп наиболее целесообразно использовать систему компьютерной алгебры GAP.

2. О системе GAP.

Аббревиатура GAP происходит от Groups, Algorithms and Programming — группы, алгоритмы и программирование. Разработка системы компьютерной алгебры GAP стартовала в 1985 году в г. Аахен (Германия) под руководством Иоахима Ньюбюсера (Joachim Neubuser). К настоящему времени GAP стал международным научным проектом, объединяющим единомышленников в области алгебры, теории чисел, математической логики, информатики и других наук. Основными центрами разработки системы являются университет Сент-Эндрюса (Шотландия, Великобритания), университет Аахена (Брауншвейг, Германия) и университет штата Колорадо (США) [5].

Система GAP — свободно распространяема, открыта и расширяема. Она включает в себя исходные тексты на двух языках: ядро системы написано на Си, а библиотека функций — на специальном языке, также называемом GAP. Язык программирования GAP является объектно-ориентированным и напоминает по синтаксису Pascal. Используя исходные тексты как наглядное пособие, пользователи могут создавать собственные программы [5].

Система компьютерной алгебры GAP содержит множество пакетов, направленных на решение задач теории конечных групп. К ним относятся:

- CRISP — для решения задач теории классов конечных групп;
- FORMAT —для работы с формациями конечных разрешимых групп;
- GrpConst — для построения групп заданного порядка;
- IRREDSOL — библиотека неприводимых разрешимых линейных групп над конечными полями и конечных примитивных разрешимых групп;
- Nilmat —для вычислений с нильпотентными матричными группами и др.

В настоящей работе рассматриваются решения задач теории классов Фиттинга, классов Шунка, формаций [6]. Напомним, что класс групп — совокупность групп, содержащая с каждой своей группой G и все ей изоморфные группы [6].

Со второй половины 1960-х годов важное место в теории разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с классами Фиттинга. Следует отметить, что сам термин «класс Фиттинга» возник исходя из долгосрочной программы структурного анализа конечных групп, предложенной в 1938 году Х. Фиттингом, в которой впервые систематически использовался нильпотентный радикал групп. В дальнейшем классы Фиттинга стали рассматриваться и как самостоятельные объекты изучения.

Классы Фиттинга разрешимых групп впервые упоминаются в статье Фишера [7] в 1966 году. В ней классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям, классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и относительно подпрямого произведения. Двойственность заключалась в том, что определение классов Фиттинга получалось из определения формаций заменой фактор-групп на нормальные подгруппы. В статье Фишера, Гашюца, Хартли [8] впервые рассматриваются классы Фиттинга конечных групп.

Напомним, что класс Фиттинга — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп; класс Шунка — класс групп, который одновременно замкнут относительно факторгрупп и является примитивно замкнутым классом; формация — класс групп, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений [6].

Для решения задач теории классов конечных групп нами был использован пакет CRISP системы компьютерной алгебры GAP. В теории классов конечных групп пакет CRISP можно применять при:

1. Решении задач теории классов Фиттинга и множеств Фиттинга;

2. Решении задач теории классов Шунка;

3. Решении задач теории формаций.

Использовав возможности пакета CPISP при решении задач теории классов Фиттинга и множеств Фиттинг, мы выяснили, что пакет CRISP позволяет:

- создавать классы Фиттинга;

- проверять, является ли заданное множество группы G множеством Фиттинга;

- создавать множества Фитинга [9].

При решении задач теории классов Шунка и формаций пакет CRISP позволяет решать следующие задачи:

- создавать классы Шунка;

- создавать формации [9].

С помощью пакета CRISP также разработан комплекс программ, позволяющий решать следующие задачи теории классов конечных групп:

1. Проверять, является ли класс групп классом Фиттинга.

2. Проверять, является ли класс групп классом Шунка.

3. Проверять, является ли класс групп формацией.

3. Заключение.

Компьютерная математика — новое направление науки и техники, возникшее на стыке классической математики и информатики. Пользователи с помощью современных систем компьютерной математики способны решать многие математические и прикладные задачи.

Для решения вычислительных задач в области теории классов конечных групп наиболее перспективной системой является GAP, так как GAP является свободно распространяемым пакетом и представляет достаточно большой функционал для решения задач вычислительной теории групп.

Литература

1. Система компьютерной алгебры Maple [Электронный ресурс]. URL: `http://bourabai.kz/cm/maple.htm` (дата обращения: 28.04.2021).
2. Система компьютерной алгебры Mathcad [Электронный ресурс]. URL: `https://ppt-online.org/488238` (дата обращения: 28.04.2021).
3. Система компьютерной алгебры MATLAB [Электронный ресурс]. URL: `http://www.vsavm.by/knigi/kniga3/1240.html` (дата обращения: 28.04.2021).
4. Система компьютерной алгебры MAGMA [Электронный ресурс]. URL: `https://hrwiki.ru/wiki/Magma\_(computer\_algebra\_system)` (дата обращения: 28.04.2021).
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming [Электронный ресурс]. URL: `http://www.gap-system.org` (дата обращения: 28.04.2021).
6. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб.пособие. Мн.: Выш. шк., 2006. 207 с.
7. Fischer B. Klassen konjugirter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen. Universitat Frankfurt: Habilitationsschrift, 1966.
8. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B. Injektoren endlicherauflosbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Bd. 102, No. 5. P. 337–339.
9. The GAP Group. GAP / The GAP Group — Reference Manual. [Электронный ресурс]. URL: `http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap0.html` (дата обращения: 28.04.2021).

APPLICATION OF THE COMPUTER ALGEBRA SYSTEM GAP IN THE THEORY OF CLASSES OF FINITE GROUPS

E.N. Zalesskaya[1]
Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: ZalesskayaEN@yandex.by
E.M. Drozd[1]
Instructor, Master's Degree Student, e-mail: elena_1998-1998@mail.ru

[1]Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. The application of the GAP computer algebra system in solving problems of the theory of classes of finite groups, in particular the CRISP package, is considered. The types of problems in the theory of finite groups are given that can be solved using the computer algebra system GAP, in particular, whether the class of finite groups is a Fitting class, a Schunck class, or a form.

Keywords: finite groups, class of groups, Fitting class, Schunck class, formation, computer algebra system.

References

1. Sistema komp'yuternoi algebry Maple [Elektronnyi resurs]. URL: `http://bourabai.kz/cm/maple.htm` (28.04.2021). (in Russian)
2. Sistema komp'yuternoi algebry Mathcad [Elektronnyi resurs]. URL: `https://ppt-online.org/488238` (28.04.2021). (in Russian)
3. Sistema komp'yuternoi algebry MATLAB [Elektronnyi resurs]. URL: `http://www.vsavm.by/knigi/kniga3/1240.html` (28.04.2021). (in Russian)
4. Sistema komp'yuternoi algebry MAGMA [Elektronnyi resurs]. URL: `https://hrwiki.ru/wiki/Magma\_(computer\_algebra\_system)` (28.04.2021). (in Russian)
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. URL: `http://www.gap-system.org` (28.04.2021).
6. Monakhov V.S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov: ucheb.posobie. Mn., Vysh. shk., 2006, 207 p. (in Russian)
7. Fischer B. Klassen konjugirter Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen. Universitat Frankfurt, Habilitationsschrift, 1966.
8. Fischer B., Gaschutz W., and Hartley B. Injektoren endlicherauflosbarer Gruppen. Math. Z., 1967, bd. 102, no. 5, pp. 337–339.
9. The GAP Group. GAP, The GAP Group — Reference Manual. URL: `http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap0.html` (28.04.2021).

Дата поступления в редакцию: 30.05.2021