

О ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Д.А. Салимоненко¹

к.ф.-м.н., доцент кафедры программирования и экономической информатики
Башкирского государственного университета, e-mail: seadima@goon.ru

А.М. Зиганшин²

к.м.н., доцент, e-mail: Zigaidar@yandex.ru

В.А. Мудров³

к.м.н., доцент, e-mail: mudrov_viktor@mail.ru

Ю.Д. Салимоненко⁴

студентка 4 курса, e-mail: iyulya99@gmail.com

¹Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

²Башкирский государственный медицинский университет, г. Уфа, Россия

³Читинская медицинская академия, г. Чита, Россия

⁴Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

Аннотация. В статье проведён анализ возможности применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования взаимозависимыми переменными коэффициентами. Проблема взаимозависимости коэффициентов оценки состоит в том, что различные столбцы могут быть зависимыми друг от друга, что способно вызывать затруднения в определении минимальной оценки — на каждой итерации симплекс-метода. Это особенно актуально при определении оптимальных (для каждой итерации) значений переменных коэффициентов. В работе показано, что усреднение значений, предлагаемое рядом исследователей, применять необязательно, исключение составляют вырожденные задачи линейного программирования, в которых присутствует неединственность решения.

Ключевые слова: задача, линейное программирование, переменный коэффициент, симплекс-метод, генерация столбцов, взаимозависимый, параметр.

Введение

Задача линейного программирования с переменными параметрами представляет собой систему линейных уравнений и/или неравенств, в которой изменяться (варьироваться) могут не только переменные, входящие в её состав, но и коэффициенты, а также правая часть и параметры (коэффициенты при переменных) целевой функции. Именно поэтому такие задачи называются задачами с переменными параметрами. Наша статья посвящена отдельному классу таких

задач — задачам линейного программирования с переменными коэффициентами (ЛППК). Вообще говоря, переменными могут быть все коэффициенты задачи ЛППК или же только некоторые из них.

При этом на практике всегда возникает ситуация, когда на переменные коэффициенты налагаются те или иные ограничения, которые, в свою очередь, также имеют форму линейных уравнений и/или неравенств. Такие ограничения нередко содержат взаимосвязи между коэффициентами. В эти ограничения, конечно, могут входить и постоянные коэффициенты тоже.

Как правило, учёные, изучающие ЛППК, рассматривают только такие задачи, в которых присутствуют взаимосвязи только в пределах того или иного столбца, причём таких столбцов может быть более одного. Этот класс задач в последнее время уже достаточно хорошо разработан, в научной литературе приводятся эффективные алгоритмы их решения, в том числе, основанные на использовании симплекс-метода. А вот что касается задач, содержащих взаимосвязи между коэффициентами, находящимися в различных столбцах, здесь следует отметить, что, к сожалению, методология их решения практически не разработана. В пределах теоретических подходов исследователи ограничиваются далеко не всегда обоснованными умозрительными методологиями, а на практике, в процессе создания компьютерных алгоритмов для решения, ограничиваются, разве что, теми или иными частными случаями. В общем же случае алгоритмы решения подобных задач в настоящее время отсутствуют. При этом переменные коэффициенты задачи ЛППК будут взаимозависимыми.

В нашей работе предлагается подход, позволяющий решать задачи линейного программирования с взаимозависимыми переменными коэффициентами при помощи симплекс-метода. Подход демонстрируется на простом примере задачи ЛППК.

1. Общая постановка задачи ЛППК с взаимозависимыми коэффициентами

Задача линейного программирования с переменными коэффициентами (ЛППК) в своей общей постановке имеет следующий общий вид [1]–[13]:

1. В матричной форме записи:

$$\max F = c^T x \quad (1)$$

при условиях

$$A \cdot x \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} B \quad (2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_o} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j_o} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{m-1j_o} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_o} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

2. То же самое, но в координатной форме записи:

$$\max F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \quad (4)$$

$i = 1, \dots, m,$

$$x_j \geq 0, \quad (5)$$

$j = 1, \dots, n,$

где m — число ограничений (4),

n — число переменных (5),

и дополнительных ограничениях на переменные коэффициенты:

$$\begin{cases} a_{11}^- \leq a_{11} \leq a_{11}^+ \\ s_k^- \leq \sum_{i=1}^m d_{kij} a_{ij} \leq s_k^+, k = 1, \dots, K \\ \sum_{i=1}^m p_{lij} a_{ij} = r_l, l = 1, \dots, L \\ c_j^- \leq c_j \leq c_j^+ \end{cases} \quad (6)$$

В системе ограничений (6) все параметры $a_{ij}^-, a_{ij}^+, s_k^-, d_{kij}, s_k^+, p_{lij}, r_l, c_j^-, c_j^+$ представляют собой константы, задаваемые в процессе формулирования задачи ЛППК [12, 14]. Ограничения (6) характеризуют независимые переменные коэффициенты a_{ij} , т. е. такие, что

$$a_{ij} \neq f(a_{\gamma\eta}), j \neq \eta$$

где f — некоторая функция.

Однако, в ряде практических задач нередко встречается противоположная ситуация — когда подобная зависимость может присутствовать [9], [13], [15]–[17], [20], [21]. Очень часто такая зависимость является линейной, т. е. имеют ограничения вида

$$\sum_{i,j} \sigma_{vij} a_{ij} = \gamma_\nu, \nu = 1, \dots, \nu_1 \quad (7)$$

где $\sigma_{vij} a_{ij}$, γ_ν — некоторые (известные) постоянные.

2. Имеющиеся на сегодняшний день подходы к решению задачи

Немало исследователей предлагают подходы, так или иначе основанные на переборе всевозможных решений задачи линейного программирования [10], [13], [16]. Такие подходы в целом более-менее работоспособны, когда речь идёт о постоянных коэффициентах задачи линейного программирования. Тогда как для переменных коэффициентов и, тем более, при наличии их взаимозависимости, такие подходы работоспособны, разве что, в простых случаях. В общем же случае тот факт, что коэффициенты задачи линейного программирования имеют не точечные (единственные), а интервальные значения, не позволяет использовать перебор решений по крайней мере, потому, что при этом их получается бесконечно много. В самом деле, допустим на коэффициент a_{11} наложено ограничение вида (6):

$$a_{11}^- \leq a_{11} \leq a_{11}^+$$

это ограничение можно записать иначе:

$$a_{11} \in [a_{11}^-; a_{11}^+]$$

Иными словами, имеем бесконечное множество возможных значений для переменного коэффициента a_{11} . При этом вовсе необязательно, что оптимальные значения переменного коэффициента будут находиться именно на границах этого отрезка [13], [21] (хотя на практике в ряде случаев это не редкость). Потому что другие переменные коэффициенты также могут иметь те или иные интервальные представления вида (6), между ними могут существовать сложные зависимости. Иными словами, очевидно, что получение оптимального решения на основе перебора возможных решений в общем случае при наличии (взаимозависимых) переменных коэффициентов — невозможно.

Есть класс методов, основанный на приближенном решении задачи ЛППК. Эти методы зачастую работают достаточно быстро, но имеют один общий недостаток: при росте размерности задачи существенно растёт погрешность рас-

чётов, в итоге при некотором критическом значении размерности погрешность может стать весьма существенной [13], [15].

Симплекс-метод выгодно отличается от подобных методов. От методов, основанных на переборе, его отличие в том, что на каждой итерации значение целевой функции улучшается, тогда как при переборе это в общем случае не так. При этом оптимальные значения переменных коэффициентов вначале определяются не на основе перебора, а оптимизационным расчётом [13], [21] (и, если то или иное оптимальное значение коэффициента соответствует границе соответствующего интервала, то расчётное значение заменяется этим граничным значением). Что, собственно, и даёт возможность определить их значения.

Что касается приближенных методов решения, то симплекс-метод в большей степени застрахован от накопления погрешности, так как (см. выше) на каждой его итерации производится перенабор матрицы столбцов переменных коэффициентов (для тех коэффициентов, оптимальные значения которых соответствуют границам их интервалов), а не расчёт их значений [13], [21]. Иными словами, каждая итерация симплекс-метода осуществляется как бы «заново», т. е. с использованием исходных значений тех переменных коэффициентов, значения которые получились равными граничным. Поэтому, условно говоря, погрешность расчёта значений переменных коэффициентов, оказавшихся равными их граничным значениям, на каждой итерации симплекс-метода обнуляется.

Исследователями предложена технология симплекс-метода для решения задач ЛППК с взаимозависимыми коэффициентами [13]–[15], [17]–[19], [22]. Однако, предлагаемые алгоритмы являются достаточно сложными. Например, предлагаемый в работах [12], [13] алгоритм требует добавления дополнительных ограничений в состав исходной системы вида (6).

Такой алгоритм основан на следующих основных положениях:

- на этапах генерирования текущих вариантов переменных столбцов решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами (ЛППК), некоторые из таких коэффициентов входят в ограничения вида (7) и для них генерируются взаимозависимые варианты,

- на каждом этапе генерирования текущих вариантов переменных столбцов для каждой группы взаимозависимых вариантов, определяемых одним ограничением вида (7), составляется линейное уравнение с интенсивностями использования соответствующих взаимозависимых вариантов и включается в состав ограничений (6). Т. е., по сути, предлагается производить усреднение вариантов значений переменных взаимозависимых столбцов.

то для его оценки получим

$$d_2 = -12 + 4y.$$

Следовательно (после выбора минимальной оценки), получится, что $y = 0$, а не 5, как было выше. Это, в свою очередь, может привести к (нередким) ситуациям, когда одни и те же столбцы будут то входить в базис, но выходить из него, что именуется заикливанием. Поэтому, в реальный алгоритм решения

задачи ЛППК с взаимозависимыми переменными коэффициентами целесообразно включить блок, предназначенный для разрешения подобных ситуаций.

На наш взгляд, в усреднении нет необходимости. В самом деле, что подразумевается под оговоренным выше усреднением? Для этого рассмотрим, как протекает процесс решения задачи ЛППК при использовании симплекс-метода.

Изначально составляется матрица из единичных столбцов (которым, как правило, соответствуют искусственные переменные, впоследствии выходящие из базиса). Затем для каждого из столбцов определяются величины оценок, по результатам расчётов выбирается главный (разрешающий) столбец, входящий в базис на следующей итерации симплекс-метода. Наконец, выбирается разрешающая строка, производится преобразование базисной матрицы и столбца свободных членов, затем вновь вычисляются (уже для новой базисной матрицы) оценки для столбцов и т. д. [5]–[8], [10], [15], [23]–[25].

Так вот, на этапе вычисления (минимизации) оценок для каждого из переменных столбцов решается, по сути, отдельная задача линейного программирования. Причём, на каждой итерации могут получиться, вообще говоря, различные значения переменных коэффициентов, входящих в столбцы. Иной раз бывает так, что на одной итерации некоторые коэффициенты принимают свои максимально достижимые (в рамках (6)) значения, тогда как на другой они могут стать минимальными. При этом значения переменных коэффициентов для каждой итерации запоминаются и в конце (на самой последней итерации, когда получено оптимальное решение) производится их усреднение. Тем самым рассчитываются значения переменных коэффициентов, принимаемые затем в качестве окончательных результатов расчёта [15], [17].

Данный подход мотивируется тем фактом, что коль скоро определённые значения переменных коэффициентов были получены на той или иной итерации решения задачи ЛППК, значит, они удовлетворяют ему и поэтому их следует учитывать в составе окончательного решения.

Однако, на наш взгляд, это излишне. Дело в том, что ранее полученные (предыдущие) значения переменных коэффициентов являлись подходящими для предварительных решений задачи, не являющихся оптимальным. Поэтому и их значения также не являются оптимальными. Следовательно, нет необходимости учитывать их в последующих расчётах. Оптимальными являются лишь те значения переменных коэффициентов, которые получены на самой последней итерации. То же, конечно, относится и к самим переменным.

Можно рассмотреть данный вопрос и с другой стороны. Для любой задачи ЛППК, имеющей конечное решение, существует хотя бы один оптимальный базис [2], [5], [7], [21], [26], [27]. Предположим, что этот базис уже известен (или найден путём расчётов). Тогда, вместо прохождения процедуры симплекс-метода, можно сразу составить базисную матрицу из столбцов, которые входят в него. Т. е., по сути, ограничиться лишь последней итерацией.

При этом, как обычно, необходимо будет определить минимальные значения оценок (так как базис — оптимальный, то все они будут неотрицательными). В рамках решения задач минимизации оценок будут определены (оптимальные) значения каждого из переменных коэффициентов. Важно, что те значе-

ния переменных коэффициентов, которые могли быть получены на предыдущих итерациях, теперь известны не будут. Следовательно, усреднять будет попросту нечего, поэтому необходимо будет взять такие их значения, которые были получены на последней итерации.

Однако, если мы не сразу берём готовый оптимальный базис, а начинаем решать задачу ЛППК, то ясно, что некоторые переменные коэффициенты могут принимать различные значения на разных итерациях. Следовательно, усреднённые их значения будут отличаться от оптимальных. Т. е. усреднение их будет ухудшать значение целевой функции. Кроме того, необходимость усреднения, на наш взгляд, не обоснована и, очевидно, является одним из методов приближенного решения задачи ЛППК.

Разумеется, для каждого из оптимальных базисов вполне возможны какие-то свои значения переменных коэффициентов. А при наличии неединственности решения, даже для одного и того же (оптимального) базиса переменные коэффициенты, вообще говоря, могут принимать не одно, а несколько (или диапазон) оптимальных значений, и все они в итоге будут соответствовать одному и тому же (оптимальному) значению целевой функции.

Именно поэтому усреднение имеет смысл только тогда, когда оптимальное решение неединственно: при этом получают некие усреднённые величины переменных коэффициентов — по всей области их оптимальных значений. Вместе с тем, даже и при таких обстоятельствах можно обойтись без усреднения. Ибо усреднение не улучшает значение целевой функции задачи ЛППК.

На наш взгляд, такая ситуация ничем не хуже той, при которой значения коэффициентов получаются усреднёнными, т. е., зачастую, лежащими в интервалах своей неопределённости. Ведь, в любом случае, имеется оптимальное решение и соответствующие ему величины переменных (x_j), а также переменных коэффициентов (a_{ij}). А уж какие из конкретных (оптимальных) значений выбрать в качестве окончательных — здесь, на наш взгляд, следует руководствоваться уже не математическими, а какими-либо иными соображениями. Например, выбирать их с учётом смысла (физического, экономического, социального или т. п. — в зависимости от того, что именно моделируется) системы или ситуации, которая описывается при помощи ограничений (1)–(7).

Таким образом, даже в условиях неединственности усреднение является необязательным (хотя, ряд исследователей предпочитают им пользоваться) [12], [22], [23], [24]. А в случае единственности решения — оно даже может ухудшить целевую функцию, ибо будет учитывать значения переменных коэффициентов, полученные на предыдущих итерациях, которые, по сути, не обязательно являются оптимальными. Поэтому нет необходимости его применять.

Но, при отказе от усреднения, решение задач ЛППК с взаимозависимыми коэффициентами существенно упрощается. Ибо вместо предлагаемого в [12], [13] алгоритма можно применить обычный симплекс-метод.

Правда, здесь возникает вопрос в отношении сходимости симплекс-метода ЛППК. На сегодняшний день в науке обоснована его сходимость для невырожденных задач [5], [13], [15], [25]. Это такие задачи, решение которых является

единственным (т. е. выбор оптимального базиса однозначен). Тогда как в вырожденных может присутствовать более одного оптимального базиса [13], [24]. При этом возникает возможность заикливания, т. е. поочерёдного вхождения и выбытия в базис одних и тех же столбцов. Наличие взаимозависимости переменных коэффициентов, конечно, может способствовать этому.

Вместе с тем, исследователи отмечают, что, во-первых, в практических задачах заикливание является большой редкостью — настолько, что разработчики реальных программных алгоритмов даже не предусматривают алгоритма действий в этом случае. Во-вторых, даже если оно и (вдруг) возникнет, существует ряд способов, модифицирующих алгоритм симплекс-метода решения задачи ЛППК [5], [14], [17]. На особенностях этих способов мы здесь останавливаться не будем.

Перейдем теперь к обоснованию возможности применения симплекс-метода для задач ЛППК с взаимосвязанными (взаимозависимыми) переменными коэффициентами (a_{ij}) и обсуждению его отличий от случая, когда коэффициенты взаимозависимыми не являются. Рассуждения будут носить конструктивный характер — в том смысле, что мы будем, по сути, повторять общеизвестный алгоритм симплекс-метода по этапам, обосновывая каждый этап для случая взаимозависимых переменных коэффициентов. Алгоритм симплекс-метода общеизвестен. Руководствуясь [5], [15], [21], рассмотрим этапы уточненного алгоритма симплекс-метода, распространённого на случай наличия взаимозависимых переменных коэффициентов (имеющихся в зависимости вида (7) в задаче ЛППК вида (1)–(6):

(0) На данном этапе составляется исходная базисная матрица B , состоящая из столбцов, соответствующих искусственным и положительным дополнительным переменным. Она будет единичной. Этот этап, очевидно, не зависит от того, взаимосвязаны ли коэффициенты в задаче ЛППК.

(1) Вычисляется вектор симплекс-множителей по формуле

$$U = c_B^T B^{-1} \quad (8)$$

где $(c_B)_i$ — коэффициент целевой функции при базисной переменной, содержащейся в (1) по i -й строке,

— символ транспонирования.

Здесь также не играет роли факт наличия взаимозависимости переменных коэффициентов, ибо последние не входят в (8).

(2) Вычисляются оценки

$$mind_j, j = 1, \dots, n,$$

где

$$d_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i - c_j \quad (9)$$

Вот как раз здесь проявляется указанная выше взаимозависимость. В самом деле, при отсутствии ограничений вида (7), выражения будут, очевидно, независимыми друг от друга. Ибо каждая оценка d_j вычисляется при этом только

с использованием значений j -го столбца матрицы B (суммирование идёт по i , т. е. по каждой из строк конкретного столбца).

Тогда как взаимозависимость коэффициентов в рамках (7) приведёт к зависимости оценок с разными j . На практике это приведёт к тому, что от одного переменного коэффициента могут зависеть значения не одной, а нескольких оценок. Рассмотрим простой пример — с целью пояснения сказанного.

3. Практический пример применения предлагаемого подхода

Пусть имеется

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2 & -y \end{pmatrix}$$

Здесь $a_{11} = -a_{22} = y$,

где y — переменная величина, определяемая с учётом ограничений вида (6), (7). Пусть, к примеру, они таковы, что

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ u_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ c_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

Тогда имеем

$$d_1 = 3y + 4$$

$$d_2 = 6 - 4y$$

Таким образом, при изменении величины x значения оценок будут меняться в соответствии с противоположными тенденциями. Следовательно, минимизация одной из них приведёт к максимизации другой.

Соответственно, как в таком случае решить задачу (9), т. е. найти минимум d_i ?

Предлагается использовать плавающие значения коэффициентов. А именно — при минимизации каждой из оценок значения переменных коэффициентов (a_{11} и a_{22} — если взять рассмотренный пример) каждый раз считаются неизвестными и определяются заново.

В рассмотренном примере, с учётом (10), имеем

$$\min(d_1) = 3 * 0 + 4 = 4$$

$$\min(d_2) = 6 - 4 * 5 = -14$$

Далее, выбираем среди рассчитанных оценок минимальную:

$$\Delta = \min\{d_1, d_2\} = d_2 = -14$$

Следовательно, в качестве значения x нужно выбрать именно то, которое обеспечило минимальность величины Δ , т.е. $y = 5$.

Отметим, что на данном этапе выбор величины y (и, соответственно, значений переменных коэффициентов $_{11}, _{22}$) влияет на выбор разрешающего (главного) столбца, который войдёт в базис на следующей итерации симплекс-метода.

Обобщая, можно сделать очевидный вывод, что в процессе определения $\Delta = \min\{d_1, \dots, d_n\}$ будут найдены конкретные значения переменных коэффициентов на текущей итерации (при условии, конечно, что задача (1)–(7) имеет хотя бы одно конечное решение).

(3) Проверяем знак Δ . Если $\Delta \geq 0$, то оптимальное решение получено. Если $\Delta < 0$, то на данном этапе определён разрешающий столбец $a_{.j_0}$ (в рассмотренном примере это столбец с номером $j = 2$).

Делается преобразование разрешающего столбца:

$$a'_{ij_0} = B^{-1} \times a_{ij_0}$$

Так как текущие значения его элементов на данной итерации уже определены, такое преобразование возможно. Так как выше, в соответствии с алгоритмом, определялись конкретные оптимальные (быть может, лишь для данной итерации!) значения переменных коэффициентов, то взаимозависимость вида (7) здесь уже роли не играет. **(4)** Определяется номер разрешающей строки:

$$\Theta_{i_0} = \left(\min_i \right) \{b_i / a'_{ij_0} | a'_{ij_0} > 0\}$$

где b_i — i -й элемент правой части (см. (2)).

Условие $a'_{ij_0} > 0$ означает, что минимизация осуществляется для всех положительных a'_{ij_0} . Если же все $a'_{ij_0} < 0$, то решение неограничено.

Так как на этапе **(2)** были определены конкретные оптимальные (для данной итерации, значения переменных коэффициентов, вектор правой части задан, то можно утверждать, что если существует хотя бы одно положительное значение, то номер разрешающей строки будет определён. Наличие ограничений вида (7) на это не окажет никакого влияния.

(5) На этом этапе производятся преобразования обратной базисной матрицы и вектор-столбца правой части (свободных членов):

$$(B^{-1})' = (B^{-1}),$$

где B^{-1} — матрица трансформации, определяемая в соответствии с [5, 15, 22]. Данный этап также не использует ограничения (7). Затем производится переход к первому этапу — начинается следующая итерация. Таким образом, ограничения (7) используются на каждой итерации лишь на этапе **(2)**.

Надо сказать, что на следующей итерации значения переменных коэффициентов, определённые в рамках минимизации оценок (9), могут стать другими. Однако, как уже говорилось выше, важность имеют лишь те значения, которые получены на самой последней итерации, остальные могут не приниматься во внимание. Кроме того, алгоритм симплекс-метода реализован таким образом, что значение целевой функции после реализации каждой последующей итерации ухудшиться не может [5], [13], [15].

Итак, наличие ограничений вида (7) в задаче (1)–(6) не вносит принципиальных изменений в алгоритм — разве что, немного замедляется процесс решения. Это при условии, что усреднение вариантов сгенерированных значений переменных коэффициентов не производится. Что, как показали вышеприведённые рассуждения, не является необходимым для получения оптимального решения.

Однако, здесь возникает одна небольшая проблема. В задачах с взаимозависимыми (взаимозависимыми) переменными коэффициентами вероятность заикливания, на наш взгляд, выше, чем в обычных задачах ЛППК.

Дело в том, что при минимизации оценок каждый раз могут определяться новые варианты соответствующих переменных коэффициентов. А, так как последние в силу (7) являются взаимозависимыми, их значения могут сильно варьироваться (конечно, в рамках, налагаемых ограничениями (6)–(7) — в зависимости от того, каким будет состав базиса на текущей итерации.

Так, обращаясь к приведённому выше примеру, если вместо столбца с номером $j = 2$ в базисе будет находиться такой столбец, как

$$a_{i2} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix}$$

то для его оценки получим $d_2 = -12 + 4y$. Следовательно (после выбора минимальной оценки), получится, что $y = 0$, а не 5, как было выше.

Это, в свою очередь, может привести иногда к ситуациям, когда одни и те же столбцы будут то входить в базис, то выходить из него, что и именуется заикливанием. Поэтому, в реальный алгоритм решения задачи ЛППК с взаимозависимыми переменными коэффициентами целесообразно включить блок, предназначенный для разрешения подобных ситуаций. Тогда как для задач ЛППК, не говоря уже о задачах с постоянными коэффициентами, такой блок не является столь необходимым, так как для них уже разработаны соответствующие способы преодоления ситуаций заикливания.

4. Выводы

В настоящей работе обоснована возможность применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования с взаимозависимыми переменными коэффициентами. В стандартный алгоритм симплекс-метода необходимо внести изменения, выражающиеся в определении оптимальных величин взаимозависимых переменных коэффициентов на каждой его итерации. В общем

случае это может привести к возрастанию сложности компьютерной реализации алгоритма. Хотя основа алгоритма, конечно, остаётся той же самой.

Использование процедуры усреднения, применяющейся для определения средних значений конкретных переменных коэффициентов, не является обязательной (а иногда может даже навредить, ухудшив значение целевой функции), что существенно упрощает решения задачи.

В процессе решения задач со взаимозависимыми переменными коэффициентами возможность реализации ситуации заикливания может быть выше, чем в обычных задачах линейного программирования с переменными коэффициентами. Это вызывает необходимость для разработчика программного обеспечения решения задачи ЛППК предусмотреть тот или иной способ ликвидации такой ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое программирование. М. : Лань, 2011.
2. Астафьев Н.Н. Противоположные задачи и двойственная регуляризация в линейном программировании // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Вып. 14, № 2, С.16-22.
3. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М. : Факториал Пресс, 2008.
4. Гальмукова И.А. Линейное программирование в задачах экономики // Материалы VI Ежегодной Международн. научно-прак. конф. Социально-экономические проблемы развития предпринимательства: региональный аспект. Смоленск. 2017. С. 333–338.
5. Гасс С. Линейное программирование. М. : Физматгиз, 1961.
6. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Специальные направления в линейном программировании. М. : Красанд, 2010.
7. Еремин И.И., Попов Л.Д. Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. (Челябинск). 2012. Вып. 18, № 3. С.83–89.
8. Заботин Я. И. Вычислительные приемы в линейном программировании без использования искусственных переменных // Изв. вузов. Математика. 2008. Вып. 1. С. 20–26.
9. Зиганшин А.М., Мудров В.А. Технология оценки объема послеродовой кровопотери // Совр. технологии в медицине. 2020. Вып. 12, № 3. С. 71–76.
10. Зоркальцев В.И., Пержабинский С.М. Алгоритмы внутренних точек в линейном и нелинейном программировании // Омский научный вест. 2013. Вып. 117, № 1. С. 25–28.
11. Кульневич А.Д. Линейное программирование // Молодой учёный. 2017. Вып. 144, № 10. С. 29–32.
12. Мартынов А.П., Салимоненко Е.А., Салимоненко Д.А. Применение методов линейного программирования с переменными коэффициентами при проектировании и анализе электрических цепей, описываемых линейными уравнениями // Электротехника. 1998. Вып. 2. С. 59–62.

13. Мартынов А.П., Салимоненко Е.А., Ванчухина Л.И., Калашникова Л.А. Линейные модели с взаимозависимыми параметрами и их применение. Уфа : Гос. изд. научно-технической литературы «Реактив», 1998.
14. Мисюк Т.М. Использование компьютерных технологий в линейном программировании // Ярославский педагогический вестник. 2011. Вып. 3, № 1. С. 23–30.
15. Муртаф Б.М. Современное линейное программирование. М. : Мир, 1984.
16. Немировский А.С. Основные концепции и результаты робастной оптимизации в применении к линейному программированию с неточными данными // Cloud of Science. 2014. Вып. 1, № 2. С. 180–190.
17. Немкова Е.А., Левин В.И. Решение интервальной задачи дробно-линейного программирования сведением к задаче линейного программирования // Молодой учёный. 2011. Вып. 8, № 1. С. 30–34.
18. Паршин А.В., Сысоева В.И. Методы обучения, повышающие уровень подготовки курсантов линейному программированию с неизвестным исходным опорным планом / в сб. «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». Воронеж, 2014. Вып. 2, № 4, ч. 2. С. 33–36.
19. Паршин А.В., Сысоева В.И. Методы обучения, повышающие уровень подготовки курсантов линейному программированию с известным исходным опорным планом / в сб. «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». Воронеж, 2014. Вып. 2, № 4, ч. 2. С. 41–44.
20. Порошина Л.А., Каменева Е.Н. Линейное программирование в управлении закупками в медицинской организации / в сб. «Анализ современных тенденций развития науки сборник статей». Уфа, 2017. С. 151–156.
21. Салимоненко Д.А. Математическая обработка эксперимента методами линейного программирования с переменными коэффициентами / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1999.
22. Салимоненко Д.А. Способ решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами, зависимыми от параметров // Вестник Башкирского университета. 2015. Вып. 20, № 1. С. 25–29.
23. Свириденко А.Б. Прямые мультипликативные методы для разреженных матриц. Линейное программирование // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Вып. 9, № 2. С. 143–165.
24. Сеисов Ю.Б. Характеристика вырожденного режима в линейном программировании // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2011. № 10. С. 18–24.
25. Сизова С.А., Мурдугова В.Ю., Мелешко С.В. Линейное программирование как область математического программирования при решении экономических задач // Theoretical & Applied Science. 2013. Вып. 2(6). С. 16–20.
26. Трофимов С.П., Иванов А.В. Качество ограничения геометрических объектов и разрыв двойственности в полубесконечном линейном программировании // Материалы XXI Международн. конф. «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Томск, 2016.
27. Шелковников С.А., Петухова М.С. Линейное программирование в определении оптимальной суммы государственной поддержки сельскохозяйственного производства // Материалы II международной очно-заочной научно-методической и практической конференции «Комплексное развитие сельских территорий и инновационные технологии в агропромышленном комплексе». Новосибирск, 2016.

INTERDEPENDENT VARIABLES IN LINEAR PROGRAMMING TASKS

D.A. Salimonenko¹

Ph.D. (Eng.), Associate Professor (Phys.-Math.), Dotsent kafedry programmirovaniya i ekonomicheskoi informatiki, e-mail: seadima@goon.ru

A.M. Ziganshin²

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: Zigaidar@yandex.ru

V.A. Mudrov³

Ph.D. (Eng.), Associate Professor, e-mail: mudrov_viktor@mail.ru

Ju.D. Salimonenko⁴

Student, e-mail: iyulya99@gmail.com

¹Bashkir State University, Ufa, Russia

²Bashkir State Medical University, Ufa, Russia

³Chita State Medical Academy University, Chita, Russia

⁴Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

Abstract. The article analyses the possibility of using the simplex method to solve linear programming problems with interdependent variable coefficients. The problem with the interdependence of evaluation coefficients is that different columns can be dependent on each other, which can cause difficulties in determining the minimum estimate - on each iteration of the simplex method. This is especially relevant when determining the optimal (for each iteration) values of variable coefficients. The work shows that the averaging of values proposed by a number of researchers is optional, the exception is degenerate linear programming problems in which there is a non-singularity of the solution

Keywords: task, linear programming, variable factor, simplex method, column generation, interdependent, parameter.

REFERENCES

1. Akulich I.L. Matematicheskoe programmirovaniye. Moscow, Lan' Publ., 2011. (in Russian)
2. Astaf'ev N.N. Protivopolozhnye zadachi i dvoistvennaya regulyarizatsiya v lineinom programmirovanii. Trudy in-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 16-22. (in Russian)
3. Vasil'ev F.P. and Ivanitskii A.Yu. Lineinoe programmirovaniye. Moscow, Faktorial Press Publ., 2008. (in Russian)
4. Gal'mukova I.A. Lineinoe programmirovaniye v zadachakh ekonomiki. Materialy VI Ezhegodnoi Mezhdunarodn. nauchno-prak. konf. Sotsial'no-ekonomicheskie problemy razvitiya predprinimatel'stva: regional'nyi aspekt, Smolensk, 2017, pp. 333-338. (in Russian)
5. Gass S. Lineinoe programmirovaniye. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. (in Russian)
6. Gol'shtein E.G. and Yudin D.B. Spetsial'nye napravleniya v lineinom programmirovanii. Moscow, Krasand Publ., 2010. (in Russian)

7. Eremin I.I. and Popov L.D. Vnutrennie shtrafnye funktsii i dvoistvennost' v lineinom programmirovanii. Tr. in-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN, Chelyabinsk, 2012, vol. 18, no. 3. pp. 83–89. (in Russian)
8. Zabotin Ya. I. Vychislitel'nye priemy v lineinom programmirovanii bez ispol'zovaniya iskusstvennykh peremennykh. Izv. vuzov. Matematika, 2008, vol. 1, pp. 20–26. (in Russian)
9. Ziganshin A.M. and Mudrov V.A. Tekhnologiya otsenki ob"ema poslerodovoi krovopoteri. Sovr. tekhnologii v meditsine, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 71–76. (in Russian)
10. Zorkal'tsev V.I. and Perzhabinskii S.M. Algoritmy vnutrennikh tochek v lineinom i nelineinom programmirovanii. Omskii nauchnyi vest., 2013, vol. 117, no. 1, pp. 25–28. (in Russian)
11. Kul'nevich A.D. Lineinoe programmirovanie. Molodoi uchenyi, 2017, vol. 144, no. 10, pp. 29–32. (in Russian)
12. Martynov A.P., Salimonenko E.A., and Salimonenko D.A. Primenenie metodov lineinogo programmirovaniya s peremennymi koefitsientami pri proektirovanii i analize elektricheskikh tsepei, opisyvayushchikhsya lineinymi uravneniyami. Elektrotehnika, 1998, vol. 2, pp. 59–62. (in Russian)
13. Martynov A.P., Salimonenko E.A., Vanchukhina L.I., and Kalashnikova L.A. Lineinye modeli s vzaimozavisimymi parametrami i ikh primeneniye. Ufa, Gos. izd. nauchno-tekhnicheskoi literatury "Reaktiv", 1998. (in Russian)
14. Misyuk T.M. Ispol'zovanie komp'yuternykh tekhnologii v lineinom programmirovanii. Yaroslavskii pedagogicheskii vestnik, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 23–30. (in Russian)
15. Murtaf B.M. Sovremennoe lineinoe programmirovanie. Moscow, Mir Publ., 1984. (in Russian)
16. Nemirovskii A.S. Osnovnye kontseptsii i rezul'taty robustnoi optimizatsii v primenenii k lineinomu programmirovaniyu s netochnymi dannymi. Cloud of Science, 2014, vol. 1, no. 2, pp. 180–190. (in Russian)
17. Nemkova E.A. and Levin V.I. Reshenie interval'noi zadachi drobno-lineinogo programmirovaniya svedeniem k zadache lineinogo programmirovaniya. Molodoi uchenyi, 2011, vol. 8, no. 1, pp. 30–34. (in Russian)
18. Parshin A.V. and Sysoeva V.I. Metody obucheniya, povyshayushchie uroven' podgotovki kursantov lineinomu programmirovaniyu s neizvestnym iskhodnym opornym planom. V sb. "Aktual'nye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika", Voronezh, 2014, vol. 2, no. 4, ch. 2, pp. 33–36. (in Russian)
19. Parshin A.V. and Sysoeva V.I. Metody obucheniya, povyshayushchie uroven' podgotovki kursantov lineinomu programmirovaniyu s izvestnym iskhodnym opornym planom. V sb. "Aktual'nye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika", Voronezh, 2014, vol. 2, no. 4, ch. 2, pp. 41–44. (in Russian)
20. Poroshina L.A. and Kameneva E.N. Lineinoe programmirovanie v upravlenii zakupkami v meditsinskoj organizatsii. V sb. "Analiz sovremennykh tendentsii razvitiya nauki sbornik statei", Ufa, 2017, pp. 151–156. (in Russian)
21. Salimonenko D.A. Matematicheskaya obrabotka eksperimenta metodami lineinogo programmirovaniya s peremennymi koefitsientami, Diss. ... kand. fiz.mat. nauk, Ufa, 1999. (in Russian)
22. Salimonenko D.A. Sposob resheniya zadachi lineinogo programmirovaniya s peremennymi koefitsientami, zavisimymi ot parametrov. Vestnik Bashkirskogo universiteta, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 25–29. (in Russian)

23. Sviridenko A.B. Pryamye mul'tiplikativnye metody dlya razrezhennykh matrits. Lineinoe programmirovaniye, Komp'yuternye issledovaniya i modelirovaniye, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 143–165. (in Russian)
24. Seisov Yu.B. Kharakteristika vyrozhdennogo rezhima v lineinom programmirovanii. Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk, 2011, no. 10, pp. 18–24. (in Russian)
25. Sizova S.A., Murdugova V.Yu., and Meleshko S.V. Lineinoe programmirovaniye kak oblast' matematicheskogo programmirovaniya pri reshenii ekonomicheskikh zadach. Theoretical & Applied Science, 2013, vol. 2(6), pp. 16–20. (in Russian)
26. Trofimov S.P. and Ivanov A.V. Kachestvo ograniichenii geometricheskikh ob"ektov i razryv dvoistvennosti v polubeskonechnom lineinom programmirovanii. Materialy XXI Mezhdunarodn. konf. "Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur", Tomsk, 2016. (in Russian)
27. Shelkovnikov S.A. and Petukhova M.S. Lineinoe programmirovaniye v opredelenii optimal'noi summy gosudarstvennoi podderzhki sel'skokhozyaistvennogo proizvodstva. Materialy II mezhdunarodnoi ochno-zaochnoi nauchno-metodicheskoi i prakticheskoi konferentsii "Kompleksnoye razvitie sel'skikh territorii i innovatsionnye tekhnologii v agropromyshlennom komplekse", Novosibirsk, 2016. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 18.04.21