

АВТОИЗОМЕТРИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ IV ТИПА БИАНКИ

М.Н. Подоксенов

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ГиМА, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

Е.А. Иванова

студентка, e-mail: ekaterina2000ivyandex@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли IV типа Бианки. Доказывается, что существует только один способ задания на ней лоренцевого скалярного произведения, при котором существует нетривиальная однопараметрическая группа изометрий, являющихся автоморфизмами алгебры Ли. Выписаны матрица Грамма скалярного произведения и матрица, описывающая действие однопараметрической группы. Так же доказывается, что данная алгебра Ли не допускает однопараметрической группы подобий, являющихся автоморфизмами алгебры Ли, при любом способе задания в ней лоренцевого скалярного произведения.

Ключевые слова: алгебра Ли, лоренцево скалярное произведение, однопараметрическая группа, подобие, изометрия, автоморфизм.

1. Постановка задачи

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ введено евклидово или лоренцево скалярное произведение. Линейное преобразование $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ назовём автоизометрией, если оно является одновременно изометрией относительно скалярного произведения и автоморфизмом алгебры Ли. Преобразование f назовём автоподобием, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом. Как показано в работе [1], решение задачи нахождения однопараметрических групп автоподобий данной алгебры Ли позволяет построить самоподобные однородные многообразия соответствующей группы Ли, снабжённой левоинвариантной метрикой. В этой же работе найдены все автоподобия трёхмерной алгебры Ли $\mathcal{H}_f$ группы Гейзенберга при различных способах задания на ней лоренцевого скалярного произведения, и найдены соответствующие однопараметрические группы подобий однородного лоренцевого многообразия трёхмерной группы Ли Гейзенберга H_s .

Некоммутативная двумерная алгебра Ли $\mathcal{A}(1)$ – это алгебра Ли группы $A(1)$ аффинных преобразований прямой. Компонента связности этой группы Ли, содержащая единичный элемент, – это группа $A^+(1)$, состоящая из аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию прямой. В работах [2] и

[3] были найдены все способы задания лоренцевого скалярного произведения на двумерной и трёхмерной алгебрах Ли $\mathcal{A}(1)$ и $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}$, при которых они допускают однопараметрические группы автоподобий и автоизометрий, а также выписаны формулы, по которым действуют эти однопараметрические группы. Это позволило построить самоподобные связные многообразия групп Ли $A^+(1)$ и $A^+(1) \times \mathbf{R}$. Все возможные однопараметрические группы автоподобий и автоизометрий для четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$ найдены в работе [4], а в работе [5] подобная задача решена в случае задания в алгебре Ли евклидова скалярного произведения.

Цель данной работы: найти все способы задания лоренцевого скалярного произведения в алгебре Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$, при которых она допускает однопараметрическую группу автоизометрий, выписать матрицу, задающую действие этой группы, и доказать, что она не допускает автоподобий при любом способе задания на ней лоренцева скалярного произведения. Эта четырёхмерная алгебра Ли является единственной, относящейся к IV типу по классификации Бианки.

2. Структура алгебры Ли

В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ задаются двумя равенствами: $[E_3, E_1] = E_1, [E_4, E_2] = E_2$, а остальные скобки равны нулевому вектору. Будем называть такой базис каноническим. Двумерное подпространство $\mathcal{H}$, являющееся линейной оболочкой векторов E_1 и E_2 является производной алгеброй Ли $[\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4]$. Это коммутативный идеал. Линейные оболочки векторов E_1, E_3 и E_2, E_4 обозначим соответственно $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Эти подпространства являются двумерными некоммутативными идеалами. Кроме того, алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ содержит бесконечное количество коммутативных двумерных идеалов: $\forall X \in \mathcal{L}_1, Y \in \mathcal{L}_2$ линейная оболочка этих векторов является коммутативным идеалом.

Алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ допускает четырёхмерную группу автоморфизмов, которая состоит из преобразований, задающихся матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, а γ и δ могут принимать любые значения. Такие автоморфизмы будем называть автоморфизмами первого типа. Одновременная перестановка базисных векторов E_1 и E_2, E_3 и E_4 тоже сохраняет операцию скобки. Она задаётся матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поэтому композиция автоморфизмов, задаваемых матрицами (1) и (2), тоже является автоморфизмом. Они задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0. \quad (3)$$

Будем их называть автоморфизмами второго типа. Важно отметить, что определитель матриц (1) и (3) равен $\alpha\beta$, т.е. равен определителю матрицы, задающей ограничение преобразования на $\mathcal{H}$. Однопараметрическая группа автоморфизмов может содержать только автоморфизмы первого типа при $\alpha > 0, \beta > 0$.

Линейную оболочку векторов X, Y будем обозначать $\langle X, Y \rangle$.

3. Основные результаты

Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ введено лоренцево скалярное произведение.

Теорема 1. 1) *Существует только один способ задания лоренцевого скалярного произведения в алгебре Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$, котором она допускает нетривиальную однопараметрическую группу автоизометрий. Действие этой группы в каноническом базисе задаётся матрицей*

$$\begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

при этом, матрица Грама базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

2) *Автоподобий рассматриваемая алгебра Ли не допускает при любом способе задания в ней лоренцевого скалярного произведения.*

Доказательство. Случай 1. На идеале $\mathcal{H}$ индуцируется лоренцево скалярное произведение. Тогда на подпространстве $\mathcal{H}^\perp$ индуцируется евклидово скалярное произведение.

Пусть $h(t) : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ – однопараметрическая группа автоизометрий или автотоподобий. Под её действием должны оставаться инвариантными идеал $\mathcal{H}$, два изотропных направления в нем и одномерные идеалы $\mathbf{R}E_1, \mathbf{R}E_2$. В дальнейшем обозначаем $E'_i(t) = h(t)(E_i), i = 1, 2, 3, 4$.

Согласно [6] в подходящем базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) любая однопараметрическая группа подобий четырехмерного пространства Минковского, имеющая более одного инвариантного изотропного собственного вектора задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t), \mu \geq 0$, где

$$\mathbf{F}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \nu \geq 0, t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

и звёздочками обозначена ортогональная матрица $\mathbf{Q}(t)$. При этом матрица Грама имеет вид (5).

В работе [7] были найдены все инвариантные двумерные подпространства группы преобразований, которая задаётся матрицами вида (6).

Согласно доказанной в [7] теореме и следствию из неё выполнено $H = \langle e_1, e_2 \rangle$, и можно сделать вывод, что $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{E}$. Но нам важно уточнить: задаётся ли $h(t)$ матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$ именно в каноническом базисе, а также надо найти матрицу Грама этого базиса.

Определитель матрицы преобразования не зависит от выбора базиса в векторном пространстве. Определитель матрицы $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$ равен $e^{4\mu t}$, тогда как матрица ограничения преобразования $h(t)$ на $\mathcal{H}$ имеет определитель равный $e^{2\mu t}$. Следовательно, $\mu = 0$ и может существовать только однопараметрическая группа автоизометрий.

Если $\nu = 0$, то однопараметрическая группа состоит только из тождественных преобразований. Пусть $\nu \neq 0$. Тогда ограничение $h(t)$ на $\mathcal{H}$ не может иметь более двух инвариантных направлений. Следовательно, E_1 и E_2 совпадают с e_1 или e_2 , т.е. они являются изотропными (см. рисунок 1 а)).

Согласно матрицам (1) и (6) соответственно

$$E'_3(t) = \gamma E_1 + E_3, E'_2(t) = e^{-\nu t} E_2,$$

Тогда

$$E'_3(t) \cdot E'_2(t) = \gamma e^{-\nu t} E_1 \cdot E_2 + e^{-\nu t} E_3 \cdot E_2 = \gamma e^{-\nu t} + e^{-\nu t} E_3 \cdot E_2.$$

Последнее выражение должно быть тождественно равно $E_3 \cdot E_2$. Отсюда получаем тождество

$$\gamma e^{-\nu t} + (e^{-\nu t} - 1) E_3 \cdot E_2 \equiv 0.$$

Это выполняется, только если одновременно $\gamma = 0$ и $E_3 \cdot E_2 = 0$. Аналогично получим $\delta = 0$ и $E_4 \cdot E_1 = 0$.

Поскольку скалярные квадраты векторов E_1 и E_2 равны нулю, то

$$E'_3(t) \cdot E'_1(t) = (\gamma E_1 + E_3) \cdot (e^{\nu t} E_1) = e^{\nu t} E_3 \cdot E_1.$$

Это выражение должно быть равно $E_3 \cdot E_1$. Следовательно, $E_3 \cdot E_1 = 0$, и аналогично получаем $E_4 \cdot E_2 = 0$. Это значит, что $H^\perp = \langle E_3, E_4 \rangle$. Тем самым, матрица Грама канонического базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{34} & g_{44} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{33} > 0. \quad (7)$$

Поскольку $\gamma = \delta = 0$, мы приходим к выводу, что в рассматриваемом случае может существовать только однопараметрическая группа автоизометрий, действие которой в каноническом базисе задаётся матрицей (4).

Случай 2. На идеале $\mathcal{H}$ индуцируется евклидово скалярное произведение. Тогда на подпространстве $H^\perp$ индуцируется лоренцево скалярное произведение, и заведомо скалярные квадраты векторов E_1 и E_2 не равны нулю. Заменим базисный вектор E_3 на $\gamma E_1 + E_3$. Тогда

$$(\gamma E_1 + E_3) \cdot E_1 = \gamma E_1 \cdot E_1 + E_3 \cdot E_1.$$

Мы выберем γ так, что бы это выражение стало равным нулю. Точно также выберем δ так, что бы вектор $\delta E_2 + E_4$ был ортогонален E_2 , и мы заменим базисные векторы E_3 и E_4 на $\gamma E_1 + E_3$ и $\delta E_2 + E_4$ соответственно. Сохраним прежнее обозначение для нового базиса, который тоже будет каноническим. Так же, не меняя операции скобки, можем сделать векторы E_1 и E_2 единичными.

Пусть $h(t) : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ – однопараметрическая группа автоизометрий или автоподобий. Изотропные направления подпространства $\mathcal{H}^\perp$ должны быть инвариантны относительно $h(t)$. Следовательно, $h(t)$ относительно некоторого базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$. Согласно [7] выполнено $\langle e_3, e_4 \rangle = \mathcal{H}$, и тем самым, $\langle e_3, e_4 \rangle = \mathcal{H}^\perp$ (см. рисунок 1 б)). Из условия на определитель матрицы автоморфизма мы опять делаем вывод, что $\mu = 0$ и может существовать только однопараметрическая группа автоизометрий. При этом, ограничение $h(t)$ на $\mathcal{H}$ имеет два инвариантных направления. Это возможно, только если матрица $\mathbf{Q}(t)$ в (6) равна тождественно $\mathbf{E}$. Нам необходимо ещё доказать, что $\nu = 0$.

Предположим, что $E_1 \cdot E_2 \neq 0$. Имеем

$$E'_2(t) = E_2, \quad E'_3(t) = \gamma E_1 + E_3.$$

$$E'_3(t) \cdot E'_2(t) = \gamma E_1 \cdot E_2 + E_3 \cdot E_2.$$

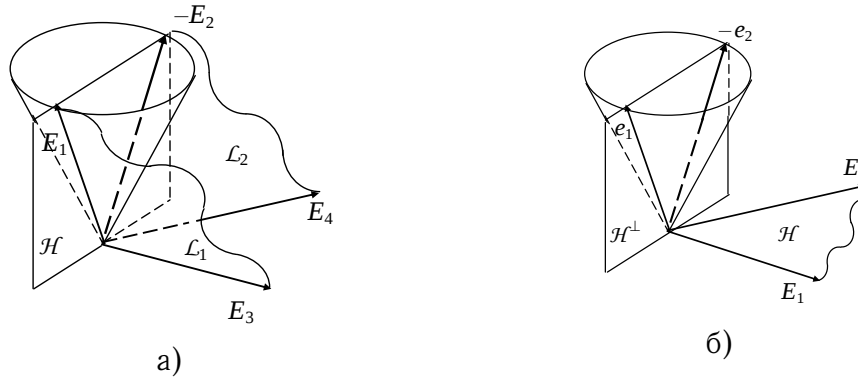


Рис. 1. Расположение базисных векторов

Это выражение должно быть тождественно равно $E_3 \cdot E_2$. Получим

$$\gamma E_1 \cdot E_2 \equiv 0.$$

Отсюда $\gamma = 0$, и аналогичным образом получим $\delta = 0$, если $E_1 \cdot E_2 \neq 0$. Это означает, что однопараметрическая подгруппа состоит только из тождественных преобразований. Поэтому рассматриваем далее только случай $E_1 \cdot E_2 = 0$. Мы уже доказали, что можно выбрать базис так, что $E_3 \cdot E_1 = 0$. Поэтому

$$E'_3(t) \cdot E'_1(t) = \gamma E_1 \cdot E_1 + E_3 \cdot E_1 = \gamma E_1 \cdot E_1.$$

Это выражение должно быть тождественно равно нулю. Следовательно $\gamma = 0$, и аналогичным образом получим $\delta = 0$. Итак, в рассматриваемом случае не существует нетривиальной однопараметрической группы автоизометрий и автоподобий.

Случай 3. На подпространстве $\mathcal{H}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение. Пусть $h(t) : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ – однопараметрическая группа автоизометрий или автоподобий. Тогда единственное изотропное направление в $\mathcal{H}$ должно быть инвариантным относительно действия группы. Предположим сначала, что оно является единственным инвариантным изотропным направлением. Тогда, согласно [6], относительно некоторого базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) группа $h(t)$ задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_2(t)$, $\mu \geq 0$, где

$$\mathbf{F}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица Грама базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расположение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов схематично показано на рисунке 2 а).

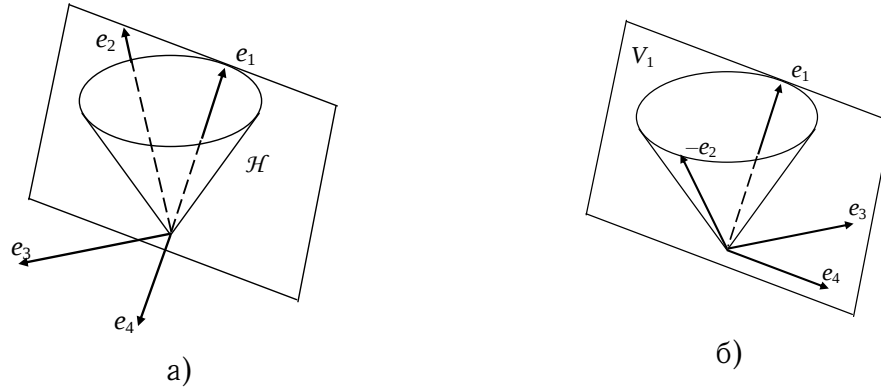


Рис. 2. Расположение базисных векторов

В работе [8] доказано, что в этом случае все инвариантные двумерные подпространства содержат вектор e_1 . Учитывая структуру рассматриваемой алгебры Ли, мы приходим к выводу, что $h(t)$ не может задаваться матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_2(t)$. Следовательно, существует ещё одно инвариантное изотропное направление, и в подходящем базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) группа $h(t)$ задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$. Подпространство $\mathcal{H}$ может быть инвариантным, только если $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{E}$.

Предположим, что $\nu \neq 0$. В этом случае, согласно [7], двумерные идеалы $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ содержатся в трёхмерных подпространствах V_1 и V_2 , которые задаются соответственно уравнениями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Эти подпространства являются ортогональными дополнениями к e_1 и e_2 соответственно, и имеют общее пересечение $\langle e_3, e_4 \rangle$, поэтому идеал $\mathcal{H}$ может содержаться только в одном из них. Пусть это будет V_1 (см. рисунок 2 б). Тогда $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ тоже содержатся в V_1 , поскольку они имеют ненулевое пересечение с $\mathcal{H}$. Это значит, что линейная оболочка $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ является трёхмерной. Мы получили противоречие, поскольку линейная оболочка $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ должна быть четырёхмерной. Следовательно, однопараметрическая группа $h(t)$ состоит только из тождественных преобразований.

4. Заключение

В данной работе мы доказали, что четырёхмерная алгебра Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$ не допускает однопараметрической группы автоподобий при любом способе задания в ней лоренцевого скалярного произведения. Это означает, что соответствующая ей связная группа Ли $A^+(1) \times A^+(1)$, снабжённая левоинвариантной лоренцевой метрикой не может быть однородным самоподобным лоренцевым многообразием. Существующая однопараметрическая группа автоизометрий для алгебры $\mathcal{G}_4$ позволит в дальнейшем построить однопараметрическую группу движений группы Ли $A^+(1) \times A^+(1)$, оставляющую неподвижной единицу группы. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н. Самоподобные однородные двумерное и трёхмерное лоренцевы многообразия // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, 2018. № 2(99). С. 14–19.
3. Подоксёнов М.Н., Кабанов А.Н. Самоподобное однородное лоренцево многообразие трёхмерной группы Ли // Наука — образованию, производству, экономике: Материалы XXIV(71) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14 февраля 2019 г. Витеб. гос. ун-т. Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. Т. 1. С. 18–20.
4. Подоксёнов М.Н., Черных В.В. Автоизометрии и автоподобия алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$ // Математические структуры и моделирование. 2020. № 1(53). С. 25–30.
5. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Автоизометрии алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$ // Наука — образованию, производству, экономике: материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2020. С. 27–29.
6. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds // Ann.of Global Anal.Geom. 1985. V. 3, No. 1. P. 59–84.
7. Подоксёнов М.Н., Иванова Е.А. Инвариантные подпространства однопараметрической группы подобий пространства Минковского // Математические структуры и моделирование. 2021. № 1(57). С. 25–28.
8. Черных В.В. Инвариантные подпространства одного специального класса преобразований // «Молодость. Интеллект. Инициатива». Материалы VIII Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова. 2020. С. 36–38.

AUTOISOMETRIES OF FOUR-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA OF IV BIANCHI TYPE

M.N. Podoksenov

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department
"Geometry & Analysis", e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

E.A. Ivanova

Student, e-mail: ekaterina2000ivyandex@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

Abstract. We consider four-dimensional Lie algebra of IV Bianchi type. It is proved that there is only one way of defining Lorentz scalar product on it, for which there exists nontrivial one-parameter group of isometries that are automorphisms of the Lie algebra. Gram matrix of the scalar product and the matrix describing the action of the one-parameter group are written out. It is also proved that the given Lie algebra does not admit one-parameter group of similarities, which are automorphisms of the Lie algebra, for any way of defining the Lorentz scalar product in it.

Keywords: Lie algebra, Lorentz scalar product, one-parameter group, similarity, isometry, automorphism.

REFERENCES

1. Podoksenov M.N. Podobiya i izometrii odnorodnogo mnogoobraziya gruppy Geizenberga, snabzhennoi levoinvariantnoi lorentsevoi metrikoi. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta im. P.M. Masherova, 2011, no. 5, pp. 10–15. (in Russian)
2. Podoksenov M.N. Samopodobnye odnorodnye dvumernoe i trekhmernoe lorentsevy mnogoobraziya. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta im. P.M. Masherova, 2018, no. 2(99), pp. 14–19. (in Russian)
3. Podoksenov M.N. and Kabanov A.N. Samopodobnoe odnorodnoe lorentsevo mnogobrazie trekhmernoi gruppy Li. Nauka — obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike, Materialy XXIV(71) Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii преподаvatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 14 fevralya 2019 g., Viteb. gos. un-t. Vitebsk, VGU imeni P.M. Masherova, 2019, vol. 1, pp. 18–20. (in Russian)
4. Podoksenov M.N. and Chernykh V.V. Avtoizometrii i avtopodobiya algebry Li $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 1(53), pp. 25–30. (in Russian)
5. Podoksenov M.N. and Guts A.K. Avtoizometrii algebry Li $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$. Nauka — obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike, materialy 72-i Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii преподаvatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 20 fevralya 2020 g., Vitebsk, VGU im. P.M. Masherova, 2020, pp. 27–29. (in Russian)
6. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds. Ann.of Global Anal.Geom., 1985, vol. 3, no. 1, pp. 59–84.
7. Podoksenov M.N. and Ivanova E.A. Invariantnye podprostranstva odnoparametricheskoi gruppy podobii prostranstva Minkovskogo. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 1(57), pp. 25–28. (in Russian)
8. Chernykh V.V. Invariantnye podprostranstva odnogo spetsial'nogo klassa preobrazovani. "Molodost'. Intellect. Initsiativa", Materialy VIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i magistrantov, Vitebsk, VGU imeni P.M. Masherova, 2020. pp. 36–38. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 14.03.2021