

ISSN 2222-8772

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

№ 2(58)
2021



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 2(58)

Омск
2021

Редакционная коллегия

А. К. Гуц	главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
Д. Н. Лавров	зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, проректор по информационным технологиям, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
Н. Ф. Богаченко	технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
В. П. Голубятников	доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
С. И. Горлов	доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
А. Г. Гринь	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
В. А. Еровенко	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра общей математики и информатики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь.
B. Zilber	Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
А. Н. Кабанов	канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
А. В. Копыльцов	доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).
А. Г. Коробейников	доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
П. А. Корчагин	доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), г. Омск.
V. Kreinovich	Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
В. А. Плетюхов	доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь.
Л. Б. Соколинский	доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
A. A. Fedorenko	Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
А. Н. Фирсов	доктор техн. наук, профессор, Высшая школа киберфизических систем и управления, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
A. Jadczyk	Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-72200 от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 12.10.2021.

Тираж 60 экз.

Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>

<http://msm.omsk.su>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsk.su

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsk.su

СОДЕРЖАНИЕ

К 90-летию Революта Пименова

- А.К. Гуц. Револют Иванович Пименов 5
- О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Five Revolutionary Ideas in the 1950s-70s Science: 90th Birthday of Revolt Pimenov* 10
- V. Kreinovich. *Revolt Pimenov Taught Us How to Be Scientists* 16
- А.К. Гуц. *Две встречи с Револютом Пименовым* 23

Фундаментальная математика и физика

- М.Н. Подоксёнов, Е.А. Иванова. *Автоизометрии четырёхмерной алгебры Ли IV типа Бианки* 29
- В.Н. Бородихин, И.С. Попов. *Динамический фазовый переход в двухмерной модели Изинга на гексагональной решётке в осциллирующем магнитном поле* 38
- О. Kosheleva, V. Kreinovich. *A Possible (Qualitative) Explanation of the Hierarchy Problem in Theoretical Physics* 48

Прикладная математика и моделирование

- С.П. Баутин, Ю.В. Николаев. *Алгоритм построения произвольной сетки численного решения задачи безударного сжатия газа* 53
- А.К. Гуц. *Квантовая механика для социологов: аксиомы квантовой социологии* 65
- Д.А. Салимоненко, А.М. Зиганшин, В.А. Мудров, Ю.Д. Салимоненко. *О взаимозависимых переменных коэффициентах в задачах линейного программирования* 96
- V. Kreinovich. *Data Analytics Beyond Traditional Probabilistic Approach to Uncertainty* ... 112

Компьютерные науки

- Е.Н. Залесская, Е.М. Дрозд. *Применение системы компьютерной алгебры GAP в теории классов конечных групп* 132

Продолжение на следующей странице

Наши публикации



П.М. Косьянов, Н.В. Манюкова. *Разработка информационной системы лаборатории ФНСиП*137

Е.А. Тюменцев, Т.В. Мелешенко. *Использование алгоритма извлечения смысла из текста в категоризации обращений граждан*149

Револют Иванович Пименов

16.05.1931 – 19.12.1990



16 марта 2021 года исполнилось бы 90 лет замечательному математику Революту Ивановичу Пименову.

Р.И. Пименов стал известен в математическом мире благодаря появлению в 1968 году его книги «Пространства кинематического типа». Она посвящена аксиоматическому построению причинной теории пространства-времени. Книга была переведена в 1970 году на английский язык и издана в США.

Издание стало важным событием в распространении идей аксиоматической теории относительности (хроногеометрии). Аксиоматизацией теории относительности ему предложил заниматься А.Д. Александров в 1953 году. Этим Р.И. Пименов занимался всю свою жизнь.

Практически одновременно (1967) в Польше на английском языке вышла похожая книга прекрасного математика Герберта Буземана «Time-like spaces». Обе эти книги были ярким событием в истории хроногеометрии, но книга Р.И. Пименова была гораздо более объёмной и содержательной.

Буземан вскоре отошёл от тематики своей книги, а Р.И. Пименов в дальнейшем подарил миру и другие яркие книги, насыщенные идеями и глубокими размышлениями, касающимися устройства пространства-времени и Вселенной, в которой мы живём.

Введённые Р.И. Пименовым в геометрию пространства кинематического типа стали содержанием его докторской диссертации (1969).

Револют Иванович — талантливый человек со сложной судьбой. Во многом это обусловлено его характером. Понять его поступки было дано не каждому,

но за него вступались и помогали ему в тяжёлых для него ситуациях знаменитые люди: академик В.И. Смирнов, президент Академии наук СССР М.В. Келдыш, академик А.Д. Сахаров, академик А.Д. Александров, В.А. Залгаллер, директор ЛОМИ Г.И. Петрашень, поэт А.Т. Твардовский, И.Р. Шафаревич, академик-филолог В.В. Виноградов и другие.

В 1953 году его исключают из Ленинградского университета, затем восстанавливают. И в это же время он начинает свои исследования в области геометрии. В 1953–56 годах он описал девять плоских геометрий, которые привели его к воззрению о существовании науки «Космометрия», представленной им дважды (1955, 1960) в его работах с названием Космометрии и которые никогда не были опубликованы.

Револьт Иванович в своих воспоминаниях пишет о том, как он радовался своей работе и перечисляет её творцов. В частности, он пишет [1, с. 539]:

«Не тот творец, кто создал, а тот, кто велел создать». Поэтому творец этого труда не я, а Вы, Александр Данилович¹. В мрачные для меня дни декабря 1953, когда я не видел себе пути, Вы предложили мне заняться аксиоматикой частной теории относительности. Из этого родилась космометрия.

Primo motore...

Но больше всех я благодарен своей судьбе. Она верно служит мне. Нет в моём прошлом дня, которого я теперь бы не хотел бы. Пусть и впредь судьба моя идёт моим путём.

26.02.56

Вольнороссийск

Revolte»

Во втором варианте «Космометрии», написанной в местах, где он пребывал в заключении (Вихоревка, Владимирский централ), он использует свои идеи для аксиоматизации биологии, экономики и лингвистики. Лингвистика неслучайна — Револьт Иванович знал многие европейские языки, китайский, арабский, древние языки и пр.

В 1965 году Р.И. Пименов защищает кандидатскую диссертацию, и ему присваивается учёная степень кандидата физико-математических наук.

Докторскую диссертацию Пименов защитил по кинематическим пространствам в 1969 году. Учёная степень не была утверждена по политическим мотивам. Ссылка в Сыктывкар (1970–74). Диплом доктора физико-математических наук выдали ему только в 1989 году — через двадцать лет!

Револьт Иванович многое видел раньше других. Так он неоднократно обращал внимание на роль условия гладкости структур, используемых в теории

¹Александров А.Д. — учитель Р.И. Пименова, с 1952 по 1964 год — ректор Ленинградского университета, отчисливший Пименова в апреле 1953 года «за крайний индивидуализм...», а затем восстановивший его в рядах студентов в январе 1954 года.

пространства-времени. Когда речь шла о траекториях (мировых линиях) частиц или динамике самих пространств-времён, описываемых с помощью дифференциальных уравнений, то Пименов пояснял, что эти уравнения созданы для однозначного предсказания будущих состояний, и, следовательно, требование гладкости решений означает принятие принципа детерминизма, вершиной которого является лапласовский детерминизм. Он отмечал, что требование абсолютной непрерывности решений, при которой производная существует почти всюду (п. в.), но не всюду, нарушает детерминизм, поскольку, например, задачи Коши

$$\ddot{x} = 0 \text{ п.в.}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

имеет бесконечное множество различных абсолютно непрерывных решений [5, с. 15], т. е. нет однозначности в предсказании будущего.

Если сконцентрировать внимание на передаче причинно-следственного взаимодействия (каузальное взаимодействие), то в общей теории относительности, где принят *неявный постулат гладкости*, оно передаётся по гладким мировым линиям в 4-мерном лоренцевом многообразии, которое чаще всего рассматривается как $\mathbb{R}^4$ (или $\mathbb{R} \times S^3$ в космологии). Обнаружение в 1982 году бесконечного числа недиффеоморфных гладкостей на $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R} \times S^3$ заставляет нас увидеть нечто непривычное: каузальные взаимодействия, передаваемые по гладким траекториям в одной гладкости, оказываются передаваемыми по негладким траекториям в другой гладкости в пространстве-времени. Следовательно, однозначная предсказуемость в одной гладкости должна как-то совмещаться с неоднозначностью предсказания в другой гладкости. В одном случае следствие единственно, в другом — их может оказаться бесконечно много [6, с. 192].

Пименов писал по этому поводу:

«Вся идеология использования дифференциальных уравнений для детерминации будущего на основе настоящего и прошлого рушится из-за релятивизации гладкости. И от того, что факт сей математики открыли лишь к концу XX в., ничуть не легче при осмыслении концепции механического детерминизма и парадигмы дифференциальных уравнений, которые бытовали в XVIII, XIX и до середины 1970-х гг. Ведь и тогда эта лакуна в обосновании присутствовала, хотя бы и незримо. Детерминизм не был «обнаружен в природе». Детерминизм не был «выведен логически» или «доказан математически». Мы всего лишь **ВЕРИЛИ В ДЕТЕРМИНИЗМ**. И в качестве веры, принимаемой за факт, он входил в парадигму механического (и шире) мышления».

Но интерес к дифференциальным уравнениям — это всего лишь временная остановка на пути главного дела жизни Р.И. Пименова: «занятия теми математическими моделями, которые могут позволить объяснить (эксплицировать) **ВРЕМЯ, ТЕОРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, КОСМОЛОГИЮ**» — это у него

«оттуда, из вечного интереса Александрова и Борисова² к этим проблемам» [1, с. 432].

В Ленинградском университете он читал спецкурсы «Основания геометрии и космологии» (1964–1966), «Тензорный и флагентензорный анализ с приложением к гравэлектромагнетизму» (1965–1966), «Теория пространства-времени» (1966–1967), «Элементы космологии» (1966–1968), «Математическая теория пространства-времени» (1967–1968, 1969–1970) [2, с. 275],

Все научные работы Пименова связаны, в основном, с исследованием природы и структуры пространства-времени.

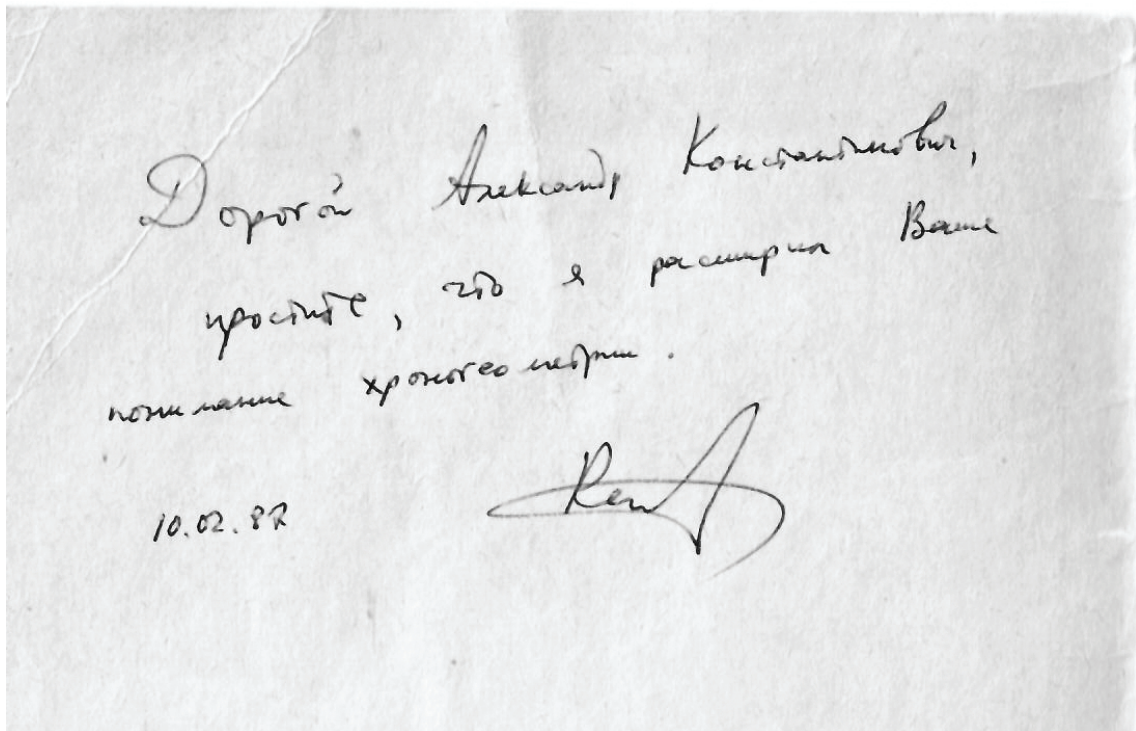


Рис. 1. Автограф Р.И. Пименова на препринте «Хроногеометрия...»

Пока он жил в Ленинграде и преподавал в ЛГУ, у него были дипломники (Санкин, Козлов, Крейнович и др.). Но в Сыктывкаре только Н.А. Громов защитил кандидатскую диссертацию³. И это-то при его даре бесконечно порождать задачи для исследования и формулировать вопросы, требующие ответов. Но такова судьба людей, удалённых от потоков талантливых студентов, бурлящих в столичных вузах или крупных научных центрах.

Револьт Иванович обладал ещё одной чертой характера — независимостью суждений. Только он мог спокойно заявить, что всю жизнь «к писаниям

²Борисов Юрий Федорович (1925–2007) — д.ф.-м.н., профессор, ученик и друг А.Д. Александрова. Написал несколько прекрасных статей по хроногеометрии.

³Крейнович В.Я. позже переехал в новосибирский Академгородок и защитил диссертацию под руководством А.Д. Александрова.

А.Н. Колмогорова относился скептически, презрительно». Пименов — человек полный достоинства, ни перед кем не унижавшийся, ценивший людей, уважавший их право на человеческую жизнь и получивший в конце своей жизни возможность от имени народа писать Конституцию России.

А.К. Гуц

ЛИТЕРАТУРА

1. Пименов Р.И. Воспоминания: в 2 т. Т. 1. М. : Панорама, 1996. 565 с.
2. Пименов Р.И. Воспоминания: в 2 т. Т. 2. М. : Панорама, 1996. 413 с.
3. Пименов Р.И. Тензорная теория полуэвклидовых и полуримановых пространств: Автореферат дис. на соискание учён. степени кандидата физико-математических наук: Ленингр. гос. пед. ин-т им. А.И. Герцена. Кафедра мат. анализа. Ленинград, 1965. 6 с.
4. Пименов Р.И. Пространства кинематического типа: Автореф. дис. на соискание учен. степени д-ра физ.-мат. наук : (006) / АН СССР. Мат. ин-т им. В.А. Стеклова. Москва, 1969. 17 с.
5. Пименов Р.И. Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. Сыктывкар, 1987. 22 с. (Сер. препринтов «Науч. докл.» / АН СССР. Коми фил.; вып. 150).
6. Пименов Р.И. Дифференциальные уравнения: насколько они оправданы? // Метафизика. 2013. № 1(7). С. 181–196.

REFERENCES

1. Pimenov R.I. Vospominaniya: v 2 t. Vol. 1, Moscow, Panorama Publ., 1996, 565 p. (in Russian)
2. Pimenov R.I. Vospominaniya: v 2 t. Vol. 2, Moscow, Panorama Publ., 1996, 413 p. (in Russian)
3. Pimenov R.I. Tenzornaya teoriya poluevklidovykh i polurimanovykh prostranstv. Avtoreferat dis. na soiskanie uchen. stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk, Leningr. gos. ped. in-t im. A.I. Gertsena, Kafedra mat. analiza, Leningrad, 1965. 6 p. (in Russian)
4. Pimenov R.I. Prostranstva kinematcheskogo tipa. Avtoref. dis. na soiskanie uchen. stepeni d-ra fiz.mat. nauk , (006), AN SSSR, Mat. in-t im. V.A. Steklova, Moskva, 1969, 17 p. (in Russian)
5. Pimenov R.I. Khronogeometriya: dostizheniya, prepyatstviya, struktury. Syktyvkar, 1987, 22 p. (Ser. preprintov "Nauch. dokl.", AN SSSR, Komi fil.; issue 150). (in Russian)
6. Pimenov R.I. Differentsial'nye uravneniya: naskol'ko oni opravdany? Metafizika, 2013, no. 1(7), pp. 181–196. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 24.05.2021

FIVE REVOLUTIONARY IDEAS IN THE 1950s-70s SCIENCE: 90TH BIRTHDAY OF REVOLT PIMENOV

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. This year, Revolt Pimenov, a philosophical thinker whose main ideas were in geometry of space-time, would have turned 90. In this essay, we explain how in the 1950s–70s, when he was most productive, his were two of the five natural and important revolutionary scientific ideas — along with fuzzy logic, constructive mathematics, and scalar-tensor theory of gravitation, ideas that, in our opinions, still have potential to change the world.

Keywords: revolutions in science, Pimenov, kinematic spaces.

1. Why Does Science Need Revolutionary Ideas

Revolutions in general: pro and contra. People have different attitudes towards revolutions.

On the one hand, revolutions often overthrow oppressors, bring hope, make many people happier. In many countries – in France, in the US – anniversary of a revolution is a major national holiday.

On the other hand, revolutions bring sufferings, civil wars, deaths – and often, bring new oppressors who sometimes become even more brutal than the previously overthrown ones.

So what is a revolution in science? In countries where revolution is a good idea, this word is used to praise – to make people enthusiastic about a new scientific theory, new research result, journalists writing about science call it a revolution. For this reason, journalists use this word even when there is a tiny step forward.

On the other hand, in countries where the word “revolution” had many negative connotations, journalists are reluctant to apply this word to scientific ideas – even when these ideas drastically change the scientific landscape.

These over-eagerness or reluctance to use this word does not change the fact that some ideas propose drastic changes – are, in other words, *revolutionary* ideas, while other ideas lead to gradual, *evolutionary* improvement. This is how we will understand the word “revolution” in this paper.

Comment. We decided not to hide behind synonyms like paradigm shift. We do not want to allow bad guys affect our linguistic decisions. It is well known that bad

guys demagogically use many good words to do bad things, from burning people alive in the name of loving your neighbor as yourself to 20th century nightmarish dictatorships packaged in good words and seemingly good ideas like equality and happiness.

Why do we need revolutions in science? Why cannot science evolve gradually – as it often does? The answer to this question is clear to anyone who ever tried to find a solution to an optimization problem: if we only perform local optimization (e.g., gradient techniques), we usually end up in a local maximum. To find the true (global) maximum of an objective function, we need to make a drastic move out of the local optimum.

Similarly, in science, gradual evolution often leads us to a local optimum – we are not yet predicting physical processes perfectly accurately, but we have reached (or almost reached) the limits of what the gradual changes can do. No gradual change will allow us to make a significant improvement. For this, we need a drastic change – i.e., a revolutionary idea.

2. What Happened in 1950s-70s

What science is about: a brief reminder. Among the main goals of science is to *describe* the current state of the world and to *predict* the world's future state.

Let us recall how both goals are usually pursued.

How was (and often is) the world described. To get a better understanding of the world, we measure the values of different quantities. Thus, the state of the world is usually described in terms of the values of different quantities; see, e.g., [1, 3].

Some of these quantities can take all possible values, some only take values from some discrete set. Until the 20 century, this distinction was very clear. In some cases, we have “yes”-“no” properties: alive and not alive, etc., i.e., in effect, discrete variables. In other cases, we have a continuous quantity like energy, charge, mass, etc., that can take all possible values.

Early 20 century physics changed this description. Special relativity made it clear that for some quantities, some values are not possible: e.g., velocity cannot exceed the speed of light. Quantum physics showed that some quantities can only take values from a discrete set – e.g., electric charge, or an energy level of an atom.

Still, what was previously discrete (“yes”-“no”) remained discrete.

First revolutionary idea: fuzzy logic. While the idea of “yes”-“no” questions is natural in science, in real life, such questions are rare. In most cases, we do not have strict “yes”-“no” distinctions between young and old, healthy and sick, short and tall, etc. Even in seemingly simple situations like alive-not alive, there is sometimes no strict border: is a virus alive? is a brain-dead person alive?

In view of this, Lotfi Zadeh suggested that it would be reasonable to follow the same pattern in science as well – and to claim that everything is a matter of degree. This idea led to many useful practical applications, especially in designing

efficient controllers for trains, elevators, cars, video cameras, washing machines, rice cookers, etc.; see, e.g., [3, 5, 9, 12, 15, 15].

Second revolutionary idea: enter Pimenov. An even more radical idea was proposed by Revolt Pimenov. Let us briefly describe this idea.

In our life, we have measuring instruments, so we can get numerical values of different quantities. Clearly, in extreme conditions, our measuring instruments will not work, maybe none of the instruments will work. In a very strong gravitational field, all instruments will be torn apart. Near the Big Bang, there were clearly no measuring instruments. In the micro-world, the uncertainty principle prevents us from making meaningful measurements.

The existing physical paradigm understand this very well, but still continues to describe the world by numerical quantities, even when there is no way to actually measure these quantities. The only reason for using these quantities is that the physics equations are written in terms of numerical quantities – but, honestly, from the physics viewpoint, this is not a very convincing argument.

Pimenov's main idea was: since we cannot measure these quantities, why describe them? Let us allow the areas of the world – be it on cosmological level or on the micro-level – where we do not have any numerical characteristics. But what *do* we have? Well, for example, we have the notion of causality: some events cause other events. Motivated by this idea, he started studying physical models – models of space-time with events in it – in which the only structure we have is the causality relation. He called such models *kinematic spaces*; see, e.g., [5].

This is still a rather radical idea, but it is already part of mainstream physics: e.g., already in 1973, the idea of “foam” space-time where numerical quantities make no sense, was included into an encyclopedic textbook on gravitation theory [13].

How the state of the world changes: description before the 1950s-70s revolution. So far, we talked about how we describe the state of the world. But this description only starts the scientific process. The most important thing is to predict the future state, i.e., to predict how the state of world will change.

Before the late 1950s, the description of such changes was straightforward:

- some physical quantities do not change, they are what is called fundamental constants: Planck's constant, speed of light, gravitational constant, etc.;
- other quantities change according to differential equations; and
- by using these equations, we can, in principle, reconstruct the future state.

In the 1950s-70s, all these three ideas got challenged.

Third revolutionary idea: “constants” may change. Many things that we originally thought to be constant turned to be changing. For example, the free fall acceleration of 9.81 m/sec^2 turned out to be slightly different in different locations – and by measuring this acceleration, we can get a lot of information about the density of the material below the Earth's surface.

So, a natural idea is to believe what we now consider to be constants will turn out to be changing – i.e., will turn out to be a new (scalar) physical field. This idea first originated in gravity, since gravity is a relatively weak force, and thus,

the accuracy of determining its constant is much lower than of other fundamental constants. The result was scalar-tensor theory of gravitation, first proposed by Brans and Dicke. This theory also became mainstream [13] – and it started an avalanche of other theories in which fundamental constants are changing.

For example, a recent discovery of the Higgs boson confirmed that rest masses of elementary particles – which were previously assumed to be fundamental constants – are actually due to the Higgs field.

Fourth revolutionary idea: non-smoothness. Many observed processes are non-smooth, even discontinuous: phrase transitions, explosions, etc. So why should we insist that processes in nature be smooth? Just because Newton succeeded in describing planetary motions by differential equations does not necessarily mean that all the processes should be smooth. And indeed, e.g., many large-scale gravitational phenomena: the Big Bang, the black holes – show some degree of non-smoothness.

This motivated Pimenov to consider space-times which do not necessarily have the usual smooth structure, space-time models which are not smooth [5].

Fifth revolutionary idea: maybe not everything is computably predictable. While we can predict the motion of planets hundreds years into the future, from the commonsense viewpoint, it is not realistic to expect that we can predict our own actions and thoughts – although, strictly speaking, our actions and thoughts are also described by some differential equations. So why not abandon the naive belief that everything can be predicted and learn to distinguish between situations in which predictions are possible and situations in which predictions are not algorithmically possible.

A natural way to do it is to introduce, in addition to usual existential quantifier – which simply means that the object with given properties exists, not necessarily that we can compute it – a special “constructive” quantifier, whose meaning is that there is an algorithm for computing the desired object. This, in a nutshell, is the main idea behind what was called *constructive mathematics*; see, e.g., [1, 2, 4–7, 7, 11, 17, 19].

In some sense, this is also now part of the mainstream: maybe not necessarily in the original logical terms, but definitely computational questions are an important topic in mathematics, especially in applied mathematics.

Summarizing. For science to progress, it is not sufficient to have evolution: we need revolutionary steps, steps leading to drastic changes. In the 1950s-70s, several such changes have indeed been proposed, changes that are now largely part of the mainstream science. And of the pioneers who introduced these changes was Revolt Pimenov.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional

Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes).

It was also supported by the program of the development of the Scientific-Educational Mathematical Center of Volga Federal District No. 075-02-2020-1478.

REFERENCES

1. Aberth O. *Precise Numerical Analysis Using C++*. Academic Press, New York, 1998.
2. Beeson M.J. *Foundations of constructive mathematics*. Springer-Verlag, N.Y., 1985.
3. Belohlavek R., Dauben J.W., and Klir G.J. *Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective*. Oxford University Press, New York, 2017.
4. Bishop E. *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill, 1967.
5. Bishop E. and Bridges D.S. *Constructive Analysis*. Springer, N.Y., 1985.
6. Bridges D.S. *Constructive Functional Analysis*. Pitman, London, 1979.
7. Bridges D.S. and Vita S.L. *Techniques of Constructive Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2006.
8. Feynman R., Leighton R., and Sands M. *Feynman Lectures on Physics*. Basic Books, New York, 2005.
9. Klir G. and Yuan B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
10. Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., and Kahl P. *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*. Kluwer, Dordrecht, 1998.
11. Kushner B.A. *Lectures on Constructive Mathematical Analysis*. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1984.
12. Mendel J.M. *Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems: Introduction and New Directions*. Springer, Cham, Switzerland, 2017.
13. Misner Ch.W., Thorne K.S., and Wheeler J.A. *Gravitation*. W.H. Freeman and Co., San Francisco, California, 1973.
14. Nguyen H.T., Walker C.L., and Walker E.A. *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2019.
15. Novák V., Perfilieva I., and Močkoř J. *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer, Boston, Dordrecht, 1999.
16. Pimenov R.I. *Kinematic spaces: Mathematical Theory of Space-Time*. Consultants Bureau, New York, 1970.
17. Pour-El M. and Richards J. *Computability in Analysis and Physics*. Springer-Verlag, New York, 1989.
18. Thorne K.S. and Blandford R.D. *Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2017.
19. Weihrauch K. *Computable Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
20. Zadeh L.A. Fuzzy sets. *Information and Control*, 1965, vol. 8, pp. 338–353.

ПЯТЬ РЕВОЛЮЦИОННЫХ ИДЕЙ В НАУКЕ 1950-70-Х ГОДОВ: 90-ЛЕТИЕ РЕВОЛЬТА ПИМЕНОВА

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эл Пасо, США

Аннотация. В этом году Революту Пименову, философу и мыслителю, чьи главные мысли были обращены на геометрию пространства-времени, исполнилось бы 90 лет. В 1950-70-е годы он был наиболее продуктивным и предложил две из пяти революционных научных идей, наряду с нечёткой логикой, конструктивной математикой и скалярно-тензорной теорией гравитации. Эти две естественные и важные идеи, по нашему мнению, все ещё могут изменить мир.

Ключевые слова: революции в науке, Пименов, кинематические пространства.

Дата поступления в редакцию: 19.05.2021

REVOLT PIMENOV TAUGHT US HOW TO BE SCIENTISTS

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. In 2021, we are celebrating the 90th birthday of Revolt Pimenov, a specialist in space-time geometry. He was my teacher. In this article, I am trying to summarize what he taught to his students.

Keywords: how to attract students, how to write papers, how to select a research problem.

1. What This Article Is About

This year, we celebrate 90th birthday of Revolt Ivanovich Pimenov, a researcher who pioneered new directions in space-time geometry. I was lucky to learn from him:

- I attended his seminar in 1969-70, when I was a freshman student at St. Petersburg University,
- I spent a semester working with him in Syktyvkar, Komi Republic, his place of exile (for samizdat) – as an official practice semester sponsored by my university,
- I had many discussions with him in 1974 when we both attended the First National Conference on Chronogeometry in Novosibirsk in 1974, and
- we exchanged a lot of letters.

He was one of my teachers, one of those who taught me how to do science – and, more generally, how to live. In this article, I will summarize what he taught us – me and other students of his.

2. How to Attract Students to Do Science

At St. Petersburg University, we had numerous weekly research seminars led by leading professors, seminars that were open to all the students. Some seminars studied a certain topic in details week after week, but many other seminars just had different talks every week – so that you could skip one week if you are out of town or otherwise busy and still understand what is discussed next week.

This was one of the main duties of the seminar organizer(s) – to make sure that as much as possible is understandable to students – and students were strongly encouraged to ask questions if something was not clear. I remember at some point Pimenov introduced me to one of his colleagues by saying that Vladik is very good student: he asks many questions at the seminar.

Sometimes, a speaker would dismiss a question as childish and/or naive, but in this case, the seminar leader usually jumped in and forced the speaker to reply.

All our professors highly recommended us, freshman students, to attend one or more of these seminars, so that later on, when the decision would need to be made to specialize, we would have a good idea of what the choice are. I attended three seminars: on logic and constructive mathematics, on game theory, and Pimenov's seminar on space-time geometry – largely based on his then-published book [5]. All three were interesting seminars, and I especially liked Pimenov's seminar – since there, in addition to mathematicians, he also invited physicists who often provided a different view of problems related to space-time.

A seminar organizer would approach new students attending the seminar, ask about their specific interests and their level of knowledge – and then offer a new paper (or, sometimes a book) to review at the seminar (with the organizer's help, of course). To me, Pimenov suggested that I review a book *Space-Time Algebra* by David Hestenes [2]. It was an interesting – and still somewhat heretic – approach to describing physics, where the main objects were not, as usual, separately scalars, vectors, tensors, etc., but rather linear combinations of a scalar a , a 4D vector a_i , and antisymmetric tensors a_{ij} , a_{ijk} , and a_{ijkl} , with a multiplication operations similar to 3D vector product. Interestingly, this unusual combination of apples and oranges allows to simplify a description of physical equations – just like the introduction of vectors made the description of Maxwell equations simpler.

This book would probably not impress a physicist – as I remember, there were no new physical theories, no new results – but as a mathematician, I was impressed. It took me several months to go over this book – with Pimenov's help, and with his help, I presented it at the seminar. I was very much impressed by the fact that I, a freshman student, was able to teach something interesting to renowned professors. For many years, I kept the flier advertising my talk as a souvenir, and after my talk, Pimenov gave me a present: Hestenes's book. You will never forget your first seminar talk – he said – just like you never forget your first serious love. And so it was.

Later, he gave me a problem to think about – how to embed a kinematic space (his model of space-time as an ordered set) into a lattice kinematic space, following the known result that every ordered set can be embedded in a lattice; see, e.g., [1]. I was hooked, I thought about it all the time, always carried with me a piece of paper to draw possible spaces and embeddings. This was a good way to spend time when standing in lines – in a cafeteria, in a store, in a library. I befriended another student whom I met at the library and who recognized by my drawings that I was interested in lattices. Once, when making these drawing in a bus, I almost got into trouble since one of the passengers thought that I am a spy drawing the plan of the city; luckily, it was no longer Stalin's time (under Stalin, such accusations were taken more seriously), so other passengers simply laughed at this suggestion – especially since this did not make sense when one could easily buy a map of St. Petersburg.

By the way, I never solved this problem, but I got hooked on research anyway.

3. How to Select a Problem to Solve

It is important to have a good supply of open problems, so that:

- you yourself can solve some of them, and
- you can offer to every student of yours a problem that best fits her/her interests.

Sometimes, one gets a genius idea and comes up with a great problem, but such events are rare, so what should we do? Here, Pimenov had many ways to find problems.

Find related ideas in other sciences and try to relate them. This is very natural for space-time geometry – which is naturally related to space-time physics. Pimenov had a somewhat naive (but maybe correct) belief that many problems of physics can be solved if we make physics completely mathematically precise – and not filled with intuitions as it is now. This was the main motivation for his work in the first place, this is why he so enthusiastically invited physicists to his seminar – and was especially interested in their challenging open problems.

Sometimes, he would ask them a lot of question about differentiability etc., questions that physicists considered nitpicking, but which to him were important, since he wanted to understand everything in precise mathematical terms. He bombarded Penrose and Hawking, who just published what was supposed to be a theorem that a singularity is inevitable in General Relativity, with these types of question until they stopped answering.

He also believed that we should be able to formalize physicists' intuitive reasoning – he thought that Zadeh's fuzzy logic [15], which at that time, few people took seriously, is an important step in this direction, but that to truly formalize physics, we need to go beyond Zadeh's idea of degrees of certainty being numbers from the interval $[0, 1]$ – Pimenov thought that a more general approach, similar to his kinematic spaces, would be more adequate.

Pimenov also wanted to find connections the other way around – he was always curious about possible observable consequences of his non-standard space-time models.

It was not just relation to physics: he saw many ideas about space-time in philosophy, and was eager to try to formalize them. To tell the truth, while I appreciated and shared his enthusiasm for physics, at that time, I viewed philosophy as mostly nonsense – following the famous Russian psychologist Ivan Pavlov who cited Hegel's writing as an example of senseless psychotic mumblings. Pimenov tried to impress me by citing Hegel's phrase that the Great Square has no vertices – which he interpreted as meaning that in the limit, the larger and larger square becomes simply a plane, all vertices disappear. However, I was – at that time – not convinced.

See if results from related areas can be extended to your area of interest. Kinematic spaces are a particular case of ordered sets – and they also have a natural topology. So, a natural idea is to take some results about ordered sets or about topological spaces and see if a similar result can be formulated about kinematic spaces.

I have already mentioned the lattice problem that I was unable to solve. There were many others: one of them (which I did solve) was to extend the theorem that under reasonable conditions, topological spaces can be metrized, to prove that under similar conditions, every kinematic space would have a “kinematic metric” – a natural generalization of geodesic-based proper time between events as defined in relativity theory. He also asked a now-renowned topologist Yakov Eliashberg (who at that time worked in Syktyvkar) how to generalize homotopy theory to cases when we limit ourselves only to time-like curves connecting two points (or only to space-like curves).

Which properties are preserved under constructions. In every theory, there are basic objects, and there are constructions that combine them (and/or objects from other theories) into new objects. For example, in space-time geometry, we can naturally define Cartesian product of two spaces – or we can generalize the usual causality relation of special relativity to the case when the proper space is not 3D Euclidean but a general metric space. A natural question is, e.g., when does the Cartesian product have the given property?

For example, is the Cartesian product of any number of separable kinematic spaces always separable? To this, I found a counterexample – that the Cartesian product of countably many copies of the real line is a non-separable kinematic space.

4. How to Write Papers

A paper must be interesting to read. Once the result is obtained and the proof is written down and checked, now comes the need to prepare it for publication. When I started working with Pimenov, I followed the boring style, with no motivations. I was also writing poems and short stores which I was glad to share with my teacher. Proofs came tough, I was very proud of them, while stories came naturally. I was somewhat shocked when Pimenov said that my short story parodying our then-naïve Zionism – Life and Adventures of Boris Haimovich in a 12-Dimensional Jewish State – he liked much more than more than 100 pages of my complex proofs.

His comments reminded me of how Nikolai Vorobiev, the organizer of a game theory seminar that I also attended, taught us how not to write: he brought, to seminar, a paper on game theory that was written with no motivations at all, it started with “Let A be a σ -algebra”. After having attended several talks at his seminar, we understood very well that this was indeed a very important result with great consequences for game theory, but one would never guess it from the way the paper was written.

But too colloquial is also not good. When I was in Syktyvkar, Pimenov presented a cycle of lectures on space-time geometry. Several of us tried to write them down, he also recorded it on a tape recorder, with a purpose of later forming a textbook – this was how many textbooks were written in those days and probably how many textbooks are written now. His lectures were brilliant and exciting, but,

to our big surprise, when we literally wrote down word-by-word, it did not look so good: some phrases were not finished, there was a lot of repetition. We learned that we need to edit, and we learned how to edit, and it all helped us write our own papers.

5. How to Self-Gauge the Quality of Your Own Results

This is difficult. Every time you get a new result – especially if it was a challenge – you like it. But this does not mean that others will like it. How do you gauge the result's quality? This is one of the things that Pimenov taught us: that there are three reasons why results are valued more by others.

First reason: general results are valued more. A counterexample is cute, but a general result is better. Pimenov did not even suggest that I publish my result about Cartesian products – but he sent my metrization paper to A. D. Alexandrov, the country's leading specialist in space-time geometry, to publish in *Doklady* – one of the top journals [3]. This result became the most praised part of my PhD dissertation [4].

Second reason: somewhat famous formulated the problem. If you yourself formulated the problem – or your not-well-known advisor – why would anyone be excited about its solution? On the other hand, if someone famous formulated it, it is a different story. For example, as it turned out, the question about metrization of space-time models (at that time, they were not yet called kinematic spaces) was first formulated by the famous topologist Urysohn, and later studied by a renowned geometer Vadim Efremovich.

Third reason: when you completely solve the problem. For example, according to Pimenov, if I found, for each of the important properties of kinematic spaces, necessary and sufficient conditions when a Cartesian product would have this property, this would have been a good paper. On the other hand, a partial result is not yet a good paper.

6. How to Live

Attitude to scientists: respect and adore (but it is OK to also make fun). Pimenov had a great respect to people who had interesting results, even though some of them not always behaved in the most ethical way. Even foreign scientists would sometimes not cite known results of others – while they have read the others' papers and used their ideas.

In particular, he was very tolerant towards A. D. Alexandrov, even though A. D. was a very emotional person, ready to explode and to be not very polite with others, and not only with the ones who made him mad.

But making fun sometimes is OK. Pimenov reminded me that even in the ancient Rome, when the Emperor had a triumphal ride through the city, the best comedian was following him by foot parodying his pompousness.

Attitude to bosses: healthy scepticism and a need to compromise. Pimenov was always sceptical about non-scientist bosses, he considered it healthy to assume that they have other unspoken motives – be it careerism or fear of their own bosses or something even worse. And sometimes, he turned out to be right.

On the other hand, he taught us to compromise. This was unusual to hear from an active defender of human rights who was exiled for this defense, but what he said made sense: if one have a God's spark to be a scientist, this should be your main goal, everything else in a distraction preventing you from doing science. To me, he said that if I felt that I would rather be a Zionist story writer, I should emigrate to Israel and forget about science. But if I decide to do science, then I should not waste my efforts on such stories. He himself felt that in him, there were sparks both of a scientists and of a human rights fighter. He loves and adored many revolutionaries of the past, but he gave an example of Taras Shevchenko, the great Ukrainian poet who was clearly not a born revolutionary. All Ukrainians and all Russians loved (and still love) many of his poems, we all sang beautiful songs made when his poems was put on music. But Shevchenko's life was ruined when he wrote a poem insulting the Tsar's family and was made a soldier without the right to write anything.

In this advice to compromise, he was similar to my own Dad – who also taught me that going with sabers against tanks is not the smartest idea – you die and the tanks are not hurt at all. And by the way, it was similar to the advice that we learned from studying Lenin's works: it may be a surprise who have not studied his works, but he often was on the side of the compromise – and this was one of the reasons why he was so successful.

7. Conclusions

Do I agree with all this advice? Not necessarily, but now, after several decades, I appreciate Pimenov's advice much more than I did then. So maybe this advice will help others as well. And maybe those whom his advice helped will remember Pimenov by – in the words of Shevchenko – “nezlym tihim slovom”, by a few kind and quiet words.

REFERENCES

1. Birkhoff G. Lattice Theory. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1967.
2. Hestenes D. Space-Time Algebra. Birkhäuser, Basel, Switzerland, 1967.
3. Kreinovich V. On the metrization problem for spaces of kinematic type. Soviet Academy of Sciences Doklady, 1974, vol. 218, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian); translated into English as Soviet Mathematics Doklady, 1974, vol. 15, pp. 1486–1490.
4. Kreinovich V. Categories of Space-Time Models. Ph.D. dissertation, Novosibirsk, Soviet Academy of Sciences, Siberian Branch, Institute of Mathematics, 1979 (in Russian).
5. Pimenov R.I. Kinematic spaces: Mathematical Theory of Space-Time. Consultants Bureau, New York, 1970.
6. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, vol. 8, pp. 338–353.

РЕВОЛЮТ ПИМЕНОВ НАУЧИЛ НАС БЫТЬ УЧЁНЫМИ**В. Крейнович**

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эл Пасо, США

Аннотация. В 2021 году мы отмечаем 90-летие Революта Пименова, специалиста по геометрии пространства-времени. Он был моим учителем. В этой статье я пытаюсь обобщить то, чему он научил своих студентов.

Ключевые слова: как привлечь студентов, как писать статьи, как выбрать исследовательскую задачу.

Дата поступления в редакцию: 21.05.2021

ДВЕ ВСТРЕЧИ С РЕВОЛЬТОМ ПИМЕНОВЫМ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Статья содержит воспоминания о встречах и беседах с замечательным человеком и математиком Р.И. Пименовым.

Ключевые слова: Револют Иванович Пименов, пространство-время, общая теория относительности, топосы, аксиоматизация.

Писать воспоминания — дело безнадёжное, если вы не отдаёте себе отчёт в том, что то, в чём вы абсолютно уверены, действительно *имело место быть*, лет через пятьдесят или более будет представлять собой лишь литературное произведение, не претендующее на полное соответствие тому, что реально *имело место быть*, а являет собой всего лишь *вариант* реального существования, который совсем не обязан быть вашим / нашим прошлым.

Таковы законы времени — прошлое не восстановимо, дальнейшее прошлое *многовариантно*.

Такое предисловие к воспоминаниям более чем странно. Ведь от вас ждут *правдивых* воспоминаний, а в данном случае автор как бы предупреждает читателя, что таковых воспоминаний не следует ждать. Ну, во-первых, речь идёт об относительно недавнем прошлом, которое ещё наше, а во-вторых, воспоминания предлагаются о человеке, который всю жизнь посвятил устройству пространства-времени, и кому уж как не ему было многое известно о текучести, неизмеримости, непредсказуемости событий в пространстве-времени.

Думаю, что Р.И. Пименов не возражал бы против такого подхода. Разве что в чем-то не согласился или уточнил, или озадачил.

Револют Иванович Пименов — это один из лучших специалистов по теории пространства-времени, его книги и статьи впечатляют. Хотя как-то однажды наш общий учитель Александр Данилович Александров спросил меня: «А у Пименова есть нетривиальные теоремы?» Такой вопрос мог себе позволить только великий геометр, которым А.Д. Александров и являлся. Многие результаты и мысли Р.И. Пименова лично для меня удивительны и нетривиальны.

1. Встреча первая. 1974 год

В 1974 году, в июле, я переехал работать из новосибирского Академгородка в Омск, где открывался новый университет.

В октябре мой учитель А.Д. Александров позвонил мне и пригласил приехать на организованный им Всесоюзный симпозиум по хроногеометрии. Поскольку отношения с ректором не сложились, то я поехал на симпозиум не как

командированный, а как недисциплинированный солдат, сбежавший в самоволку.

В первый же день мне дали время для доклада, который назывался «Инвариантные порядки на трёхмерных группах Ли». В нём я излагал то, что пришло мне в голову в августе-сентябре. Я плохо тогда ориентировался в тонкостях вычисления группы Ли преобразований по алгебре Ли, и это видно по тем не менее опубликованной статье в «Сибирском математическом журнале» [1]. Но самое главное: в докладе я построил (аффинные) представления разрешимых групп Ли, для них нашёл лево-инвариантные конические порядки и показал, что соответствующие порядковые группы автоморфизмов состоят из аффинных преобразований.

Я попытался сделать обобщение на локальные порядки, но сделал это весьма некорректно, на что сразу обратил внимание мужчина с усами и бородкой в очках, сидевший почти рядом от того места, где стоял докладчик. Я что-то стал бормотать, но чувствовал, что-то у меня *не так*. Мужчина меня пожалел и сказал, что он в своей книге уже описал, как надо определять локальный порядок и что я мог бы этим воспользоваться. В общем мне похлопали.

В перерыве я подошёл к А.Д. Александрову, рядом с ним сидела очень милая женщина. А.Д., как мы называли Александрова, познакомил меня с ней. Это была Светлана Михайловна Владимирова (Богачева) (его ученица и будущая вторая жена А.Д.). Александров сказал, что вот, Светлана Михайловна похвалила вас, но, мол, надо учиться делать доклады и стараться не выносить на публику то, что ещё не продумано до конца.

И в это время к нам подошёл тот самый мужчина в очках с усами и бородкой и заметил, что, кажется, я первый, кто ввёл так удачно порядки в группы Ли и сумел вычислить порядковые группы автоморфизмов. Это был Пименов! О нём я много слышал от А.Д. и от профессора Ю.Ф. Борисова¹, моего первого научного руководителя (на полгода, затем он передал меня А.Д.).

Р.И. Пименов отбывал ссылку в Сыктывкаре, и ему какое-то время назад разрешили выезжать в другие города. Так он появился на симпозиуме.

На следующий день профессор Ю.Ф. Борисов пригласил на ужин к себе домой А.Д., всех его учеников и некоторых участников симпозиума. Было тесно, но интересно. После застолья все разбились на группки. Я прибилсь сразу к той, состоящей из молодёжи, где находился Пименов. Ему задавали множество вопросов — все мы о нём слышали, например, о неутверждении его докторской диссертации (из-за его политической деятельности), но не видели. Он нас покориł силой своей личности и разносторонней образованности.

Я его спросил, правда ли, что он знает очень много языков. «Не очень много, где-то языков двадцать», — ответил Пименов.

На вопрос, заданный кем-то, почему он осуждается советской властью на заключение, ссылку за свою политическую деятельность. Ответ пронзает: «Я видел, как эков в Магадане грузят на пароход в сетке, как картошку, портовым

¹Борисов Ю.В. — д.ф.-м.н., профессор, специалист в области геометрии и хроногеометрии, заведующий кафедрой геометрии и топологии (1980–1992) Новосибирского государственного университета. Неразлучный друг и ученик А.Д. Александрова.

подъёмным краном. Я не могу мириться с таким отношением к людям».

2. Встреча вторая. 1988 год

Она произошла через 14 лет, в сентябре 1988 года в Кишинёве, где собралась последняя IX Всесоюзная геометрическая конференция.

На конференции блистал Александр Вениаминович Кузьминых — ученик А.Д. Александрова. На пленарном заседании, собравшем практически всех участников конференции (несколько сот человек), он представил своё достижение — кривую, все проекции которой на любую гиперплоскость заполняют всю гиперплоскость [2]. Я назвал её в своё время «гадюкой Кузьминых».

Там же в Кишинёве я познакомился с А.М. Заморзаевым — учеником А.Д. Александрова «второго поколения», которого очень не жаловал Пименов.

С Револьтом Ивановичем мы пересеклись достаточно случайно не в первый день конференции, кажется возле гостиницы, и разговорились. Я ему рассказал о своём замысле использовать для аксиоматизации теории относительности теорию топосов. Главное в замысле состояло в том, чтобы один набор аксиом, выраженный в терминах теории категорий, описывал и специальную теорию относительности, и общую теорию относительности (ОТО), т. е. пространство-время Минковского и псевдоримановы (лоренцевы) многообразия. Ключом интерпретаций являлся выбор конкретного топоса.

Надо сказать, что в то время часть научной школы А.Д. Александрова, занимавшаяся разработкой причинной (каузальной, порядковой) теории пространства-времени, именуемая хроногеометрами, в которую входили Р.И. Пименов, Ю.Ф. Борисов, А.К. Гуц, А.В. Кузьминых, А.В. Шайденко, А.В. Левичев, С.Н. Астраков, В.Я. Крейнович, О. Кошелева, занималась аксиоматизацией пространства-времени Минковского, и совсем не покушалась на аксиоматизацию общей теории относительности.

Но именно такую аксиоматизацию ОТО в Кишинёве и представил на конференции Револьт Иванович. То, что я ему сообщил, означало, что, в какой-то мере, нет необходимости отдельно заниматься отысканием аксиом для ОТО.

Надо сказать, что аксиоматику ОТО, найденную Пименовым, я хорошо знал и до доклада. В 1987 году я оказался рецензентом статьи Револьта Ивановича, присланной им в «Сибирский математический журнал» (СМЖ). Я дал положительную рецензию, хотя некоторые места не имели доказательств. Но когда чуть позже я приехал на Всесоюзную конференцию по геометрии «в целом» (1987), меня пригласил заместитель главного редактора проф. В.И. Кузьминов² и стал задавать вопросы по статье Пименова по «недоказательным местам» — могу ли я их доказать. «Нет, не могу... но чувствую, что они верны». Возникла пауза. Владимира Ивановича я всегда побаивался... и в этот момент чувствовал себя как нерадивый студент на экзамене.

²Кузьминов В.И. — д.ф.-м.н., профессор, специалист в области алгебраической топологии, заведующий кафедрой геометрии и топологии (1992–1999) Новосибирского государственного университета.

«Я понимаю, что Вы хотите помочь своему другу, — сказал Кузьминов, — но есть определённые требования к публикации математических работ... Мне поручено провести *титульное рецензирование*³ статьи Пименова, одной Вашей рецензии мало, я должен дать своё заключение».

В это время я «переваривал» фразу «своему другу»! Кто Пименов и кто я?! Разве можно зачислить меня в друзья столь выдающегося человека!

«Владимир Иванович, я как-то не могу зачислить себя в друзья Пименова, я посчитал, что «дыры» в доказательствах рано или поздно кто-нибудь заделает, и у Погорелова были «дыры»... а статья мне очень понравилась и я посчитал, что она заслуживает опубликования».

«Хорошо, у меня нет больше вопросов».

Статья была опубликована в СМЖ [3]. Позже я привёл данную аксиоматику Пименова в своём обзоре, вышедшем в Германии [4], и в книге «Хроногеометрия» [5].

А с Владимиром Ивановичем Кузьминовым у меня сложились отношения, которые хочется назвать дружескими.

Но вернёмся в Кишинёв 1988 года.

Выслушав моё сообщение о теоретико-топосной аксиоматизации теории относительности, Револьт Иванович... (и тут я запомнил самую суть его речи) ... в чем-то не согласился, что-то уточнил, или озадачил, но поддержал. И уже в самолёте я набросал важный момент в построении топосной аксиоматики — описал аффинный объект в топосах, используя замечательную идею В.К. Ионина по аксиоматизации аффинных пространств [6].

Больше года ушло на оформление задуманного в виде статьи, которая была представлена А.Д. Александровым в «Доклады академии наук СССР» [7]. Кажется, это первая статья по категорному описанию теории относительности. На неё часто ссылаются те, кто исследует теорию относительности в рамках теории топосов.

3. Заключение

Ещё до второй встречи, живя в Омске и во времена без интернета, я написал Револьту Ивановичу письмо с просьбой прислать его книгу «Пространства кинематического типа». Он прислал, с дарственной надписью (рис. 1). Позже он присылал мне свои препринты и книгу [8].

В 1989 году мы с ним одновременно активно включились в политическую жизнь страны, участвуя в выборах народных депутатов СССР. Оба потерпели поражение, он как кандидат в депутаты, я как член команды С.Н. Бабурина⁴. Но на следующий год (1990) пришла удача: и он, и Бабурин стали народными депутатами РСФСР.

³Я в первый и в последний раз слышал о некоем «титульном рецензировании».

⁴Бабурин С.Н. — советский, российский политический и государственный деятель, учёный-юрист, д.ю.н., профессор. Член Совета Республики Верховного Совета РСФСР.

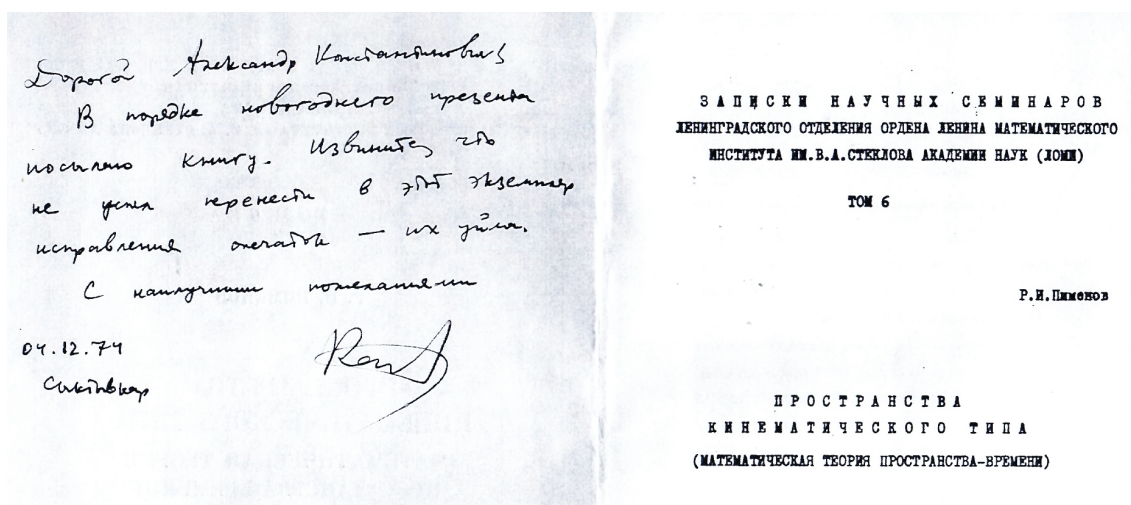


Рис. 1. Автограф Р.И. Пименова

Депутат Р.И. Пименов вошёл в состав комиссии, которая должна была написать новую Конституцию России. Но в декабре 1990 года он умер от рака.

Пименов ушёл в вечность раньше своего учителя А.Д. Александрова. Их нет, нет тех, кто в чём-то не согласится или уточнит, или озадачит. А в итоге окрылит.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Инвариантные порядки на трёхмерных группах Ли // Сиб. мат. ж. 1976. Т. 17, № 5. С. 986–992.
2. Кузьминых А.В. Гомеоморфная прямой кривая в $\mathbb{R}^n$, пересекающаяся с каждой неограниченной кривой ограниченной кривизны // Доклады АН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1042–1045.
3. Пименов Р.И. Аксиоматика общерелятивистского и финслерова пространства-времени посредством причинности // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 2. С. 133–143.
4. Guts A.K. Semigroups in foundations of geometry and axiomatic theory of space-time. Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis (ed. K.H. Hofmann, J.D. Lawson, E.B. Vinberg). Berlin: de Gruyter Expositions in Mathematics, 1995. 368 p. P. 57–76.
5. Гуц А.К. Хроногеометрия: Аксиоматическая теория относительности / Изд. 2, испр. и доп. М.: УРСС, 2018. 352 с.
6. Ионин В.К. Один способ определения аффинной структуры // Геометрич. сб. Томск, 1982. Т. 23. С. 3–16.
7. Гуц А.К. Теоретико-топосный подход к основаниям теории относительности // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 6. С. 1294–1297.
8. Пименов Р.И. Анизотропное финслерово обобщение теории относительности как структуры порядка. Сыктывкар, 1987. 182 с.

TWO MEETINGS WITH REVOLT PIMENOV**A.K. Guts**

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The article contains memories of meetings and conversations with a remarkable person and mathematician R.I. Pimenov.

Keywords: Revolt Ivanovich Pimenov, space-time, general theory of relativity, toposes, axiomatization.

REFERENCES

1. Guts A.K. Invariantnye poryadki na trekhmernykh gruppakh Li. Sib. mat. zh., 1976, vol. 17, no. 5, pp. 986–992. (in Russian)
2. Kuz'minykh A.V. Gomeomorfная pryamoi krivaya v $\mathbb{R}^n$, peresekayushchayasya s kazhdoi neogranichennoi krivoi ogranichennoi krivizny. Doklady AN SSSR, 1989, vol. 305, no. 5, pp. 1042–1045. (in Russian)
3. Pimenov R.I. Aksiomatika obshcherelyativistkogo i finslerova prostranstva-vremeni posredstvom prichinnosti. Sib. mat. zhurn., 1988, vol. 29, no. 2, pp. 133–143. (in Russian)
4. Guts A.K. Semigroups in foundations of geometry and axiomatic theory of space-time. Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis (ed. K.H. Hofmann, J.D. Lawson, E.B. Vinberg), Berlin, de Gruyter Expositions in Mathematics, 1995, 368 p., pp. 57–76.
5. Guts A.K. Khronogeometriya: Aksiomaticheskaya teoriya otnositel'nosti. Izd. 2, ispr. i dop., Moscow, URCC Publ., 2018, 352 p. (in Russian)
6. Ionin V.K. Odin sposob opredeleniya affinnoi struktury. Geometrich. sb., Tomsk, 1982, vol. 23, pp. 3–16. (in Russian)
7. Guts A.K. Teoretiko-toposnyi podkhod k osnovaniyam teorii otnositel'nosti. Dokl. AN SSSR, 1991, vol. 318, no. 6, pp. 1294–1297. (in Russian)
8. Pimenov R.I. Anizotropnoe finslerovo obobshchenie teorii otnositel'nosti kak struktury poryadka. Syktyvkar, 1987, 182 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 24.05.2021

АВТОИЗОМЕТРИИ ЧЕТЫРЁХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ IV ТИПА БИАНКИ

М.Н. Подоксёнов

к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ГиМА, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

Е.А. Иванова

студентка, e-mail: ekaterina2000ivyandex@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается четырёхмерная алгебра Ли IV типа Бианки. Доказывается, что существует только один способ задания на ней лоренцева скалярного произведения, при котором существует нетривиальная однопараметрическая группа изометрий, являющихся автоморфизмами алгебры Ли. Выписаны матрица Грамма скалярного произведения и матрица, описывающая действие однопараметрической группы. Также доказывается, что данная алгебра Ли не допускает однопараметрической группы подобий, являющихся автоморфизмами алгебры Ли, при любом способе задания в ней лоренцева скалярного произведения.

Ключевые слова: алгебра Ли, лоренцево скалярное произведение, однопараметрическая группа, подобие, изометрия, автоморфизм.

1. Постановка задачи

Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ введено евклидово или лоренцево скалярное произведение. Линейное преобразование $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ назовём автоизометрией, если оно является одновременно изометрией относительно скалярного произведения и автоморфизмом алгебры Ли. Преобразование f назовём автоподобием, если оно является одновременно подобием и автоморфизмом. Как показано в работе [1], решение задачи нахождения однопараметрических групп автоподобий данной алгебры Ли позволяет построить самоподобные однородные многообразия соответствующей группы Ли, снабжённой левоинвариантной метрикой. В этой же работе найдены все автоподобия трёхмерной алгебры Ли $\mathcal{H}$ группы Гейзенберга при различных способах задания на ней лоренцева скалярного произведения и найдены соответствующие однопараметрические группы подобий однородного лоренцева многообразия трёхмерной группы Ли Гейзенберга $\mathcal{H}_s$.

Некоммутативная двумерная алгебра Ли $\mathcal{A}(1)$ – это алгебра Ли группы $A(1)$ аффинных преобразований прямой. Компонента связности этой группы Ли, содержащая единичный элемент, – это группа $A^+(1)$, состоящая из аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию прямой. В работах [2] и [3] были найдены все способы задания лоренцева скалярного произведения

на двумерной и трёхмерной алгебрах Ли $\mathcal{A}(1)$ и $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}$, при которых они допускают однопараметрические группы автоподобий и автоизометрий, а также выписаны формулы, по которым действуют эти однопараметрические группы. Это позволило построить самоподобные связные многообразия групп Ли $A^+(1)$ и $A^+(1) \times \mathbf{R}$. Все возможные однопараметрические группы автоподобий и автоизометрий для четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$ найдены в работе [4], а в работе [5] подобная задача решена в случае задания в алгебре Ли евклидова скалярного произведения.

Цель данной работы: найти все способы задания лоренцева скалярного произведения в алгебре Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$, при которых она допускает однопараметрическую группу автоизометрий, выписать матрицу, задающую действие этой группы, и доказать, что она не допускает автоподобий при любом способе задания на ней лоренцева скалярного произведения. Эта четырёхмерная алгебра Ли является единственной, относящейся к IV типу по классификации Бианки.

2. Структура алгебры Ли

В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_4$ задаются двумя равенствами: $[E_3, E_1] = E_1, [E_4, E_2] = E_2$, а остальные скобки равны нулевому вектору. Будем называть такой базис каноническим. Двумерное подпространство $\mathcal{H}$, являющееся линейной оболочкой векторов E_1 и E_2 является производной алгеброй Ли $[\mathcal{G}_4, \mathcal{G}_4]$. Это коммутативный идеал. Линейные оболочки векторов E_1, E_3 и E_2, E_4 обозначим соответственно $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Эти подпространства являются двумерными некоммутативными идеалами. Кроме того, алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ содержит бесконечное количество коммутативных двумерных идеалов: $\forall X \in \mathcal{L}_1, Y \in \mathcal{L}_2$ линейная оболочка этих векторов является коммутативным идеалом.

Алгебра Ли $\mathcal{G}_4$ допускает четырёхмерную группу автоморфизмов, которая состоит из преобразований, задающихся матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, а γ и δ могут принимать любые значения. Такие автоморфизмы будем называть автоморфизмами первого типа. Одновременная перестановка базисных векторов E_1 и E_2, E_3 и E_4 тоже сохраняет операцию скобки. Она задаётся матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Поэтому композиция автоморфизмов, задаваемых матрицами (1) и (2), тоже является автоморфизмом. Они задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0. \quad (3)$$

Будем их называть автоморфизмами второго типа. Важно отметить, что определитель матриц (1) и (3) равен $\alpha\beta$, т.е. равен определителю матрицы, задающей ограничение преобразования на $\mathcal{H}$. Однопараметрическая группа автоморфизмов может содержать только автоморфизмы первого типа при $\alpha > 0, \beta > 0$.

Линейную оболочку векторов X, Y будем обозначать $\langle X, Y \rangle$.

3. Основные результаты

Пусть на алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ введено лоренцево скалярное произведение.

Теорема 1. 1) *Существует только один способ задания лоренцева скалярного произведения в алгебре Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$, котором она допускает нетривиальную однопараметрическую группу автоизометрий. Действие этой группы в каноническом базисе задаётся матрицей*

$$\begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

при этом матрица Грама базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

2) *Автоподобий рассматриваемая алгебра Ли не допускает при любом способе задания в ней лоренцева скалярного произведения.*

Доказательство. Случай 1. На идеале $\mathcal{H}$ индуцируется лоренцево скалярное произведение. Тогда на подпространстве $\mathcal{H}^\perp$ индуцируется евклидово скалярное произведение.

Пусть $h(t) : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ – однопараметрическая группа автоизометрий или автотоподобий. Под её действием должны оставаться инвариантными идеал $\mathcal{H}$, два изотропных направления в нём и одномерные идеалы $\mathbf{R}E_1, \mathbf{R}E_2$. В дальнейшем обозначаем $E'_i(t) = h(t)(E_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Согласно [6], в подходящем базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) любая однопараметрическая группа подобий четырёхмерного пространства Минковского, имеющая более одного инвариантного изотропного собственного вектора, задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$, $\mu \geq 0$, где

$$\mathbf{F}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \nu \geq 0, t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

и звёздочками обозначена ортогональная матрица $\mathbf{Q}(t)$. При этом матрица Грама имеет вид (5).

В работе [7] были найдены все инвариантные двумерные подпространства группы преобразований, которая задаётся матрицами вида (6).

Согласно доказанной в [7] теореме и следствию из неё, выполнено $H = \langle e_1, e_2 \rangle$, и можно сделать вывод, что $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{E}$. Но нам важно уточнить: задаётся ли $h(t)$ матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$ именно в каноническом базисе, а также надо найти матрицу Грама этого базиса.

Определитель матрицы преобразования не зависит от выбора базиса в векторном пространстве. Определитель матрицы $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$ равен $e^{4\mu t}$, тогда как матрица ограничения преобразования $h(t)$ на $\mathcal{H}$ имеет определитель, равный $e^{2\mu t}$. Следовательно, $\mu = 0$, и может существовать только однопараметрическая группа автоизометрий.

Если $\nu = 0$, то однопараметрическая группа состоит только из тождественных преобразований. Пусть $\nu \neq 0$. Тогда ограничение $h(t)$ на $\mathcal{H}$ не может иметь более двух инвариантных направлений. Следовательно, E_1 и E_2 совпадают с e_1 или e_2 , т. е. они являются изотропными (см. рис. 1 а)).

Согласно матрицам (1) и (6) соответственно

$$E'_3(t) = \gamma E_1 + E_3, E'_2(t) = e^{-\nu t} E_2.$$

Тогда

$$E'_3(t) \cdot E'_2(t) = \gamma e^{-\nu t} E_1 \cdot E_2 + e^{-\nu t} E_3 \cdot E_2 = \gamma e^{-\nu t} + e^{-\nu t} E_3 \cdot E_2.$$

Последнее выражение должно быть тождественно равно $E_3 \cdot E_2$. Отсюда получаем тождество

$$\gamma e^{-\nu t} + (e^{-\nu t} - 1) E_3 \cdot E_2 \equiv 0.$$

Это выполняется, только если одновременно $\gamma = 0$ и $E_3 \cdot E_2 = 0$. Аналогично получим $\delta = 0$ и $E_4 \cdot E_1 = 0$.

Поскольку скалярные квадраты векторов E_1 и E_2 равны нулю, то

$$E'_3(t) \cdot E'_1(t) = (\gamma E_1 + E_3) \cdot (e^{\nu t} E_1) = e^{\nu t} E_3 \cdot E_1.$$

Это выражение должно быть равно $E_3 \cdot E_1$. Следовательно, $E_3 \cdot E_1 = 0$, и аналогично получаем $E_4 \cdot E_2 = 0$. Это значит, что $H^\perp = \langle E_3, E_4 \rangle$. В итоге матрица Грама канонического базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{34} & g_{44} \end{vmatrix} > 0, \quad g_{33} > 0. \quad (7)$$

Поскольку $\gamma = \delta = 0$, мы приходим к выводу, что в рассматриваемом случае может существовать только однопараметрическая группа автоизометрий, действие которой в каноническом базисе задаётся матрицей (4).

Случай 2. На идеале $\mathcal{H}$ индуцируется евклидово скалярное произведение. Тогда на подпространстве $H^\perp$ индуцируется лоренцево скалярное произведение, и заведомо скалярные квадраты векторов E_1 и E_2 не равны нулю. Заменим базисный вектор E_3 на $\gamma E_1 + E_3$. Тогда

$$(\gamma E_1 + E_3) \cdot E_1 = \gamma E_1 \cdot E_1 + E_3 \cdot E_1.$$

Мы выберем γ так, чтобы это выражение стало равным нулю. Точно также выберем δ так, чтобы вектор $\delta E_2 + E_4$ был ортогонален E_2 , и мы заменим базисные векторы E_3 и E_4 на $\gamma E_1 + E_3$ и $\delta E_2 + E_4$ соответственно. Сохраним прежнее обозначение для нового базиса, который тоже будет каноническим. Также, не меняя операции скобки, можем сделать векторы E_1 и E_2 единичными.

Пусть $h(t) : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ – однопараметрическая группа автоизометрий или автоподобий. Изотропные направления подпространства $\mathcal{H}^\perp$ должны быть инвариантны относительно $h(t)$. Следовательно, $h(t)$ относительно некоторого базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$. Согласно [7], выполнено $\langle e_3, e_4 \rangle = \mathcal{H}$, и тем самым, $\langle e_3, e_4 \rangle = \mathcal{H}^\perp$ (см. рис. 1 б)). Из условия на определитель матрицы автоморфизма мы опять делаем вывод, что $\mu = 0$ и может существовать только однопараметрическая группа автоизометрий. При этом ограничение $h(t)$ на $\mathcal{H}$ имеет два инвариантных направления. Это возможно, только если матрица $\mathbf{Q}(t)$ в (6) равна тождественно $\mathbf{E}$. Нам необходимо ещё доказать, что $\nu = 0$.

Предположим, что $E_1 \cdot E_2 \neq 0$. Имеем

$$E'_2(t) = E_2, E'_3(t) = \gamma E_1 + E_3.$$

$$E'_3(t) \cdot E'_2(t) = \gamma E_1 \cdot E_2 + E_3 \cdot E_2.$$

Это выражение должно быть тождественно равно $E_3 \cdot E_2$. Получим

$$\gamma E_1 \cdot E_2 \equiv 0.$$

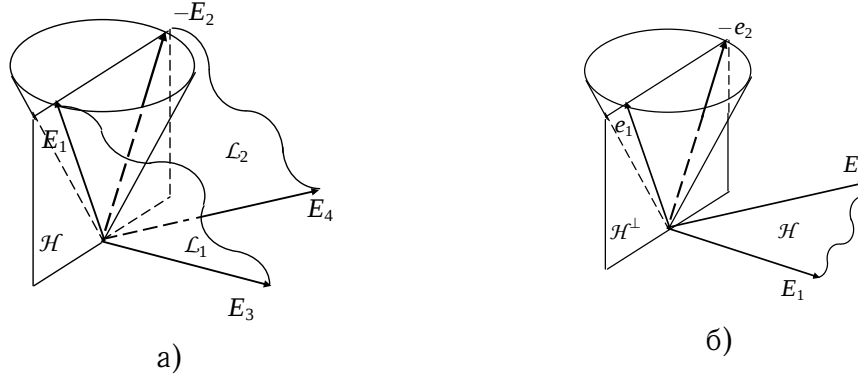


Рис. 1. Расположение базисных векторов

Отсюда $\gamma = 0$, и аналогичным образом получим $\delta = 0$, если $E_1 \cdot E_2 \neq 0$. Это означает, что однопараметрическая подгруппа состоит только из тождественных преобразований. Поэтому рассматриваем далее только случай $E_1 \cdot E_2 = 0$. Мы уже доказали, что можно выбрать базис так, что $E_3 \cdot E_1 = 0$. Поэтому

$$E'_3(t) \cdot E'_1(t) = \gamma E_1 \cdot E_1 + E_3 \cdot E_1 = \gamma E_1 \cdot E_1.$$

Это выражение должно быть тождественно равно нулю. Следовательно, $\gamma = 0$, и аналогичным образом получим $\delta = 0$. Итак, в рассматриваемом случае не существует нетривиальной однопараметрической группы автоизометрий и автоподобий.

Случай 3. На подпространстве $\mathcal{H}$ индуцируется вырожденное скалярное произведение. Пусть $h(t) : \mathcal{G}_4 \rightarrow \mathcal{G}_4$ – однопараметрическая группа автоизометрий или автоподобий. Тогда единственное изотропное направление в $\mathcal{H}$ должно быть инвариантным относительно действия группы. Предположим сначала, что оно является единственным инвариантным изотропным направлением. Тогда, согласно [6], относительно некоторого базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) группа $h(t)$ задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_2(t)$, $\mu \geq 0$, где

$$\mathbf{F}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица Грама базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расположение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов схематично показано на рисунке 2 а).

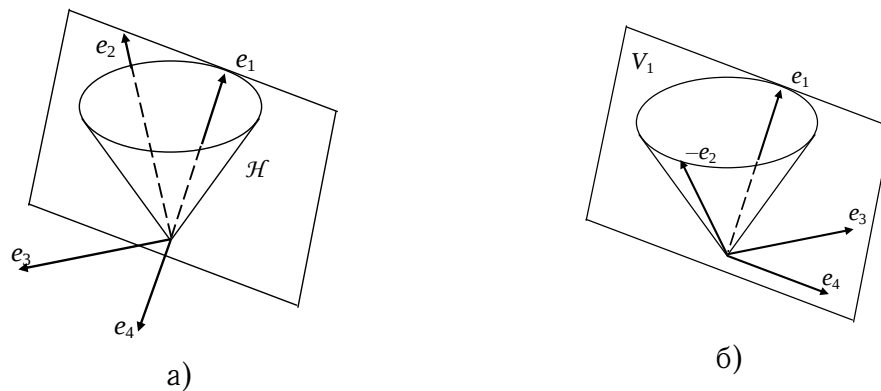


Рис. 2. Расположение базисных векторов

В работе [8] доказано, что в этом случае все инвариантные двумерные подпространства содержат вектор e_1 . Учитывая структуру рассматриваемой алгебры Ли, мы приходим к выводу, что $h(t)$ не может задаваться матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_2(t)$. Следовательно, существует ещё одно инвариантное изотропное направление и в подходящем базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) группа $h(t)$ задаётся матрицей $e^{\mu t} \mathbf{F}_1(t)$. Подпространство $\mathcal{H}$ может быть инвариантным, только если $\mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{E}$.

Предположим, что $\nu \neq 0$. В этом случае, согласно [7], двумерные идеалы $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ содержатся в трёхмерных подпространствах V_1 и V_2 , которые задаются соответственно уравнениями $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Эти подпространства являются ортогональными дополнениями к e_1 и e_2 соответственно и имеют общее пересечение $\langle e_3, e_4 \rangle$, поэтому идеал $\mathcal{H}$ может содержаться только в одном из них. Пусть это будет V_1 (см. рис. 2 б)). Тогда $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ тоже содержатся в V_1 , поскольку они имеют ненулевое пересечение с $\mathcal{H}$. Это значит, что линейная оболочка $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ является трёхмерной. Мы получили противоречие, поскольку линейная оболочка $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ должна быть четырёхмерной. Следовательно, однопараметрическая группа $h(t)$ состоит только из тождественных преобразований.

4. Заключение

В данной работе мы доказали, что четырёхмерная алгебра Ли $\mathcal{G}_4 = \mathcal{A}(1) \oplus \mathcal{A}(1)$ не допускает однопараметрической группы автоподобий при любом способе задания в ней лоренцева скалярного произведения. Это означает, что соответствующая ей связная группа Ли $A^+(1) \times A^+(1)$, снабжённая левоинвариантной лоренцевой метрикой, не может быть однородным самоподобным лоренцевым многообразием. Существующая однопараметрическая группа автоизометрий для алгебры $\mathcal{G}_4$ позволит в дальнейшем построить однопараметрическую группу движений группы Ли $A^+(1) \times A^+(1)$, оставляющую неподвижной единицу группы. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Подоксёнов М.Н. Самоподобные однородные двумерное и трёхмерное лоренцевы многообразия // Вестник Витебского государственного университета им. П.М. Машерова, 2018. № 2(99). С. 14–19.
3. Подоксёнов М.Н., Кабанов А.Н. Самоподобное однородное лоренцево многообразие трёхмерной группы Ли // Наука — образованию, производству, экономике: Материалы XXIV(71) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 14 февраля 2019 г. Витеб. гос. ун-т. Витебск : ВГУ имени П.М. Машерова, 2019. Т. 1. С. 18–20.
4. Подоксёнов М.Н., Черных В.В. Автоизометрии и автоподобия алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$ // Математические структуры и моделирование. 2020. № 1(53). С. 25–30.
5. Подоксёнов М.Н., Гуц А.К. Автоизометрии алгебры Ли $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$ // Наука — образованию, производству, экономике: материалы 72-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 20 февраля 2020 г. Витебск : ВГУ им. П.М. Машерова, 2020. С. 27–29.
6. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds // Ann.of Global Anal.Geom. 1985. V. 3, No. 1. P. 59–84.
7. Подоксёнов М.Н., Иванова Е.А. Инвариантные подпространства однопараметрической группы подобий пространства Минковского // Математические структуры и моделирование. 2021. № 1(57). С. 25–28.
8. Черных В.В. Инвариантные подпространства одного специального класса преобразований // «Молодость. Интеллект. Инициатива». Материалы VIII Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова. 2020. С. 36–38.

**AUTOISOMETRIES OF FOUR-DIMENSIONAL LIE ALGEBRA
OF IV BIANCHI TYPE****M.N. Podoksenov**Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department
"Geometry & Analysis", e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com**E.A. Ivanova**

Student, e-mail: ekaterina2000ivyandex@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus'

Abstract. We consider four-dimensional Lie algebra of IV Bianchi type. It is proved that there is only one way of defining Lorentz scalar product on it, for which there exists nontrivial one-parameter group of isometries that are automorphisms of the Lie algebra. Gram matrix of the scalar product and the matrix describing the action of the one-parameter group are written out. It is also proved that the given Lie algebra does not admit one-parameter group of similarities, which are automorphisms of the Lie algebra, for any way of defining the Lorentz scalar product in it.

Keywords: Lie algebra, Lorentz scalar product, one-parameter group, similarity, isometry, automorphism.

REFERENCES

1. Podoksenov M.N. Podobiya i izometrii odnorodnogo mnogoobraziya gruppy Geizenberga, snabzhennoi levoinvariantnoi lorentsevoi metrikoi. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta im. P.M. Masherova, 2011, no. 5, pp. 10–15. (in Russian)
2. Podoksenov M.N. Samopodobnye odnorodnye dvumernoe i trekhmernoe lorentsevy mnogoobraziya. Vestnik Vitebskogo gosudarstvennogo universiteta im. P.M. Masherova, 2018, no. 2(99), pp. 14–19. (in Russian)
3. Podoksenov M.N. and Kabanov A.N. Samopodobnoe odnorodnoe lorentsevo mnogobrazie trekhmernoi gruppy Li. Nauka — obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike, Materialy XXIV(71) Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii преподаvatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 14 fevralya 2019 g., Viteb. gos. un-t. Vitebsk, VGU imeni P.M. Masherova, 2019, vol. 1, pp. 18–20. (in Russian)
4. Podoksenov M.N. and Chernykh V.V. Avtoizometrii i avtopodobiya algebry Li $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 1(53), pp. 25–30. (in Russian)
5. Podoksenov M.N. and Guts A.K. Avtoizometrii algebry Li $\mathcal{A}(1) \oplus \mathbf{R}^2$. Nauka — obrazovaniyu, proizvodstvu, ekonomike, materialy 72-i Regional'noi nauchno-prakticheskoi konferentsii преподаvatelei, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov, Vitebsk, 20 fevralya 2020 g., Vitebsk, VGU im. P.M. Masherova, 2020, pp. 27–29. (in Russian)
6. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds. Ann.of Global Anal.Geom., 1985, vol. 3, no. 1, pp. 59–84.
7. Podoksenov M.N. and Ivanova E.A. Invariantnye podprostranstva odnoparametricheskoi gruppy podobii prostranstva Minkovskogo. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2021, no. 1(57), pp. 25–28. (in Russian)
8. Chernykh V.V. Invariantnye podprostranstva odnogo spetsial'nogo klassa preobrazovaniy. "Molodost'. Intellekt. Initsiativa", Materialy VIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i magistrantov, Vitebsk, VGU imeni P.M. Masherova, 2020. pp. 36–38. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 14.03.2021

ДИНАМИЧЕСКИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ РЕШЁТКЕ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В.Н. Бородихин

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: borodikhin@inbox.ru

И.С. Попов

доцент, к.ф.-м.н., e-mail: diphosgen@mail.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В работе исследовано поведение двумерной модели Изинга на гексагональной решётке во внешнем осциллирующем поле. Было определено значение критического полупериода, а также значение критических индексов β/ν , γ/ν и α . Установлено, что класс универсальности данной модели соответствует классу универсальности двумерной модели Изинга в равновесном случае.

Ключевые слова: динамические фазовые переходы, модель Изинга на гексагональной решётке, осциллирующее магнитное поле.

1. Введение

Исследование критического поведения систем в осциллирующем магнитном поле представляет большой теоретический [1–6] и экспериментальный [7–10] интерес. Особенность критического поведения таких систем заключается в возникновении аномально больших и долго живущих флуктуаций параметра порядка системы при приближении значения полупериода внешнего поля к критическому значению. Величина параметра порядка, определяемого как средняя за один период намагниченность, непрерывно обращается в нуль при переходе в неупорядоченную фазу. Таким образом, в системе реализуется фазовый переход второго рода.

В работах [3–5] было показано, что критические индексы динамического фазового перехода в двумерной кинетической модели Изинга на квадратной решётке и трёхмерной модели Изинга на простой кубической решётке соответствуют классам универсальности данных моделей в равновесном случае.

В настоящее время является актуальным исследование систем с гексагональной двумерной решёткой. В качестве примеров таких систем при учёте ферромагнитного взаимодействия можно привести нанографеновые и графитоподобные материалы, в частности молекулы $C_{59}N_5H_{22}$, $C_{52}N_4H_{20}$ [11, 12], монослойные CrI_3 [13] и $RuCl_3$ [14], а также ряд других. Поэтому представляет

интерес возможность проверить класс универсальности динамического фазового перехода в осциллирующем поле на гексагональной решётке.

2. Модель

Исследовалась кинетическая модель Изинга на двумерной гексагональной решётке размера L с учётом влияния периодического внешнего магнитного поля. Гамильтониан модели имеет вид:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h(t) \sum_i s_i, \quad (1)$$

где $J > 0$ — константа обменного ферромагнитного взаимодействия; $h(t)$ — осциллирующее магнитное поле, имеющее форму прямоугольного сигнала с амплитудой h_0 и полупериодом $t_{1/2}$ [3, 5]; суммирование $\langle i, j \rangle$ производилось по ближайшим соседям. Граничные условия были заданы периодическими.

Динамический фазовый переход в системе характеризуется параметром порядка, который определяется как средняя за период намагниченность

$$Q = \frac{1}{2t_{1/2}} \oint m(t) dt, \quad (2)$$

где удельная намагниченность $m(t)$ вычислялась по формуле

$$m(t) = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^{L^2} s_i. \quad (3)$$

Восприимчивость и теплоёмкость определялись по формулам:

$$\begin{aligned} \chi^Q &= L^2 (\langle Q^2 \rangle - \langle |Q| \rangle^2); \\ \chi^E &= L^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Усреднение $\langle \dots \rangle$ осуществлялось по времени (периодам) и статистическим конфигурациям.

Определение критического значения полупериода осуществлялось на основе анализа температурных зависимостей кумулянта Биндера 4-го порядка:

$$U_4 = 1 - \frac{\langle Q^4 \rangle}{3\langle Q^2 \rangle^2}, \quad (5)$$

которые образуют область пересечения для различных значений L .

Параметр порядка Q , восприимчивость χ^Q и теплоёмкость χ^E в критической точке демонстрируют скейлинговые зависимости вида

$$\begin{aligned} \langle |Q| \rangle &\sim L^{-\beta/\nu}, \\ \chi^Q &\sim L^{\gamma/\nu}, \\ \chi^E &\sim L^{\alpha/\nu}, \end{aligned} \quad (6)$$

из которых были определены критические показатели.

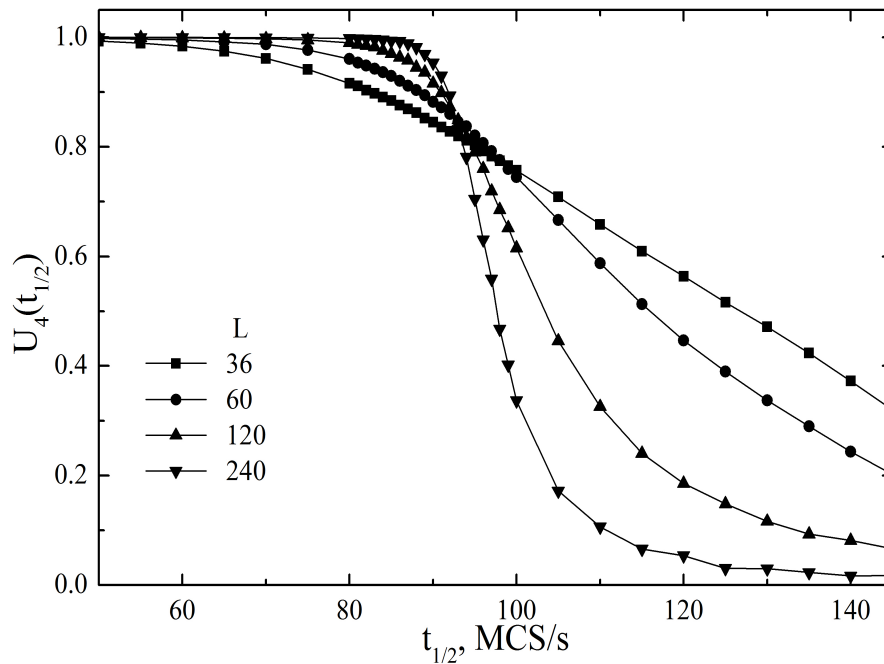


Рис. 1. Кумулянты Биндера, критический полупериод

3. Основные результаты

В настоящей работе для моделирования динамического поведения двумерной кинетической модели с гексагональной двумерной решёткой применялся алгоритм «тепловой бани» [15].

Размеры системы $L = 36 - 240$. Для каждого размера время на релаксацию составляло 20000 периодов, на усреднение по времени 100000 периодов; дополнительное усреднение проводилось по 500 статистическим конфигурациям.

Амплитуда магнитного поля была выбрана $h_0 = 0.2$ и температура $T = 0.8T_c$, где $T_c = 1.519$ — критическая температура модели Изинга на двумерной гексагональной решётке, что соответствует пребыванию системы в мультидроплетном режиме [5].

Критический полупериод определялся по пересечению кумулянтов Биндера (рис. 1). Найденное значение составляет $t_{1/2}^c = 93 \pm 1$ MCS/s.

На (рис. 2 – 4) представлено поведение намагниченности в упорядоченной фазе, в критической области и в полностью неупорядоченной области соответственно. В полностью неупорядоченной фазе (рис. 4) намагниченность следует за полем, переключаясь каждый полупериод. В случае упорядоченной фазы (рис. 2) внешнее поле является быстро осциллирующим, и намагниченность не успевает существенно измениться в течение периода, слабо изменяясь по величине относительно среднего значения. В критической области, в районе $t_{1/2} = 92$ MCS/s (рис. 3), наблюдаются сильные флуктуации намагниченности, что является признаком динамического фазового перехода. На (рис. 5) представлено поведение параметра порядка $\langle |Q| \rangle$ в зависимости от фазы системы.

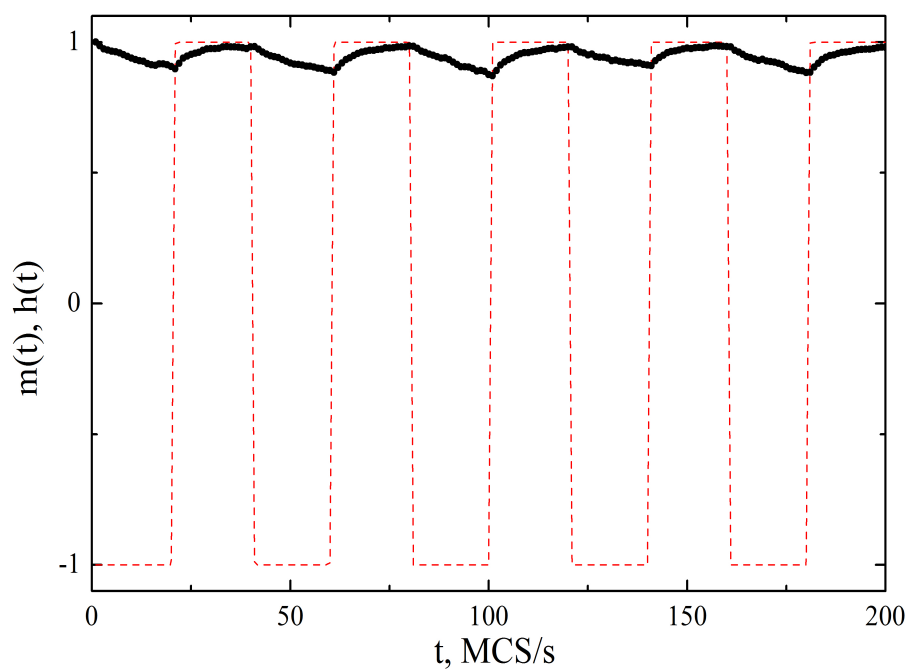


Рис. 2. Динамическая зависимость намагниченности системы при $t_{1/2} = 20$ MCS/s — упорядоченная фаза

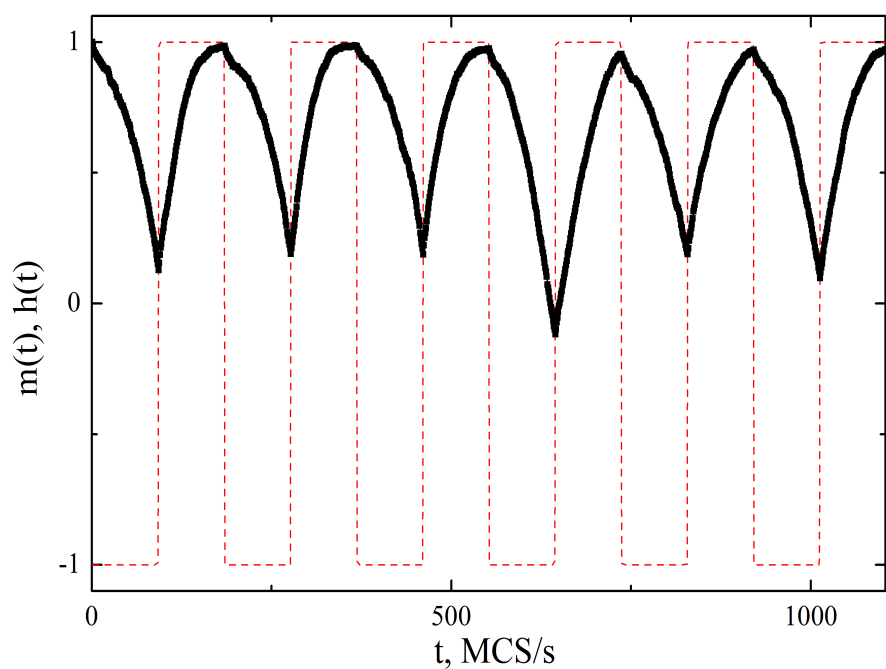


Рис. 3. Динамическая зависимость намагниченности системы $t_{1/2} = 92$ MCS/s — критическая область

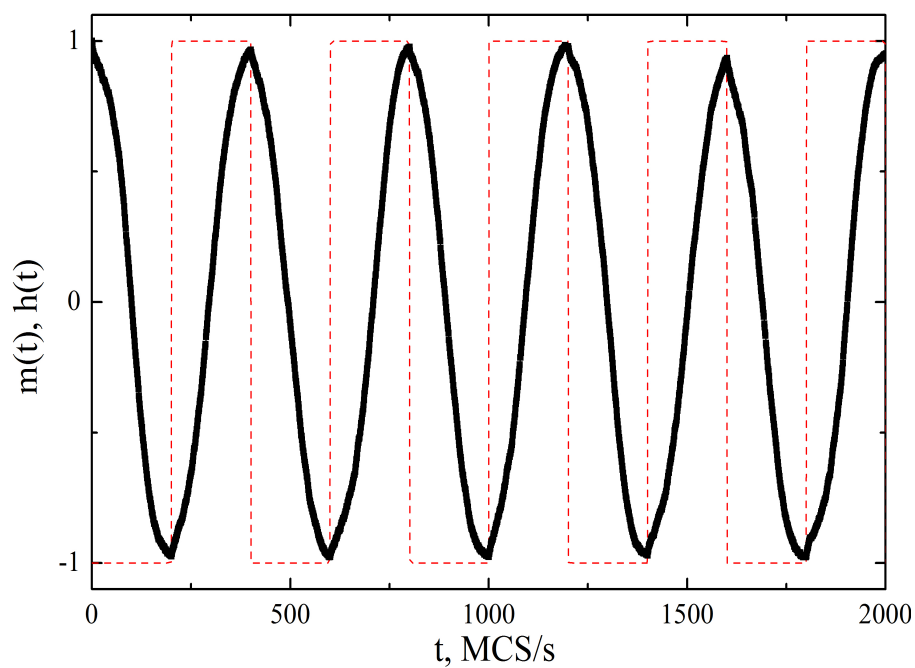


Рис. 4. Динамическая зависимость намагниченности системы $t_{1/2} = 200$ MCS/s — неупорядоченная фаза

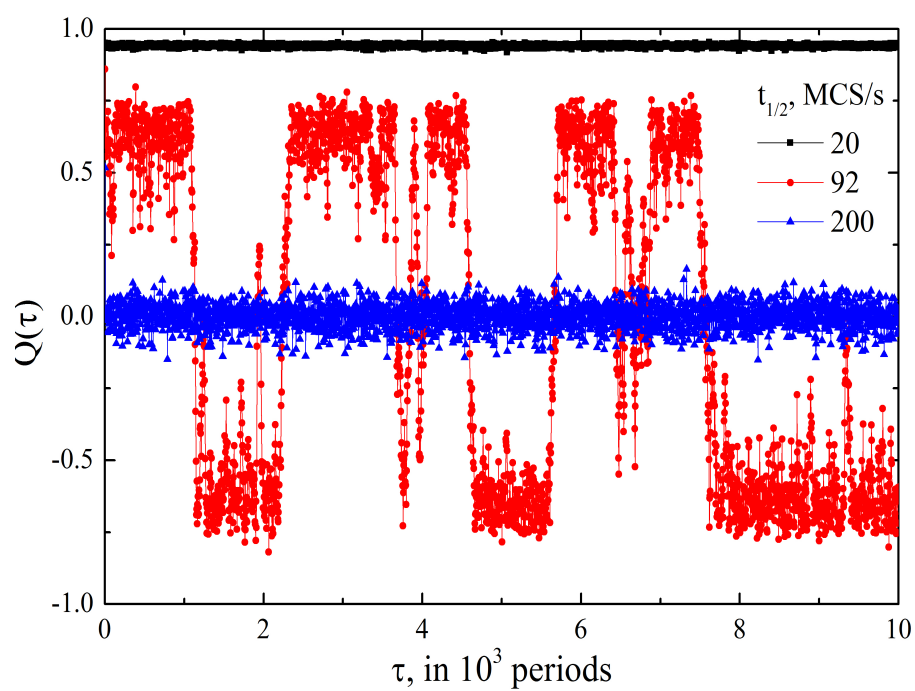


Рис. 5. Динамическая зависимость параметра порядка при $t_{1/2} = 20, 92, 200$ MCS/s

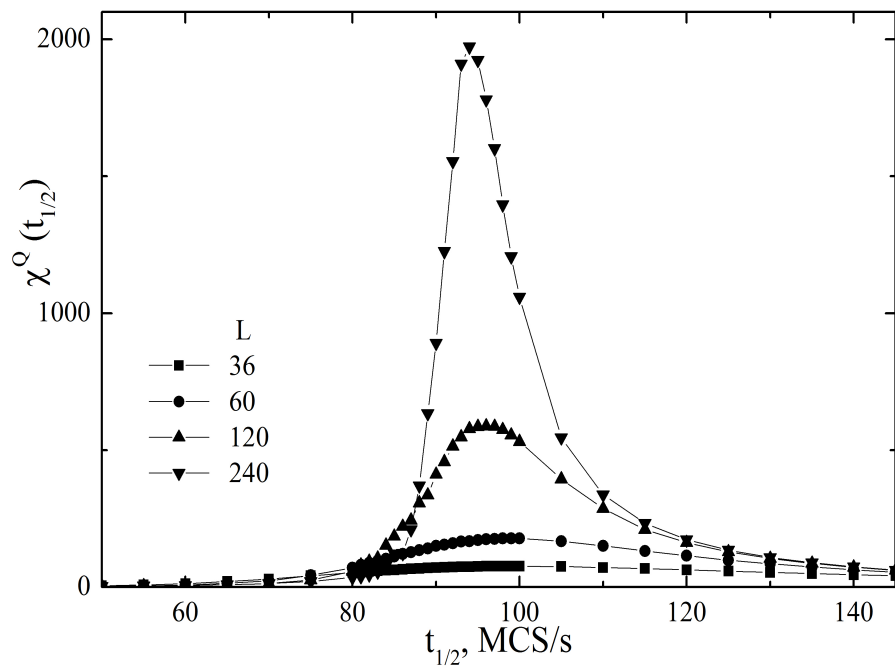


Рис. 6. Восприимчивость, $L=36, 60, 120, 240$

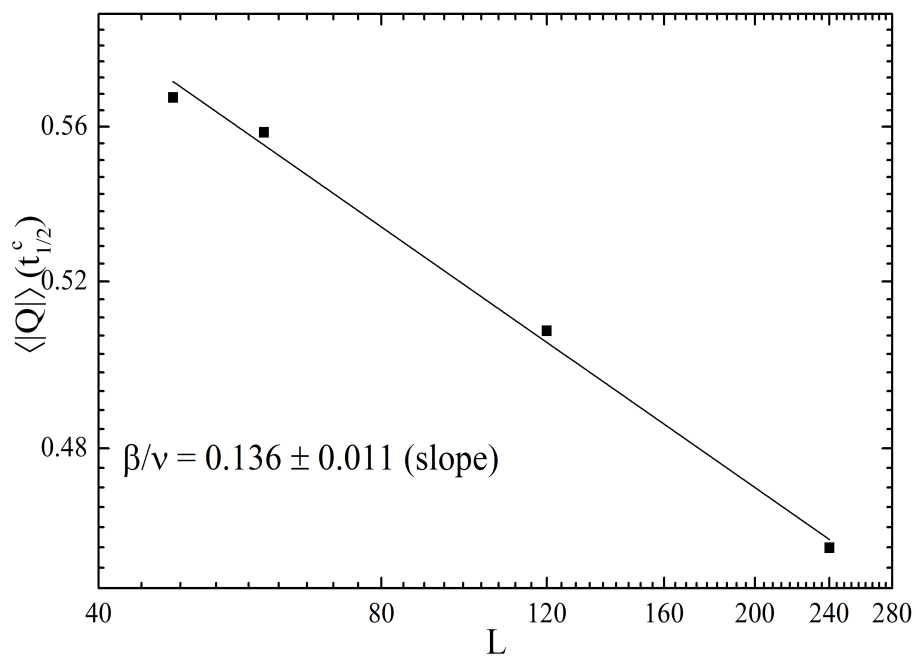
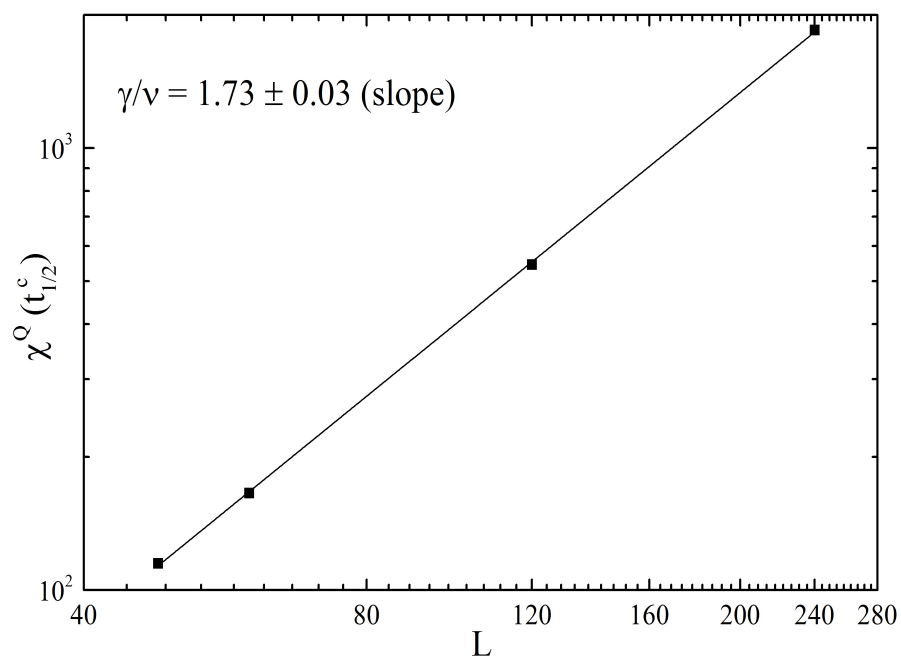
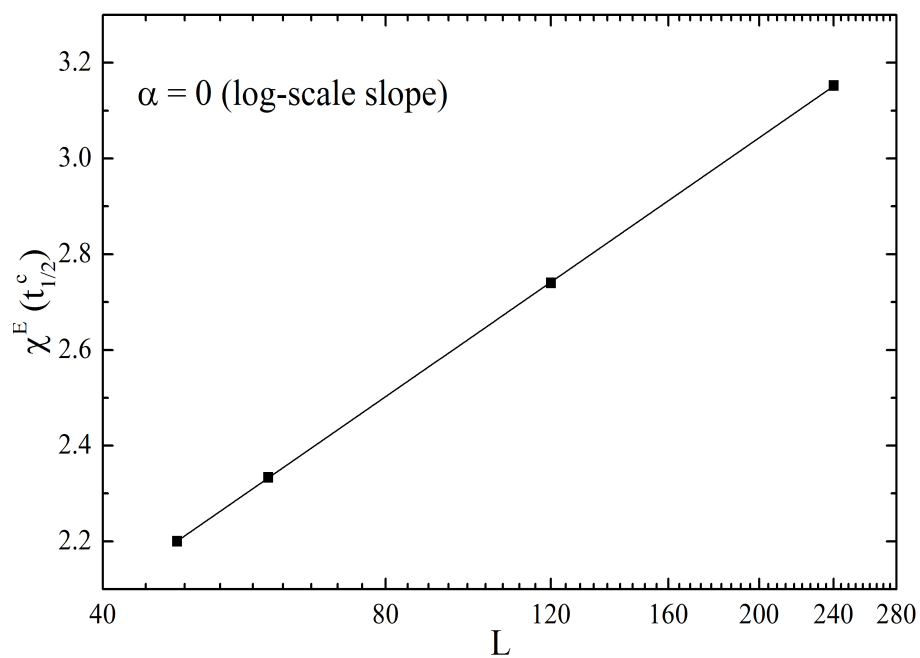


Рис. 7. Критический показатель β/ν

Рис. 8. Критический показатель γ/ν Рис. 9. Критический показатель α

В полностью неупорядоченной фазе ($t_{1/2} = 200$ MCS/s) наблюдаются слабые осцилляции в окрестности нуля. В районе динамического фазового перехода наблюдаются сильные флуктуации, а в упорядоченной фазе ($t_{1/2} = 20$ MCS/s) параметр порядка осциллирует в окрестности средней величины, близкой к единице.

На (рис. 6) восприимчивость демонстрирует признаки фазового перехода — зависимости восприимчивости от полупериода образуют пики в окрестности критического полупериода, при этом для различных линейных размеров системы L положения пиков смещается в сторону асимптотического значения полупериода $t_{1/2}^c$.

В работе были определены значения критических показателей. Из анализа зависимости параметра порядка от линейного размера L (рис. 7) в критической точке было определено отношение критических показателей $\beta/\nu = 0.136 \pm 0.011$. Из анализа зависимости восприимчивости от линейного размера L (рис. 8) было определено отношение критических показателей $\gamma/\nu = 1.73 \pm 0.03$. Зависимость теплоёмкости от линейного размера L демонстрирует логарифмический рост, что соответствует значению критического показателя $\alpha = 0$.

4. Заключение

В работе осуществлено исследование динамического фазового перехода в двумерной модели Изинга на гексагональной решётке во внешнем осциллирующем магнитном поле.

Было определено значение критического полупериода, а также значения критических показателей β/ν , γ/ν и α .

Из полученных результатов можно сделать вывод, что в системе наблюдается динамический фазовый переход. При этом класс универсальности модели Изинга в осциллирующем магнитном поле на гексагональной решётке соответствует классу универсальности данной модели в равновесном случае. Это соотносится с результатами моделирования двумерной модели Изинга в осциллирующем поле на квадратной [3] и треугольной [15] решётках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Acharyya M. Nonequilibrium phase transition in the kinetic Ising model: Critical slowing down and the specific-heat singularity // *Phys. Rev. E* 1997. V. 56. P. 2407.
2. Sides S.W., Rikvold P.A., Novotny M.A. Kinetic Ising Model in an Oscillating Field: Finite-Size Scaling at the Dynamic Phase Transition // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 834.
3. Buendia G.M., Rikvold P.A. Dynamic phase transition in the two-dimensional kinetic Ising model in an oscillating field: Universality with respect to the stochastic dynamics // *Phys. Rev. E*. 2008. V. 78. P. 051108.
4. Jang H., Grimsom M.J., Hall C.K. Exchange anisotropy and the dynamic phase transition in thin ferromagnetic Heisenberg films // *Phys. Rev. B*. 2003. V. 67. P. 094411.

5. Park H., Pleimling M. Dynamic phase transition in the three-dimensional kinetic Ising model in an oscillating field // Phys. Rev. E. 2013. V. 87. P. 032145.
6. Vatansever E., Fytas N.G. Dynamic phase transition of the Blume-Capel model in an oscillating magnetic field // Phys. Rev. E. 2018. V. 97. P. 012122.
7. Jiang Q., Yang H.-N., Wang G.C. Scaling and dynamics of low-frequency hysteresis loops in ultrathin Co films on a Cu(001) surface // Phys. Rev. B. 1995. V. 52, P. 14911.
8. Robb D. T., Xu Y. H., Hellwig O., McCord J., Berger A., Novotny M.A., Rikvold P.A. Evidence for a dynamic phase transition in [Co/Pt]₃ magnetic multilayers // Phys. Rev. B 2008. V. 78. P. 134422.
9. Berger A., Idigoras O., Vavassori P. Transient Behavior of the Dynamically Ordered Phase in Uniaxial Cobalt Films // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111. P. 190602.
10. Riego P., Vavassori P., Berger A. Metamagnetic Anomalies near Dynamic Phase Transitions // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. P. 117202.
11. Enoki T., Takai K. The edge state of nanographene and the magnetism of the edge-state spins // SSC. 2009. V. 149. P. 1144.
12. Ota N., Gorjizadeh N., Kawazoe Y. Multiple Spin State Analysis of Magnetic Nano Graphene // J. Mag. Soc. Japan, 2010. V. 34. P. 573.
13. Huang B., Clark G., Navarro-Moratalla E., Klein D.R., Cheng R., Seyler K.L., Zhong D., Schmidgall E., McGuire M.A., Cobden D.H., Yao W., Xiao D., Jarillo-Herrero P., Xu X. Layer-dependent ferromagnetism in a van der Waals crystal down to the monolayer limit // Nature. 2017. V. 546. P. 270.
14. Tian Y., Gao W., Henriksen E. A., Chelikowsky J. R., Yang L. Optically Driven Magnetic Phase Transition of Monolayer $RuCl_3$ // Nano Lett. 2019. V. 19. P. 7673.
15. Janke W. Monte Carlo Methods in Classical Statistical Physics / Computational Many-Particle Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 79–140.
16. Vatansever E. Dynamically order–disorder transition in the kinetic Ising model on a triangular lattice driven by a time dependent magnetic field // Physica A. 2018. V. 511. P. 232.

DYNAMIC PHASE TRANSITION IN HEXAGONAL LATTICE IN AN OSCILLATING MAGNETIC FIELD

V.N. Borodikhin

Associate Professor, Ph.D.(Phys.-Math.), e-mail: borodikhin@inbox.ru

I.S. Popov

Associate Professor, Ph.D.(Phys.-Math.), e-mail: diphosgen@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In this paper the behavior of two-dimensional Ising model with the hexagonal lattice in an oscillating magnetic field was studied. The value of the critical half-period was determined, as well as the value of the critical exponents β/ν , γ/ν and α . It has been determined that the universality class of this model corresponds to the universality class of two-dimensional Ising model in the equilibrium case.

Keywords: dynamic phase transitions, Ising model on the hexagonal lattice, oscillating magnetic field.

REFERENCES

1. Acharyya M. Nonequilibrium phase transition in the kinetic Ising model: Critical slowing down and the specific-heat singularity. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 56, pp. 2407.
2. Sides S.W., Rikvold P.A., and Novotny M.A. Kinetic Ising Model in an Oscillating Field: Finite-Size Scaling at the Dynamic Phase Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 1998, vol. 81, pp. 834.
3. Buendia G.M. and Rikvold P.A. Dynamic phase transition in the two-dimensional kinetic Ising model in an oscillating field: Universality with respect to the stochastic dynamics. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, pp. 051108.
4. Jang H., Grimsom M.J., and Hall C.K. Exchange anisotropy and the dynamic phase transition in thin ferromagnetic Heisenberg films. *Phys. Rev. B*, 2003, vol. 67, pp. 094411.
5. Park H. and Pleimling M. Dynamic phase transition in the three-dimensional kinetic Ising model in an oscillating field. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 87, pp. 032145.
6. Vatansever E. and Fytas N.G. Dynamic phase transition of the Blume-Capel model in an oscillating magnetic field. *Phys. Rev. E*, 2018, vol. 97, pp. 012122.
7. Jiang Q., Yang H.N., and Wang G.C. Scaling and dynamics of low-frequency hysteresis loops in ultrathin Co films on a Cu(001) surface. *Phys. Rev. B*, 1995, vol. 52, pp. 14911.
8. Robb D. T., Xu Y. H., Hellwig O., McCord J., Berger A., Novotny M.A., and Rikvold P.A. Evidence for a dynamic phase transition in [Co/Pt]3 magnetic multilayers. *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 78, pp. 134422.
9. Berger A., Idigoras O., and Vavassori P. Transient Behavior of the Dynamically Ordered Phase in Uniaxial Cobalt Films. *Phys. Rev. Lett.*, 2013, vol. 111, pp. 190602.
10. Riego P., Vavassori P., and Berger A. Metamagnetic Anomalies near Dynamic Phase Transitions. *Phys. Rev. Lett.*, 2017, vol. 118, pp. 117202.
11. Enoki T. and Takai K. The edge state of nanographene and the magnetism of the edge-state spins. *SSC.*, 2009, vol. 149, pp. 1144.
12. Ota N., Gorjizadeh N., and Kawazoe Y. Multiple Spin State Analysis of Magnetic Nano Graphene. *J. Mag. Soc., Japan*, 2010, vol. 34, pp. 573.
13. Huang B., Clark G., Navarro-Moratalla E., Klein D.R., Cheng R., Seyler K.L., Zhong D., Schmidgall E., McGuire M.A., Cobden D.H., Yao W., Xiao D., Jarillo-Herrero P., and Xu X. Layer-dependent ferromagnetism in a van der Waals crystal down to the monolayer limit. *Nature*, 2017, vol. 546, pp. 270.
14. Tian Y., Gao W., Henriksen E. A., Chelikowsky J. R., and Yang L. Optically Driven Magnetic Phase Transition of Monolayer $RuCl_3$. *Nano Lett.*, 2019, vol. 19, pp. 7673.
15. Janke W. Monte Carlo Methods in Classical Statistical Physics. Computational Many-Particle Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2008, pp. 79–140.
16. Vatansever E. Dynamically order–disorder transition in the kinetic Ising model on a triangular lattice driven by a time dependent magnetic field. *Physica A*, 2018, vol. 511, pp. 232.

Дата поступления в редакцию: 25.03.2021

A POSSIBLE (QUALITATIVE) EXPLANATION OF THE HIERARCHY PROBLEM IN THEORETICAL PHYSICS

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. One of the important open problem in theoretical physics is the hierarchy problem: how to explain that some physical constant are many orders of magnitude larger than others. In this paper, we provide a possible qualitative explanation for this phenomenon.

Keywords: hierarchy problem in theoretical physics.

1. Formulation of the Problem

The problem. One of the important open problems in physics – known as the *hierarchy problem* – is to explain why there is a such a huge difference between physical constants.

For example, gravitational forces are 10^{40} times weaker than electromagnetic forces – and this difference is mirrored in the difference between the corresponding constants; see, e.g., [1,3].

What we do in this paper. In this paper, we provide a possible qualitative explanation for this phenomenon.

2. Our Explanation

A mathematical result on which our explanation is based: formulation. Our explanation uses the following result from [4]: in a nutshell, that when we reconstruct a state based on the measurement results, we will most probably get not the original state, but one of the extreme points of the set of possible states.

Why this result is valid: an explanation. A state can be characterized by the values of several physical quantities $s_1, \dots, s_n$. In this sense, each state can be represented as a tuple $s = (s_1, \dots, s_n)$.

To determine the state, we measure the values of these quantities. Measurements are never absolutely accurate, thus the results $r_1, \dots, r_n$ of measuring these quantities are, in general, different from the actual values s_i of these quantities.

Usually, the measurement errors are independent and normally distributed, with 0 mean and some standard deviation σ . In this case, for large n , we have

$$\sum_{i=1}^n \frac{(s_i - r_i)^2}{\sigma^2} \approx n; \quad (1)$$

see, e.g., [14].

The approximate equality (1) can be described in an equivalent form

$$d^2(s, r) \approx n \cdot \sigma^2,$$

where

$$d(s, r) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i - s_i)^2}$$

is the usual (Euclidean) distance between the n -dimensional points

$$s = (s_1, \dots, s_n) \text{ and } r = (r_1, \dots, r_n).$$

Thus, here $d(s, r) \approx \varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n} \cdot \sigma$. In other words, the observed state r is located at distance ε from the actual state s .

The observed state r is, in general, outside the set S of possible states. So, to reconstruct the state s , we need to find an appropriate state a within the set S . In general, there are several such states. A natural idea is to use the Maximum Likelihood method – i.e., to select the most probable state. For the normal distribution, the corresponding probability density is described by the following expression:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp \left(-\frac{(r_i - a_i)^2}{2\sigma^2} \right) \right).$$

This expression can be equivalently reformulated as

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^n} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (r_i - a_i)^2 \right).$$

Thus, maximizing this expression is equivalent to minimizing the sum

$$\sum_{i=1}^n (r_i - a_i)^2,$$

i.e., equivalently, the square root of this expression:

$$d(r, a) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i - a_i)^2}.$$

Thus, when we reconstruct the signal based on the measurement results r , we select the state $a \in S$ which is the closest to the tuple r that describes the measurement results.

Let us show how this geometric fact leads to the above conclusion. For simplicity, let us consider the case when $n = 2$ and the set S of possible states is a convex polygon. The point $r = (r_1, r_2)$ formed by measurement results is then located at distance ε from the set S .

Let us look at all the points located at the distance ε from the polygon:

- for some of these points, the closest point on the polygon is located on one of its edges;
- for others, the closest point is one of the polygon's vertices.

One can check that for each edge, points for which the closest is on this edge are located on a segment parallel to this edge and bounded by the two lines orthogonal to this edge. The length of this segment is equal to the length of the edge. Thus, the overall length of these segments is equal to the sum of the lengths of all the edges, i.e., to the perimeter of the polygon. So, this overall length does not grow when ε increases.

On the other hand, the set of all the points which are ε -distant from the set S grows with ε . Thus, as ε increases, the proportion of the points r for which the closest point $a \in S$ is on one of the edges decreases – and hence, for a bigger and bigger proportion of points r , the closest point a is one of the vertices – i.e., one of the extreme points of the original set S of possible states.

Comment. Of course, these are somewhat informal arguments. For an exact formulation and proof, see [4].

How this mathematical fact helps in our explanation. In our case, we are considering the values of different physical constants. We can consider two possible situation:

- In many cases, we know the sign of the corresponding constant: for example, we know that gravity only leads to attraction between different objects.
- In other cases, we may now know the sign: e.g., electric forces can lead both to attraction and to repulsion.

In the first case, the set of possible values of the corresponding constant is the interval $(0, \infty)$. In the second case, the set of possible values of the corresponding constant is the whole real line $(-\infty, +\infty)$.

According to the above mathematical result, when we reconstruct the value of the corresponding constant from observations, most probably, we will get one of the extreme points of the corresponding set of values. For an interval, extreme points are its endpoints. Thus:

- in the first case, we will get either 0 or infinity;

- in the second case, we will get either $-\infty$ or $+\infty$.

Of course, we cannot have 0 or infinity – this does not make physical sense, so this means that we will have either a very small value or a very large value – and this is exactly what we observe, this is exactly what the hierarchy problem is about.

Thus, we have found a possible qualitative explanation for this empirical phenomenon.

Comment. Not only we found a possible explanation for the hierarchy problem in general, our arguments also explain why the constant corresponding to the electromagnetic interaction has to be large – since this interaction allows forces of both signs, attraction and repulsion.

In contrast, gravity has only interactions of one type, so it is not surprising that the corresponding constant is close to 0 in comparison to the electromagnetic one.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes).

REFERENCES

1. Feynman R., Leighton R., and Sands M. The Feynman Lectures on Physics. Addison Wesley, Boston, Massachusetts, 2005.
2. Sheskin D.J. Handbook of Parametric and Non-Parametric Statistical Procedures. Chapman & Hall/CRC, London, UK, 2011.
3. Thorne K.S. and Blandford R.D. Modern Classical Physics: Optics, Fluids, Plasmas, Elasticity, Relativity, and Statistical Physics. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2017.
4. TsirelTMson B.S. A geometrical approach to maximum likelihood estimation for infinite-dimensional Gaussian location. I. Theory of Probability and Its Applications, 1982, vol. 27, pp. 411–418.

ВОЗМОЖНОЕ (КАЧЕСТВЕННОЕ) ОБЪЯСНЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ИЕРАРХИИ В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Одной из важных открытых проблем теоретической физики является проблема иерархии: как объяснить, что одни физические константы на много порядков больше других. В этой статье мы даем возможное качественное объяснение этого явления.

Ключевые слова: проблема иерархии в теоретической физике.

Дата поступления в редакцию: 13.12.2020

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТКИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЕЗУДАРНОГО СЖАТИЯ ГАЗА

С.П. Баутин

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: spbautin@mail.ru

Ю.В. Николаев

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: ynikolaev@list.ru

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского
ядерного университета «МИФИ», Снежинск, Россия

Аннотация. В работе предложен алгоритм расчёта значений параметров газа для произвольной сетки в области одномерных течений безударного сжатия газа. Такие течения описываются решением системы уравнений газовой динамики. Алгоритм основан на комбинации одного из методов машинного обучения — методе ближайших соседей для случая регрессии и методе характеристик. В качестве оценки близости точек-соседей используется расстояние. Работа алгоритма проверена на примере расчёта сетки в области задачи сжатия из покоя в покой, когда покоящийся газ с плотностью 1 сжимается в покоящийся газ с плотностью 10^4 . Сжатие выполняется без ударных волн, эффективным с точки зрения энерговыделения способом: энергия сжатия используется только на сжатие газа, и не тратится на его разгон. Алгоритм может быть использован при численном расчёте других задач газовой динамики.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, одномерные течения безударного сжатия, метод характеристик, метод ближайших соседей.

Введение

Решение задач газовой динамики находит своё применение во многих областях, например, моделирование безударного сжатия мишеней для реализации управляемого термоядерного синтеза и моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Изучение управляемого термоядерного синтеза, который является практически неограниченным источником энергии, продолжается уже несколько десятилетий. Последние физические эксперименты в этой области, например в Ливерморской лаборатории (США), проводятся [1] с целью получения энергии от термоядерного горения дейтериево-тритиевой мишени в результате сжатия под действием энергии, передаваемой лазерной установкой (ЛТС — лазерный термоядерный синтез). Такие же работы [2] ведутся в Шеньженьской лаборатории (Китай). В России установки ЛТС созданы в РФЯЦ-ВНИИЭФ [3].

Исследования по моделированию процесса безударного сжатия газа приведены в ряде работ, например [4–11]. Предложены различные типы мишеней, один из примеров приведён в работе [8]. Мишень является дейтериево-третиевым цилиндром, находящимся внутри бериллиевого цилиндрического слоя. В патенте [11] предложена мишень, в которой роль сжимающего поршня выполняют грани тетраэдра или треугольной призмы.

Другой областью решения задач газовой динамики является моделирование процессов разрушительных атмосферных вихрей. В качестве примеров можно привести многочисленные смерчи и торнадо, тропические циклоны. В работах [12, 13] предложена модель возникновения и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков газа.

1. Описание задачи

Эффективным способом описания газовых течений является численное представление решений системы уравнений газовой динамики, для этого успешно используется метод характеристик [14, 15]. Метод характеристик обладает следующим свойством: получаемая характеристическая сетка (набор точек, в которых рассчитаны значения газодинамических параметров), вообще говоря, не является равномерной. При этом возникают такие ситуации, когда исследователю для проводимого анализа рассчитанных течений удобней использовать равномерную сетку точек или вообще сетку с произвольным размещением точек. В любом случае в точках необходимо знать значения газодинамических параметров газа.

Предложение о том, как для метода характеристик построить равномерную сетку, описано в работе [13]. В этой работе на каждом шаге построения сетки для каждой следующей ячейки предлагается с помощью интерполяции по известным двум точкам рассчитывать новые точки такие, что выпущенные из них характеристические линии пересекаются в требуемых точках равномерной сетки (рис. 1а). На рисунке 1а показано нахождение точек на $n+1$ шаге: линия $t = t_n$ — построенный слой равномерной сетки, в котором известны значения газодинамических параметров; линия $t = t_{n+1}$ — слой, в точках которого значения газодинамических параметров рассчитываются. Штриховой линией обозначены C^+ и C^- характеристики, выпущенные из точек с координатами (t_n, r_{i-1}) и (t_n, r_{i+1}) , которые пересекутся в точке, вообще говоря, не совпадающей с точкой (t_{n+1}, r_i) и поэтому равномерность построения сетки будет нарушаться. Для построения равномерной сетки линейной интерполяцией координат точек (t_n, r_{i-1}) , (t_n, r_{i+1}) и значений газодинамических параметров в них рассчитываются такие значения r_i^+ и r_i^- на линии $t = t_n$ и значения газодинамических параметров в них, что выпущенные из этих точек C^+ и C^- характеристики (сплошные наклонные линии) пересекутся в точке (t_{n+1}, r_i) . После этого с помощью формул метода характеристик находятся значения газодинамических параметров в этой точке.

В данной работе описан другой подход к построению сетки. Предлагается не интерполировать точки при построении каждой ячейки рассчитываемой сетки,

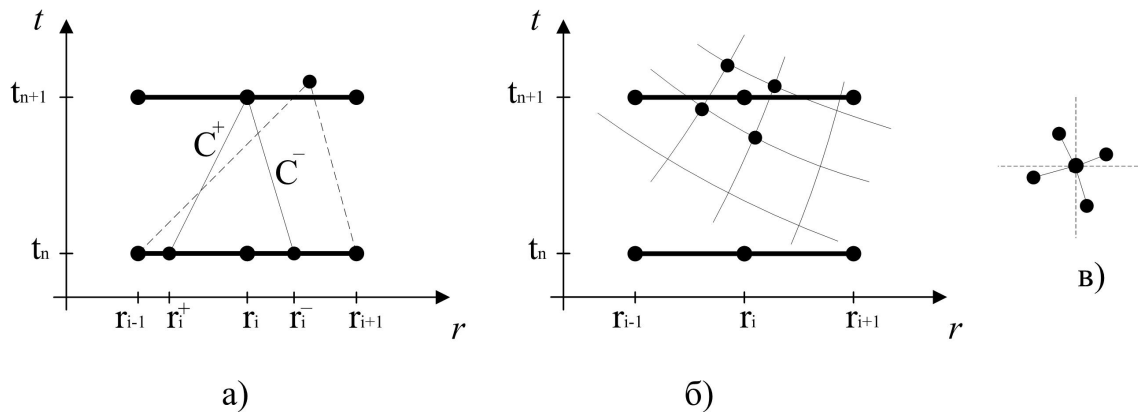


Рис. 1. Построение равномерной сетки

а рассчитать характеристическую сетку в целом по всей области. И затем, интерполируя по известным значениям точек рассчитанной характеристической сетки, получить значения в требуемых точках равномерной сетки (рис. 1б). За основу использованного подхода к интерполяции взяты формулы метода ближайших соседей из машинного обучения [16]. В качестве метрики близости точек-соседей берётся расстояние между точками. Приведён алгоритм расчёта, реализация которого проверена на полученном ранее [4] численном решении системы уравнений газовой динамики при одномерном безударном сжатии газа из покоя в покой.

Задача о сжатии из покоя в покой ставится следующим образом. Имеется плоский ($\nu = 0$), цилиндрический ($\nu = 1$) или сферический ($\nu = 2$) слой однородного политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma / \gamma$, в котором p — давление, ρ — плотность, γ — показатель адиабаты (политропы). Считается, что все течения, возникающие в газе, являются одномерными и изэнтропическими. Термином «безударные» называются такие течения газа, в которых искомые течения могут отделяться как друг от друга, так и от известных течений только слабыми разрывами, но не ударными волнами.

Рассматривается следующая конфигурация газовых течений: в начальный момент времени t_0 газ однороден с плотностью ρ_0 , а скорость газа равна 0. Это состояние 1 газа. Состояние газа в момент времени $t_* > t_0$ такое: газ однороден, его плотность равна некоторому $\rho_* > \rho_0$; при этом газ покоится. Это состояние 2. Требуется найти течения газа, возникающие при безударном переходе (сжатии) одномерного газового слоя из состояния 1 в состояние 2 под действием двух непроницаемых поршней, один из которых неподвижен. При этом газ находится левее неподвижного поршня, а поршень, производящий сжатие, движется вправо, производя сжатие цилиндрического или сферического слоя изнутри, когда радиус поршня растёт.

Одномерные изэнтропические течения газа определяются двумя функциями $u = u(t, r)$ и $c = c(t, r)$, являющимися решениями системы уравнений газовой динамики, которая после выполнения преобразований принимает следующий

вид:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{(\gamma-1)}{2}c(u_r + \frac{\nu u}{r}) = 0, \\ u_t + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r + uu_r = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $u = u(t, r)$ — скорость газа, а $c = c(t, r)$ связана с плотностью газа ρ соотношением $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ и является скоростью звука в газе; t — переменная времени, r — пространственная переменная, выражающая расстояние до начала ($\nu = 0$), оси ($\nu = 1$) или центра ($\nu = 2$) симметрии.

В работе [7] доказано существование решения задачи о сжатии из покоя в покой в случае, когда газ сжимается двумя поршнями, однако не получены конкретные значения для массы газа и значения плотности газа, до которой возможно сжатие безударным способом. Поставленная задача сведена к трём начально-краевым задачам для системы уравнений газовой динамики, и доказано существование локально-аналитических решений. Установлено, что в решении в финальный момент сжатия возникнет особенность на сжимающем поршне. Решение описывается обобщением центрированной волны Римана для случая цилиндрических и сферических течений в некоторой окрестности точки с особенностью. А в самой особой точке (t_*, r_*) описывается формулами центрированной волны Римана для плоских течений:

$$\begin{cases} c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2}u, \\ u = \frac{2}{\gamma+1} \frac{(r-r_*)}{(t-t_*)} + \frac{2}{\gamma+1}c_0, \quad c_0 = \rho_0^{(\gamma-1)/2}. \end{cases} \quad (2)$$

В расчётах измерения газодинамических параметров выполняются для соответствующим образом введённых безразмерных величин. И, не ограничивая общности, принимаются плотность газа в первоначальном покое ρ_0 равной единице и координата $r = r_p(t)$ сжимающего поршня в начальный момент также равной единице. Введение этих величин позволяет масштабировать остальные физические величины u, ρ, t . Расстояние r от центра симметрии до второго поршня (неподвижной стенки r_w) является расчётной величиной и определяется при задании массы m сжимаемого газа.

2. Расчёт методом характеристик

В работе [4] выше поставленная задача решена численно с помощью модификации метода характеристик [14, 15]. Рассчитывается характеристическая сетка, узлами которой являются точки пересечения характеристик C^+ и C^- семейств, а также рассчитываются значения искомых функций в этих узлах. Характеристики определяются при аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C^- : \frac{dr}{dt} = u(t, r) - c(t, r), \quad C^+ : \frac{dr}{dt} = u(t, r) + c(t, r)$$

с соответствующими начальными условиями.

Вводятся инварианты Римана R, L вычисляемые по формулам:

$$R = u + \frac{2}{\gamma - 1}c, \quad L = u - \frac{2}{\gamma - 1}c.$$

На рисунке 2 показаны исследованные области построения течений в конфигурации сжатия из покоя в покой. Характеристическая сетка строится в обратном направлении изменения времени из точки $A(t_f, r_f)$. Для этого на C^- характеристике AB , отделяющей покоящийся сжатый газ в области 0 от течений сжатия, выбираются n_0 точек (в них известны параметры газа), из которых выпускаются C^+ характеристики. Из точки A (в этой точке особенность) выпускаются C^- характеристики в количестве n_1 штук и, используя метод характеристик, строится сетка в области 1. Затем полученные C^- характеристики продолжают до пересечения с линией $r = r_w$, так достраивается сетка в области 2 до тех пор, пока в точке пересечения очередной C^- характеристики не будет достигнута плотность $\rho = 1$. С этого момента (точка D) выпускается C^+ характеристика DE , и на ней выбирают n_2 точек, из которых выпускаются C^- характеристики до пересечения с продолжением C^+ характеристик из областей 1 и 2 в прямом направлении изменения времени. Так строится сетка в области 3. Течения области 3 гладко примыкают к области 4 (здесь газ находится в покоящемся несжатом состоянии). Одновременно с построением характеристической сетки из точки A в обратном направлении изменения времени строится траектория сжимающего поршня AE .

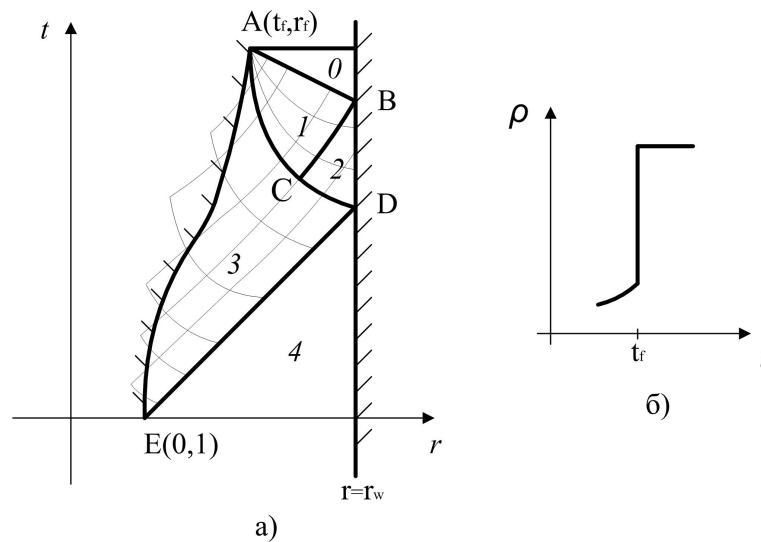


Рис. 2. Конфигурация течений сжатия из покоя в покой

В точке $A(t_f, r_f)$, согласно установленному в [7] свойству решения, имеет место скачок плотности (рис. 2б). В этой точке скорость газа и скорость звука в газе связаны следующим соотношением:

$$u_i = 2 \frac{c_* - c_i}{\gamma - 1},$$

здесь $\{c_i\}$ – разбиение отрезка от $c_* = \rho_*^{(\gamma-1)/2}$ до 0 на n_1 равных частей. Что и определяет число C^- характеристик, выпущенных из точки A .

Точность результатов вычислений зависит от входных параметров счёта (разбиение расчётной области на ячейки – параметры n_0, n_1, n_2). В расчётах методом характеристик входные данные подбираются для каждого варианта расчётов отдельно опытным путём так, чтобы относительная погрешность масс δm была менее 1%, где

$$\delta m = \frac{|m_* - m_0|}{m_*} \cdot 100\%,$$

m_0, m_* – массы газа до и после сжатия.

Так как сжатие производится непроницаемым поршнем, то массы газа до сжатия и после сжатия должны совпадать. Но из-за погрешностей численного расчёта наблюдается различие масс, поэтому чем меньше значение δm , тем точнее выполнены расчёты траектории сжимающего поршня и всего течения в целом.

3. Алгоритм счёта по формулам метода ближайших соседей

Для расчёта методом ближайших соседей требуется набор-сетка точек, в которых значения газодинамических параметров и инвариантов R, L известны. Такая сетка получена с помощью модификации метода характеристик [4] с учётом математически доказанного [7] свойства решения. Этот набор точек будем называть обучающей сеткой (или сеткой соседей). Для каждой точки рассчитываемой сетки в обучающей сетке находятся 4 соседа — ближайшие точки. Для этого в качестве критерия близости точек принимается расстояние между ними и рассчитываемой точкой (рис. 1в). По значениям инвариантов R, L в найденных ближайших точках взвешенным способом рассчитываются значения инвариантов в рассчитываемой точке. Определяется оценка близости: чем ближе точка-сосед, тем больше её вклад в значения инвариантов в рассчитываемой точке. Формула для взвешенного значения инварианта R_{new} в точке с рассчитываемым инвариантом имеет следующий вид (для инварианта L_{new} формула выглядит аналогично):

$$R_{new} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{R_i}{d_i}}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{d_i}},$$

здесь d_i — расстояние между точками (t_i, r_i) и (t_{new}, r_{new}) ; R_i — значение инварианта R в точке (t_i, r_i) ; $t_{new}, r_{new}, R_{new}$ — координаты точки и рассчитываемого значения инварианта R в ней соответственно.

Приведение выражения под знаком суммы к общему знаменателю

$$\frac{\sum_{i=1}^k (\prod_{j \neq i} R_j d_j)}{\prod_{i=1}^k d_i} : \frac{\sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} d_j}{\prod_{i=1}^k d_i} = \frac{\sum_{i=1}^k (R_i \prod_{j \neq i} d_j)}{\sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} d_j}$$

и последующие преобразования приводят к формуле

$$R_{new} = \sum_{i=1}^k \left(R_i \frac{\prod_{j \neq i} d_j}{\sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} d_j} \right). \quad (3)$$

Предлагаемый в данной работе алгоритм основан на следующем. Площадь ячейки характеристической сетки, содержащая точку (t_{new}, r_{new}) , является функцией параметров расчёта обучающей сетки n_0, n_1, n_2 . Чем больше значения этих параметров, тем меньше площадь ячейки и более точное значение R_{new}, L_{new} в точке (t_{new}, r_{new}) , так как ячейка построена на точках обучающей сетки точек-соседей. Тогда увеличение значений параметров расчёта обучающей сетки будет приводить к увеличению точности рассчитанных с помощью формул (3) значений инвариантов R_{new}, L_{new} .

Необходимо отметить, что идея взвешенного интерполирования не нова и давно используется при численном моделировании решений различных задач, в том числе и в вычислительной газодинамике, для нахождения значений искомых переменных в точках, не совпадающих с точками расчётной сетки. Это один из традиционных широко используемых подходов как при разработках схем расчёта газодинамических течений (см., например [15]), так и для переинтерполяции значений переменных с сетки на сетку при расчётах течений с применением накладывающихся сеток (см., например [17]). Таким же образом в силу своей традиционности и естественности подход попал в машинное обучение, в котором данный подход упоминается как метод ближайших соседей.

Работа алгоритма для произвольного заданного набора точек (t, r) реализуется следующим набором шагов:

Шаг 1. В точках выполняется расчёт R_{new}, L_{new} с помощью формул (3) метода ближайших соседей. Точки-соседи выбираются из точек обучающей характеристической сетки, построенной при параметрах n_0^i, n_1^i, n_2^i (верхний индекс указывает на номер итерации алгоритма). Расчёт ведётся по 4-м соседям, которые отбираются для каждой расчётной точки следующим образом: в каждом из квадрантов 1-4 (на рис. 1 в отделены друг от друга штриховой линией) среди точек обучающей сетки отбирается одна наиболее близкая точка. После нахождения 4-х ближайших точек производится расчёт по формулам (3).

Шаг 2. Перед выполнением первой итерации алгоритма инициализируются значения величин относительных отклонений δR и δL в каждой рассчитываемой точке произвольным большим значением (в приведённой далее проверке на тестовой сетке отклонения были инициализированы значением 100). На каждой следующей i -ой итерации (для $i > 0$) значения относительных отклонений пересчитываются:

$$\delta R = \frac{|R_{new}^i(t, r) - R_{new}^{i-1}(t, r)|}{R_{new}^i(t, r)} \cdot 100\%, \quad \delta L = \frac{|L_{new}^i(t, r) - L_{new}^{i-1}(t, r)|}{L_{new}^i(t, r)} \cdot 100\%.$$

Точки (t, r) , для которых $\delta R(t, r)$ и $\delta L(t, r)$ меньше некоторого наперёд заданного параметра алгоритма α , считаются рассчитанными с достаточной точностью и в дальнейших итерациях алгоритма не участвуют — необходимости

пересчёта значений R_{new}, L_{new} в них нет (такой подход уменьшает общее время вычислений). Уменьшение значения α повышает точность расчётов алгоритма.

Шаг 3. Увеличение параметров счёта обучающей сетки (множитель 2 подобран опытным путём):

$$n_j^i = 2 \cdot n_j^{i-1}, \quad j = 0, 1, 2.$$

После этого алгоритм возвращается к шагу 1 и начинается следующая итерация. Работа алгоритма завершается в тот момент, когда на шаге 2 в расчётной сетке не останется точек, нуждающихся в пересчёте значений инвариантов R_{new}, L_{new} .

4. Проверка работы алгоритма на тестовой сетке

Работа алгоритма проверена расчётом значений инвариантов R, L и их сравнением со значениями из сетки точек ранее полученного численного решения. Это численное решение получено в работе [4] с помощью модификации метода характеристик. Взят вариант численного решения задачи о сжатии одномерного политропного газа с показателем политропы $\gamma = 5/3$ и массой $m = 10$ из покоя с плотностью 1 в покой с плотностью 10^4 . Точки характеристической сетки были получены при следующих параметрах счёта $n_0 = 7900, n_1 = 10000; n_2 = 7900$. Из полученной сетки случайным образом взято 1800 точек. Последний набор точек и был взят в качестве тестовой сетки.

В качестве точек обучающей сетки берутся точки (t, r) и значения инвариантов в них, которые получаются из расчётов методом характеристик при следующих указанных ниже в таблицах 1 и 2 итерациях с номерами i и значениями параметров счёта n_0, n_1, n_2 . В колонке N_{new} — количество точек, в которых ещё нужен пересчёт значений инвариантов, в этих точках относительные отклонения инвариантов $\delta R > \alpha$ или $\delta L > \alpha$. В колонках N_{test}^1, N_{test}^2 и N_{test}^5 — количество точек, в которых относительное отличие инвариантов в точках тестовой сетки и тех же точках, но уже расчётной сетки отличаются не более чем на 1%, 2% и 5% соответственно.

Таблица 1. Счёт по алгоритму при $\alpha = 0,05\%$

Номер итерации i	n_0	n_1	n_2	N_{new}	N_{test}^1	N_{test}^2	N_{test}^5
1	250	500	250	1800	257	126	46
2	500	1000	500	1370	134	60	16
3	1000	2000	1000	939	59	23	4
4	2000	4000	2000	577	17	2	1
5	4000	8000	4000	359	6	1	0
6	8000	16000	8000	194	5	0	0

Таблица 2. Счёт по алгоритму при $\alpha = 0,01\%$

Номер итерации i	n_0	n_1	n_2	N_{new}	N_{test}^1	N_{test}^2	N_{test}^5
1	250	500	250	1800	257	126	46
2	500	1000	500	1670	134	60	16
3	1000	2000	1000	1486	59	23	4
4	2000	4000	2000	1277	14	1	1
5	4000	8000	4000	1022	3	0	0

В таблицах приведены результаты первых итераций работы алгоритма. Счёт остановлен при получении близких (относительные отклонения менее 2%) значений R, L в расчётах на тестовой сетке с помощью метода характеристик и с помощью формул ближайших соседей.

Выводы и замечания

1. Использование метода характеристик совместно с методом ближайших соседей позволяет реализовать алгоритм расчёта значений газодинамических параметров в точках произвольных сеток в области задач нахождения безударных течений, являющихся решениями системы уравнений газовой динамики.

2. Выполненные численные расчёты показали, что алгоритм хорошо повторяет расчёты значений инвариантов, найденных методом характеристик.

3. Скорость работы предложенного алгоритма можно увеличить использованием системы управления базами данных для хранения и быстрого доступа к данным обучающей сетки. Также для увеличения скорости счёта поиск ближайших соседей можно выполнять параллельно, распределяя рассчитываемые точки на несколько процессоров (в случае мультипроцессорных систем) или несколько узлов (в случае многоузлового кластера).

4. В качестве оценки близости точек можно использовать не только расстояние, но и принадлежность рассчитываемой точки четырёхвершинной ячейке обучающей характеристической сетки. Для поиска такой ячейки удобно использовать формулу псевдоскалярного произведения векторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Craxton R.S., Anderson K.S., Boehly T.R., Goncharov V.N., Harding D.R., Knauer J.P., McCrory R.L., McKenty P.W., Meyerhofer D.D., Myatt J.F., Schmitt A.J., Sethian J.D., Short R.W., Skupsky S., Theobald W., Kruer W.L., Tanaka K., Betti R., Collins T.J.B., Delettres J.A., Hu S.X., Marozas J.A., Maximov A.V., Michel D.T., Radha P.B., Regan S.P., Sangster T.C., Seka W., Solodov A.A., Soures J.M., Stoeckl C., Zuegel J.D. Direct-drive inertial confinement fusion: A review // Physics of Plasmas. 2015. No. 22(110501). URL: <https://doi.org/10.1063/1.4934714> (дата обращения: 01.12.2020).

2. Ren G., Liu J., Huo W., Lan K. Analysis of hohlraum energetics of the SG series and the NIF experiments with energy balance model // *Matter and Radiation at Extremes*. 2017. URL: <https://doi.org/10.1016/j.mre.2016.11.002> (дата обращения: 01.12.2020).
3. Физика плазмы и инерциальный термоядерный синтез. URL: <http://www.vniief.ru/researchdirections/Research/plasmaphysics> (дата обращения: 01.12.2020).
4. Баутин С.П., Николаев Ю.В. Численное решение задачи о сжатии газа из покоя в покой // *Вычислительные технологии*. 2020. Т. 25, № 5. С. 55–65.
5. Новаковский Н.С. Комбинированный метод расчёта безударного сильного сжатия одномерных слоёв газа в конфигурации Р. Мизеса // *Математические структуры и моделирование*. 2017. № 1(41). С. 92–101.
6. Рощупкин А.В. Один подход к численному моделированию безударного сильного сжатия специальных объёмов газа // *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 2. С. 61–69.
7. Баутин С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск : Наука, 2007. 312 с.
8. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. Москва : Физматлит, 2004. 72 с.
9. Крайко А.Н. Вариационная задача об одномерном изэнтропическом сжатии идеального газа // *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 35–51.
10. Сидоров А.Ф. Безударное сжатие баротропного газа // *Прикладная математика и механика*. 1991. Т. 55, вып. 5. С. 769–779.
11. Баутин С.П. Мишень для получения термоядерных реакций. Патент 2432627 Российская федерация, МПК G21B 1/19(2006.01); заявка 2010113417/07 от 06.04.2010; опубликовано 27.10.2011. Бюллетень № 30.
12. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
13. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Газодинамическая теория восходящих закрученных потоков. Екатеринбург : УрГУПС. 2020. 400 с.
14. Рождественский Б.Л., Яненко Н.К. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Москва : Наука. 1978. 687 с.
15. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н., Емельянов В.Н., Козелков А.С., Тетерина И.В. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках. Москва : Физматлит, 2015. 415 с.
16. Nearest Neighbors. URL: <https://scikit-learn.org/0.21/modules/neighbors.html> (дата обращения: 1.12.2020).
17. Исаев С.А., Баранов П.А., Усачов А.Е. Многоблочные вычислительные технологии в VP2/3 по аэротермодинамике. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. 324 с.

ALGORITHM FOR CONSTRUCTING AN ARBITRARY GRID FOR SHOCKLESS GAS COMPRESSION NUMERICAL SOLUTION**S.P. Bautin**

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: spbautin@mail.ru

Iu.V. Nikolaev

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: ynikolaev@list.ru

Snezhinsk Institute of Physics and Technology National Research Nuclear University
MEPhI, Snezhinsk, Russia

Abstract. In this paper, an algorithm for calculating the values of the gas parameters for an arbitrary grid in the region of one-dimensional flows of shockless gas compression is proposed. Such flows are described by solving a system of gas dynamics equations. The algorithm uses one of the machine learning methods — the nearest neighbors method for the regression case. Distance is used as an estimate of the proximity of neighboring points. The algorithm is tested using the example of calculating the grid in the area of the rest-to-rest compression problem, when a resting gas with a density of 1 is compressed into a resting gas with a density of 10^4 . Compression is performed without shock waves, in an efficient way from the point of view of energy input: compression energy is used only to compress the gas and is not spent on its acceleration. The algorithm can be used for numerical calculations for other gas dynamics problems.

Keywords: system of equations of gas dynamics, one-dimensional shockless compression flows, method of characteristics, nearest neighbor.

REFERENCES

1. Craxton R.S., Anderson K.S., Boehly T.R., Goncharov V.N., Harding D.R., Knauer J.P., McCrory R.L., McKenty P.W., Meyerhofer D.D., Myatt J.F., Schmitt A.J., Sethian J.D., Short R.W., Skupsky S., Theobald W., Kruer W.L., Tanaka K., Betti R., Collins T.J.B., Delettrez J.A., Hu S.X., Marozas J.A., Maximov A.V., Michel D.T., Radha P.B., Regan S.P., Sangster T.C., Seka W., Solodov A.A., Soures J.M., Stoeckl C., and Zuegel J.D. Direct-drive inertial confinement fusion: A review. *Physics of Plasmas*, 2015, no. 22(110501). URL: <https://doi.org/10.1063/1.4934714> (01.12.2020).
2. Ren G., Liu J., Huo W., and Lan K. Analysis of hohlraum energetics of the SG series and the NIF experiments with energy balance model. *Matter and Radiation at Extremes*, 2017. URL: <https://doi.org/10.1016/j.mre.2016.11.002> (01.12.2020).
3. Физика плазмы и инертсiал'nyi термоядерный синтез. URL: <http://www.vniief.ru/researchdirections/Research/plasmaphysics> (01.12.2020). (in Russian)
4. Bautin S.P. and Nikolaev Yu.V. Численное решение задачи о сжатии газа из покоя в покои. *Вычислительные технологии*, 2020, vol. 25, no. 5, pp. 55–65. (in Russian)
5. Novakovskii N.S. Комбинированный метод расчёта безударного сил'ного сжатия одномоментных слоев газа в конфигурации R. Мизеса. *Математические структуры и моделирование*, 2017, no. 1(41), pp. 92–101. (in Russian)

6. Roshchupkin A.V. Odin podkhod k chislenному modelirovaniyu bezudarnogo sil'nogo szhatiya spetsial'nykh ob"emov gaza. Vychislitel'nye tekhnologii, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 61–69. (in Russian)
7. Bautin S.P. Matematicheskoe modelirovanie sil'nogo szhatiya gaza. Novosibirsk, Nauka Publ., 2007, 312 p. (in Russian)
8. Dolgoleva G.V. and Zabrodin A.V. Kumulyatsiya energii v sloistyykh sistemakh i realizatsiya bezudarnogo szhatiya. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 72 p. (in Russian)
9. Kraiko A.N. Variatsionnaya zadacha ob odnomernom izentropicheskom szhatii ideal'nogo gaza. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1993, vol. 57, iss. 5, pp. 35–51. (in Russian)
10. Sidorov A.F. Bezudarnoe szhatie barotropnogo gaza. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1991, vol. 55, iss. 5, pp. 769–779. (in Russian)
11. Bautin S.P. Mishen' dlya polucheniya termoyadernykh reaktsii. Patent 2432627 Rossiyskaya federatsiya, MPK G21B 1/19(2006.01); zayavka 2010113417/07 ot 06.04.2010; opublikovano 27.10.2011. Byulleten' no. 30. (in Russian)
12. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
13. Bautin S.P., Krutova I.Yu., and Obukhov A.G. Gazodinamicheskaya teoriya voskhodyashchikh zakruchennykh potokov. Ekaterinburg, UrGUPS Publ., 2020, 400 p. (in Russian)
14. Rozhdestvenskii B.L. and Yanenko N.K. Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ikh prilozheniya k gazovoi dinamike. Moscow, Nauka Publ., 1978, 687 p. (in Russian)
15. Volkov K.N., Deryugin Yu.N., Emel'yanov V.N., Kozelkov A.S., and Teterina I.V. Raznostnye skhemy v zadachakh gazovoi dinamiki na nestrukturirovannykh setkakh. Moscow, Fizmatlit Publ., 2015, 415 p. (in Russian)
16. Nearest Neighbors. URL: <https://scikit-learn.org/0.21/modules/neighbors.html> (1.12.2020).
17. Isaev S.A., Baranov P.A., and Usachov A.E. Mnogoblochnye vychislitel'nye tekhnologii v VP2/3 po aerotermodinamike. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013, 324 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 13.03.2021

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ СОЦИОЛОГОВ: АКСИОМЫ КВАНТОВОЙ СОЦИОЛОГИИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье представлена попытка изложения аппарата квантовой механики языком, доступным для восприятия его социологами. Принципы квантовой механики излагаются как аксиомы. Даются примеры конкретных расчётов поведения социальных объектов с помощью понятий и методов квантовой механики.

Ключевые слова: квантовая социология, квантовая физика, современная научная картина мира, квантовый характер социальной реальности, общественное сознание, «квантовое» общество, аксиомы квантовой социологии.

1. Введение

Когда социологу говорят о квантовой теории, о квантовом описании явлений, он сразу же думает о том, что речь идёт о физике.

Действительно, квантовая теория возникла в физике в качестве набора процедур, позволяющих преодолеть затруднения, с которыми столкнулось классическое описание физических явлений. Исторически это были явления, относящиеся к микромиру, а точнее к динамике электронов в атоме (Бор), либо к описанию энергии фотонов в фотоэффекте (Эйнштейн). Однако уже в 1934 году А.Д. Александров предложил аксиомы квантовой механики [1,2], которые никоим образом не различают микромир и макромир. Но физики были увлечены квантовым описанием микромира. Только в последние годы физики стали строить макроскопическую квантовую механику [3].

Обратим внимание на то, что это физики говорят о микромире и макромире, т. е. о пространственных размерах изучаемых объектов. В случае социологии объекты — это социальные объекты, конечно, принадлежащие макромиру, но их описание не осуществляется в пространственных терминах, т. е. для социолога не играют роли их размеры и пространственные координаты — для социолога они характеризуются параметрами либо качественного характера, либо количественно-числового, и эти числа относятся к чисто социологическим описаниям.

В социологии нет необходимости замерять местонахождение или скорость (импульс) социального объекта в пространстве. Но этот объект подчас ведёт себя так, что для описания его поведения не хватает понятий и терминов,

которые так или иначе мы взяли из классической физики, будь то сила, детерминистская причинность, передача энергии, принцип локальности и т. д. В таких случаях чувствуется потребность в новых понятиях, нужна неклассическая наука объяснения явлений.

«Классическая наука, которая все ещё господствует сегодня, основана на изучении реальных материальных объектов и сил, но общество едва ли реально или осязаемо. Вы можете прикоснуться только к его локальным экземплярам, но не к его тотальности или абстрактной идее» [5].

Но в квантовой механике реальность, которую мы воспринимаем как состоящую из материальных объектов, скорее всего возникает лишь тогда, когда мы к ней обращаемся или измеряем. Поэтому нереальные, неосязаемые социальные объекты социологии, за исключением случая, когда речь идёт об отдельном человеке, — это объекты квантовой теории, и, следовательно, социологи давно совершили *квантовый поворот* [5], хотя по-прежнему пытаются по сути квантовое общество описывать в терминах классической физики.

Поэтому социологам пора осознанно обратиться к существующей квантовой теории, которая даст им более мощный, более глубокий, хотя и непривычный, а подчас даже фантастический способ описания окружающей нас реальности социальных объектов, позволяющий выйти за пределы представления о взаимодействиях наблюдаемых объектов, опирающиеся на понятия силы, причинности, близкодействия и т. д., которые пронизывают классическую науку, включая и социологию.

Квантовая теория предлагает новый понятийный аппарат и модели, посредством которых можно иначе, чем в классической науке, описывать различные явления в природе и в обществе и решать возникающие проблемы.

В этой статье мы предлагаем квантовый аппарат описания социальных объектов и социальных действий¹. И поскольку социальные явления живут в абстрактном социальном пространстве, то нам нет нужды в оговорках о том, что квантовые эффекты заметны в микромире и не относятся к макромиру. Более точно они, конечно, заметны в микромире, но это социологический микромир — мир, замеряемый с помощью социологических количественных шкал и характеризующийся микроскопическими величинами в этих шкалах.

2. Социальные объекты (системы) и их моделирование

Людям свойственно объединяться под влиянием различных факторов. Благодаря действию этих факторов люди держатся вместе, представляя собой некоторое единое целое, для которого мы используем понятие *социальный объект*².

¹*Социальное действие* — это действие человека (внешнего или внутреннего характера), которое предполагает, что действующий индивид связывает с ним субъективный смысл, и которое соотносится с действием других людей и ориентируется на него. Содержание действия образуют структуры и процессы, на основе которых люди формируют и реализуют осмысленные намерения (слово «осмысленный» предполагает символический (культурный) уровень смыслового представления и описания [4, с. 94].

²*Социальный объект* — объект, который может быть отдельным человеком или группой людей.

Действие факторов прослеживается посредством наблюдений, измерений или просто предположений. Как результат, мы описываем социальный объект посредством свойств, признаков и характеристик. Мы считаем их *внутренними* для социального объекта, поскольку они могут отсутствовать в описании другого социального объекта.

Социальная система S определяется как набор социальных объектов и взаимоотношений между ними:

- 1) $s_1, \dots, s_N$ — социальные объекты, называемые *подсистемами*; каждая подсистема описывается свойственными ей внутренними характеристиками;
- 2) $f_{ij} : s_i \rightarrow s_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) — отображения, устанавливающие связи между внутренними характеристиками подсистем.

Моделирование социальной системы S — это процесс, включающий указанные ниже последовательные этапы:

- замену системы S другим объектом O , называемым *моделью* системы S ;
- выявление тех сторон $o_1, \dots, o_n$ объекта O , свойства которых мы хотели подробно исследовать. Пусть это характеристики $M_{o_1}, \dots, M_{o_n}$ модели O ;
- исследование свойств и поведения характеристик $M_{o_1}, \dots, M_{o_n}$;
- предсказание поведения системы S на основании знаний свойств и поведения характеристик $M_{o_1}, \dots, M_{o_n}$ и проверка истинности этих предсказаний. Это этап установления *адекватности* модели;
- если подтвердилась адекватность модели, то использование в дальнейшем вместо системы S его модели.

Цель моделирования состоит в подмене реальной социальной системы, изучение которой очень часто затруднено и требует больших финансовых затрат, моделью — искусственным объектом, в наше время, как правило, компьютерным, который всегда доступен, легко изучаем, легко модернизируется и не требует больших финансовых инвестиций и значительного числа людей, привлекаемых к исследованию.

Квантовая социология — это наука об обществе, основанная на *квантовом моделировании*, т. е. моделировании социальных систем (объектов), опирающемся на понятия и математический аппарат квантовой механики.

3. Состояния

Набор характеристик социального объекта O может меняться — происходит переход от одного набора к другому. Но при этом мы имеем дело с одним и

тем же социальным объектом. Будем называть набор характеристик *состоянием* изучаемого социального объекта и обозначать различные состояния как $|x\rangle, |y\rangle, \dots$.

В таком случае переход от одного состояния к другому записывается как

$$|x\rangle \rightarrow |y\rangle.$$

В простейшем случае социальный объект может характеризоваться только ответом «да»–«нет» на конкретный вопрос (например, пол, грамотен ли человек). В таком случае имеем два состояния: $|\text{да}\rangle, |\text{нет}\rangle$, или $|1\rangle, |0\rangle$.

Две различные характеристики состояния, которые мы обозначали выше как $|0\rangle$ и $|1\rangle$, — это некоторые *простейшие состояния*, наблюдаемые на входе, или в начале наблюдения (исследования), и выходе, или по окончании наблюдения (исследования) изучаемого социального объекта. Для них выше мы использовали обозначения — $|0\rangle$ и $|1\rangle$. Это *однобитовые состояния* простого социального объекта.

Состояния социального объекта могут быть более сложными, m -битовыми, т. е. являться набором m однобитовых состояний

$$|x\rangle \equiv |\underbrace{ij\dots k}_m\rangle.$$

Они являются результатом наблюдения за социальным объектом.

4. Принципы «наивной» квантовой социальной механики

4.1. Амплитуда вероятности

Многие исследователи говорят о вероятности тех или иных изменений в состоянии социальных объектов. Математическим описанием вероятностного поведения социальных объектов занимается стохастическое моделирование [6, Глава 2].

Примем, что мы понимаем, что такое вероятность социальных переходов (изменений).

Принцип 1. Переходу из состояния $|x\rangle$ в состояние $|y\rangle$ соответствует амплитуда вероятности

$$c_{xy} = \langle y|x\rangle,$$

являющаяся комплексным числом, квадрат модуля которого есть вероятность перехода $|x\rangle \rightarrow |y\rangle$:

$$P(x \rightarrow y) = |c_{xy}|^2 \equiv |\langle y|x\rangle|^2.$$

4.2. Пути переходов из состояния в состояние.

Квантовая интерференция

Пути перехода социального объекта из одного состояния в другое, как правило, не могут быть точно прослежены в реальном времени или восстановлены по наблюдаемому новому состоянию в будущем. Ведь механизмы социальных преобразований в большой мере относятся к сфере тайных скрытых планов тех, кто организует эти преобразования, или к скрываемым факторам.

Любые структурные изменения, новшества, осуществляемые властями или менеджерами организаций (т. е. определённого типа социальных объектов) — это эксперименты, проводимые над обществом с непредсказуемым в полной мере результатом.

Контроль над подобным экспериментом теряет, как думается, эффективность, если всё большее число людей узнаёт подробности, касающиеся планируемых мероприятий. Узнавшие о подобных планах люди вносят по разным мотивам или соображениям неизбежные поправки или помехи, а то и просто противодействуют, не веря в реализацию планируемых действий. Эксперимент начинает идти иначе, чем это задумалось.

Однако это всего лишь предполагаемые соображения, требующие доказательства. Скорее всего, следует рассматривать определённую устойчивость динамики проводимых мероприятий по отношению к внешним воздействиям по аналогии с теорией устойчивости в математике. Или соблюдать все меры секретности (секретности) при реализации задуманного, если известно, что подобного рода динамика заведомо неустойчива или предположительно неустойчива.

Однако даже с учётом сказанного мы, пытаясь описать ход эксперимента, должны всё-таки допустить возможность разнообразных путей развития эксперимента от исходного состояния $|x\rangle$, хотя все они, как мы уверены и как оказывается на финише, дают нужный результат $|y\rangle$.

Наконец, следует предположить, что наличие иных путей, появляющихся с необходимостью, коль мы занимаемся поведением группы людей (общества), а не группы планет в солнечной системе, описываемых классической небесной механикой, обязательно сказывается на вероятности перехода $|x\rangle \rightarrow |y\rangle$. Поэтому мы постулируем как минимум следующий

Принцип 2. Если переход из состояния $|x\rangle$ в состояние $|y\rangle$ возможен по двум различным путям 1 и 2, то

$$\langle y|x\rangle = \langle y|x\rangle_{\text{через 1}} + \langle y|x\rangle_{\text{через 2}}. \quad (1)$$

В частности, если пути 1 и 2 связаны с «промежуточными» состояниями $|1\rangle$ и $|2\rangle$ соответственно, то формулу (1) можно переписать в виде

$$\langle y|x\rangle = \langle y|1\rangle\langle 1|x\rangle + \langle y|2\rangle\langle 2|x\rangle. \quad (2)$$

Принцип 2 имеет важное следствие, которое означает, что вероятность P_{xy} перехода $|x\rangle \rightarrow |y\rangle$ в общем случае не равна сумме вероятностей $P_{xy}(1) + P_{xy}(2)$

переходов

$$|x\rangle \xrightarrow[\text{через 1}]{\quad} |y\rangle, \quad |x\rangle \xrightarrow[\text{через 2}]{\quad} |y\rangle,$$

поскольку

$$P_{xy} = P_{xy}(1) + P_{xy}(2) + 2\text{Re}[\langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x\rangle_{\text{через 2}}}] \quad (3)$$

Последнее слагаемое в этой сумме

$$2\text{Re}[\langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x\rangle_{\text{через 2}}}] \quad (4)$$

говорит о возможности явления *тонкого* взаимодействия, которое назовём *интерференцией* двух путей перехода из $|x\rangle$ в $|y\rangle$.

Иначе говоря, интерференция — это взаимное вмешательство каждой из альтернатив в динамику друг друга, порождающее *недетерминистское*, невыразимое в привычных терминах *квантовое явление*. Хотя социологами, в отличие от физиков, подобное взаимодействие интуитивно всегда ощущалось. И это понятно, поскольку прибором, измеряющим происходящее внутри социального объекта, являются те же люди, что и составляют социальный объект. У физиков измерительный прибор, как правило, имеет иную природу, чем наблюдаемый объект.

Иначе говоря, с точки зрения квантовой социальной механики происходит *распараллеливание* переходного процесса из одного состояния в другое; мы не можем точно знать, по какому пути в *реальности* совершается переход — люди скрытны и, заявляя одно, делают совсем другое, — и поэтому мы должны **приучить** себя к мысли, что *переход совершается по двум путям одновременно*³, и это с необходимостью отражено в итоговой формуле (3).

Однако в результате отражается вклад обоих путей. И это отнюдь не противоречит житейской интуиции, — напротив, скорее ей отвечает!

Высшая социальная механика не может быть детерминистской, она должна моделировать, в частности, и коварство людей, а результат всеобщих усилий должен учитывать и скользкие потайные ходы части субъектов социального объекта. Интерференционный член (4) как раз это и делает.

Обратим внимание на то, что изменение фаз амплитуд вероятностей

$$\langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \rightarrow e^{i\theta} \langle y|x\rangle_{\text{через 1}}, \quad \langle y|x\rangle_{\text{через 2}} \rightarrow e^{i\omega} \langle y|x\rangle_{\text{через 2}},$$

как мы знаем, не меняет вероятности переходов из x в y по путям 1 или 2, но может изменить вклад интерференционного члена (4), поскольку

$$\begin{aligned} 2\text{Re}[\langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x\rangle_{\text{через 2}}}] &\rightarrow \\ &\rightarrow 2\text{Re}[e^{i(\theta-\omega)} \langle y|x\rangle_{\text{через 1}} \overline{\langle y|x\rangle_{\text{через 2}}}] \end{aligned}$$

³ Один из ведущих специалистов по теории квантовых вычислений Дойч считает, что в действительности переход проходит по одному пути, по другому идёт «теневого» социальный объект из *параллельной вселенной* [7].

Подбором разности фаз можно влиять на интерференционную картину. Интерференция становится *контролируемой*. Иначе говоря, имеется возможность контроля социальных проявлений.

Принцип 2 является ключевым при построении недетерминистской механики описания общественных явлений, поведения социальных объектов: он определяет квантовость социальной динамики.

4.3. Базисные состояния. Когерентная суперпозиция. Квантовая когерентность

Самый общий вид формулы, частным случаем которой является формула (2), выражающей сущность второго принципа квантовой механики и учитывающей *иные пути* и соответствующие им «промежуточные» этапы из набора логически возможных, как-то связанных друг с другом «*базисных*» состояний $\alpha = 1, 2, \dots, k$, как нетрудно видеть:

$$\langle y|x \rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \langle y|\alpha \rangle \langle \alpha|x \rangle. \quad (5)$$

Уберём в правой и левой частях формулы (5) символ $\langle y$. Как результат получаем формулу

$$|x \rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} |\alpha \rangle \langle \alpha|x \rangle. \quad (6)$$

Положив теперь, что $c_\alpha = \langle \alpha|x \rangle$, имеем *разложение состояния $|x \rangle$ по базисным состояниям*:

$$|x \rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_\alpha |\alpha \rangle. \quad (7)$$

Состояние (7) называют также *когерентной⁴ суперпозицией базисных состояний*.

Квантовая когерентность говорит об одновременном пребывании социального объекта сразу в k параллельных альтернативных состояниях $|\alpha \rangle$, $\alpha = 1, \dots, k$. И, следовательно, можно говорить о *социальных действиях* $\hat{U}$, которые одновременно осуществляются над каждым из состояний $|\alpha \rangle$, $\alpha = 1, \dots, k$:

$$\hat{U}|x \rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_\alpha \hat{U}|\alpha \rangle.$$

Отметим при этом, что $|c_\alpha|^2$ — это вероятность того, что, по сути дела, состояние x , претерпевая изменения-переходы и проходя по цепям жизненных социальных перетурбаций, оказывается (и наблюдается) в состоянии α .

Когерентная суперпозиция часто называется *квантовой суперпозицией*. Это понятие является основным в квантовой теории. Прослеживается ли нечто подобное в социологической теории? Да, и с самых истоков социологии. Сущность квантовой суперпозиции в социологии прослеживается в: а) работе Дюркгейма о двух формах коллективной солидарности; б) работе Вебера о принципе

⁴Когерентный — взаимосвязанный, находящийся в связи, согласованный, соотнесённый.

рациональности / разочарования; в) Зиммеля в концепция Незнакомца; г) в историческом материализме Маркса и д) в концепции Самости G.H. Meads! Об этом пишет американский профессор социологии из Нью-Йорка Стивен Джерарди: «Квантовая суперпозиция оказала большое влияние на классическую социологическую теорию... результаты этих более ранних теорий можно назвать “социальной суперпозицией” (теория, в которой два социальных состояния объединены и разделены на слои одного целого)» [8].

4.4. Уравнение Шрёдингера

Социология должна не только изучать возможные состояния социальных объектов, но и предсказывать их в будущем. В математике это делается с помощью специально разработанного Ньютоном и Лейбницем аппарата дифференциальных уравнений.

Такое уравнение имеется и в квантовой социальной механике. Оно является следствием следующего постулата, не несущего чего-то принципиально нового.

Принцип 3. *Изменение состояния $|x\rangle$ во времени с момента t к моменту $t + \Delta t$ задаётся формулой*

$$\begin{aligned} |x(t + \Delta t)\rangle &\equiv \hat{U}(t + \Delta t, t)|x(t)\rangle = \\ &= \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \hat{U}(t + \Delta t, t)|\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\hat{U}(t, t) = \hat{I}, \quad (9)$$

где $\hat{U}(t + \Delta t, t)$ — преобразование, отражающее социальные действия, меняющее состояние $|x(t)\rangle$, $\hat{I}$ — тождественное преобразование.

В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ и благодаря вводимому обозначению

$$-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{H}}|x(t)\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} \frac{\partial \hat{U}(t, t)}{\partial 1}|\alpha\rangle\langle\alpha|x(t)\rangle, \quad (*)$$

где $\hbar$ — некоторая фундаментальная константа, уравнение (8) приводится к виду

$$i\hbar \frac{d}{dt}|x(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}}|x(t)\rangle.$$

(10)

Мы получили уравнение, характеризующее изменение состояний социальных объектов, по форме совпадающее со знаменитым уравнением Шрёдингера, являющимся основой квантовой механики.

Обратим внимание на то, что сам вывод уравнения (10) преобразует уравнение (8) в дифференциальное уравнение, а введение обозначения (*) придаёт ему форму уравнения Шрёдингера.

Для уравнения Шрёдингера главную роль играет $\hat{H}$, именуемый физиками *гамильтонианом*, являющееся (эрмитовым) оператором, т. е. преобразованием, воздействующим на состояния социального объекта.

Гамильтониан задаёт социальное действие

$$\hat{U}_H = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}}, \quad (11)$$

$$|x(t)\rangle = \hat{U}_H |x(0)\rangle.$$

Гамильтониан имеет в физике смысл энергии, при конкретном выборе которого для той или иной физической системы мы получаем дискретный, счётный набор *стационарных*, т. е. неизменяющихся со временем состояний системы $|x\rangle_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), каждому из которых отвечает свой уровень энергии E_n :

$$\hat{H}|x\rangle_n = E_n|x\rangle_n.$$

Суть квантовой теории в квантовании, т. е. в дискретизации состояний и энергии. Следовательно, использование квантовых моделей в социологии приведёт нас к рассмотрению отдельно взятых дискретных состояний социальных объектов.

Итак, предложено дифференциальное уравнение для описания (квантовой) социальной динамики. Это не новость для социологов XXI века, хотя в начале XX века это вызывало отторжение даже у таких значимых для социологии фигур, как В.М. Бехтерев [9] и Питирим Сорокин. Последний даже обозвал подобные начинания квантофренией.

Но в уравнение (10) входит фундаментальная, как мы написали, константа $\hbar$. Есть ли в социологии фундаментальные константы?

4.5. Значение константы $\hbar$

4.5.1. Константа $\hbar$ – это постоянная Планка

Какое значение может иметь константа $\hbar$? В квантовой механике $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ Дж · сек и называется постоянной Планка.

«Во всех смыслах и целях знание квантовой физики не имело бы никакого практического значения для социологии, за исключением того факта, что люди и само общество являются квантовыми явлениями – или, по крайней мере, мы очень похожи на них» [5]. Действия людей определяются их мыслями – идеальными представлениями. Если согласиться с Хамероффом и Пенроузом [10], то мысли — это квантовые состояния димеров в микротрубочках нейронов головного мозга, т. е. сугубо квантово-механические состояния, последовательности нулей и единиц (рис. 1), управляются в какой-то мере цепочками взаимодействий, сила которых соотносится со значением постоянной Планка [11, с. 197].

В таком случае форма уравнения (10) неслучайно совпадает с уравнением Шрёдингера — оно и есть уравнение Шрёдингера, и, следовательно, константа $\hbar$ в (10) — это постоянная Планка. Следовательно, гамильтониан — это энергия

социального объекта. Правда, вопрос — какая это энергия, как проявляется и как измеряется.

Разум и социальная жизнь — это макроскопические квантово-механические явления [12]. Добавим к этому заявлению, что они макроскопические с точки зрения пространственного размера, но могут быть и микроскопическими в социальном пространстве.

4.5.2. Константа $\hbar$ — это иная постоянная

В книге [13, р. 13] делается переобозначение $\hbar = \gamma$ и рассматривается уравнение эволюции социального объекта в виде:

$$i\gamma \frac{d}{dt} |x(t)\rangle = \hat{\mathbf{H}} |x(t)\rangle. \quad (12)$$

Однако в этом случае возникает фундаментальная проблема, связанная с использованием динамики Шрёдингера в социальных науках, состоящая в том, чтобы найти правильную интерпретацию гамильтониану. Если это не энергия, то что?

4.6. Измерение состояния. Редукция. Коллапс. Декогеренция

Социология — это наука об измерениях характеристик социальных объектов. Поэтому следует постулировать, каким образом совершаются измерения в квантовой социологии.

Принцип 4. *Измерение состояния*

$$|x\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_{\alpha} |\alpha\rangle$$

— это действие группы социологов, производящих наблюдение за социальным объектом и приводящее к тому, что с вероятностью $|c_{\alpha}|^2$ будет зафиксировано (задокументировано) лишь одно из базисных состояний $|\alpha\rangle$.

Иначе говоря, измерение означает переход

$$|x\rangle = \sum_{\alpha=1,2,\dots,k} c_{\alpha} |\alpha\rangle \xrightarrow[\text{измерение}]{\uparrow} |\alpha\rangle, \quad (12)$$

называемый *редукцией*, или *коллапсом* (состояния) $|x\rangle$.

Постулат 4 закрепляет важное обстоятельство, типичное для общества: «Наше наблюдение влияет на результат. Изучение общества — это эксперимент, который воздействует на объект исследования — общество, которое само по себе является ещё одним видом эксперимента» [5].

Редукция состояния $|x\rangle$ происходит по той причине, что процедура измерения есть социологический эксперимент. Поскольку $|x\rangle$ является когерентной суперпозицией, то при измерении происходит разрушение когерентной суперпозиции, т. е. имеет место *декогеренция*.

Социологи знают, что разные группы социологов, проводя опросы, получают разные результаты. «Декан факультета социологии и политологии Финансового университета при Правительстве РФ Александр Шатилов призывает не удивляться подобному разному в опросах.

«Это происходит по целому ряду факторов: различная выборка, различные формулировки вопросов, статистическая погрешность и даже политическая ангажированность социологов», — сказал он.

Получается, что социологические опросы полностью подчиняются постулату квантовой физики, что сам факт наблюдения изменяет результат эксперимента» [14].

Разрушение когерентной суперпозиции базовых состояний при измерении — это ликвидация возможности отследить альтернативные результаты динамики социального объекта. Более того, результат $|\alpha\rangle$ даётся нам лишь с вероятностью $|c_\alpha|^2$. Это означает, что для того, чтобы убедиться в истинности результата $|\alpha\rangle$, мы должны провести эксперимент повторно, а затем ещё раз и т. д. для сбора статистики, которая позволит нам сказать об «истинном» результате эксперимента. В принципе такая ситуация не является пугающей для социолога. Вся его экспериментальная работа состоит из сбора статистических данных.

Но... но... повторы эксперимента для уточнения результата в социологии происходят лишь через какое-то время, либо производятся другой группой социологов, поэтому нет гарантии, что результат повторится в точности — люди склонны меняться быстрее, чем бездушные элементарные частицы⁵. В этом смысле социология более квантовая сущность, чем физика.

Декогеренция разрушает интерференцию путей перехода из одного состояния в другое (см. § 3.2), т. е. ликвидация для социального объекта возможностей альтернативного развития. Проводящие эксперимент социологи — это часть окружающей (квантовый) социальный объект среды. Поэтому можно заявить:

Декогеренция — результат взаимодействия социального объекта с внешней средой, разрушающей его альтернативные (параллельные) пути развития.

Можно ли бороться с декогеренцией? Это актуальный вопрос, ответ на который ищут в науках о квантовых компьютерах и в макроскопической квантовой механике. Современные физики пытаются оградить квантовый объект от декогеренции и стараются обеспечить ему эволюцию в чистом когерентном состоянии. В случае социологии это сохранение развития социального объекта со всеми возможными альтернативными вариантами. Естественно, для этого

⁵Возможно, в квантовой социологии необходимо более серьёзно исследовать вопрос о том, что следует понимать под вероятностью.

следует понять, какие социально-политические условия организации общества соответствуют эволюции социального объекта в когерентном состоянии.

5. Социальная сцепленность и коллективные рефлексy

Наблюдаемые явления, как природные, так и социальные, чаще всего анализируются нами в терминах причинно-следственных связей. Причинно-следственные связи — это производное от понятия «взаимодействие» [15].

Взаимодействия в классической науке, благодаря классикам, её заложившим, есть *силовые* воздействия одного объекта на другой. Чтобы объяснить изменение, мы ищем породившую его *силу*. Социологи, естественно, ищут те общественные силы, которые порождают изучаемое социальное явление.

Однако сущность квантовой теории состоит в рассмотрении *несиловых* воздействий. Об этом впервые заговорил физик и геометр А.Д. Александров в 1952 году [16]. Сейчас несиловые взаимодействия называют квантовыми корреляциями, а порождаемые ими эффекты — квантовой *сцепленностью*, или *запутанностью* [11].

А.Д. Александров ярко демонстрирует несиловое взаимодействие, или сцепленность, следующим образом:

Каждая женщина находится в двух состояниях: «замужняя», «вдова», а её муж в состояниях «живой», «мёртвый».

«Женщина» и «мужчина» образуют сцепленное состояние «брак»: если муж живой, то женщина замужняя; если мужчина уехал в другой город и там погиб, то в тот же самый миг женщина стала вдовой и по всем юридическим нормам, и по человеческому разумению. Смена состояния женщины произошла без какой-либо силовой связи.

Как сцепленное состояние объекта «брак» записывается формулами? Достаточно просто, надо учесть альтернативу:

$$\text{Брак} = |\text{жив}\rangle_{\text{м}}|\text{замужняя}\rangle_{\text{ж}} + |\text{мёртв}\rangle_{\text{м}}|\text{вдова}\rangle_{\text{ж}},$$

где буквы «м» и «ж» метят состояния мужчины и женщины соответственно.

Сцепленность социальных объектов характеризуется тем, что их взаимодействие является не только несиловым, но и *нелокальным*, т. е. проявляющимся мгновенно через большие расстояния (пример с женщиной, мгновенно ставшей вдовой, хорошо иллюстрирует суть нелокальности).

В физике сцепленность двух частиц 1 и 2 означает, что если одна из них меняет своё состояние на другое, $|0\rangle_1 \rightarrow |1\rangle_1$, то вторая мгновенно изменяет своё, где бы она не находилась. Эту несиловую связь записывают как

$$\underbrace{|0\rangle_1|1\rangle_2}_{\text{до изменения}} + \underbrace{|1\rangle_1|0\rangle_2}_{\text{после}}.$$

Мы видим, что это в точности совпадает с изменениями объекта «брак» выше.

Вернёмся к социологии. «Индивид слушает» — это определённое состояние человека, которое обозначим как $|\Delta\rangle$, внимательно слушающего лектора. Напротив, пусть $|\nabla\rangle$ состояние индивида, который «не слушает» лектора. Группа из N индивидов (это социальный объект) в сцепленном квантовом состоянии задаётся формулой

$$|\Delta\rangle_1|\Delta\rangle_2\ldots|\Delta\rangle_N + |\nabla\rangle_1|\nabla\rangle_2\ldots|\nabla\rangle_N,$$

где индекс $i = 1, \dots, N$ обозначает i -го индивида [17].

Это крайний случай состояния сцепленности, когда все слушают или все не слушают лектора, но он как раз самым идеальным образом описывает коллективное сосредоточение. При этом сцепленные индивиды «физически», т. е. силовым (толчки, окрики и пр.), причинным способом не взаимодействуют друг с другом, но они не являются независимыми друг от друга.

(Отметим, что возможны и иные типы сцепленности, когда часть индивидов не ведёт себя синхронно с основной массой.)

Дело в том, что если сцепленные социальные объекты «физически» не взаимодействуют друг с другом, они не являются независимыми друг от друга и описываются общей волновой функцией

$$\Psi(q_1, q_2, \dots, q_n) \neq \Psi(q_1) \cdot \Psi(q_2) \cdot \dots \cdot \Psi(q_n).$$

Социальную сцепленность мы ассоциируем с согласованными коллективными действиями социальной группы [17]. Это напоминает то, что В.М. Бехтерев [9] называл *коллективным рефлексом*. Аналогия становится ещё более полной, если вспомнить, что сцепленность исчезает при внешнем вмешательстве — этот процесс называется *декогеренцией*, и это же происходит при воздействии на толпу в состоянии коллективного рефлекса. При появлении постороннего исчезает коллективное внимание, коллективное сосредоточение и пр.

В физических системах требуется наличие специального механизма, который осуществляет сцепленность подсистем. В обществе имеются свои собственные механизмы, запускающие процесс сцепленности посредством задействования коллективных рефлексов Бехтерева.

Каким образом осуществляется сцепленность людей? Вендт [18], энтузиаст квантового поворота в социологии, считает, что через язык; именно он, по его мнению, является основой для квантовой запутанности между людьми: «Если отбросить сложные уравнения, то простейшее понимание квантового подхода к языку заключается в множественности значений (или потенциальных возможностей) данного слова или фразы» [5].

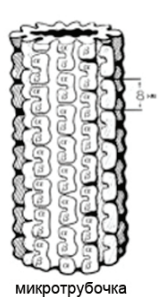
5.1. Социальная сцепленность и Внешний мир

Весь трёхмерный мир — это всего лишь иллюзия, информация, закодированная на двумерной поверхности.

Марк Ван Раамсдонк

Квантовая социология исходит из того, что квантовые свойства характерны для социальных объектов. Это даёт социологу, по меньшей мере, новый язык, на котором он описывает поведение социальных объектов и социальные явления. Появляется возможность говорить о сцепленности двух социальных объектов, которая указывает на то, что изменения, которые претерпевает один объект, мгновенно откликаются некоторым изменением состояния другого объекта. Это неклассическое (немеханическое), неньютоновское и неэйнштейновское взаимодействие открывает неожиданные перспективы как в описании социальных действий, так и в описании воздействия социального сознания на структуру Внешнего мира, который при классическом механическом описании был практически суверенен по отношению к человеческим мыслям.

В последние годы в квантовой физике развиваются идеи так называемого AdS/CFT-соответствия [19], согласно которому взаимодействие квантовых объектов на абстрактной бесконечно удалённой границе Внешнего мира мгновенно сказывается на физической и геометрической структуре Внешнего мира. В частности, сцепленность объектов на границе гарантирует связность (целостность) Внешнего мира, и, наоборот, потеря сцепленности влечёт распад Внешнего мира на куски [19–21].



микротрубочка

квантовое состояние табулина

$$|\text{Э}\rangle = c_1 |\text{Я}\rangle + c_2 |\text{Э}\rangle$$

Квантовое когерентное состояние микротрубочки:

$$|\mu\rangle = \sum c_{ijk\dots} |\text{Я}\rangle |\text{Э}\rangle |\text{Я}\rangle |\text{Я}\rangle |\text{Э}\rangle |\text{Я}\rangle |\text{Э}\rangle \dots |\text{Я}\rangle$$

Квантовое состояние нейрона:

$$? \text{ идея-фантазия} = \sum c_{ijk\dots} |\mu_i\rangle |\mu_j\rangle \dots |\mu\rangle, \quad \mu = 0,1$$

Рис. 1. Квантовые состояния микротрубочек

Сцепленность — это информация об общем состоянии объектов. Информации без её осознания не бывает. Следовательно, некоторая информация в умах людей — социальных объектов — говорит о сцепленности умов. Формально эта сцепленность представляется, согласно теории Хамероффа–Пенроуза [10], квантовыми состояниями табулинов (димеров) в микротрубочках нейронов головного мозга (рис. 1).

Абстрактное пространство мыслей людей вполне может быть частью абстрактной границы Внешнего мира. Иначе говоря, мы мыслим, ментально строим единое земное общество и думаем об окружающем Мире, и, как результат, Внешний мир меняется [22], и как подсказывает нам теория квантовой сцепленности, гораздо более радикально, чем мы это можем думать, опираясь на классические механистические представления (рис. 2).

Мы предполагаем, что запутанность людей основана на физических конструкциях. В ином, более мягком изложении квантовой социологии социальная запутанность людей осуществляется через общие социальные институты, такие

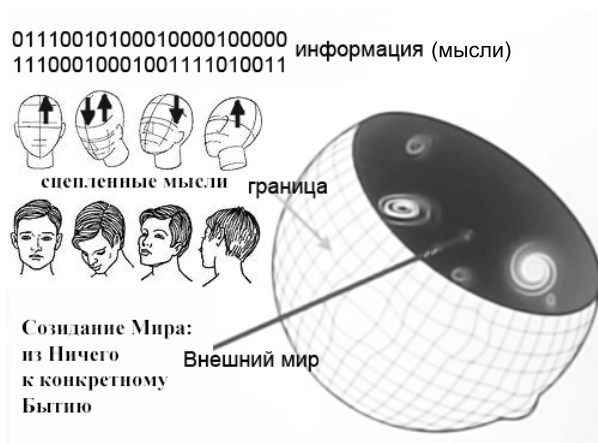


Рис. 2. Мир из мыслей: коллективный (сцепленные мысли) разум созидает Мир посредством голографии

как, например язык. На наш взгляд это является шагом назад и обрекает квантовую социологию на поверхностные изменения, не затрагивающие серьёзно основу социологии.

6. Макрореальность и неинвазивное измерение

Напомним: классическая физика предполагает, что достаточно большие вещи (объекты) могут быть измерены без изменения их состояния. Большие вещи (объекты) образуют *макроскопическую реальность*, или *макрореальность* (макромир). Если социальные объекты — это большие объекты, то измерения социологов, изучающих социальные объекты, никоим образом не вносят изменения в их состояния. Вроде бы это так, но *остаются сомнения* в том, что после ухода социологов, что-то спрашивающих, заставляющих что-то заполнить, задуматься при этом, опрошенные не изменились.

Классическое мировоззрение, которое разделяют не только большинство физиков, но и социологи, имеющие дело с макромиром, основывается на двух гипотезах [23]:

Гипотеза о макроскопическом реализме. *Макроскопический объект, обладающий двумя или более возможными макроскопически различными состояниями, в любой момент времени находится только в одном из этих состояний.*

Гипотеза о неинвазивной измеримости. *В принципе возможно определить, в каком из этих состояний находится система, не оказывая никакого влияния на само это состояние или на последующее поведение системы.*

Были придуманы два типа неравенств — неравенства Лаггетта-Гарга и неравенства Белла, которые можно проверять экспериментально. Если будет установлено, что они нарушаются, то в первом случае нарушение говорит о том, что обе приведённые выше гипотезы о классичности макромира неверны. А во

втором — возможны мгновенные взаимодействия на расстоянии, называемые *нелокальностью* взаимодействий, или возможна *сцепленность* состояний.

Эксперименты установили нарушение и тех и других неравенств. Мир не является классическим — Мир является квантовым. Именно поэтому квантовый поворот в социологии, и не только в социологии, неизбежен. Следовательно, социологические эксперименты меняют состояния тех (или того), кого или что они исследуют.

**КЛАССИЧЕСКИЙ
МИР** $\Rightarrow$ **Неравенства Белла
справедливы** $\Rightarrow$ **Сцепленность
не существует,
Локальность**

**КВАНТОВЫЙ
МИР** $\Rightarrow$ **Неравенства Белла
НАРУШАЮТСЯ** $\Rightarrow$ **Сцепленность
существует,
Нелокальность**

**Неравенства
Лаггетта-Гарга
справедливы** $\Rightarrow$ **Траектория
эволюции
одна** $\Rightarrow$ **КЛАССИЧЕСКИЙ
МИР**

**Неравенства
Лаггетта-Гарга
НАРУШАЮТСЯ** $\Rightarrow$ **Эволюция по всем
альтернативным
траекториям** $\Rightarrow$ **КВАНТОВЫЙ
МИР**

7. Квантовые периодические процессы в обществе

Можно сколько угодно говорить о квантовом моделировании социальных объектов, но без демонстрации того, как работает уравнение Шрёдингера при описании конкретного социального явления, будем иметь только пустопорожние разговоры.

В этом направлении кое-что сделано. В книге [24], используя язык операторов рождения и уничтожения, наблюдаемых и уравнение Гейзенберга

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{X}]$$

вместо уравнения Шрёдингера описываются взаимодействия политических партий друг с другом и с избирателями. Описывается также задача побега двух групп людей с некоторой территории, также миграции [25] и даже любовных отношений [26].

Покажем, как можно с помощью уравнения Шрёдингера прогнозировать, хотя бы на качественном уровне, процессы «кидания из стороны в сторону» общественных настроений [27].

Мы рассматриваем стабильное общество, в котором не совершаются бурные революционные события и в котором власть достаточно устойчиво управляет обществом. Иначе говоря, мы будем изучать стационарные состояния социального объекта, который представляет собой людей, составляющих изучаемое общество.

В человеческом коллективе, в обществе, можно наблюдать периодические процессы (осцилляции) — брожения (волнения) общественного настроения (мнения) относительно некоторой нормы, определяющей устойчивое состояние общества. При классическом описании их можно остановить — «власть душит брожения». Квантовый осциллятор остановить нельзя, власть не в состоянии остановить брожения. Остановить квантовые брожения можно одним способом — уничтожить общество. И это ближе к пониманию общества, чем в классике.

Примером брожения (осцилляции) могут быть как «модные» отклонения от, скажем, православия, к неверию (–) или к ортодоксальности (+). Другим примером может быть «мода» на политические партии то левого, то правого толка.

Осцилляции могут осуществляться в обществе как мода на одежду, причёски, на музыку и т. д.

Кто или что совершает осцилляции? Люди, рассматриваемые в совокупности как социальный объект. Осцилляции социального объекта – аналога гармонического осциллятора в физике – измеряем с помощью некоторой количественной шкалы x . И тогда гамильтониан в уравнении Шрёдингера, описывающий квантовые осцилляции, имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Для стационарных состояний

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = 0$$

имеем уравнение Шрёдингера

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) |\psi(x)\rangle_n = E_n |\psi(x)\rangle_n.$$

Решения этого уравнения имеют вид

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$|\psi(x)\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x\right),$$

где $H_n(-)$ — полином Эрмита.

Строим графики плотности вероятности $||\psi(x)\rangle_n|^2$ для $x \in (-6, 6)$ при $m = \hbar = \omega = 1$ (рис. 3).

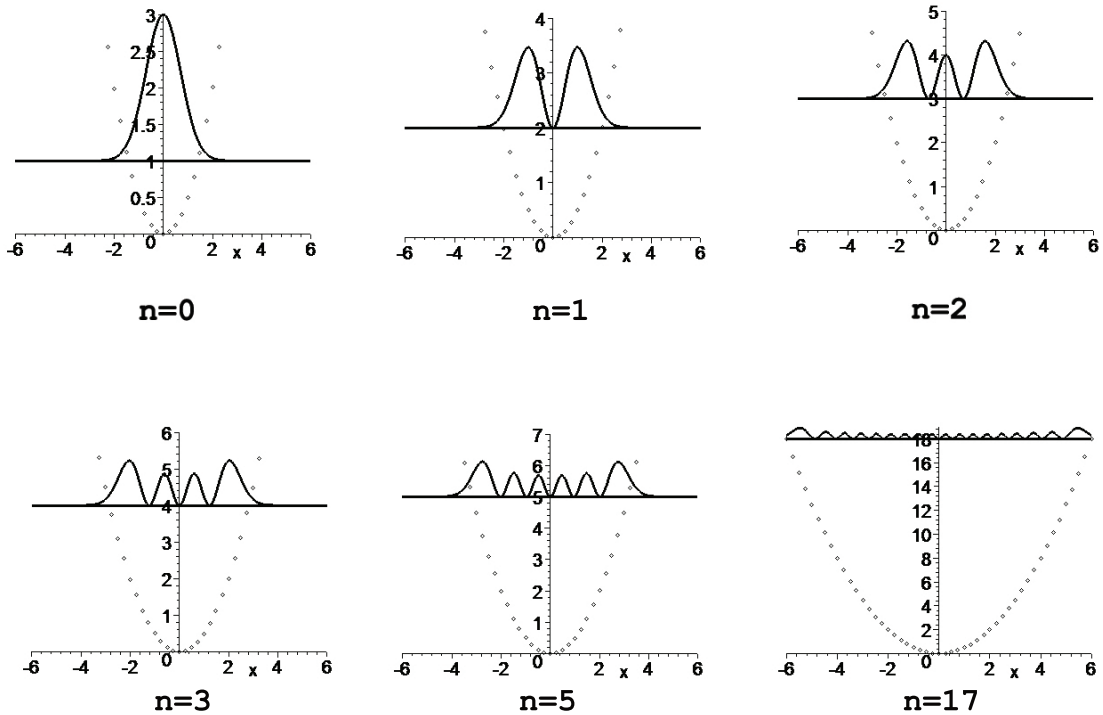


Рис. 3. Графики плотности вероятности $||\psi(x)\rangle_n|^2$ (умноженной на 4) осциллятора. Точками изображён график потенциала $U = x^2/2$, который характеризует природу, тип социальных настроений

Из рис. 3 видно, что во всех состояниях брожение присутствует. В основном состоянии $n = 0$ настроения близки к господствующему настроению $x = 0$. При $n = 1$ инакомыслие резко разбивается на два противоположных, при $n = 2$ оно уже имеет три группировки (партии), одна из которых «жмётся» к господствующей. Чем больше n , тем сильнее расслоение и число группировок уже $n + 1$, причём доминируют две строго противоположные и занимающие самые крайние позиции (рис. 3, $n = 17$). Всё это похоже, например, на разнообразие партий в демократическом обществе.

График для $n = 0$ характеризует основное состояние осциллятора. В области допустимых изменений $x \in (-6, 6)$ величина $||\psi(x)\rangle_n|^2 \neq 0$. Это говорит о неуничтожимости брожений. В случае описания брожений на основе классической ньютоновской модели осцилляций мы в основном состоянии имели бы тождественный нуль.

Важно понять, что означает число E_n ? Число «партий» растёт с ростом E_n , т. е. с ростом n .

Известно, что чем больше денег у влиятельных в бизнесе (или во власти) людей, тем больше партий. Таким образом, E_n — это размер ресурсов, посредством которых могут быть реализованы те или иные социальные действия. По сути дела, энергия в физике, определяемая как объём совершаемой работы, — это тот же ресурс, характеризующий действия в потенциале.

Остаётся ответить на вопрос: с какой ситуацией общественных настроений мы будем иметь дело в реальности?

В *квантовой* реальности, т. е. не в привычной классической, являющейся однозначной, и именно это нам предлагают квантовые модели, мы имеем дело с когерентной суперпозицией

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n |\psi(x)\rangle_n,$$

где $|c_n|^2$ – вероятность для некоторой группы социологов, пытающихся определиться, с чем же они имеют дело в действительности, какое общественное настроение они фиксируют, выйти на ответ, что имеем дело с $||\psi(x)\rangle_n|^2$. Другая группа социологов вполне может выйти на другой ответ, скажем, на $||\psi(x)\rangle_m|^2$ с $m \neq n$. Но истина в том, что в квантовой реальности все варианты $|\psi(x)\rangle_n$ общественных настроений присутствуют одновременно!

Однако, вспоминая о декогеренции, мы можем сказать, что какая-то группа социологов разрушила когерентную суперпозицию и мир стал тем, который замеры эти социологи.

Не все, знающие квантовую механику, так думают. Может быть, измерения местонахождения электрона и уничтожает альтернативы быть электрону в другом месте, но нет желания верить, что группа социологов своими манипуляциями *задаёт* конкретные общественные воззрения. Общество людей — море сознающих особей — это не бессознательный крошка-электрон, и нет оснований думать, что всё в мире людей можно измерить и вычислить. Квантовая социология даёт нам повод сомневаться в истинности копенгагенской интерпретации квантовой механики, которую мы только что представили на языке декогеренции.

Наше описание брожения общественных настроений является качественным в том смысле, что оно фиксирует, предсказывает само явление, но числа — вероятности распределения настроения — достаточно условные. Точными они станут лишь при уточнении констант $m, \hbar, \omega$ и шкалы x . Наконец, мы рассмотрели модель гармонического осциллятора, а более точной является не она, а модель ангармонического осциллятора.

8. Социальные действия, наблюдение и наблюдаемые

Пусть O — социальный объект. Кроме множества всех социальных действий $\mathcal{D}$, называемых в квантовой механике (унитарными) операторами⁶, которые могут быть совершенны над социальными объектами кем-то и которые полезны для полного описания и понимания сущности O , следует выделить ещё *наблюдаемые* объекта O . Это те величины, характеристики социального объекта, которые *измеряются* в конкретном социологическом эксперименте.

Физики наблюдаемые описывают так же, как операторы, но уже другого типа, чем действия. Их называют *эрмитовыми операторами*. Как и социаль-

⁶Оператор в переводе означает «то, что оказывает действие».

ные действия, наблюдаемые воздействуют на состояния социальных объектов, но социальные действия преобразуют состояния социальных объектов, предсказывают состояние социального объекта в следующий момент времени, а наблюдаемые выдают результаты измерений, экспериментов над социальными объектами, т. е. выдают характеристики социального в момент измерения (эксперимента).

Все состояния социальных объектов образуют социальное пространство $\mathcal{H}$, на котором и работают как социальные действия $\hat{D}$, так и наблюдаемые $\hat{N}$:

$$\hat{D} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \hat{N} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Работа социальных действий описывается, как мы знаем, уравнением Шрёдингера (см. § 4.4), работа наблюдаемого $\hat{N}$, т. е. наблюдение $\hat{N}$ состояния $|x\rangle$ объекта O выглядит как

$$\hat{N} : |x\rangle = \sum_j c_j |x_j\rangle \xrightarrow[\text{наблюдение (измерение)}]{\uparrow} |x_{j_0}\rangle \text{ с вероятностью } |c_{j_0}|^2$$

наблюдение (измерение) обнаруживает характеристику-число n_{j_0} ,

где

$$\hat{N}(|x_j\rangle) = n_j |x_j\rangle, \quad n_j \in \mathbb{R}.$$

Об эволюции социального объекта мы можем судить по результатам измерения его значимых характеристик. Но эти характеристики — результат социологического эксперимента, иначе говоря, нам нужно изучить эволюцию наблюдаемых.

Но из-за того факта, что наблюдаемые, скажем $\hat{N}$, объекта (системы) O теперь являются операторами в социальном пространстве $\mathcal{H}$,

$$\hat{N} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

необходимо определиться с дифференциальным уравнением для $\hat{N}$. Но таким уравнением является в квантовой механике уравнение Гейзенберга

$$\frac{d\hat{N}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{N}], \quad (13)$$

$$\hat{N}|_{t=0} = \hat{N}(0).$$

Таким образом, перед нами открывается обширное поле исследований эволюции социальных объектов, их характеристик с целью предсказания того, что будет происходить, начиная с данного момента $t = 0$. Для этого только достаточно установить (построить) социальное пространство, описать в нём социальный объект, т. е. понять, как выглядит отвечающий ему гамильтониан, и определиться, каким наблюдением мы озадачиваемся.

Теперь посмотрим, как понятие наблюдаемых и их эволюция описывают этногенез и миграцию (см. § 9). Будем задавать сам объект, наблюдаемые, вычислять эволюцию наиболее интересных наблюдаемых.

9. Социология при вторичном квантовании

Достаточно много квантовых моделей для описания социальных объектов построил Фабио Багарелло с соавторами [24–26]. При этом они опирались не на понятия волновых функция, а на *квантовую механику вторичного квантования*, когда частицы физики описывают не волновыми функциями, а так называемыми *операторами уничтожения $\hat{a}$ и рождения $\hat{a}^+$* , которые по сути дела являются специфичными наблюдаемыми. С точки зрения социологии эти операторы обеспечивают социальное бытие и разворачивают, «рождают» наблюдаемые социальные явления и процессы.

О чем идёт речь? Изложим идеи Багарелло популярным языком без излишней математики.

Социальный объект, как мы понимаем, всегда из чего-то состоит, например: 1) из людей; 2) из студенческих групп; 3) из социальных институтов и т.д.

Конечно, социальный объект не обязан включать в себя всех людей, или все студенческие группы, или все социальные институты. Он *часть*, подмножество полного набора тех элементов, из которых сам состоит. Эти полные наборы в каждом конкретном случае изучаемого социального объекта образуют то, что мы назовём *социальным пространством* и обозначим как $\mathcal{H}$,

$$O \subset \mathcal{H}.$$

Социальное пространство следует описывать, т. е. сообщать из чего или кого оно состоит. В случае использования методов квантовой механики социальное пространство носит абстрактный характер, в нём элементы, смысл которых нам понятен, можно **складывать** и **умножать на комплексные числа!** Это крайне необычно, но к этому можно привыкнуть — ведь речь идёт о новых процедурах вычислений, а вычисления сами по себе — вещь абстрактная, но со временем становящаяся обыденной. Социолог, вспомни о том, как ты используешь факторный анализ или методы математической статистики. Вряд ли ты задумываешься о формальных математических тонкостях своих манипуляций — делаешь, как учили и как привык.

9.1. Описание этногенеза

Рассмотрим два взаимодействующих социальных объекта, которые являются двумя этносами O_1 и O_2 , живущими на одной территории.

Каждому этносу O_j сопоставим в нашей модели оператор уничтожения $\hat{a}_j$ и оператор рождения $\hat{a}_j^+$, и связанный с ними числовой оператор $\hat{n}_j := \hat{a}_j^+ \hat{a}_j$.

Предположим следующие антикоммутирующие правила:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^+\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = 0, \quad \{\hat{a}_i^+, \hat{a}_j^+\} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

где

$$\{x, y\} = xy + yx.$$

Из этих правил, в частности, следует, что

$$(\hat{a}_j)^2 = (\hat{a}_j^+)^2 = 0.$$

Следовательно, если $\phi_{(0,0)}$ — основное состояние, в котором может пребывать этнос при самых минимальных требованиях к поддержанию жизни, то равенства

$$\hat{a}_1\phi_{(0,0)} = 0, \quad \hat{a}_2\phi_{(0,0)} = 0$$

означают, что социальные действия $\hat{a}_j$, которые мы называем операторами уничтожения, сводят этнос на «нет», т. е. ведут его к гибели.

С биологической и / или социологической точки зрения для каждого этноса, который мы будем рассматривать, у нас будут только две возможные нетривиальные ситуации. В первом (основное состояние) очень низкая плотность, а во втором (возбуждённое состояние) плотность очень высока. Следовательно, если мы попытаемся увеличить плотность возбуждённого состояния или если мы попытаемся уменьшить плотность основного состояния, мы просто уничтожим этот этнос.

Существуют верхняя и нижняя границы плотности популяций, которые невозможно преодолеть по очевидным причинам: например, потому что окружающая среда не может дать населению достаточно еды. Конечно, это довольно резкое разделение всего на два уровня может показаться неудовлетворительным. Конечно, нетрудно расширить нашу процедуру до произвольного числа уровней, но это потребует преодоления некоторых технических трудностей.

Жизнь возможна только в состояниях, порождаемых из основного состояния:

$$\phi_{(0,0)}, \phi_{(1,0)} = \hat{a}_1^+\phi_{(0,0)}, \phi_{(0,1)} = \hat{a}_2^+\phi_{(0,0)}, \phi_{(1,1)} = \hat{a}_1^+\hat{a}_2^+\phi_{(0,0)}, \quad (15)$$

и в их комбинациях

$$\sum_{i,j=0,1} \alpha_{ij}\phi_{(i,j)}, \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Это означает, что имеем 4-мерное социальное пространство

$$\mathcal{H} = \left\{ |\phi\rangle = \sum_{i,j=0,1} \alpha_{ij}\phi_{(i,j)} : \alpha_{ij} \in \mathbb{C} \right\}.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ вводим скалярное произведение $\langle -, - \rangle$, относительно которого элементы (15) образуют ортонормированный базис.

Имеем следующие уравнения на собственные значения:

$$\hat{n}_1\phi_{(n_1,n_2)} = n_1\phi_{(n_1,n_2)}, \quad \hat{n}_2\phi_{(n_1,n_2)} = n_2\phi_{(n_1,n_2)}.$$

На основании этих равенств можно говорить следующее:

1) $\phi_{(0,0)}$ — означает, что существует очень мало субъектов из двух этносов в нашем регионе;

- 2) $\phi_{(1,0)}$ — означает, что очень мало людей из O_2 , но очень много их из O_1 ;
 3) $\phi_{(0,1)}$ — означает, что очень мало людей из O_1 , но очень много их из O_2 ;
 4) $\phi_{(1,1)}$ описывает случай, когда оба этноса многочисленны.

Среда не может прокормить людей больше некоторого предела: увеличение численности населения приведёт к гибели этноса. Это следует из равенств

$$\begin{aligned}\hat{a}_1^+ \phi_{(1,0)} &= \hat{a}_1^+ (\hat{a}_1^+ \phi_{(0,0)}) = (\hat{a}_1^+)^2 \phi_{(0,0)} = 0, \\ \hat{a}_1^+ \phi_{(1,1)} &= \hat{a}_1^+ (\hat{a}_1^+ \phi_{(0,1)}) = (\hat{a}_1^+)^2 \phi_{(0,1)} = 0,\end{aligned}$$

Эволюция этноса, как мы писали, задаётся гамильтонианом.

Рассматриваем гамильтониан, который состоит из двух гамильтонианов одиночного существования каждого этноса и из гамильтониана $\hat{H}_I$, учитывающего взаимодействие двух этносов:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_I, \\ \hat{H}_0 &= \omega_1 \hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + \omega_2 \hat{a}_2^+ \hat{a}_2, \\ \hat{H}_I &= \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 + \hat{a}_2^+ \hat{a}_1,\end{aligned}$$

где ω_j и λ — действительные положительные величины.

В частности, $\lambda = 0$, когда два этноса не взаимодействуют. В этом случае $\hat{H}$ описывает статическую ситуацию, в которой плотности двух этносов, описываемые числовыми операторами $\hat{n}_j$, не меняются.

Уравнения Гейзенберга имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}_1}{dt}(t) &= -i\omega_1 \hat{a}_1(t) - i\lambda \hat{a}_2(t), \quad \hat{a}_1(0) = \hat{a}_1, \\ \frac{d\hat{a}_2}{dt}(t) &= -i\omega_2 \hat{a}_2(t) - i\lambda \hat{a}_1(t), \quad \hat{a}_2(0) = \hat{a}_2.\end{aligned}$$

Определим плотность каждого этноса как

$$n_j(t) := \langle \phi_{(n_1, n_2)}, \hat{n}_j(t) \phi_{(n_1, n_2)} \rangle.$$

Если в момент $t = 0$

$$n_1(0) = n_1, \quad n_2(0) = n_2,$$

то после вычислений получаем:

$$\begin{aligned}n_1(t) &= n_1 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2} + \frac{4\lambda^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2} \left[n_1 \cos^2 \left(\frac{\delta t}{2} \right) + n_2 \sin^2 \left(\frac{\delta t}{2} \right) \right], \\ n_2(t) &= n_2 \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2} + \frac{4\lambda^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2} \left[n_2 \cos^2 \left(\frac{\delta t}{2} \right) + n_1 \sin^2 \left(\frac{\delta t}{2} \right) \right], \\ \delta &= \sqrt{(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\lambda^2}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$n_1(t) + n_2(t) = n_1 + n_2.$$

Мы видим, что H_I описывает ситуацию, в которой плотность этноса O_1 увеличивается, а O_2 уменьшается, или наоборот. В биологии эта ситуация называется «волки и зайцы». В этнологии в данном случае говорят об этногенезе: один этнос приходит на смену другому.

9.2. Миграция

Покажем, как можно описывать процесс миграции из региона $\mathcal{R}_1$ (Африка) в регион $\mathcal{R}_2$ (Европа) через регион $\mathcal{R}_3$ (Средиземное море).

Рассматриваем два взаимодействующих этноса, которые наблюдаем в этих трёх регионах R_j . Их объединение $\mathcal{R}$ разобьём на $L \cdot L$ ячеек $\alpha = 1, \dots, L^2$ (см. рис. 4).

Имеем

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3,$$

$$\mathcal{R}_1 = \{1, 2, 3, 4\} \text{ (левый нижний угол),}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{L^2 - L - 1, L^2 - L, L^2 - 1\}, \text{ (правый верхний угол)}$$

$$\mathcal{R}_3 = \{\text{остальные ячейки}\}.$$

L									$\cdots$	$L \cdot L$
$L+1$	$L+2$	$\cdots$	$\cdots$							
1	2	$\cdots$	$\cdots$					$\cdots$	$L-1$	L

Рис. 4. Регионы

Для каждой ячейки α имеем операторы $\hat{a}_\alpha^+, \hat{a}_\alpha, \hat{n}_\alpha^{(a)} := \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\alpha$ для 1-го этноса и $\hat{b}_\alpha^+, \hat{b}_\alpha, \hat{n}_\alpha^{(b)} := \hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha$ для 2-го этноса.

Полагаем

$$\{\hat{a}_\alpha, \hat{a}_\beta^+\} = \{\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\beta^+\} = \delta_{ij}, \quad \{\hat{a}_\alpha^\sharp, \hat{b}_\beta^\sharp\} = 0.$$

Миграция описывается посредством гамильтонианов

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \hat{H}_{\alpha} + \hat{h},$$

$$\hat{H}_\alpha = \hat{H}_\alpha^0 + \lambda_\alpha \hat{H}_\alpha^I,$$

$$\hat{H}_\alpha^0 = \omega_\alpha^a \hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\alpha + \omega_\alpha^b \hat{b}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha, \quad \hat{H}_\alpha^I = \hat{a}_\alpha^+ \hat{b}_\alpha + \hat{b}_\alpha^+ a_\alpha,$$

и член собственно обеспечивающий миграцию (диффузию),

$$\hat{h} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 p_{\alpha\beta} \left\{ \gamma_a \left(\hat{a}_\alpha \hat{a}_\beta^+ + \hat{a}_\beta \hat{a}_\alpha^+ \right) + \gamma_b \left(\hat{b}_\alpha \hat{b}_\beta^+ + \hat{b}_\beta \hat{b}_\alpha^+ \right) \right\},$$

$$p_{\alpha\beta} \in \{0, 1\}, \quad \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R},$$

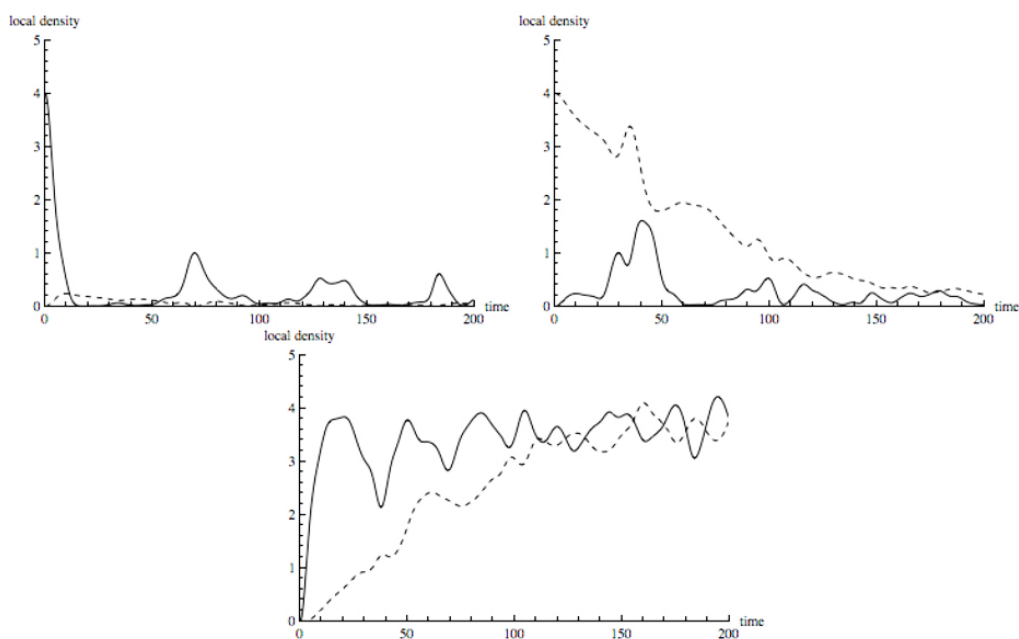


Рис. 5. Миграция африканцев в Европу: эволюция плотностей (сплошная линия для O_1 и пунктирная линия для O_2). Африка:верху (слева (a)); Европа:верху (справа (b)); Средиземное море:внизу (c): $\gamma_a = 0,1$; $\gamma_b = 0,004$; $\omega_\alpha^a = 1$, $\omega_\alpha^b = 0,3$; $\lambda_\alpha = 0,05$ для $\forall \alpha$ [26]

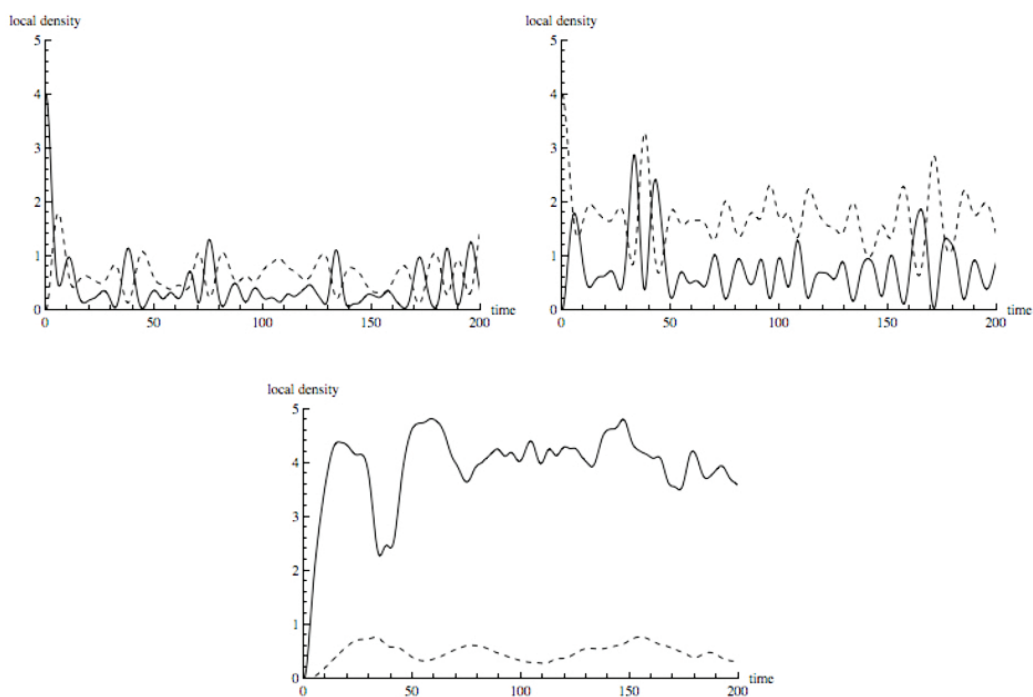


Рис. 6. Миграция африканцев в Европу: эволюция плотностей (сплошная линия для O_1 и пунктирная линия для O_2). Африка:верху (слева (a)); Европа:верху (справа (b)); Средиземное море:внизу (c): $\gamma_a = 0,1$; $\gamma_b = 0,004$; $\omega_\alpha^a = 1$, $\omega_\alpha^b = 0,3$ для $\forall \alpha$; $\lambda_\alpha = 0,2$ для $\forall \alpha \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$; $\lambda_\alpha = 0,05$ для $\forall \alpha \in \mathcal{R}_3$ [26]

$$p_{\alpha\alpha} = 0, \quad p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}.$$

Если $\gamma_a > \gamma_b$, то этнос O_1 более мобильный, чем O_2 .

Если $p_{\alpha\beta} = 1$, то это интерпретируем как переход соответствующего этноса из ячейки α в ячейку β . Переходы осуществляются только через общее ребро, и ни в коем случае через общую вершину.

Обращаем внимание на то, что аналогичную роль также играют γ_a и γ_b , которые, однако, могут принимать разные значения. Таким образом достигается различная мобильность для разных этносов.

Рассматривается случай $L = 11$. Если теперь выписать уравнения Гейзенберга для $\hat{a}_\alpha, \hat{b}_\alpha$, найти их решения и плотности этносов в каждом регионе $n_\alpha^{(a)}(t), n_\alpha^{(b)}(t)$, то получим картина миграции, которая зависит от выбора констант.

На рис. 5, 6 даны две картины миграции, которые Багарелло и Оливери [26] связали с массовой миграцией африканцев через Средиземное море в Европу.

10. Заключение

Мы предложили простейший (локальный) вариант аксиоматической квантовой социологии. Более сложный предполагает учёт того, что люди живут в (глобальном) пространстве планеты Земля и являются составной частью биосферы. Наброски такой теории были даны нами в разных вариантах в статьях [28, 29].

Особо отметим, что мы привели конкретные примеры расчётов поведения социальных объектов с использованием аппарата квантовой механики. Таких примеров на данный момент не так уж и много, и это связано с тем, что социологи, сталкиваясь с учебниками по квантовой механике, написанными физиками, «умирают», «убитые» чудовищным абстрактным уровнем их содержания, а физики... в наши дни они не интересуются социологией.

Впрочем, лет двадцать назад многие немецкие физики, оказавшиеся в толкучке собратьев по статистической физике, массово ушли в новую науку — эконофизику, созданную ими же. Будем надеяться на то, что нечто подобное произойдёт и с физиками, начинающими «толкаться» внутри здания квантовой механики, и они выйдут гурьбой на волю и начнут всесторонне развивать науку, уже получившую название «квантовая социология» [30–36], которой предстоит занять место так и несостоявшейся квантовой социологии и много обещавшей социкибернетики [37, 38].

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д. Замечание о правилах коммутации и уравнении Шрёдингера // Доклады АН СССР. 1934. Т. 4, № 4. С. 198–202.
2. Гуц А.К. Аксиоматики А.Д. Александрова для квантовой механики и теории относительности // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, Вып. 3. С. 61–72.

3. Yanbei Chen. Macroscopic quantum mechanics: theory and experimental concepts of optomechanics // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2013. V. 46. P. 104001 (50 pp).
4. Парсонс Т. Понятие общества: компоненты и их взаимоотношения // Тезис. Т. 1, № 2. С. 94–122.
5. Cooper B. The Quantum Turn in Social Science: Social Humanism as the New Metaphysics. URL: <https://medium.com/the-abs-tract-organization/the-quantum-turn-in-social-science-4dad9f92a6a5> (дата обращения: 20.04.21).
6. Гуц А.К., Лаптев А.А. Моделирование социальных систем: учебное пособие. Омск : изд-во ОмГУ, 2019. 160 с.
7. Дойч Д. Структура реальности. Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
8. Gerardi S. Mind Quantum Superposition/Social Superposition and Classic Sociological Theory // Sociology Mind. 2018. V. 8. P. 21–24.
9. Бехтерев В.М. Коллективная рефлексология: избранные работы по социальной психологии. М., 1994. 400 с.
10. Пенроуз Р. Тени разума. М. : Институт компьютерных исследований, 2005.
11. Гуц А.К. Основы квантовой кибернетики. Изд. 2, испр. и доп. М. : УРСС, 2016. 216 с.
12. Zohar D., Marshall I. The Quantum Society. London : Bloomsbury, 1993.
13. The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science: Applications and Grand Challenges / Eds. E. Haven, A. Khrennikov London : Macmillan Publishers Ltd., 2017.
14. Ингвар Аржан. Квантовая социология: как объяснить несовпадение итогов соцопросов населения. URL: <https://sneg.tv/38812-kvantovaja-sociologija-kak-objasnit-nesovpadenie-itogov-linebreak-socoprosov-naselenija> (дата обращения: 20.04.21).
15. Энгельс Ф. Диалектика природы. М., 1969. С. 169.
16. Александров А.Д. О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике // Доклады АН СССР. 1952. Т. 84, № 2. С. 253–256.
17. Guts A.K. Sociology of collective reflexes // Annali d'Italia. 2021. No 17. P.57-58
18. Wendt A. Quantum Mind and Social Science. Cambridge University Press, 2015.
19. Maldacena J. TASI 2003 lectures on AdS/CFT. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0309246v5> (дата обращения: 20.04.21).
20. Van Raamsdonk M. Building up spacetime with quantum entanglemen. URL: <https://arxiv.org/pdf/1005.3035v1.pdf> (дата обращения: 20.04.21).
21. Ryu S., Takayanagi T. Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001v2> (дата обращения: 20.04.21).
22. Гуц А.К. Квантовая социология, социальная сцепленность (запутанность) и Внешний мир // VIII Международная научная конференция «Математическое и компьютерное моделирование» (Омск, 20 ноября 2020 г.) [Электронный ресурс]. Омск : ОмГУ, 2020. С. 203–205.
23. Шульман М.Х. Экспериментальная проверка неравенства Леггетта-Гарга URL: [http://www.timeorigin21.narod.ru/rus\\$_{-}\\$translation/About\\$_{-}\\$LGI\\$_{-}\\$test.pdf](http://www.timeorigin21.narod.ru/rus$_{-}$translation/About$_{-}$LGI$_{-}$test.pdf) (дата обращения: 20.04.21).
24. Badarello F. Quantum concepts in the social, ecological and biological sciences.

- Cambridge University Press, 2019.
25. Bagarello F., Oliveri F. An operator description of interactions between populations with applications to migration // *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*. 2013. V. 23. P. 471–492.
 26. Bagarello F., Oliveri F. An operator-like description of love affairs // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 2011. V. 70. P. 3235–3251.
 27. Guts A.K. Sociology of public opinion within the framework of quantum turn // *The scientific heritage*. 2021. V. 4, No. 64. P. 53–55.
 28. Гуц А.К. Метафизика времени и реальности // *Метафизика. Век XXI. Альманах*. Вып. 4. / Под ред. Ю.С. Владимирова. М. : Изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2011. 463 с. С. 255–274.
 29. Гуц А.К. Квантовый подход к описанию социальной статистики и социальной динамики Огюста Конта // *Математические структуры и моделирование*. 2016. №. 4(40). С. 65–71.
 30. Ваторопин А.С. Социология и квантовая физика: поиск новой социологической парадигмы // *Вестник Сургутского государственного педагогического университета*. 2015. № 4(37). С. 72–80.
 31. Gerardi S. Mind Quantum Superposition/Social Superposition and Classic Sociological Theory // *Sociology Mind*. 2018. V. 8. P. 21–24.
 32. Haven, E., Khrennikov A. *Quantum social science*. New York : Cambridge University Press, 2013.
 33. Латыпов Р.А., Комиссарова Г.Н. Об исследовании концептов как квантовых сущностей // *Филологические науки. Вопросы теории и практики*. 2013. № 3–1. С. 99–104.
 34. Рудный Е. Квантовая механика в социальных науках. URL: <http://blog.rudnyi.ru/ru/2019/08/quantum-social-science.html> (дата обращения: 20.04.21).
 35. Vol E.D. Three "quantum" models of competition and cooperation in interacting biological populations and social groups. URL: <https://arxiv.org/abs/1209.5837v1> (дата обращения: 20.04.21).
 36. Гречко Т.К. Применение квантовой социологии к деятельности государственного служащего URL: <http://www.rusnauka.com/TIP/All/Gosuprav/3.html> (дата обращения: 20.04.21).
 37. Yi-Fang Chang. Social Synergetics, Social Physics and Research of Fundamental Laws in Social Complex Systems. URL: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0911/0911.1155.pdf> (дата обращения: 20.04.21).
 38. Arnopoulos P. Sociophysics & Sociocybernetics: An Essay on the Natural Roots & Limits of Political Control. URL: <https://spectrum.library.concordia.ca/983192/1/SOCIOCYBERNETICS.pdf> (дата обращения: 20.04.21).

QUANTUM MECHANICS FOR SOCIOLOGISTS: THE AXIOMS OF QUANTUM SOCIOLOGY

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. In this article an attempt to present the apparatus of quantum mechanics in a language accessible to a sociologist is enounced. The principles of quantum mechanics are stated as axioms. Examples of specific calculations of the behavior of social objects using the concepts and methods of quantum mechanics are given.

Keywords: quantum sociology, quantum physics, modern scientific picture of the world, quantum character of social reality, the public consciousness, quantum society, quantum sociology axioms.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.D. Zamechanie o pravilakh kommutatsii i uravnenii Shredingera. Doklady AN SSSR, 1934, vol. 4, no. 4, pp. 198–202. (in Russian)
2. Guts A.K. and Aksiomatiki A.D. Aleksandrova dlya kvantovoi mekhaniki i teorii otnositel'nosti. Vestnik Novosibirskogo gosudarstvennogo universiteta, Seriya: matematika, mekhanika, informatika, 2012, vol. 12, iss. 3, pp. 61–72. (in Russian)
3. Yanbei Chen. Macroscopic quantum mechanics: theory and experimental concepts of optomechanics. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 2013, vol. 46, pp. 104001 (50 pp).
4. Parsons T. Ponyatie obshchestva: komponenty i ikh vzaimootnosheniya. Tezis, vol. 1, no. 2, pp. 94–122. (in Russian)
5. Cooper B. The Quantum Turn in Social Science: Social Humanism as the New Metaphysics. URL: <https://medium.com/the-abs-tract-organization/the-quantum-turn-in-social-science-4dad9f92a6a5> (20.04.21).
6. Guts A.K. and Laptev A.A. Modelirovanie sotsial'nykh sistem: uchebnoe posobie. Omsk, izd-vo OmGU, 2019, 160 p. (in Russian)
7. Doich D. Struktura real'nosti. Izhevsk, NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2001. (in Russian)
8. Gerardi S. Mind Quantum Superposition / Social Superposition and Classic Sociological Theory. Sociology Mind, 2018, vol. 8, pp. 21–24.
9. Bekhterev V.M. Kollektivnaya refleksologiya: izbrannye raboty po sotsial'noi psikhologii. Moscow, 1994, 400 p. (in Russian)
10. Penrouz R. Teni razuma. Moscow, Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2005. (in Russian)
11. Guts A.K. Osnovy kvantovoi kibernetiki. Izd. 2, ispr. i dop., Moscow, URSS, 2016, 216 p. (in Russian)
12. Zohar D. and Marshall I. The Quantum Society. London, Bloomsbury, 1993.

13. The Palgrave Handbook of Quantum Models in Social Science: Applications and Grand Challenges. Eds. E. Haven and A. Khrennikov, London, Macmillan Publishers Ltd., 2017.
14. Ingvar Arzhan. Kvantovaya sotsiologiya: kak ob"yasnit' nesovpadenie itogov sotsoprosov naseleniya. URL: <https://sneg.tv/38812-kvantovaya-sociologija-kak-objasnit-nesovpadenie-itogov-linebreak-socoprosov-naselenija> (20.04.21). (in Russian)
15. Engel's F. Dialektika prirody. Moscow, 1969, pp. 169. (in Russian)
16. Aleksandrov A.D. O paradokse Einshteina v kvantovoi mekhanike. Doklady AN SSSR, 1952, vol. 84, no. 2, pp. 253–256. (in Russian)
17. Guts A.K. Sociology of collective reflexes. Annali d'Italia, 2021, no 17, pp.57-58.
18. Wendt A. Quantum Mind and Social Science. Cambridge University Press, 2015.
19. Maldacena J. TASI 2003 lectures on AdS/CFT. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0309246v5> (20.04.21).
20. Van Raamsdonk M. Building up spacetime with quantum entanglemen. URL: <https://arxiv.org/pdf/1005.3035v1.pdf> (20.04.21).
21. Ryu S. and Takayanagi T. Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001v2> (20.04.21).
22. Guts A.K. Kvantovaya sotsiologiya, sotsial'naya stseplennost' (zaputannost') i Vneshnii mir. VIII Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya "Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie", Omsk, 20 noyabrya 2020 g. [Elektronnyi resurs], Omsk, OmGU, 2020, pp. 203–205. (in Russian)
23. Shul'man M.Kh. Eksperimental'naya proverka neravenstva Leggetta-Garga. URL: [http://www.timeorigin21.narod.ru/rus\\$_{-}\\$translation/About\\$_{-}\\$LGI\\$_{-}\\$test.pdf](http://www.timeorigin21.narod.ru/rus$_{-}$translation/About$_{-}$LGI$_{-}$test.pdf) (20.04.21). (in Russian)
24. Badarello F. Quantum concepts in the social, ecological and biological sciences. Cambridge University Press, 2019.
25. Bagarello F. and Oliveri F. An operator description of interactions between populations with applications to migration. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 2013, vol. 23, pp. 471–492.
26. Bagarello F. and Oliveri F. An operator-like description of love affairs. SIAM Journal of Applied Mathematics, 2011, vol. 70, pp. 3235–3251.
27. Guts A.K. Sociology of public opinion within the framework of quantum turn. The scientific heritage, 2021, vol. 4, no. 64, pp. 53–55.
28. Guts A.K. Metafizika vremeni i real'nosti, Metafizika. Vek XXI. Al'manakh. Vyp. 4., Pod red. Yu.S. Vladimirova, Moscow, Izd-vo "BINOM. Laboratoriya znaniy", 2011, 463 p, pp. 255–274. (in Russian)
29. Guts A.K. Kvantovyi podkhod k opisaniyu sotsial'noi statiki i sotsial'noi dinamiki Ogyusta Konta. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2016, no. 4(40), pp. 65–71. (in Russian)
30. Vatoropin A.S. Sotsiologiya i kvantovaya fizika: poisk novoi sotsiologicheskoi paradigmy. Vestnik Surgutskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta, 2015, no. 4(37), pp. 72–80. (in Russian)
31. Gerardi S. Mind Quantum Superposition / Social Superposition and Classic Sociological Theory. Sociology Mind, 2018, vol. 8, pp. 21–24.
32. Haven, E. and Khrennikov A. Quantum social science. New York, Cambridge Univer-

- sity Press, 2013.
33. Latypov R.A. and Komissarova G.N. Ob issledovanii kontseptov kak kvantovykh sushchnostei. *Filologicheskie nauki. Voprosy teorii i praktiki*, 2013, no. 3–1, pp. 99–104. (in Russian)
 34. Rudnyi E. Kvantovaya mekhanika v sotsial'nykh naukakh. URL: <http://blog.rudnyi.ru/ru/2019/08/quantum-social-science.html> (20.04.21). (in Russian)
 35. Vol E.D. Three "quantum" models of competition and cooperation in interacting biological populations and social groups. URL: <https://arxiv.org/abs/1209.5837v1> (20.04.21).
 36. Grechko T.K. Primenenie kvantovoi sotsiologii k deyatel'nosti gosudarstvennogo sluzhashchego. URL: <http://www.rusnauka.com/TIP/A11/Gosuprav/3.html> (20.04.21). (in Russian)
 37. Yi-Fang Chang. Social Synergetics, Social Physics and Research of Fundamental Laws in Social Complex Systems. URL: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0911/0911.1155.pdf> (20.04.21).
 38. Arnopoulos P. Sociophysics & Sociocybernetics: An Essay on the Natural Roots & Limits of Political Control. URL: <https://spectrum.library.concordia.ca/983192/1/SOCIOCYBERNETICS.pdf> (20.04.21).

Дата поступления в редакцию: 25.04.21

О ВЗАИМОЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Д.А. Салимоненко¹

к.ф.-м.н., доцент кафедры программирования и экономической информатики
Башкирского государственного университета, e-mail: seadima@goon.ru

А.М. Зиганшин²

к.м.н., доцент, e-mail: Zigaidar@yandex.ru

В.А. Мудров³

к.м.н., доцент, e-mail: mudrov_viktor@mail.ru

Ю.Д. Салимоненко⁴

студентка 4 курса, e-mail: iyulya99@gmail.com

¹Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия

²Башкирский государственный медицинский университет, г. Уфа, Россия

³Читинская медицинская академия, г. Чита, Россия

⁴Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа, Россия

Аннотация. В статье проведён анализ возможности применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования взаимозависимыми переменными коэффициентами. Проблема взаимозависимости коэффициентов оценки состоит в том, что различные столбцы могут быть зависимыми друг от друга, что способно вызывать затруднения в определении минимальной оценки — на каждой итерации симплекс-метода. Это особенно актуально при определении оптимальных (для каждой итерации) значений переменных коэффициентов. В работе показано, что усреднение значений, предлагаемое рядом исследователей, применять необязательно, исключение составляют вырожденные задачи линейного программирования, в которых присутствует неединственность решения.

Ключевые слова: задача, линейное программирование, переменный коэффициент, симплекс-метод, генерация столбцов, взаимозависимый, параметр.

Введение

Задача линейного программирования с переменными параметрами представляет собой систему линейных уравнений и/или неравенств, в которой изменяться (варьироваться) могут не только переменные, входящие в её состав, но и коэффициенты, а также правая часть и параметры (коэффициенты при переменных) целевой функции. Именно поэтому такие задачи называются задачами с переменными параметрами. Наша статья посвящена отдельному классу таких

задач — задачам линейного программирования с переменными коэффициентами (ЛППК). Вообще говоря, переменными могут быть все коэффициенты задачи ЛППК или же только некоторые из них.

При этом на практике всегда возникает ситуация, когда на переменные коэффициенты налагаются те или иные ограничения, которые в свою очередь также имеют форму линейных уравнений и/или неравенств. Такие ограничения нередко содержат взаимосвязи между коэффициентами. В эти ограничения, конечно, могут входить и постоянные коэффициенты тоже.

Как правило, учёные, изучающие ЛППК, рассматривают только такие задачи, в которых присутствуют взаимосвязи только в пределах того или иного столбца, причём таких столбцов может быть более одного. Этот класс задач в последнее время уже достаточно хорошо разработан, в научной литературе приводятся эффективные алгоритмы их решения, в том числе основанные на использовании симплекс-метода. А вот что касается задач, содержащих взаимосвязи между коэффициентами, находящимися в различных столбцах, здесь следует отметить, что, к сожалению, методология их решения практически не разработана. В пределах теоретических подходов исследователи ограничиваются далеко не всегда обоснованными умозрительными методологиями, а на практике, в процессе создания компьютерных алгоритмов для решения, ограничиваются разве что теми или иными частными случаями. В общем же случае алгоритмы решения подобных задач в настоящее время отсутствуют. При этом переменные коэффициенты задачи ЛППК будут взаимозависимыми.

В нашей работе предлагается подход, позволяющий решать задачи линейного программирования с взаимозависимыми переменными коэффициентами при помощи симплекс-метода. Подход демонстрируется на простом примере задачи ЛППК.

1. Общая постановка задачи ЛППК с взаимозависимыми коэффициентами

Задача линейного программирования с переменными коэффициентами (ЛППК) в своей общей постановке имеет следующий общий вид [1]–[13]:

1. В матричной форме записи:

$$\max F = c^T x \quad (1)$$

при условиях

$$A \cdot x \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} B, \quad (2)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j_0} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j_0} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & a_{m-1j_0} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj_0} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

2. То же самое, но в координатной форме записи:

$$\max F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \quad (4)$$

$i = 1, \dots, m,$

$$x_j \geq 0, \quad (5)$$

$j = 1, \dots, n,$

где m — число ограничений (4),

n — число переменных (5),

и при дополнительных ограничениях на переменные коэффициенты:

$$\begin{cases} a_{11}^- \leq a_{11} \leq a_{11}^+ \\ s_k^- \leq \sum_{i=1}^m d_{kij} a_{ij} \leq s_k^+, k = 1, \dots, K \\ \sum_{i=1}^m p_{lij} a_{ij} = r_l, l = 1, \dots, L \\ c_j^- \leq c_j \leq c_j^+. \end{cases} \quad (6)$$

В системе ограничений (6) все параметры $a_{ij}^-, a_{ij}^+, s_k^-, d_{kij}, s_k^+, p_{lij}, r_l, c_j^-, c_j^+$ представляют собой константы, задаваемые в процессе формулирования задачи ЛППК [12, 14]. Ограничения (6) характеризуют независимые переменные коэффициенты a_{ij} , т. е. такие, что

$$a_{ij} \neq f(a_{\gamma\eta}), j \neq \eta,$$

где f — некоторая функция.

Однако в ряде практических задач нередко встречается противоположная ситуация — когда подобная зависимость может присутствовать [9], [13], [15]–[17], [20], [21]. Очень часто такая зависимость является линейной, т. е. имеют ограничения вида

$$\sum_{i,j} \sigma_{vij} a_{ij} = \gamma_\nu, \nu = 1, \dots, \nu_1, \quad (7)$$

где $\sigma_{vij} a_{ij}$, γ_ν — некоторые (известные) постоянные.

2. Имеющиеся на сегодняшний день подходы к решению задачи

Немало исследователей предлагают подходы, так или иначе основанные на переборе всевозможных решений задачи линейного программирования [10], [13], [16]. Такие подходы в целом более-менее работоспособны, когда речь идёт о постоянных коэффициентах задачи линейного программирования. Тогда как для переменных коэффициентов и, тем более, при наличии их взаимозависимости, такие подходы работоспособны разве что в простых случаях. В общем же случае тот факт, что коэффициенты задачи линейного программирования имеют не точечные (единственные), а интервальные значения, не позволяет использовать перебор решений по крайней мере потому, что при этом их получается бесконечно много. В самом деле, допустим на коэффициент a_{11} наложено ограничение вида (6):

$$a_{11}^- \leq a_{11} \leq a_{11}^+,$$

это ограничение можно записать иначе:

$$a_{11} \in [a_{11}^-; a_{11}^+].$$

Иными словами, имеем бесконечное множество возможных значений для переменного коэффициента a_{11} . При этом вовсе необязательно, что оптимальные значения переменного коэффициента будут находиться именно на границах этого отрезка [13], [21] (хотя на практике в ряде случаев это не редкость). Потому что другие переменные коэффициенты также могут иметь те или иные интервальные представления вида (6), между ними могут существовать сложные зависимости. Иными словами, очевидно, что получение оптимального решения на основе перебора возможных решений в общем случае при наличии (взаимозависимых) переменных коэффициентов невозможно.

Есть класс методов, основанный на приближенном решении задачи ЛППК. Эти методы зачастую работают достаточно быстро, но имеют один общий недостаток: при росте размерности задачи существенно растёт погрешность рас-

чётов, в итоге при некотором критическом значении размерности погрешность может стать весьма существенной [13], [15].

Симплекс-метод выгодно отличается от подобных методов. От методов, основанных на переборе, его отличие в том, что на каждой итерации значение целевой функции улучшается, тогда как при переборе это в общем случае не так. При этом оптимальные значения переменных коэффициентов вначале определяются не на основе перебора, а оптимизационным расчётом [13], [21] (и если то или иное оптимальное значение коэффициента соответствует границе соответствующего интервала, то расчётное значение заменяется этим граничным значением). Что, собственно, и даёт возможность определить их значения.

Что касается приближенных методов решения, то симплекс-метод в большей степени застрахован от накопления погрешности, так как (см. выше) на каждой его итерации производится перенабор матрицы столбцов переменных коэффициентов (для тех коэффициентов, оптимальные значения которых соответствуют границам их интервалов), а не расчёт их значений [13], [21]. Иными словами, каждая итерация симплекс-метода осуществляется как бы «заново», т. е. с использованием исходных значений тех переменных коэффициентов, значения которые получились равными граничным. Поэтому, условно говоря, погрешность расчёта значений переменных коэффициентов, оказавшихся равными их граничным значениям, на каждой итерации симплекс-метода обнуляется.

Исследователями предложена технология симплекс-метода для решения задач ЛППК с взаимозависимыми коэффициентами [13]–[15], [17]–[19], [22]. Однако предлагаемые алгоритмы являются достаточно сложными. Например, предлагаемый в работах [12], [13] алгоритм требует добавления дополнительных ограничений в состав исходной системы вида (6).

Такой алгоритм основан на следующих основных положениях:

- на этапах генерирования текущих вариантов переменных столбцов решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами (ЛППК), некоторые из таких коэффициентов входят в ограничения вида (7), и для них генерируются взаимозависимые варианты;

- на каждом этапе генерирования текущих вариантов переменных столбцов для каждой группы взаимозависимых вариантов, определяемых одним ограничением вида (7), составляется линейное уравнение с интенсивностями использования соответствующих взаимозависимых вариантов и включается в состав ограничений (6). Т. е. по сути предлагается производить усреднение вариантов значений переменных взаимозависимых столбцов.

То для его оценки получим

$$d_2 = -12 + 4y.$$

Следовательно (после выбора минимальной оценки), получится, что $y = 0$, а не 5, как было выше. Это в свою очередь может привести к (нередким) ситуациям, когда одни и те же столбцы будут то входить в базис, но выходить из него, что именуется заикливанием. Поэтому в реальный алгоритм решения

задачи ЛППК с взаимозависимыми переменными коэффициентами целесообразно включить блок, предназначенный для разрешения подобных ситуаций.

На наш взгляд, в усреднении нет необходимости. В самом деле, что подразумевается под оговоренным выше усреднением? Для этого рассмотрим, как протекает процесс решения задачи ЛППК при использовании симплекс-метода.

Изначально составляется матрица из единичных столбцов (которым, как правило, соответствуют искусственные переменные, впоследствии выходящие из базиса). Затем для каждого из столбцов определяются величины оценок, по результатам расчётов выбирается главный (разрешающий) столбец, входящий в базис на следующей итерации симплекс-метода. Наконец, выбирается разрешающая строка, производится преобразование базисной матрицы и столбца свободных членов, затем вновь вычисляются (уже для новой базисной матрицы) оценки для столбцов и т. д. [5]–[8], [10], [15], [23]–[25].

Так вот, на этапе вычисления (минимизации) оценок для каждого из переменных столбцов решается по сути отдельная задача линейного программирования. Причём на каждой итерации могут получиться, вообще говоря, различные значения переменных коэффициентов, входящих в столбцы. Иной раз бывает так, что на одной итерации некоторые коэффициенты принимают свои максимально достижимые (в рамках (6)) значения, тогда как на другой они могут стать минимальными. При этом значения переменных коэффициентов для каждой итерации запоминаются и в конце (на самой последней итерации, когда получено оптимальное решение) производится их усреднение. Тем самым рассчитываются значения переменных коэффициентов, принимаемые затем в качестве окончательных результатов расчёта [15], [17].

Данный подход мотивируется тем фактом, что коль скоро определённые значения переменных коэффициентов были получены на той или иной итерации решения задачи ЛППК, значит, они удовлетворяют ему и поэтому их следует учитывать в составе окончательного решения.

Однако, на наш взгляд, это излишне. Дело в том, что ранее полученные (предыдущие) значения переменных коэффициентов являлись подходящими для предварительных решений задачи, не являющихся оптимальным. Поэтому и их значения также не являются оптимальными. Следовательно, нет необходимости учитывать их в последующих расчётах. Оптимальными являются лишь те значения переменных коэффициентов, которые получены на самой последней итерации. То же, конечно, относится и к самим переменным.

Можно рассмотреть данный вопрос и с другой стороны. Для любой задачи ЛППК, имеющей конечное решение, существует хотя бы один оптимальный базис [2], [5], [7], [21], [26], [27]. Предположим, что этот базис уже известен (или найден путём расчётов). Тогда, вместо прохождения процедуры симплекс-метода, можно сразу составить базисную матрицу из столбцов, которые входят в него. Т. е. по сути ограничиться лишь последней итерацией.

При этом, как обычно, необходимо будет определить минимальные значения оценок (так как базис — оптимальный, то все они будут неотрицательными). В рамках решения задач минимизации оценок будут определены (оптимальные) значения каждого из переменных коэффициентов. Важно, что те значе-

ния переменных коэффициентов, которые могли быть получены на предыдущих итерациях, теперь известны не будут. Следовательно, усреднять будет попросту нечего, поэтому необходимо будет взять такие их значения, которые были получены на последней итерации.

Однако если мы не сразу берём готовый оптимальный базис, а начинаем решать задачу ЛППК, то ясно, что некоторые переменные коэффициенты могут принимать различные значения на разных итерациях. Следовательно, усреднённые их значения будут отличаться от оптимальных. Т. е. усреднение их будет ухудшать значение целевой функции. Кроме того, необходимость усреднения, на наш взгляд, не обоснована и, очевидно, является одним из методов приближенного решения задачи ЛППК.

Разумеется, для каждого из оптимальных базисов вполне возможны какие-то свои значения переменных коэффициентов. А при наличии неединственности решения, даже для одного и того же (оптимального) базиса переменные коэффициенты, вообще говоря, могут принимать не одно, а несколько (или диапазон) оптимальных значений, и все они в итоге будут соответствовать одному и тому же (оптимальному) значению целевой функции.

Именно поэтому усреднение имеет смысл только тогда, когда оптимальное решение неединственно: при этом получают некие усреднённые величины переменных коэффициентов — по всей области их оптимальных значений. Вместе с тем, даже и при таких обстоятельствах можно обойтись без усреднения. Ибо усреднение не улучшает значение целевой функции задачи ЛППК.

На наш взгляд, такая ситуация ничем не хуже той, при которой значения коэффициентов получаются усреднёнными, т. е., зачастую, лежащими в интервалах своей неопределённости. Ведь в любом случае имеется оптимальное решение и соответствующие ему величины переменных (x_j), а также переменных коэффициентов (a_{ij}). А уж какие из конкретных (оптимальных) значений выбрать в качестве окончательных — здесь, на наш взгляд, следует руководствоваться уже не математическими, а какими-либо иными соображениями. Например, выбирать их с учётом смысла (физического, экономического, социального и т. п. — в зависимости от того, что именно моделируется) системы или ситуации, которая описывается при помощи ограничений (1)–(7).

Таким образом, даже в условиях неединственности усреднение является необязательным (хотя ряд исследователей предпочитают им пользоваться) [12], [22], [23], [24]. А в случае единственности решения — оно даже может ухудшить целевую функцию, ибо будет учитывать значения переменных коэффициентов, полученные на предыдущих итерациях, которые по сути не обязательно являются оптимальными. Поэтому нет необходимости его применять.

Но при отказе от усреднения решение задач ЛППК с взаимозависимыми коэффициентами существенно упрощается. Ибо вместо предлагаемого в [12], [13] алгоритма можно применить обычный симплекс-метод.

Правда, здесь возникает вопрос в отношении сходимости симплекс-метода ЛППК. На сегодняшний день в науке обоснована его сходимость для невырожденных задач [5], [13], [15], [25]. Это такие задачи, решение которых является единственным (т. е. выбор оптимального базиса однозначен). Тогда как в вы-

рожденных может присутствовать более одного оптимального базиса [13], [24]. При этом возникает возможность заикливания, т. е. поочерёдного вхождения и выбытия в базис одних и тех же столбцов. Наличие взаимозависимости переменных коэффициентов, конечно, может способствовать этому.

Вместе с тем исследователи отмечают, что, во-первых, в практических задачах заикливание является большой редкостью — настолько, что разработчики реальных программных алгоритмов даже не предусматривают алгоритма действий в этом случае. Во-вторых, даже если оно и (вдруг) возникнет, существует ряд способов, модифицирующих алгоритм симплекс-метода решения задачи ЛППК [5], [14], [17]. На особенностях этих способов мы здесь останавливаться не будем.

Перейдем теперь к обоснованию возможности применения симплекс-метода для задач ЛППК с взаимосвязанными (взаимозависимыми) переменными коэффициентами (a_{ij}) и обсуждению его отличий от случая, когда коэффициенты взаимозависимыми не являются. Рассуждения будут носить конструктивный характер — в том смысле, что мы будем по сути повторять общеизвестный алгоритм симплекс-метода по этапам, обосновывая каждый этап для случая взаимозависимых переменных коэффициентов. Алгоритм симплекс-метода общеизвестен. Руководствуясь [5], [15], [21], рассмотрим этапы уточненного алгоритма симплекс-метода, распространённого на случай наличия взаимозависимых переменных коэффициентов, имеющих вид (7) в задаче ЛППК вида (1)–(6):

(0) На данном этапе составляется исходная базисная матрица B , состоящая из столбцов, соответствующих искусственным и положительным дополнительным переменным. Она будет единичной. Этот этап, очевидно, не зависит от того, взаимосвязаны ли коэффициенты в задаче ЛППК.

(1) Вычисляется вектор симплекс-множителей по формуле

$$U = c_B^T B^{-1}, \quad (8)$$

где $(c_B)_i$ — коэффициент целевой функции при базисной переменной, содержащейся в (1) по i -й строке, T — символ транспонирования.

Здесь также не играет роли факт наличия взаимозависимости переменных коэффициентов, ибо последние не входят в (8).

(2) Вычисляются оценки

$$\min d_j, j = 1, \dots, n,$$

где

$$d_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} u_i - c_j. \quad (9)$$

Вот как раз здесь проявляется указанная выше взаимозависимость. В самом деле, при отсутствии ограничений вида (7) выражения будут, очевидно, независимыми друг от друга. Ибо каждая оценка d_j вычисляется при этом только с использованием значений j -го столбца матрицы B (суммирование идёт по i , т. е. по каждой из строк конкретного столбца).

Тогда как взаимозависимость коэффициентов в рамках (7) приведёт к зависимости оценок с разными j . На практике это приведёт к тому, что от одного переменного коэффициента могут зависеть значения не одной, а нескольких оценок. Рассмотрим простой пример — с целью пояснения сказанного.

3. Практический пример применения предлагаемого подхода

Пусть имеется

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2 & -y \end{pmatrix}.$$

Здесь $a_{11} = -a_{22} = y$; где y — переменная величина, определяемая с учётом ограничений вида (6), (7). Пусть, к примеру, они таковы, что

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ u_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ c_i = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда имеем

$$d_1 = 3y + 4,$$

$$d_2 = 6 - 4y.$$

Таким образом, при изменении величины x значения оценок будут меняться в соответствии с противоположными тенденциями. Следовательно, минимизация одной из них приведёт к максимизации другой.

Соответственно, как в таком случае решить задачу (9), т. е. найти минимум d_i ?

Предлагается использовать плавающие значения коэффициентов. А именно — при минимизации каждой из оценок значения переменных коэффициентов (a_{11} и a_{22} — если взять рассмотренный пример) каждый раз считаются неизвестными и определяются заново.

В рассмотренном примере, с учётом (10), имеем

$$\min(d_1) = 3 * 0 + 4 = 4,$$

$$\min(d_2) = 6 - 4 * 5 = -14.$$

Далее выбираем среди рассчитанных оценок минимальную:

$$\Delta = \min\{d_1, d_2\} = d_2 = -14.$$

Следовательно, в качестве значения x нужно выбрать именно то, которое обеспечило минимальность величины Δ , т. е. $y = 5$.

Отметим, что на данном этапе выбор величины y (и, соответственно, значений переменных коэффициентов a_{11}, a_{22}) влияет на выбор разрешающего (главного) столбца, который войдёт в базис на следующей итерации симплекс-метода.

Обобщая, можно сделать очевидный вывод, что в процессе определения $\Delta = \min\{d_1, \dots, d_n\}$ будут найдены конкретные значения переменных коэффициентов на текущей итерации (при условии, конечно, что задача (1)–(7) имеет хотя бы одно конечное решение).

(3) Проверяем знак Δ . Если $\Delta \geq 0$, то оптимальное решение получено. Если $\Delta < 0$, то на данном этапе определён разрешающий столбец a_{j_0} (в рассмотренном примере это столбец с номером $j = 2$).

Делается преобразование разрешающего столбца:

$$a'_{ij_0} = B^{-1} \times a_{ij_0}.$$

Так как текущие значения его элементов на данной итерации уже определены, такое преобразование возможно. Так как выше, в соответствии с алгоритмом, определялись конкретные оптимальные (быть может, лишь для данной итерации!) значения переменных коэффициентов, то взаимозависимость вида (7) здесь уже роли не играет.

(4) Определяется номер разрешающей строки:

$$\Theta_{i_0} = \left(\min_i \right) \{b_i / a'_{ij_0} | a'_{ij_0} > 0\},$$

где b_i — i -й элемент правой части (см. (2)).

Условие $a'_{ij_0} > 0$ означает, что минимизация осуществляется для всех положительных a'_{ij_0} . Если же все $a'_{ij_0} < 0$, то решение неограничено.

Так как на этапе **(2)** были определены конкретные оптимальные (для данной итерации, значения переменных коэффициентов, вектор правой части задан, то можно утверждать, что если существует хотя бы одно положительное значение, то номер разрешающей строки будет определён. Наличие ограничений вида (7) на это не окажет никакого влияния.

(5) На этом этапе производятся преобразования обратной базисной матрицы и вектор-столбца правой части (свободных членов):

$$(B^{-1})' = (B^{-1}),$$

где B^{-1} — матрица трансформации, определяемая в соответствии с [5, 15, 22]. Данный этап также не использует ограничения (7). Затем производится переход к первому этапу — начинается следующая итерация. Таким образом, ограничения (7) используются на каждой итерации лишь на этапе **(2)**.

Надо сказать, что на следующей итерации значения переменных коэффициентов, определённые в рамках минимизации оценок (9), могут стать другими. Однако, как уже говорилось выше, важность имеют лишь те значения, которые получены на самой последней итерации, остальные могут не приниматься во внимание. Кроме того, алгоритм симплекс-метода реализован таким образом, что значение целевой функции после реализации каждой последующей итерации ухудшиться не может [5], [13], [15].

Итак, наличие ограничений вида (7) в задаче (1)–(6) не вносит принципиальных изменений в алгоритм — разве что немного замедляется процесс решения. Это при условии, что усреднение вариантов сгенерированных значений переменных коэффициентов не производится. Что, как показали вышеприведённые рассуждения, не является необходимым для получения оптимального решения.

Однако здесь возникает одна небольшая проблема. В задачах с взаимозависимыми (взаимозависимыми) переменными коэффициентами вероятность заикливания, на наш взгляд, выше, чем в обычных задачах ЛППК.

Дело в том, что при минимизации оценок каждый раз могут определяться новые варианты соответствующих переменных коэффициентов. А так как последние в силу (7) являются взаимозависимыми, их значения могут сильно варьироваться (конечно, в рамках, налагаемых ограничениями (6)–(7) — в зависимости от того, каким будет состав базиса на текущей итерации).

Так, обращаясь к приведённому выше примеру, если вместо столбца с номером $j = 2$ в базисе будет находиться такой столбец, как

$$a_{i2} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \end{pmatrix},$$

то для его оценки получим $d_2 = -12 + 4y$. Следовательно (после выбора минимальной оценки), получится, что $y = 0$, а не 5, как было выше.

Это в свою очередь может привести иногда к ситуациям, когда одни и те же столбцы будут то входить в базис, то выходить из него, что и именуется заикливанием. Поэтому в реальный алгоритм решения задачи ЛППК с взаимозависимыми переменными коэффициентами целесообразно включить блок, предназначенный для разрешения подобных ситуаций. Тогда как для задач ЛППК, не говоря уже о задачах с постоянными коэффициентами, такой блок не является столь необходимым, так как для них уже разработаны соответствующие способы преодоления ситуаций заикливания.

4. Выводы

В настоящей работе обоснована возможность применения симплекс-метода для решения задач линейного программирования с взаимозависимыми переменными коэффициентами. В стандартный алгоритм симплекс-метода необходимо внести изменения, выражающиеся в определении оптимальных величин взаимозависимых переменных коэффициентов на каждой его итерации. В общем

случае это может привести к возрастанию сложности компьютерной реализации алгоритма. Хотя основа алгоритма, конечно, остаётся той же самой.

Использование процедуры усреднения, применяющейся для определения средних значений конкретных переменных коэффициентов, не является обязательной (а иногда может даже навредить, ухудшив значение целевой функции), что существенно упрощает решения задачи.

В процессе решения задач со взаимозависимыми переменными коэффициентами возможность реализации ситуации заикливания может быть выше, чем в обычных задачах линейного программирования с переменными коэффициентами. Это вызывает необходимость для разработчика программного обеспечения решения задачи ЛППК предусмотреть тот или иной способ ликвидации такой ситуации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И.Л. Математическое программирование. М. : Лань, 2011.
2. Астафьев Н.Н. Противоположные задачи и двойственная регуляризация в линейном программировании // Труды ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Вып. 14, № 2, С.16-22.
3. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М. : Факториал Пресс, 2008.
4. Гальмукова И.А. Линейное программирование в задачах экономики // Материалы VI Ежегодной Международн. научно-прак. конф. Социально-экономические проблемы развития предпринимательства: региональный аспект. Смоленск. 2017. С. 333–338.
5. Гасс С. Линейное программирование. М. : Физматгиз, 1961.
6. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Специальные направления в линейном программировании. М. : Красанд, 2010.
7. Ерёмин И.И., Попов Л.Д. Внутренние штрафные функции и двойственность в линейном программировании // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. (Челябинск). 2012. Вып. 18, № 3. С.83–89.
8. Заботин Я. И. Вычислительные приёмы в линейном программировании без использования искусственных переменных // Изв. вузов. Математика. 2008. Вып. 1. С. 20–26.
9. Зиганшин А.М., Мудров В.А. Технология оценки объёма послеродовой кровопотери // Совр. технологии в медицине. 2020. Вып. 12, № 3. С. 71–76.
10. Зоркальцев В.И., Пержабинский С.М. Алгоритмы внутренних точек в линейном и нелинейном программировании // Омский научный вест. 2013. Вып. 117, № 1. С. 25–28.
11. Кульневич А.Д. Линейное программирование // Молодой учёный. 2017. Вып. 144, № 10. С. 29–32.
12. Мартынов А.П., Салимоненко Е.А., Салимоненко Д.А. Применение методов линейного программирования с переменными коэффициентами при проектировании и анализе электрических цепей, описываемых линейными уравнениями // Электротехника. 1998. Вып. 2. С. 59–62.

13. Мартынов А.П., Салимоненко Е.А., Ванчухина Л.И., Калашникова Л.А. Линейные модели с взаимозависимыми параметрами и их применение. Уфа : Гос. изд. научно-технической литературы «Реактив», 1998.
14. Мисюк Т.М. Использование компьютерных технологий в линейном программировании // Ярославский педагогический вестник. 2011. Вып. 3, № 1. С. 23–30.
15. Муртаф Б.М. Современное линейное программирование. М. : Мир, 1984.
16. Немировский А.С. Основные концепции и результаты робастной оптимизации в применении к линейному программированию с неточными данными // Cloud of Science. 2014. Вып. 1, № 2. С. 180–190.
17. Немкова Е.А., Левин В.И. Решение интервальной задачи дробно-линейного программирования сведением к задаче линейного программирования // Молодой учёный. 2011. Вып. 8, № 1. С. 30–34.
18. Паршин А.В., Сысоева В.И. Методы обучения, повышающие уровень подготовки курсантов линейному программированию с неизвестным исходным опорным планом / в сб. «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». Воронеж, 2014. Вып. 2, № 4, ч. 2. С. 33–36.
19. Паршин А.В., Сысоева В.И. Методы обучения, повышающие уровень подготовки курсантов линейному программированию с известным исходным опорным планом / в сб. «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика». Воронеж, 2014. Вып. 2, № 4, ч. 2. С. 41–44.
20. Порошина Л.А., Каменева Е.Н. Линейное программирование в управлении закупками в медицинской организации / в сб. «Анализ современных тенденций развития науки сборник статей». Уфа, 2017. С. 151–156.
21. Салимоненко Д.А. Математическая обработка эксперимента методами линейного программирования с переменными коэффициентами / Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Уфа, 1999.
22. Салимоненко Д.А. Способ решения задачи линейного программирования с переменными коэффициентами, зависимыми от параметров // Вестник Башкирского университета. 2015. Вып. 20, № 1. С. 25–29.
23. Свириденко А.Б. Прямые мультипликативные методы для разреженных матриц. Линейное программирование // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Вып. 9, № 2. С. 143–165.
24. Сеисов Ю.Б. Характеристика вырожденного режима в линейном программировании // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2011. № 10. С. 18–24.
25. Сизова С.А., Мурдугова В.Ю., Мелешко С.В. Линейное программирование как область математического программирования при решении экономических задач // Theoretical & Applied Science. 2013. Вып. 2(6). С. 16–20.
26. Трофимов С.П., Иванов А.В. Качество ограничения геометрических объектов и разрыв двойственности в полубесконечном линейном программировании // Материалы XXI Международн. конф. «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур». Томск, 2016.
27. Шелковников С.А., Петухова М.С. Линейное программирование в определении оптимальной суммы государственной поддержки сельскохозяйственного производства // Материалы II международной очно-заочной научно-методической и практической конференции «Комплексное развитие сельских территорий и инновационные технологии в агропромышленном комплексе». Новосибирск, 2016.

INTERDEPENDENT VARIABLES IN LINEAR PROGRAMMING TASKS

D.A. Salimonenko¹

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: seadima@goon.ru

A.M. Ziganshin²

Ph.D. (Med.), Associate Professor, e-mail: Zigaidar@yandex.ru

V.A. Mudrov³

Ph.D. (Med.), Associate Professor, e-mail: mudrov_viktor@mail.ru

Ju.D. Salimonenko⁴

Student, e-mail: iyulya99@gmail.com

¹Bashkir State University, Ufa, Russia²Bashkir State Medical University, Ufa, Russia³Chita State Medical Academy University, Chita, Russia⁴Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

Abstract. The article analyses the possibility of using the simplex method to solve linear programming problems with interdependent variable coefficients. The problem with the interdependence of evaluation coefficients is that different columns can be dependent on each other, which can cause difficulties in determining the minimum estimate — on each iteration of the simplex method. This is especially relevant when determining the optimal (for each iteration) values of variable coefficients. The work shows that the averaging of values proposed by a number of researchers is optional, the exception is degenerate linear programming problems in which there is a nonsingularity of the solution.

Keywords: task, linear programming, variable factor, simplex method, column generation, interdependent, parameter.

REFERENCES

1. Akulich I.L. *Matematicheskoe programmirovaniye*. Moscow, Lan' Publ., 2011. (in Russian)
2. Astaf'ev N.N. Protivopolozhnye zadachi i dvoistvennaya regulyarizatsiya v lineinom programmirovanii. *Trudy in-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 16-22. (in Russian)
3. Vasil'ev F.P. and Ivanitskii A.Yu. *Lineinoe programmirovaniye*. Moscow, Faktorial Press Publ., 2008. (in Russian)
4. Gal'mukova I.A. Lineinoe programmirovaniye v zadachakh ekonomiki. *Materialy VI Ezhegodnoi Mezhdunarodn. nauchno-prak. konf. Sotsial'no-ekonomicheskie problemy razvitiya predprinimatel'stva: regional'nyi aspekt*, Smolensk, 2017, pp. 333–338. (in Russian)
5. Gass S. *Lineinoe programmirovaniye*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. (in Russian)
6. Gol'shtein E.G. and Yudin D.B. *Spetsial'nye napravleniya v lineinom programmirovanii*. Moscow, Krasand Publ., 2010. (in Russian)

7. Eremin I.I. and Popov L.D. Vnutrennie shtrafnye funktsii i dvoistvennost' v lineinom programmirovanii. Tr. in-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN, Chelyabinsk, 2012, vol. 18, no. 3. pp. 83–89. (in Russian)
8. Zabotin Ya. I. Vychislitel'nye priemy v lineinom programmirovanii bez ispol'zovaniya iskusstvennykh peremennykh. Izv. vuzov. Matematika, 2008, vol. 1, pp. 20–26. (in Russian)
9. Ziganshin A.M. and Mudrov V.A. Tekhnologiya otsenki ob"ema poslerodovoi krovopoteri. Sovr. tekhnologii v meditsine, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 71–76. (in Russian)
10. Zorkal'tsev V.I. and Perzhabinskii S.M. Algoritmy vnutrennikh tochek v lineinom i nelineinom programmirovanii. Omskii nauchnyi vest., 2013, vol. 117, no. 1, pp. 25–28. (in Russian)
11. Kul'nevich A.D. Lineinoe programmirovanie. Molodoi uchenyi, 2017, vol. 144, no. 10, pp. 29–32. (in Russian)
12. Martynov A.P., Salimonenko E.A., and Salimonenko D.A. Primenenie metodov lineinogo programmirovaniya s peremennymi koefitsientami pri proektirovanii i analize elektricheskikh tsepei, opisyvayushchikhsya lineinymi uravneniyami. Elektrotehnika, 1998, vol. 2, pp. 59–62. (in Russian)
13. Martynov A.P., Salimonenko E.A., Vanchukhina L.I., and Kalashnikova L.A. Lineinye modeli s vzaimozavisimymi parametrami i ikh primeneniye. Ufa, Gos. izd. nauchno-tekhnicheskoi literatury "Reaktiv", 1998. (in Russian)
14. Misyuk T.M. Ispol'zovanie komp'yuternykh tekhnologii v lineinom programmirovanii. Yaroslavskii pedagogicheskii vestnik, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 23–30. (in Russian)
15. Murtaf B.M. Sovremennoe lineinoe programmirovanie. Moscow, Mir Publ., 1984. (in Russian)
16. Nemirovskii A.S. Osnovnye kontseptsii i rezul'taty robustnoi optimizatsii v primenenii k lineinomu programmirovaniyu s netochnymi dannymi. Cloud of Science, 2014, vol. 1, no. 2, pp. 180–190. (in Russian)
17. Nemkova E.A. and Levin V.I. Reshenie interval'noi zadachi drobno-lineinogo programmirovaniya svedeniem k zadache lineinogo programmirovaniya. Molodoi uchenyi, 2011, vol. 8, no. 1, pp. 30–34. (in Russian)
18. Parshin A.V. and Sysoeva V.I. Metody obucheniya, povyshayushchie uroven' podgotovki kursantov lineinomu programmirovaniyu s neizvestnym iskhodnym opornym planom. V sb. "Aktual'nye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika", Voronezh, 2014, vol. 2, no. 4, ch. 2, pp. 33–36. (in Russian)
19. Parshin A.V. and Sysoeva V.I. Metody obucheniya, povyshayushchie uroven' podgotovki kursantov lineinomu programmirovaniyu s izvestnym iskhodnym opornym planom. V sb. "Aktual'nye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika", Voronezh, 2014, vol. 2, no. 4, ch. 2, pp. 41–44. (in Russian)
20. Poroshina L.A. and Kameneva E.N. Lineinoe programmirovanie v upravlenii zakupkami v meditsinskoj organizatsii. V sb. "Analiz sovremennykh tendentsii razvitiya nauki sbornik statei", Ufa, 2017, pp. 151–156. (in Russian)
21. Salimonenko D.A. Matematicheskaya obrabotka eksperimenta metodami lineinogo programmirovaniya s peremennymi koefitsientami, Diss. ... kand. fiz.mat. nauk, Ufa, 1999. (in Russian)
22. Salimonenko D.A. Sposob resheniya zadachi lineinogo programmirovaniya s peremennymi koefitsientami, zavisimymi ot parametrov. Vestnik Bashkirskogo universiteta, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 25–29. (in Russian)

23. Sviridenko A.B. Pryamye mul'tiplikativnye metody dlya razrezhennykh matrits. Lineinoe programmirovaniye, Komp'yuternye issledovaniya i modelirovaniye, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 143–165. (in Russian)
24. Seisov Yu.B. Kharakteristika vyrozhdennogo rezhima v lineinom programmirovanii. Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk, 2011, no. 10, pp. 18–24. (in Russian)
25. Sizova S.A., Murdugova V.Yu., and Meleshko S.V. Lineinoe programmirovaniye kak oblast' matematicheskogo programmirovaniya pri reshenii ekonomicheskikh zadach. Theoretical & Applied Science, 2013, vol. 2(6), pp. 16–20. (in Russian)
26. Trofimov S.P. and Ivanov A.V. Kachestvo ograniichenii geometricheskikh ob"ektov i razryv dvoistvennosti v polubeskonechnom lineinom programmirovanii. Materialy XXI Mezhdunarodn. konf. "Novye informatsionnye tekhnologii v issledovanii slozhnykh struktur", Tomsk, 2016. (in Russian)
27. Shelkovnikov S.A. and Petukhova M.S. Lineinoe programmirovaniye v opredelenii optimal'noi summy gosudarstvennoi podderzhki sel'skokhozyaistvennogo proizvodstva. Materialy II mezhdunarodnoi ochno-zaochnoi nauchno-metodicheskoi i prakticheskoi konferentsii "Kompleksnoye razvitie sel'skikh territorii i innovatsionnye tekhnologii v agropromyshlennom komplekse", Novosibirsk, 2016. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 18.04.21

DATA ANALYTICS BEYOND TRADITIONAL PROBABILISTIC APPROACH TO UNCERTAINTY

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Data for processing mostly comes from measurements, and measurements are never absolutely accurate: there is always the “measurement error” – the difference between the measurement result and the actual (unknown) value of the measured quantity. In many applications, it is important to find out how these measurement errors affect the accuracy of the result of data processing. Traditional data processing techniques implicitly assume that we know the probability distributions. In many practical situations, however, we only have partial information about these distributions. In some cases, all we know is the upper bound on the absolute value of the measurement error. In other cases, data comes not from measurements but from expert estimates. In this paper, we explain how to estimate the accuracy of the results of data processing in all these situations. We tried to explain not only *what* methods can be used, but also *why* these methods have been proposed and have been successfully used. We hope that this overview will be helpful both to users solving practical problems and to researchers interested in extending and improving the existing techniques.

Keywords: data processing, uncertainty, interval uncertainty, imprecise probabilities, fuzzy uncertainty, machine learning, deep learning.

1. Why Go Beyond Traditional Probabilistic Approach to Uncertainty

Why do we need data processing. What do we want? We want to know what will happen in the future – and we want to decide what to do to make the future the most beneficial. For example, we want to be able to predict tomorrow’s weather – and we want to find the best way to regulate the temperature and humidity in our offices. We want to know where a spaceship will be several weeks from now – and if needed, what is the best way to correct its trajectory.

To be able to predict the future, we need to know the current state of the world, and we need to know the equations that describe how this state will change. For example, to predict the trajectory of a spaceship:

- we need to know its current location,

- we need to know its distance from the Sun and from other celestial bodies, and
- we can then use Newton's equations to predict its future locations.

The current state of the world can be described by the values of different quantities. Some of these quantities we can measure directly – e.g., we can measure the current temperature and humidity at different locations. Some of the quantities we need to measure indirectly – e.g., we can compute the distance from the spaceship to different celestial bodies if we know the location of the spaceship and the locations of the bodies.

What we get from direct measurements is what is called *data*, and when we process this data – whether to compute the current values of different quantities, to predict their future values, or to find the parameters of the influence that will lead to better future values – this is what is called *data processing*.

Uncertainty is ubiquitous. Most of the data comes from measurements, and measurements are never 100% accurate: the result $\tilde{x}$ of measuring a quantity x is, in general, different from the actual (unknown) value x of this quantity; see, e.g., [13]. Why is uncertainty ubiquitous?

- There are usually physical reasons for the resulting uncertainty: there are some factors that we cannot take into account – what we call noise – that affect the measurement results. For example, in many accurate measurements, the thermal noise provides a random – thus unpredictable – effect.
- There are also mathematical reasons for uncertainty: each measuring instrument can have only finitely many possible results – e.g., it produced finitely many bits, and with b bits, we can form only 2^b possible sequences. On the other hand, the actual value can be any real number – at least any real number from some interval – and there are infinitely many real numbers on each interval. So, inevitably, the measurement result should be, in general, different from the actual value.

It is important to take uncertainty into account when processing data. In general, in data processing, we apply some algorithm to the input data and get the result. Let us denote the inputs by $x_1, \dots, x_n$, and the algorithm by f . In these terms, the result y of data processing has the form $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

We apply this data processing algorithm to the measurement results $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ and get the estimate $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ for the desired quantity y . Even in the ideal case, when the algorithm f describes the exact relation between the actual values of the quantities $x_1, \dots, x_n$, and y , since the measurement results $\tilde{x}_i$ are, in general, different from the actual value x_i , our estimate

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \quad (1)$$

is, in general, different from the desired value

$$y = f(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

In many practical situations, it is important to know how accurate it is. For example, if we want a spaceship to get close to an asteroid to take photos, and we estimated the future distance to be 100 m, then:

- if it is 100 ± 10 , this is great, but
- if this is 100 ± 200 , then maybe the spaceship will crash into the asteroid.

Similarly, if we estimate that an oil field contains 300 million tons of oil, then:

- if it is 300 ± 100 , we can start exploring right away, but
- if it is 300 ± 400 , maybe there is no oil at all, so we better perform additional measurements before we invest a lot of money into exploration.

Traditional probabilistic approach to uncertainty. How can we determine the measurement accuracy? A natural idea is to *calibrate* each measuring instrument, i.e., to compare, several times, the results of measuring the same quantity:

- by this instrument and
- by a much more accurate instrument (known as a *standard instrument*), so much more accurate that we can ignore its own measurement uncertainty and safely assume that this standard instrument produced accurate results.

Based on several observed differences between the values measured by the calibrated measuring instrument and the standard one:

- we can find possible values of the measurement error $\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x} - x$, and
- we can also find the frequency of different possible values Δx .

In other words, we can find the *probability distribution* of the measurement error Δx .

This possibility underlies the traditional probabilistic approach to uncertainty, when we assume that we know the probability distributions for all the input measurement errors $\Delta x_i \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x}_i - x_i$.

Need to go beyond the probabilistic approach: interval uncertainty. While in principle, in most practical situations, it is possible to determine the probability distributions of all measurement errors, there are two important classes of situations when this is not done.

The first class is state-of-the-art measurements. Calibration of a measuring instrument requires that we have another instrument which is much more accurate. But what is the instrument that we use is the best we have? For example, it would be nice to have a five times more accurate telescope to float near the Hubble telescope – but the Hubble telescope is the best we have.

In such situations, we do not know the probability distribution of the measurement error. At best, we know the upper bound Δ on the absolute value $|\Delta x|$ of the measurement error:

$$|\Delta x| \leq \Delta. \quad (3)$$

And this upper bound we *must* have: otherwise, if there is no upper bound and thus, for each measurement result, the actual value can be arbitrarily large or arbitrarily small, this is not a measurement, this is a wild guess.

Once we know the measurement result $\tilde{x}$ and the upper bound Δ on the absolute value of the measurement error $\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{x} - x$, the only information that we can conclude about the actual (unknown) value x is that this value is contained in an interval $[\tilde{x} - \Delta, \tilde{x} + \Delta]$. Because of this, such uncertainty is known as *interval uncertainty*; see, e.g., [3, 8, 10, 13].

Another class of situations when we do not know probabilities – much more common and much more frequent class – is when we perform measurements during manufacturing. In principle, in such situations, we can calibrate every single measuring instruments – but that will cost a lot of money:

- many sensors are now very cheap, high school kids use a lot of sensors in their robotic projects, but
- calibrating each sensor means using a complex highly-accurate measuring instrument requiring lots of costly maintenance; it usually means bringing our sensor to a location where this standard instrument is placed; all this is very expensive.

Because of this high cost, most sensors are not individually calibrated, we do not know the corresponding probability distribution – we only know the upper bound on the absolute value of the measurement error, the upper bound provided by the manufacturer of this measuring instrument.

But why cannot we use probabilistic techniques? Situations when we do not know the exact probability distribution are common in statistics. In particular, there are many situations in which we have several alternatives, and we have no information about the probability of each alternative. Since we have no reason to assume that the probability of one alternative is larger than the probability of another alternative, a reasonable idea is to assign equal probabilities to all alternatives. This natural idea is known as *Laplace's Indeterminacy Principle*, and it is a particular case of the more general *Maximum Entropy approach*; see, e.g., [4].

Similarly, if all we know is that a quantity is located somewhere on the interval, and we have no reason to conclude that some values from this interval are more probable and some are less probable, a reasonable idea is to assume that all the values from the interval are equally probable, i.e., that we have a uniform distribution on this interval. If we have several variables, and we have no information about their dependence, then it is reasonable to assume that they are independent – and this is exactly what the *Maximum Entropy approach* concludes in this case.

At first glance, this sounds like a reasonable approach, and in many problems, it works well, but, as we will show, in uncertainty quantification, this idea does not work. Indeed, let us consider a very simple example in which the algorithm f simply add up n values, i.e., when we compute $y = x_1 + \dots + x_n$. Suppose that for each i , the result $\tilde{x}_i$ of measuring the quantity x_i is simply 0, and the upper bound on the measurement error is $\Delta_i = 1$. This means that each value x_i is located somewhere on the interval $[-1, 1]$.

In this case, the sum y takes the largest value when each of the terms x_i attains its largest value 1, and this largest value is n . Similarly, the smallest possible value y is attained when each of the terms x_i attains its smallest value -1 , so this smallest value of y is $-n$. Thus, the range of possible values of y is

$$[-n, n]. \quad (4)$$

What if we use Laplace's principle? In this case, we assume that each x_i is uniformly distributed on the interval $[-1, 1]$, and all these variables are independent. Thus, for large n , according to the Central Limit Theorem (see, e.g., [14]), the distribution of the sum y is close to normal distribution. For each x_i the mean is 0 and the variance is $1/3$, so:

- the mean μ of the sum y is the sum of 0s, i.e., 0, and
- the variance of the sum y is the sum of the variances, i.e., $n/3$.

Thus, the standard deviation σ of y is proportional to $\sqrt{n}$.

It is known that with very high probability, all the values of a normally distributed random variable are located, in the interval $[\mu - k \cdot \sigma, \mu + k \cdot \sigma]$: e.g. for $k = 6$ the probability to be outside this interval is $\approx 10^{-8}$. Here, $\mu = 0$, $\sigma = c \cdot \sqrt{n}$ for some c , so we conclude that with high confidence, the value y is bounded by $6c \cdot \sqrt{n}$. But we know that y can take value n which, for large n , is much larger than $\text{const} \cdot \sqrt{n}$.

This shows that for the purposes of uncertainty quantification, we cannot just select one possible probability distribution out of many possible ones and ignore other possible distributions – this can drastically underestimate the inaccuracy of the results of data processing – and thus, potentially lead to a disaster.

Need to go beyond the probabilistic approach: imprecise probabilities. So far, we considered two types of possible situations:

- situations when we perform the full calibration and thus, we know the probability distribution of the measurement errors,
- situations when we do not perform any calibration, and thus, have no information about the corresponding probabilities – all we know is the interval of possible values of the measurement error.

In practice, we also sometimes encounter intermediate situations, when we perform *some* calibration, but not enough to uniquely determine the probability distributions. As a result, we only have partial information about the probabilities – i.e.,

we have several possible probability distributions which are all consistent with our calibration results. Such situations are known as situations with *imprecise probabilities*; see, e.g., [11] and references therein.

Need to go beyond the probabilistic approach: fuzzy case. In many practical situations, instead of measurement results, we get expert estimates. This is not typical in manufacturing, but this is a usual situation in medicine, in meteorology, in biology, etc. These estimates often use imprecise (“fuzzy”) words from natural language like “small”, “about 1.5”, etc. It is desirable to use these expert estimates as inputs in data processing, but how? Computers are good in processing numbers, but, as everyone knows, they are not yet as good in processing natural language.

To handle such *fuzzy* knowledge, we need to use special techniques – which are known under the general name of *fuzzy techniques*; see, e.g., [5, 9, 12, 15].

What we do in this chapter. In this chapter, we briefly explain how (and why) to take these different types of beyond-traditional-probabilistic uncertainty into account when processing data.

2. Case of Probabilistic Uncertainty: Reminder

Why do we need to describe the case of probabilistic uncertainty. To explain techniques for dealing with non-traditional types of uncertainty, let us first briefly recall how traditional probabilistic uncertainty is handled in data processing.

Data processing under probabilistic uncertainty: exact formulation of the problem. Probabilistic uncertainty means that we know:

- the data processing algorithm $y = f(x_1, \dots, x_n)$;
- the measurement results $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$; and
- the probability distributions $\rho_i(\Delta x_i)$ describing the probabilities of different values of the measurement error $\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i$.

We want to find the probability distribution for the value $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Bias is usually taken care of. In some cases, the mean value of the measurement error is different from 0. In mathematical terms, this means that the corresponding distribution has a *bias*. This happens: a clock may show time 2 minutes ahead, etc. In such situations, it makes sense to re-scale the readings of the measuring instrument – by subtracting this mean value. For example, for the clock, we subtract 2 minutes from all its readings.

As a result, we have a probability distribution in which the mean value of the measurement error is 0.

General case: Monte-Carlo simulations. For each i , we know the value $\tilde{x}_i$, and we know the probability distribution $\rho_i(\tilde{x}_i - x_i)$ for the difference between the measurement result $\tilde{x}_i$ and the actual (unknown) value x_i of the corresponding quantity. Thus, the formula $\rho_i(\tilde{x}_i - x_i)$ provides a probability distribution for x_i .

So, to find the probability distribution for y , we can do the following: several (N) times $k = 1, \dots, N$:

- we simulate each random variable $\Delta x_i^{(k)}$ distributed according to the i -th given probability distribution $\rho_i(\Delta x_i)$;
- we simulate the values of x_i as $x_i^{(k)} = \tilde{x}_i - \Delta x_i^{(k)}$; and
- we apply the data processing algorithm f to the simulated values, resulting in $y^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$.

Since the values $x_i^{(k)}$ follow the exact same probability distribution as the actual values x_i , the simulated values $y^{(k)}$ follow the exact same probability distribution as the desired quantity y . Thus, by analyzing the sample $y^{(1)}, \dots, y^{(N)}$, we can find all the characteristics of the desired probability distribution for y .

This simulation-based technique, when we literally simulate the measurement errors, is known as *Monte-Carlo simulations*.

How accurate are Monte-Carlo simulations? It is known (see, e.g., [14]) that the relative accuracy ε of Monte-Carlo technique – as any accuracy of estimating a characteristic of a random variable from a sample of size N – is proportional to $\varepsilon \sim 1/\sqrt{N}$. Thus, to get the characteristics of $\Delta y = \tilde{y} - y$ with accuracy ε , we need to perform $N \sim \varepsilon^{-2}$ simulations.

In particular, to get accuracy 10%, we need to perform $N = 100$ simulations.

Limitations of Monte-Carlo simulations. The data processing algorithm can be very complicated and time-consuming. To use Monte-Carlo simulations, we need to apply this algorithm N times. As a result, determining the accuracy of the result of data processing may require 100 time more computation time than computations themselves.

Even after such a long time, all we get is a very crude approximate estimation of accuracy – and to get a more accurate estimation, we need to perform even more computations! How can we perform computations faster?

Possibility of linearization. A possibility to speed up uncertainty estimations comes from the fact that measurement errors are usually relatively small:

$$\Delta x \ll x : \quad (5)$$

- rough measurements can have accuracy 10%,
- more accurate measurements can have accuracy 3%, 1%, and even higher.

The expressions $f(x_1, \dots, x_n)$ are usually smooth. In such situations, we can expand the expression for

$$\begin{aligned} \Delta y = \tilde{y} - y &= f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \\ &= f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_1 - \Delta x_1, \dots, \tilde{x}_n - \Delta x_n) \end{aligned} \quad (6)$$

in Taylor series and keep only linear terms in this expansion – and ignore quadratic and higher order terms. Indeed:

- If $\Delta x_i \approx 10\%$, then $(\Delta x_i)^2 \approx 1\% \ll \Delta x_i$.
- If $\Delta x_i \approx 1\%$, then $(\Delta x_i)^2 \approx 0.01\% \ll \Delta x_i$, etc.

Thus, we get

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \Delta x_i, \quad (7)$$

where we denoted $c_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

How this can speed up computations. In the formula (7), the only values depending on the data processing algorithm are partial derivatives c_i . In some cases, we have explicit formula for these partial derivatives. In general, we can estimate these partial derivatives by using numerical differentiation. Namely, by definition, the derivative is a limit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i + h, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n) - \tilde{y}}{h}. \quad (8)$$

Limit means that for small h , we have

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i + h, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n) - \tilde{y}}{h}, \quad (9)$$

and the smaller h , the higher the accuracy of this approximation. Estimation of c_i by using formula (9) is known as *numerical differentiation*.

To estimate all the value $c_1, \dots, c_n$ this way, we need to call the algorithm f :

- first, to compute the estimate $\tilde{y}$, and
- then n more times to compute the values

$$f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i + h, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_n) \quad (10)$$

for $i = 1, \dots, n$,

to the total of $n + 1$ times.

When $n + 1$ is smaller than the value N corresponding to desired accuracy – e.g., when $n + 1 < 100$, the resulting computations are much faster than by using the general Monte-Carlo simulations.

Comment. Of course, in the linearized approach, we still need to run N (e.g., 100) simulations, but these simulations no longer require calling f , so they are fast.

Additional time saving: ubiquity of normal distributions. When n is large, and all error components are of the same order of magnitude, we can use the Central Limit Theorem, according to which the distribution of the sum of the large number of independent similarly distributed random variables is close to Gaussian (normal). (To be more precise, the theorem states that this distribution tends to normal when the number n of terms in this sum tends to infinity.)

Thus, for large n , we can safely conclude that the value Δy is normally distributed. Also, since all the components Δx_i have 0 mean, their linear combination Δy also has a zero mean. A normal distribution is uniquely determined by its mean and its standard deviation σ . Since here, the mean is 0, all we need to find is the standard deviation. This saves us computation time – since we only need to compute one characteristic of the probability distribution.

Another simplification comes from the fact that, based on the formula (7), we can conclude that

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot \sigma_i^2, \text{ hence } \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot \sigma_i^2}, \quad (11)$$

where σ_i is the standard deviation of Δx_i . Thus, there is no need for Monte-Carlo simulations here: once we compute σ_i , we can then use this explicit formula for σ – and, by the way, we will get the exact value of σ , while simulations will only lead to an approximate estimate.

Comment. The possibility to use normal distributions is not limited to the cases when n is large. In many cases, for each measuring instrument, the corresponding measurement error Δx_i itself comes from the joint effect of several error components of approximately the same size and is, thus, itself normal. In such situations, Δy is also normally distributed – as a linear combination of several independent normally distributed random variables.

3. Case of Interval Uncertainty

What is interval uncertainty: reminder. In some situations, all we know about each measurement error Δx_i is that it can take any value from the interval $[-\Delta_i, \Delta_i]$, and we do not have any information about the probability of different values from this interval. As a result, the actual value x_i of the corresponding quantity can take any value from the interval $[\tilde{x}_i - \Delta_i, \tilde{x}_i + \Delta_i]$.

Different values x_i from these intervals lead, in general, to different values of $y = f(x_1, \dots, x_n)$. All we can compute is the range of possible values of y , i.e., the set

$$\{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in [\tilde{x}_1 - \Delta_1, \tilde{x}_1 + \Delta_1], \dots, x_n \in [\tilde{x}_n - \Delta_n, \tilde{x}_n + \Delta_n]\}. \quad (12)$$

The data processing algorithm is usually continuous. The range of a continuous function on a connected set is also connected, so this range is also an interval $[\underline{y}, \bar{y}]$.

Computing the endpoints of this interval is known as *interval computations*; see, e.g., [3, 8, 10].

Let us formulate this problem in precise terms.

Data processing under interval uncertainty: exact formulation of the problem. Interval uncertainty means that we know:

- the data processing algorithm $y = f(x_1, \dots, x_n)$;

- the measurement results $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$; and
- the upper bounds Δ_i on the absolute values of the corresponding measurement errors $\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i$.

We want to find the endpoints of the interval

$$[y, \bar{y}] = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in [\tilde{x}_1 - \Delta_1, \tilde{x}_1 + \Delta_1], \dots, x_n \in [\tilde{x}_n - \Delta_n, \tilde{x}_n + \Delta_n]\}. \quad (13)$$

In general, this problem is not feasible. It is known that, in general, this problem is NP-hard – meaning that, unless $P = NP$ (which most computer scientists believe to be impossible), no feasible algorithm can always provide a solution to this problem; see, e.g., [7].

In the linearized case, the problem becomes feasible. To solve the interval computations problem, we can take into account that, in practice, measurement errors are relatively small, and thus, for Δy , we can use a linearized formula (7). To find the range of possible values of Δy , we need to find the largest and the smallest values of this expression (7).

The sum attains its largest value when each of the terms $c_i \cdot \Delta x_i$ is the largest:

- When $c_i \geq 0$, the term $c_i \cdot \Delta x_i$ is an increasing function of Δx_i . Thus, its largest possible value is attained when $\Delta x_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$ attains its largest possible value $\Delta x_i = \Delta_i$. In this case, the term $c_i \cdot \Delta x_i$ takes the form

$$c_i \cdot \Delta_i. \quad (14)$$

- When $c_i \leq 0$, the term $c_i \cdot \Delta x_i$ is a decreasing function of Δx_i . Thus, its largest possible value is attained when $\Delta x_i \in [-\Delta_i, \Delta_i]$ attains its smallest possible value $\Delta x_i = -\Delta_i$. In this case, the term $c_i \cdot \Delta x_i$ takes the form

$$-c_i \cdot \Delta_i. \quad (15)$$

Both expressions can be described by a single formula $|c_i| \cdot \Delta_i$. Thus, the largest possible value of Δy is equal to

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n |c_i| \cdot \Delta_i. \quad (16)$$

Similarly, we can prove that the smallest possible value of Δy is equal to $-\Delta$. So, the range of Δy has the form $[-\Delta, \Delta]$. To find this range, it is sufficient to compute the value Δ .

A straightforward way to compute Δ . A straightforward way to compute Δ is to compute the partial derivatives by using the formula (9), and then use the formula (16).

Comment. This is similar to computing σ^2 in the case of normal distributions.

Limitations of the straightforward approach. When the number of inputs n is large, and the data processing algorithms is complicated, in the straightforward approach, to compute all partial derivatives, we need to call the algorithm f many $(n + 1)$ times. For large n – e.g., when n is equal to several thousands – this is not realistic.

How can we compute Δ faster?

Cauchy-based techniques. We cannot directly use Monte-Carlo simulations – since we do not know the probability distributions for Δx_i . However, it turns out that we can use Monte-Carlo simulations *indirectly*, by using so-called *Cauchy distributions*, for which the probability density function is proportional to

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{\Delta^2}}. \quad (17)$$

This distribution is presented in many statistics textbook, not as an example of something practically useful as many textbook examples of probability distributions, but usually as a pathological example – of a probability distribution for which standard deviation is infinite. However, in data processing under uncertainty, this distribution is very practically useful; see, e.g., [6, 11].

Specifically, what is useful is the following property of this distribution:

- if we have n independent random variables Δx_i which are Cauchy distributed with parameters Δ_i ,
- then their linear combination (7) is also Cauchy distributed with the parameter described exactly by the formula (16)!

Thus, we can estimate Δ as follow: several (N) times $k = 1, \dots, N$:

- we simulate each random variable $\Delta x_i^{(k)}$ distributed according to the Cauchy distribution with parameter Δ_i ;
- we simulate the values of x_i as $x_i^{(k)} = \tilde{x}_i - \Delta x_i^{(k)}$; and
- we apply the data processing algorithm f to the simulated values, resulting in $y^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$.

The resulting differences $\Delta y^{(k)} = y^{(k)} - \tilde{y}$ are then Cauchy distributed with parameter Δ . To find this value, we can use Maximum Likelihood method – i.e., find the most probable value Δ . For Cauchy distribution, maximizing the corresponding probability is equivalent to solving the following easy-to-numerically-solve equation with one unknown Δ :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{1 + \frac{(\Delta y^{(k)})^2}{\Delta^2}} = \frac{N}{2}. \quad (18)$$

Comment. It is important to comment that, in contrast to Monte-Carlo simulations, when we simulate actual probability distributions, here, we are *not* simulating actual distributions. Indeed:

- we know that the measurement errors are located inside the intervals $[-\Delta_i, \Delta_i]$; but
- a Cauchy-distributed random variable can take, with positive probability, any real value – including values outside this interval.

In this case, the probability distributions are not real – they are a computational trick.

Which method should we use? We have described two methods for dealing with interval uncertainty:

- a straightforward method that needs n calls to the algorithm f – as many calls as there are inputs, and
- Cauchy method that needs $N \sim \varepsilon^{-2}$ calls to f , where ε is the relative accuracy with which we want to estimate Δ .

Clearly:

- if $n > N$, we should use the straightforward method, and
- if $n > N$, i.e., if we have many inputs, then we should use the Cauchy method.

4. Case of Imprecise Probabilities

Formulation of the problem. In the probabilistic case, we assume that we know the exact values of the parameters c_{ij} characterizing the distribution of measurement errors for each input x_i . Based on this information, we estimate the parameters $c_1, \dots, c_m$ of the resulting y -distribution.

In some cases, we only have partial information about the probability distributions of each input x_i ; e.g.:

- instead of the *exact* values of the parameters c_{ij} characterizing this distribution,
- we only know *bounds* on these values, i.e., we only know intervals $[\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}]$ that contain the actual values of these parameters.

Different values c_{ij} from the corresponding intervals lead, in general, to different values c_j . We thus need to find the ranges of possible values of these parameters c_j .

How can we find these ranges?

Natural idea. For each combination of values $c_{i1}, \dots, c_{im}$ of the corresponding parameters, we can use one of the above probabilistic-case algorithms – e.g., Monte-Carlo approach or linearization – to find the values $c_1, \dots, c_m$ of the parameters describing the resulting y -distribution. Thus, what we have, in effect, are new algorithms $F_1, \dots, F_m$ that:

- given the values $x_1, \dots, x_n$ of the inputs and the values c_{ij} of the parameters describing their uncertainty,
- estimate the parameter c_j describing the uncertainty of the result y of data processing:

$$c_j = F_j(x_1, \dots, x_n, c_{11}, \dots, c_{1m}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{nm}). \quad (19)$$

In our case, we do not know the exact values of the parameters c_{ij} , we only know the intervals $[\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}]$ that contain these values. So, we can use one of the above-described interval-case technique to find, for each j , the range of the function F_j when $c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}]$:

$$[\underline{c}_j, \bar{c}_j] = \{F(x_1, \dots, x_n, \dots, c_{ij}, \dots) : c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}]\}. \quad (20)$$

These are exactly the desired ranges for the parameters c_j .

5. Case of Fuzzy Uncertainty

Formulation of the problem: reminder. Sometimes, for the inputs x_i , instead of measurement results, we only have expert estimates, and these expert estimates are described not in terms of numbers, but in terms of imprecise (“fuzzy”) words from a natural language.

Computers do not understand natural language well, so we need to translate this knowledge into numbers. How can we do it?

How to translate imprecise knowledge into numbers: a natural idea. For precise statement like “ x_1 is positive”, for each value x_1 , this statement is either true or false. For example:

- this statement is true for $x_1 = 0.1$, and
- this statement is false for $x_1 = -0.1$.

For imprecise statement like “ x_1 is small”, for some values x_1 , the expert him/herself is not 100% sure. A natural idea is to ask an expert, for all possible values x_1 , to describe his/her degree of confidence in this statement on some scale – e.g., from 0 to 1, so that 0 means no confidence at all, while 1 means 100% confidence. This natural idea – first proposed by Lotfi Zadeh – is one of the main ideas of the techniques that he called *fuzzy logic*.

Of course, there are infinitely many possible values of each quantity x_i , so we cannot ask the expert infinitely many question, so what we *can* do is:

- ask about *some* values, and then
- perform some interpolation/extrapolation to cover values in between.

As a result, for each imprecise expert statement about x_i , we get a function $\mu_i(x_i)$ that assigns, to each possible value of the quantity x_i , the degree to which the expert is confident in this statement. This function is known as a *membership function*.

Need for logic. Suppose that we have two expert statements:

- a statement $S_1(x_1)$ about x_1 and
- a statement $S_2(x_2)$ about x_2 .

We can extract, from the expert, the degrees of belief $\mu_1(x_1)$ and $\mu_2(x_2)$ in these statements corresponding to all possible values x_1 and x_2 , but what we really need is the degree to which a combined statement “ $S_1(x_1)$ and $S_2(x_2)$ ” is true.

Theoretically, we can ask an expert to evaluate the desired degree for all possible pairs (x_1, x_2) , for all possible triples if we combine three statements, etc. However, in practice, this is not feasible. Even if we take only 10 possible values of each variable x_i , then, e.g., for five inputs we will need to ask $10^5 = 100000$ questions – this is not feasible.

Since we cannot directly ask for the expert’s degree of confidence in complex statements like “ A and B ” (or in similar statements of the type “ A or B ”), we need to be able to estimate these degrees based on whatever information we have: namely, degrees of confidence a and b in statements A and B .

The algorithms computing the corresponding estimates $f_{\&}(a, b)$ for the degree of confidence in “ A and B ” and $f_{\vee}(a, b)$ for the degree of confidence in “ A or B ” are known as “and”-operations and “or”-operations. For historical reasons, they are also known as *t-norm* and *t-conorm*.

The need for operations representing logical operations such as “and” and “or” is what caused Zadeh to call this approach *fuzzy logic*.

Which “and”- and “or”-operations should we choose? To select appropriate operations, let us list reasonable requirements. Let us start with the “and”-operation.

- First, the degree of confidence in a statement “ A and B ” – which is stronger than both A and B – cannot be larger than our degrees of confidence in each of the original statements A and B :

$$f_{\&}(a, b) \leq a \text{ and } f_{\&}(a, b) \leq b. \quad (21)$$

- Second, the statement “ A and A ” means the same as A , so we conclude that $f_{\&}(a, a) = a$.
- Third, if we increase degree of confidence on one or both statements A and B , this can only increase our degrees of confidence in the combined statement “ A and B ”: if $a \leq a'$ and $b \leq b'$, then $f_{\&}(a, b) \leq f_{\&}(a', b')$.

It turns out that these simple and natural requirements uniquely determine the choice of the “and”-operation. Indeed:

- Suppose that $a \leq b$. Then, by the first property, $f_{\&}(a, b) \leq a$, by the second property, $f_{\&}(a, a) = a$, and by the third property,

$$a = f_{\&}(a, a) \leq f_{\&}(a, b). \quad (22)$$

From $f_{\&}(a, b) \leq a$ and $a \leq f_{\&}(a, b)$, we conclude that

$$f_{\&}(a, b) = a. \quad (23)$$

- Suppose that $b \leq a$. Then, by the first property, $f_{\&}(a, b) \leq b$, by the second property, $f_{\&}(b, b) = b$, and by the third property,

$$b = f_{\&}(b, b) \leq f_{\&}(a, b). \quad (24)$$

From $f_{\&}(a, b) \leq b$ and $b \leq f_{\&}(a, b)$, we conclude that

$$f_{\&}(a, b) = b. \quad (25)$$

Both cases can be covered by a single expression $f_{\&}(a, b) = \min(a, b)$.

Let us now consider the “or”-operation. Here, we can also formulate three natural properties.

- First, the degree of confidence in a statement “ A or B ” – which is weaker than both A and B – cannot be smaller than our degrees of confidence in each of the original statements A and B :

$$a \leq f_{\vee}(a, b) \text{ and } b \leq f_{\vee}(a, b). \quad (26)$$

- Second, the statement “ A or A ” means the same as A , so we conclude that $f_{\vee}(a, a) = a$.
- Third, if we increase degree of confidence on one or both statements A and B , this can only increase our degrees of confidence in the combined statement “ A or B ”: if $a \leq a'$ and $b \leq b'$, then $f_{\vee}(a, b) \leq f_{\vee}(a', b')$.

It turns out that these simple and natural requirements uniquely determine the choice of the “or”-operation. Indeed:

- Suppose that $a \leq b$. Then, by the first property, $b \leq f_{\vee}(a, b)$, by the second property, $f_{\vee}(b, b) = b$, and by the third property,

$$f_{\vee}(a, b) \leq f_{\vee}(b, b) = b. \quad (27)$$

From $b \leq f_{\vee}(a, b)$ and $f_{\vee}(a, b) \leq b$, we conclude that

$$f_{\vee}(a, b) = b. \quad (28)$$

- Suppose that $b \leq a$. Then, by the first property, $a \leq f_{\vee}(a, b)$, by the second property, $f_{\vee}(a, a) = a$, and by the third property,

$$f_{\vee}(a, b) \leq f_{\vee}(a, a) = a. \quad (29)$$

From $a \leq f_{\vee}(a, b)$ and $f_{\vee}(a, b) \leq a$, we conclude that

$$f_{\vee}(a, b) = a. \quad (30)$$

Both cases can be covered by a single expression $f_{\vee}(a, b) = \max(a, b)$.

Thus, we select $f_{\&}(a, b) = \min(a, b)$ and $f_{\vee}(a, b) = \max(a, b)$.

Towards data processing under fuzzy uncertainty. Suppose that we know the algorithm $y = f(x_1, \dots, x_n)$ that is used in data processing, and our information about each input x_i is described by a membership function $\mu_i(x_i)$. We want to describe the degree $\mu(y)$ to which different values of y are possible.

A value y is possible if there exist values $x_1, \dots, x_n$ for which $y = f(x_1, \dots, x_n)$ and for which “ x_1 is possible and x_2 is possible, etc.”, i.e., if:

- either the statement in quotes holds for one tuple $(x_1, \dots, x_n)$ for which $y = f(x_1, \dots, x_n)$,
- or this statement holds for another tuple $(x_1, \dots, x_n)$ for which $y = f(x_1, \dots, x_n)$, etc.

For each i , the degree to which each value x_i is possible is equal to $\mu_i(x_i)$. Here, “and” is represented by minimum, so the degree to which the statement in quotes is satisfied is equal to $\min(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n))$.

Here, “or” is represented by maximum, so the desired degree is equal to

$$\mu(y) = \max\{\min(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)) : f(x_1, \dots, x_n) = y\}. \quad (31)$$

This formula – first proposed by Zadeh – is known as *Zadeh’s extension principle*.

How can we use this principle for computations? The idea comes from the fact that while expert’s conclusions are often imprecise, we need to eventually make decisions. We can rarely achieve full confidence, so a natural idea is to select some threshold α and to make a decision if the degree of confidence is greater than or equal to α . The set of all such values $\mathbf{x}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \mu(x) \geq \alpha\}$ is known as the α -cut of the corresponding membership function.

Once we know all α -cuts, we can then uniquely determine the original membership function $\mu(x)$ – namely, for each x , the value $\mu(x)$ is the smallest value α for which $x \in \mathbf{x}(\alpha)$. Thus, instead of describing the expert’s statement by a membership function, we can describe it by listing α -cuts corresponding to different levels α .

Usually, an expert can only provide a degree from 0 to 1 with accuracy 0.1 – e.g., it is difficult to distinguish between degrees of confidence 0.30 and 0.31. Thus, it is sufficient to only describe α -cuts corresponding to

$$\alpha = 0, \quad \alpha = 0.1, \quad \alpha = 0.2, \dots, \alpha = 0.9, \quad \alpha = 1.0. \quad (32)$$

For most natural language words, the degree of confidence first increases then decreases. For such membership functions, each α -cut is an interval.

It turns out that α -cuts are useful in processing fuzzy inputs. Indeed, when is $\mu(y) \geq \alpha$, i.e., when is $y \in (\alpha)$? According to the formula (31), this means that there exists some values $x_1, \dots, x_n$ for which $y = f(x_1, \dots, x_n)$ and for which $\min(\mu_1(x_1), \dots, \mu_n(x_n)) \geq \alpha$. The last inequality, in its turn, means that $\mu_i(x_i) \geq \alpha$ for all i , i.e., that $x_i \in \mathbf{x}_i(\alpha)$. Thus, $y \in \mathbf{y}(\alpha)$ means that $y = f(x_1, \dots, x_n)$ for some $x_i \in \mathbf{x}_i(\alpha)$. In other words, the α -cut for y is the range of the function $f(x_1, \dots, x_n)$ on the α -cuts for x_i :

$$\mathbf{y}(\alpha) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbf{x}_1(\alpha), \dots, x_n \in \mathbf{x}_n(\alpha)\}. \quad (33)$$

We already know how to compute this range, so we arrive at the following algorithm for processing fuzzy uncertainty.

How to process fuzzy uncertainty: algorithm. We know the data processing algorithm $f(x_1, \dots, x_n)$, and we know the membership functions $\mu_i(x_i)$ describing the expert's knowledge of the inputs.

Then, for each $\alpha = 0, 0.1, \dots, 0.9, 1.0$:

- First, for each i , we compute the corresponding α -cuts. These α -cuts will be intervals.
- Then, we use one of the above-described interval methods to compute the range (33).

The resulting α -cuts $\mathbf{y}(\alpha)$ describe the resulting information about the desired quantity y .

6. How to Take Uncertainty into Account in Machine Learning – Especially in Deep Learning

Formulation of the problem. The above techniques assume that we know the equations that describe the system's behavior and the system's dynamics – and thus, we have an algorithm $f(x_1, \dots, x_n)$ that estimates the desired quantity y based on the known values $x_1, \dots, x_n$.

In many practical situations, however, we do not have this knowledge, we must determine the system's dynamics based on its observed behavior. This is the subject of *machine learning*; see, e.g., [1, 2]. In this case:

- in several cases $k = 1, \dots, K$, we know the values $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, and $y^{(k)}$;
- based on these values, the machine learning algorithm find an algorithm $f(x_1, \dots, x_n)$ for which

$$y^{(k)} \approx f\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right) \quad (34)$$

for all k .

At present, one of the main tools for machine learning is deep learning; see, e.g., [2] and references therein.

A natural question is: how do we take into account uncertainty with which we know the inputs?

Straightforward approach and its limitations. Once we have an algorithm $f(x_1, \dots, x_n)$ – whether it is explicitly given or presented as a neural network – we can apply one of the above techniques to take care of the input's uncertainty.

The limitation of this straightforward approach is that it requires to run the neural network several times – so the time needed to take uncertainty into account is much longer than the time needed to compute the estimate itself.

How can we speed up this process?

Natural idea. Once we have trained the neural network – or any other appropriate tool – to estimate y , i.e., once we come up with an appropriate algorithm $f(x_1, \dots, x_n)$, we can then use one of the above algorithms, on several cases, to estimate how uncertainty in the inputs lead to uncertainty in the result. In all these cases, for different values $x_i^{(k)}$ of the input and for different parameters $c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}$ of the corresponding uncertainty (standard deviations, upper bounds, etc.), we get not only the estimate $y^{(k)}$ for the quantity y , we also get an estimate $c^{(k)}$ for the resulting uncertainty in y .

Then, a natural idea is to train a new neural network $c = F(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_n)$ so that:

- given the inputs $x_1, \dots, x_n$ and the information $c_1, \dots, c_n$ about the uncertainty of these inputs,
- this neural network will return the corresponding parameters c .

In other words, we want to find a function F for which

$$c^{(k)} = F\left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}\right) \quad (35)$$

for all k .

Then, to find the corresponding uncertainty, you will need to run a neural network – namely, the neural network corresponding to F – only once.

Comment. Most of the above techniques involve applying the algorithm f not only to the original results $x_i^{(k)}$ but also to perturbed values. This may help not only to estimate uncertainty: it will also help to avoid a big problem of deep learning, that often, a minor change in the input drastically changes the result. For example, changing a small number of pixels in the image of a cat can lead the network to conclude that it is a dog; see, e.g., [2].

Good news is that such confusing perturbations are rare, and often, this problem disappears if we add additional noise. So, if we train the neural network not only on the original values x_i , but also on perturbed values, this may not only help to estimate the resulting uncertainty, it will also help to avoid wrong results.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science), and HRD-1834620 and HRD-2034030 (CAHSI Includes).

The authors is greatly thankful to the editors for their encouragement and to the anonymous referees for valuable suggestions.

REFERENCES

1. Bishop C.M. Pattern Recognition and Machine Learning. Springer, New York, 2006.
2. Goodfellow I., Bengio Y., and Courville A. Deep Learning. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 2016.
3. Jaulin L., Kiefer M., Didrit O., and Walter E. Applied Interval Analysis, with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control, and Robotics. Springer, London, 2001.
4. Jaynes E.T. and Bretthorst G.L. Probability Theory: The Logic of Science. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
5. Klir G.J. and Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
6. Kreinovich V. and Ferson S. A New Cauchy-Based Black-Box Technique for Uncertainty in Risk Analysis. Reliability Engineering and Systems Safety, 2004, vol. 5, no. 1–3, pp. 267–279.
7. Kreinovich V., Lakeyev A., Rohn J., and Kahl P. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations. Kluwer, Dordrecht, 1998.
8. Mayer G. Interval Analysis and Automatic Result Verification. de Gruyter, Berlin, 2017.
9. Mendel J.M. Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems: Introduction and New Directions. Springer, Cham, Switzerland, 2017.
10. Moore R.E., Kearfott R.B., and Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis. SIAM, Philadelphia, 2009.
11. Nguyen H.T., Kreinovich V., Wu B., and Xiang G. Computing Statistics under Interval and Fuzzy Uncertainty. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.
12. Nguyen H.T., Walker C.L., and Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2019.
13. Rabinovich S.G. Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice. Springer, New York, 2005.
14. Sheskin D.J. Handbook of Parametric and Non-Parametric Statistical Procedures. Chapman & Hall/CRC, London, UK, 2011.
15. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, vol. 8, pp. 338–353.

АНАЛИТИКА ДАННЫХ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ТРАДИЦИОННОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА К НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Данные для обработки в основном поступают из измерений, а измерения никогда не бывают абсолютно точными: всегда есть «ошибка измерения» — разница между результатом измерения и фактическим (неизвестным) значением измеряемой величины. Во многих приложениях важно выяснить, как эти ошибки измерения влияют на точность результата обработки данных. Традиционные методы обработки данных неявно предполагают, что нам известны распределения вероятностей. Однако во многих практических ситуациях у нас есть лишь частичная информация об этих распределениях. В некоторых случаях все, что нам известно, — это верхняя граница абсолютного значения ошибки измерения. В других случаях данные поступают не из измерений, а из экспертных оценок. В этой статье мы объясняем, как оценить точность результатов обработки данных во всех этих ситуациях. Мы попытались объяснить не только какие методы можно использовать, но и почему эти методы были предложены и успешно применяются. Надеемся, что этот обзор будет полезен как специалистам, решающим практические проблемы, так и исследователям, заинтересованным в расширении и улучшении существующих методов.

Ключевые слова: обработка данных, неопределённость, интервальная неопределённость, неточные вероятности, нечёткая неопределённость, машинное обучение, глубокое обучение.

Дата поступления в редакцию: 16.12.2020

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ GAP В ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е.Н. Залесская

к.ф.-м.н., доцент, декан факультета математики и информационных технологий,
e-mail: ZallesskayaEN@yandex.by

Е.М. Дрозд

преподаватель-стажёр кафедры прикладного и системного программирования,
магистр, e-mail: elena_1998-1998@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается применение системы компьютерной алгебры GAP при решении задач теории классов конечных групп, в частности пакет CRISP. Приводятся типы задач теории классов конечных групп, которые можно решать при помощи системы компьютерной алгебры GAP, в частности является ли класс конечных групп классом Фиттинга, классом Шунка или формацией.

Ключевые слова: конечные группы, класс групп, класс Фиттинга, класс Шунка, формация, система компьютерной алгебры.

1. Введение

В настоящее время на решение разнообразных математических задач направлено большое количество систем компьютерной математики. Системы компьютерной математики делают доступным применение мощных математических методов при решении прикладных задач, повышают наглядность и конкретность абстрактных концепций как в процессе обучения, так и в исследованиях. К системам компьютерной математики можно отнести: Maple, Mathcad, MATLAB, Wolfram Mathematica, GAP, MAGMA и др. Каждая из них направлена на решение задач в определённых областях науки. Система компьютерной алгебры Maple предназначена для символьных вычислений, способна выполнять сложнейшие аналитические вычисления, которые иногда не под силу даже опытным математикам [1]. Система компьютерной алгебры Mathcad ориентирована на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением [2]. Система компьютерной алгебры MATLAB решает множество компьютерных задач — от сбора и анализа данных до разработки готовых приложений [3]. Система компьютерной алгебры MAGMA направлена на решение задач в области алгебры, теории чисел, комбинаторики [4].

В связи с тем, что GAP является свободно распространяемым пакетом и помимо базовых математических возможностей GAP преимущественно представ-

ляет функционал для решения задач вычислительной теории групп, в частности для работы с группами матриц и подстановок, конечными группами, классами конечных групп и др., для решения задач теории классов конечных групп наиболее целесообразно использовать систему компьютерной алгебры GAP.

2. О системе GAP

Аббревиатура GAP происходит от Groups, Algorithms and Programming — группы, алгоритмы и программирование. Разработка системы компьютерной алгебры GAP стартовала в 1985 году в г. Аахен (Германия) под руководством Иохима Ньюбюсера (Joachim Neubuser). К настоящему времени GAP стал международным научным проектом, объединяющим единомышленников в области алгебры, теории чисел, математической логики, информатики и других наук. Основными центрами разработки системы являются университет Сент-Эндрюса (Шотландия, Великобритания), университет Аахена (Брауншвейг, Германия) и университет штата Колорадо (США) [5].

Система GAP свободно распространяема, открыта и расширяема. Она включает в себя исходные тексты на двух языках: ядро системы написано на Си, а библиотека функций — на специальном языке, также называемом GAP. Язык программирования GAP является объектно-ориентированным и напоминает по синтаксису Pascal. Используя исходные тексты как наглядное пособие, пользователи могут создавать собственные программы [5].

Система компьютерной алгебры GAP содержит множество пакетов, направленных на решение задач теории конечных групп. К ним относятся:

- CRISP — для решения задач теории классов конечных групп;
- FORMAT — для работы с формациями конечных разрешимых групп;
- GrpConst — для построения групп заданного порядка;
- IRREDSOL — библиотека неприводимых разрешимых линейных групп над конечными полями и конечных примитивных разрешимых групп;
- Nilmat — для вычислений с нильпотентными матричными группами и др.

В настоящей работе рассматриваются решения задач теории классов Фиттинга, классов Шунка, формаций [6]. Напомним, что класс групп — совокупность групп, содержащая с каждой своей группой G и все ей изоморфные группы [6].

Со второй половины 1960-х годов важное место в теории разрешимых групп стали занимать исследования, связанные с классами Фиттинга. Следует отметить, что сам термин «класс Фиттинга» возник, исходя из долгосрочной программы структурного анализа конечных групп, предложенной в 1938 году Х. Фиттингом, в которой впервые систематически использовался нильпотентный радикал групп. В дальнейшем классы Фиттинга стали рассматриваться и как самостоятельные объекты изучения.

Классы Фиттинга разрешимых групп впервые упоминаются в статье Фишера [7] в 1966 году. В ней классы Фиттинга были введены двойственным образом к формациям, классам групп, замкнутым относительно фактор-групп и относительно подпрямого произведения. Двойственность заключалась в том, что определение классов Фиттинга получалось из определения формаций заменой фактор-групп на нормальные подгруппы. В статье Фишера, Гашюца, Хартли [8] впервые рассматриваются классы Фиттинга конечных групп.

Напомним, что класс Фиттинга — класс групп, замкнутый относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных подгрупп; класс Шунка — класс групп, который одновременно замкнут относительно факторгрупп и является примитивно замкнутым классом; формация — класс групп, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений [6].

Для решения задач теории классов конечных групп нами был использован пакет CRISP системы компьютерной алгебры GAP. В теории классов конечных групп пакет CRISP можно применять при:

1. Решении задач теории классов Фиттинга и множеств Фиттинга;
2. Решении задач теории классов Шунка;
3. Решении задач теории формаций.

Используя возможности пакета CRISP при решении задач теории классов Фиттинга и множеств Фиттинга, мы выяснили, что пакет CRISP позволяет:

- создавать классы Фиттинга;
- проверять, является ли заданное множество группы G множеством Фиттинга;
- создавать множества Фиттинга [9].

При решении задач теории классов Шунка и формаций пакет CRISP позволяет решать следующие задачи:

- создавать классы Шунка;
- создавать формации [9].

С помощью пакета CRISP также разработан комплекс программ, позволяющий решать следующие задачи теории классов конечных групп:

1. Проверять, является ли класс групп классом Фиттинга.
2. Проверять, является ли класс групп классом Шунка.
3. Проверять, является ли класс групп формацией.

3. Заключение

Компьютерная математика — новое направление науки и техники, возникшее на стыке классической математики и информатики. Пользователи с помощью современных систем компьютерной математики способны решать многие математические и прикладные задачи.

Для решения вычислительных задач в области теории классов конечных групп наиболее перспективной системой является GAP, так как GAP является свободно распространяемым пакетом и представляет достаточно большой функционал для решения задач вычислительной теории групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Система компьютерной алгебры Maple [Электронный ресурс]. URL: <http://bourabai.kz/cm/maple.htm> (дата обращения: 28.04.2021).
2. Система компьютерной алгебры Mathcad [Электронный ресурс]. URL: <https://ppt-online.org/488238> (дата обращения: 28.04.2021).
3. Система компьютерной алгебры MATLAB [Электронный ресурс]. URL: <http://www.vsavm.by/knigi/kniga3/1240.html> (дата обращения: 28.04.2021).
4. Система компьютерной алгебры MAGMA [Электронный ресурс]. URL: [https://hrwiki.ru/wiki/Magma_\(computer_algebra_system\)](https://hrwiki.ru/wiki/Magma_(computer_algebra_system)) (дата обращения: 28.04.2021).
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gap-system.org> (дата обращения: 28.04.2021).
6. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: учеб. пособие. Мн.: Выш. шк., 2006. 207 с.
7. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Universität Frankfurt: Habilitationsschrift, 1966.
8. Fischer B., Gaschutz W., Hartley B. Injektoren endlicherauflösbarer Gruppen // Math. Z. 1967. Bd. 102, No. 5. P. 337–339.
9. The GAP Group. GAP / The GAP Group — Reference Manual. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap0.html> (дата обращения: 28.04.2021).

APPLICATION OF THE COMPUTER ALGEBRA SYSTEM GAP IN THE THEORY OF CLASSES OF FINITE GROUPS

E.N. Zaleskaya

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: ZaleskayaEN@yandex.by

E.M. Drozd

Instructor, Master's Degree Student, e-mail: elena_1998-1998@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. The application of the GAP computer algebra system in solving problems of the theory of classes of finite groups, in particular the CRISP package, is considered. The types of problems in the theory of finite groups are given that can be solved using the computer algebra system GAP, in particular, whether the class of finite groups is a Fitting class, a Schunck class, or a form.

Keywords: finite groups, class of groups, Fitting class, Schunck class, formation, computer algebra system.

REFERENCES

1. Sistema komp'yuternoi algebry Maple [Elektronnyi resurs]. URL: <http://bourabai.kz/cm/maple.htm> (28.04.2021). (in Russian)
2. Sistema komp'yuternoi algebry Mathcad [Elektronnyi resurs]. URL: <https://ppt-online.org/488238> (28.04.2021). (in Russian)
3. Sistema komp'yuternoi algebry MATLAB [Elektronnyi resurs]. URL: <http://www.vsavm.by/knigi/kniga3/1240.html> (28.04.2021). (in Russian)
4. Sistema komp'yuternoi algebry MAGMA [Elektronnyi resurs]. URL: [https://hrwiki.ru/wiki/Magma_\(computer_algebra_system\)](https://hrwiki.ru/wiki/Magma_(computer_algebra_system)) (28.04.2021). (in Russian)
5. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. URL: <http://www.gap-system.org> (28.04.2021).
6. Monakhov V.S. Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov: ucheb. posobie. Mn., Vysh. shk., 2006, 207 p. (in Russian)
7. Fischer B. Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen. Universität Frankfurt, Habilitationsschrift, 1966.
8. Fischer B., Gaschutz W., and Hartley B. Injektoren endlicherauflösbarer Gruppen. Math. Z., 1967, bd. 102, no. 5, pp. 337–339.
9. The GAP Group. GAP, The GAP Group — Reference Manual. URL: <http://www.gap-system.org/Manuals/doc/ref/chap0.html> (28.04.2021).

Дата поступления в редакцию: 30.05.2021

РАЗРАБОТКА ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ ЛАБОРАТОРИИ ФНСиП

П.М. Косьянов¹

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: kospiter2012@yandex.ru

Н.В. Манюкова^{1, 2}

к.п.н., доцент, e-mail: manukovanv@mail.ru

¹Тюменский индустриальный университет, филиал в г. Нижневартовске, Россия

²Нижневартовский государственный университет, г. Нижневартовск, Россия

Аннотация. Статья посвящена особенностям проектирования и разработки программного продукта, позволяющего автоматизировать процесс учёта оборудования и создания программ исследований лаборатории физики нефтегазовых систем и пластов.

Ключевые слова: информационная система, разработка информационной системы, учёт оборудования, лаборатория физики.

Введение

Объектом исследования являлась лаборатория физики нефтегазовых систем и пластов (ФНСиП) ОАО «НижневартовскНИПИнефть».

В научно-исследовательской деятельности важно уделять внимание не только самому процессу проведения лабораторных исследований, но также грамотному и эффективному учёту материалов исследования, применяемого оборудования и прочего [6–8].

Возможность своевременно получить достоверную информацию по имеющемуся в наличии оборудованию позволяет оперативно решать возникающие в ходе работы проблемы, планировать модернизацию, ремонт, хранение и текущее обслуживание, что, в итоге, тоже положительно сказывается на производительности труда на предприятии: позволяет избежать простоев и минимизировать потери времени, связанные с выходом техники из строя.

Так, к примеру, керн является носителем геологической информации о недрах, раскрытие которой начинается с момента его извлечения. Исследования керна могут быть продолжены по мере необходимости через значительный промежуток времени. Поэтому учёт материалов кернохранилища является весьма актуальной задачей. А автоматизация процесса составления программы исследований для требуемого материала также повысит производительность и эффективность работ.

1. Анализ предметной области и постановка задачи

Разрабатываемый программный продукт ориентирован на предприятия, занимающиеся литолого-петрофизическими исследованиями, в частности, продукт создаётся для лаборатории Физики нефтегазовых систем и пластов ОАО «НижневартовскНИПИнефть».

Лаборатория ФНСиП проводит комплексные лабораторные исследования литолого-петрофизических характеристик образцов керна и осуществляет свою деятельность на рынке сервисных услуг в области петрофизических исследований с 1987 года.

Данная лаборатория располагает достаточными площадями для полномасштабных исследований и долгосрочного хранения керна. Она оборудована калибровочными установками для проведения петрофизических исследований керна и обеспечена специализированным программным комплексом «Сапфир», позволяющим обслуживать всю технологическую цепочку исследования керна, анализировать и хранить данные.

Лабораторные исследования пород-коллекторов и пластовых флюидов проводятся с целью получения информации о характеристиках ёмкости, фильтрации пород-коллекторов нефти и газа. Результаты этих исследований используются для подсчёта запасов, составления технических проектов разработки, интерпретации материалов геофизических исследований скважин. Также результаты исследования петрофизических и механических свойств пластовых систем на кернах могут быть использованы для повышения эффективности проведения гидроразрывов пластов.

В настоящий момент лаборатория проводит работы на определение:

1. Коэффициента абсолютной газопроницаемости при стационарной или нестационарной фильтрации;
2. Коэффициента открытой пористости;
3. Минералогической плотности;
4. Коэффициента водоудерживающей способности;
5. Коэффициентов остаточной водонасыщенности и нефтенасыщенности;
6. Общей карбонатности пород;
7. Коэффициента удельного электрического сопротивления;
8. Скорости распространения упругих волн;
9. Петрографическое описание породы в шлифах;
10. Коэффициента вытеснения и остаточной нефтенасыщенности и фазовой проницаемости;
11. Деформационно-упругих свойств горных пород;

12. Капиллярного давления насыщенных образцов керна.

Помимо основной исследовательской деятельности в лаборатории ведётся учёт материалов кернаохранилища, проводятся проверки собственного оборудования, составляются программы исследований, представляются отчёты о полученных результатах и выполняется множество других сопутствующих исследованию работ.

Для выполнения каждого заказа на исследование сотрудники лаборатории составляют программу его проведения – список работ, необходимых для определения нужных параметров. Также необходимо следить за состоянием оборудования лаборатории. При этом составление программ исследований для каждого нового заказа производится сотрудниками вручную. Впоследствии они хранятся в бумажном виде либо на компьютере в формате текстовых документов, что затрудняет поиск нужной информации в дальнейшем. Учёт оборудования ведётся только в бухгалтерии в разрезе документов.

На основе этих данных было принято решение включить в информационную систему лаборатории подсистемы учета оборудования и автоматизации составления программ исследования.

Проводимые лабораторией ФНСиП исследования керна и пластовых флюидов востребованы и актуальны. Данные о запасах нефти, информация, необходимая для составления технических проектов разработки, очень важны при эксплуатации и разработке месторождений. Поэтому для повышения количества производимых исследований и уменьшения трудозатрат на их проведение необходимо автоматизировать большинство сопутствующих исследованию работ.

В процессе анализа предметной области были выявлены следующие задачи автоматизации:

1. Учёт лабораторного оборудования;
2. Учёт материальных средств лаборатории;
3. Автоматизация составления программ исследований.

Для этого при проведении инвентаризации оборудования лаборатории необходимо было учитывать следующие сведения:

1. Название оборудования;
2. Описание и назначение оборудования;
3. Состав оборудования;
4. Характеристики оборудования;
5. Состояние оборудования;
6. Дата последней проверки.

Таким образом, программный продукт должен был обеспечить:

- возможность ввода, хранения и редактирования информации и представления форм отчётности;
- поиск необходимой информации;
- анализ состояния лабораторного оборудования;
- экспорт отчётов в MS Word;
- интерфейс, удобный для пользователя;
- печать форм отчётности по результатам выполненных работ.

Следовательно, главная задача заключалась в проектировании [11, 13] и разработке базы данных для хранения информации о заказчиках, районах исследования, сведений о выполняемых работах и оборудовании, с организацией необходимой защиты имеющихся данных путём использования средств аутентификации и шифрования. Разработка проводилась средствами среды Borland C++ Builder v6.0 [1-5], [15]. Стандартными компонентами этой среды разработки реализована связка механизма ADO с базой данных MS Access через ODBC.

2. Определение критериев качества продукта

Руководствуясь стандартом ISO 9126-1, были выбраны критерии качества продукта, на которые ориентировались при разработке информационной системы.

1. **Функциональность** — набор атрибутов, характеризующий соответствие функциональных возможностей ПО набору требуемой пользователем функциональности. Детализируется следующими подхарактеристиками:
 - пригодностью для применения;
 - корректностью (правильностью, точностью);
 - защищённостью.
2. **Правильность (корректность)** — программный продукт нацелен на предоставление в ходе использования корректных для пользователя результатов.
3. **Способность к взаимодействию с MS Office** путём выгрузки отчётов.
4. **Защищённость**. В программу внедрены системы аутентификации и шифрования. Аутентификация позволяет ограничить доступ, а шифрование защитит от несанкционированного копирования информации.
5. **Надёжность** — набор атрибутов, относящихся к способности ПО сохранять свой уровень качества функционирования в установленных условиях за определённый период времени. Все исключительные ситуации корректно будут обработаны в режиме реального времени, о чём пользователь будет проинформирован в случае возникновения такой ситуации.

6. Эффективность. Программный продукт обеспечивает требуемую производительность решения функциональных задач с учётом количества используемых вычислительных ресурсов в установленных условиях.
7. Практичность (применимость). Программный продукт обладает интуитивно понятным интерфейсом, что приводит к лёгкости освоения процесса работы с ним. Это делает его довольно привлекательным для любого уровня пользователей.
8. Мобильность — набор атрибутов, относящихся к способности ПО быть перенесённым из одного окружения в другое.

Для хранения данных программы использована реляционная база данных [14, 15]. Схема данных и место подсистем во всей информационной системе представлена на рисунке 1.

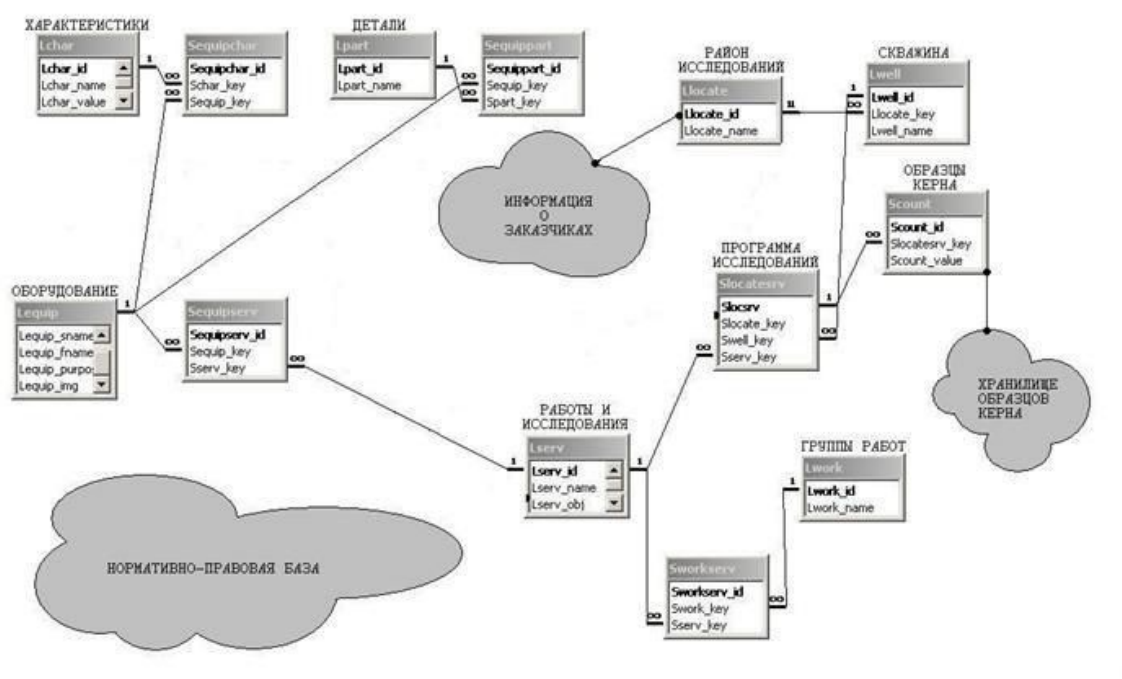


Рис. 1. Схема данных и место подсистем во всей ИС

В интерфейс программного продукта встроено средство регистрации пользователей системы. В качестве основных идентификационных данных внесено имя пользователя (логин) и пароль. Политика разграничения прав пользователей системы помогает выстроить чёткую иерархию взаимодействия сотрудников

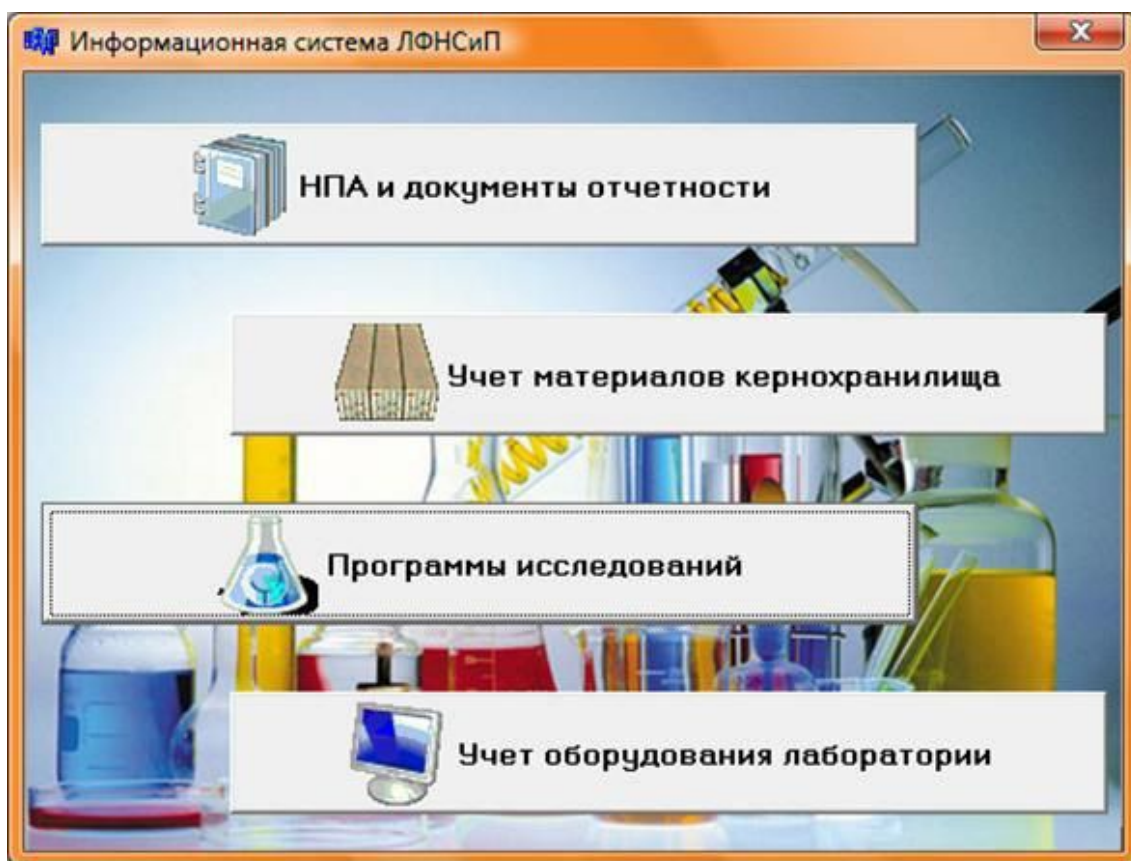


Рис. 2. Главная форма информационной системы

с программой, а также действует как защитный барьер от несанкционированных действий.

В подсистемах учёта оборудования и автоматизации создания программ исследования предусмотрено разделение ролей пользователей:

- администратор;
- обычный пользователь.

Основное требование к пользовательскому интерфейсу — его эргономичность. Цель создания эргономичного интерфейса состоит в том, чтобы отобразить информацию настолько эффективно, насколько это возможно для человеческого восприятия [10]. Для этого необходимо минимизировать общую информацию на экране и отображать только ту, которая нужна пользователю в данный момент. Ещё одна немаловажная задача эргономичного интерфейса — структурировать отображение на экране таким образом, чтобы привлечь внимание к наиболее важным единицам информации. Изображение главной формы информационной системы представлено на рисунке 2.

В целях минимизации возникновения возможных ошибок и неточностей, а также облегчения труда сотрудников в систему встроен механизм справочников.

В подсистеме создано три справочника:

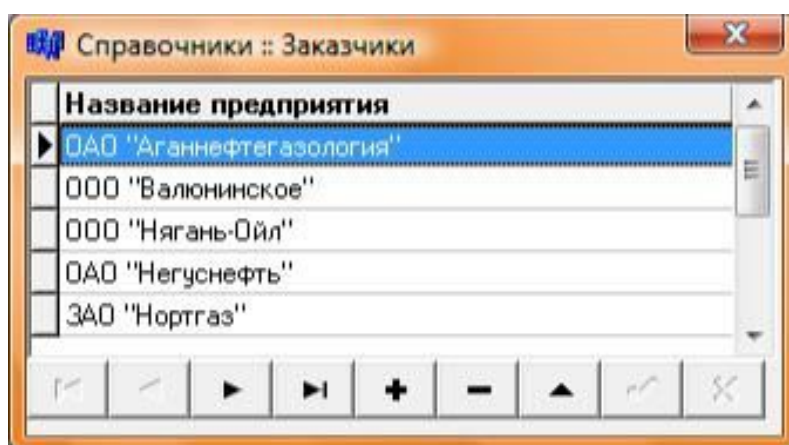


Рис. 3. Форма справочника «Заказчики»

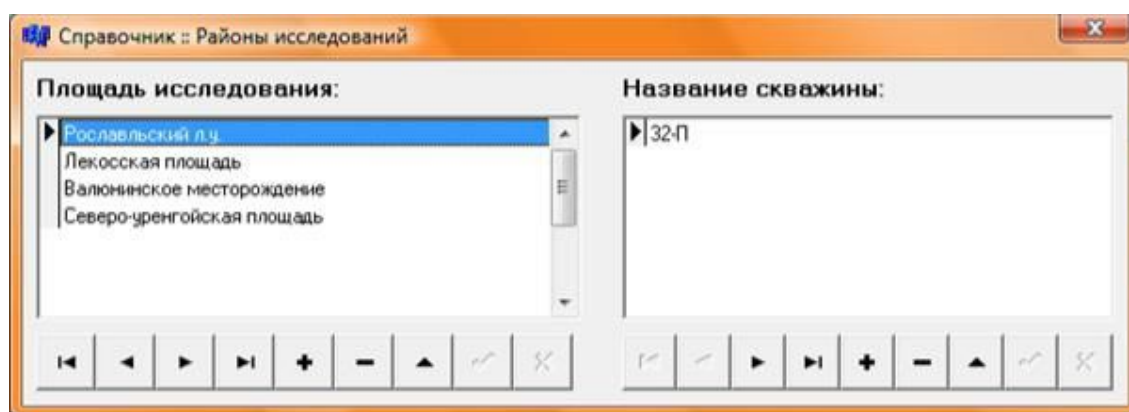


Рис. 4. Форма справочника «Районы исследований»

- заказчики;
- районы исследования;
- виды исследования.

Справочник «Заказчики» предназначен для хранения, редактирования существующих и добавления новых данных о заказчиках. Форма работы со справочником показана на рисунке 3.

Справочник «Районы исследований» хранит информацию о месторождениях и скважинах. Его изображение представлено на рисунке 4.

Данные о проводимых лабораторией работах хранятся в справочнике «Виды исследований». Для удобной навигации и ускорения поиска необходимой услуги работы были разбиты на категории. В справочнике содержится информация о наименовании услуги, объекте исследования и её стоимости. Категории также можно добавлять или изменять текущие. Форма справочника представлена на рисунке 5.

Рассмотрим формы подсистемы учёта оборудования. Учёт проводится в основном для слежения за текущим состоянием оборудования. Помимо этого в

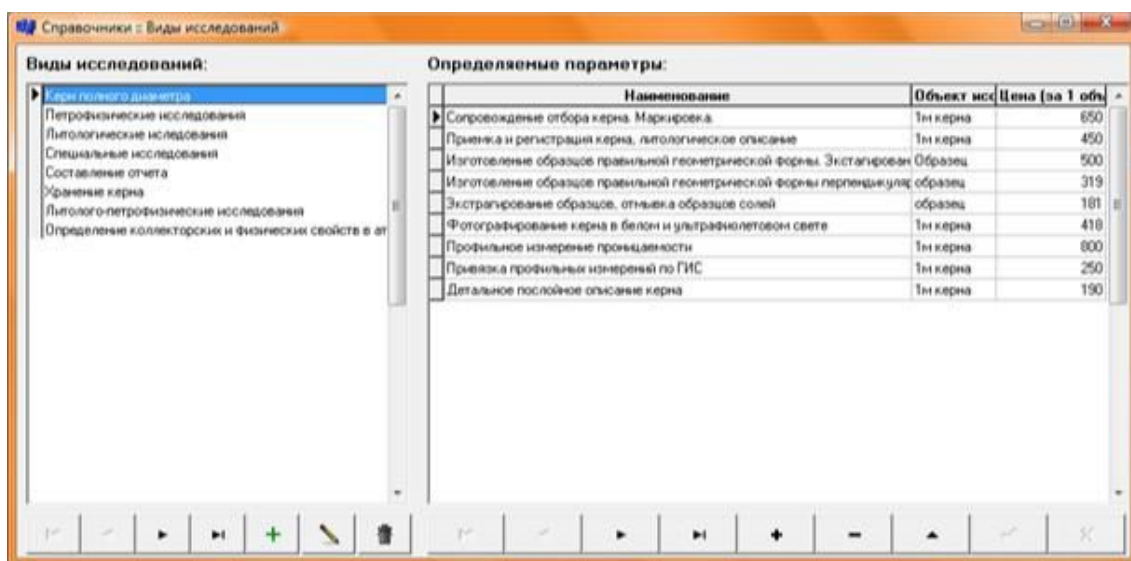


Рис. 5. Форма справочника «Виды исследований»

Добавление оборудования

Краткое наименование
Аквадистиллятор

Полное наименование
Аквадистиллятор

Назначение
Дистилляция воды

Состояние:
требуется проверка

Период обслуж.
31 дней

Последнее обслуж.
01.09.2020

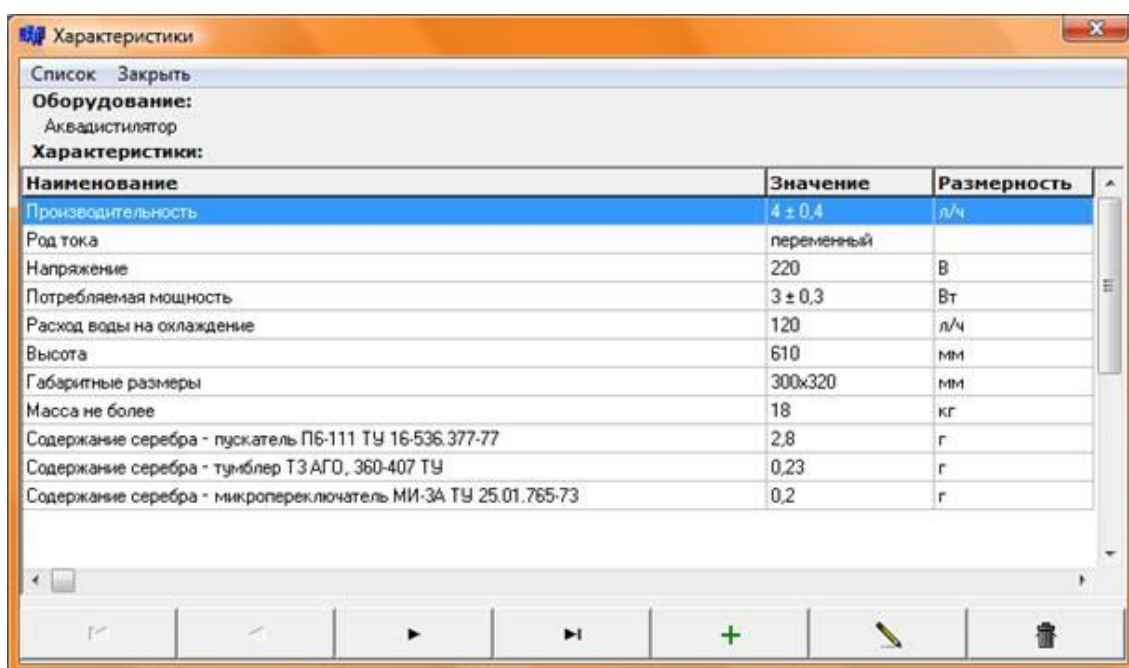
OK Отмена

Рис. 6. Главная форма подсистемы учёта оборудования

любой момент времени можно получить сведения о его составе и характеристиках. На рисунке 6 показана главная форма подсистемы.

Форма характеристик оборудования показана на рисунке 7. На ней приведены названия выбранного оборудования и список его характеристик. Список включает в себя наименование характеристики, ее значение и размерность.

Форма изображения оборудования представлена на рисунке 8. Изображение можно изменить, выбрав из файла новое, или удалить.



Наименование	Значение	Размерность
Производительность	$4 \pm 0,4$	л/ч
Род тока	переменный	
Напряжение	220	В
Потребляемая мощность	$3 \pm 0,3$	Вт
Расход воды на охлаждение	120	л/ч
Высота	610	мм
Габаритные размеры	300x320	мм
Масса не более	18	кг
Содержание серебра - пускатель П6-111 ТУ 16-536.377-77	2,8	г
Содержание серебра - тунблер ТЗ АГО, 360-407 ТУ	0,23	г
Содержание серебра - микропереключатель МИ-3А ТУ 25.01.765-73	0,2	г

Рис. 7. Форма характеристик оборудования

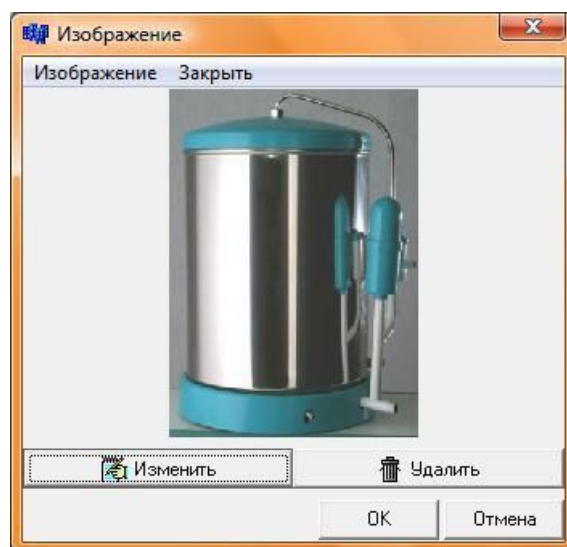


Рис. 8. Форма изображения оборудования

Ещё одним требованием к подсистеме является реализация механизма формирования отчётности. Содержание отчёта можно изменять. Доступны следующие виды отчёта:

- отчёт о состоянии всего оборудования лаборатории;
- список исправного оборудования;
- список неисправного оборудования;
- список оборудования, нуждающегося в проверке.

В процессе тестирования данного программного продукта была проверена работоспособность программы в стандартных условиях, на уровне отдельных функций и модулей и всей программы в общем, а также при вводе заведомо неверных или сложных входных данных. По результатам проведённого тестирования можно сказать, что программа успешно выполняет все функции и справляется с нестандартными ситуациями без прерывания и возникновения фатальных ошибок.

В ходе тестирования программы не выявлено никаких нарушений, которые могли привести к сбою в работе программы. Это обеспечивается минимизацией введения данных пользователем с клавиатуры. Основные значения выбираются из выпадающих списков либо вычисляются автоматически. В дополнение к этому на каждом шаге осуществляется контроль входных и выходных данных.

Заключение

Основным назначением разработанного программного продукта является повышение эффективности и качества проводимых лабораторией работ. Реализация учёта оборудования позволит постоянно контролировать состояние техники и своевременно проводить её проверки. Автоматизация процесса составления программ исследований приведет к уменьшению затрачиваемого времени на проведение рутинных операций и также позволит определить, возможно ли проведение того или иного исследования в зависимости от состояния необходимого оборудования.

Разработанные механизмы поиска по выбираемым критериям и механизмы формирования отчётности также позволят экономить значительную часть рабочего времени сотрудников лаборатории. В программе реализованы некоторые аспекты информационной безопасности, а именно: передача и хранение в базе данных зашифрованных паролей и механизм авторизации.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что разработанный продукт является законченным и может быть рекомендован к внедрению в лаборатории ФНСиП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.Я. Язык C++ в C++Builder: справ. пособие. М. : Бином-Пресс, 2008. 944 с.
2. Архангельский А.Я. Приёмы программирования в C++Builder 6 и 2006: учебное пособие. М. : Бином, 2006. 992 с.
3. Брусаков И.А., Чертовской В.Д. Информационные системы и технологии в экономике: учеб. пособие. М. : Финансы и статистика, 2007. 352 с.
4. Глушаков С.В., Дуравкина Т.В. Программирование на C++: справ. пособие. 2-е изд., перераб. и дополн. М. : АСТ, 2008. 688 с.
5. Емельянова Н.З., Партыка Т.Л. Проектирование информационных систем: учебник для вузов. М. : Форум, 2009. 432 с.

6. Косьянов П.М. Виртуальный лабораторный комплекс по квантовой, атомной и ядерной физике. Учебное пособие. Библиотечно-издательский комплекс ТИУ, 2016, 175 с.
7. Косьянов П.М. Виртуальный лабораторный комплекс по квантовой физике. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020610888, 21.01.2020. Заявка № 2019667830 от 30.12.2019.
8. Косьянов П.М. Виртуальный лабораторный комплекс по ядерной физике. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020610889, 21.01.2020. Заявка № 2019667813 от 30.12.2019.
9. Лаптев В.В. С++. Объектно-ориентированное программирование: учебное пособие. СПб. : Питер, 2008. 464 с.
10. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю. Методология проектирования и разработки обучающих программных комплексов. В сборнике: Современное программирование. Материалы II Международной научно-практической конференции. Отв. редактор Т.Б. Казиахмедов. 2019. С. 112–116.
11. Манюкова Н.В., Уразаева Л.Ю. CASE-средства в преподавании информационных технологий для студентов направления подготовки «Информатика и вычислительная техника» // Преподавание информационных технологий в Российской Федерации: Материалы Шестнадцатой открытой Всероссийской конференции. 2018. С. 93–95.
12. Павловская Т.А. С/С++. Программирование на языке высокого уровня: учебное пособие. СПб. : Питер, 2004. 461 с.
13. Уткин В.В., Балдин К.В. Информационные системы: учебник для студ. высш. учеб. заведений. М. : Издательский центр «Академия», 2004. 288 с.
14. Хомоненко А.Д., Цыганков В.М., Мальцев М.Г. Базы данных: учебник для вузов / Под ред. проф. А.Д. Хомоненко. 6-е изд., доп. и перераб. СПб. : Корона-Век, 2007. 736 с.
15. Хомоненко А.Д., Ададуров С.А. Работа с базами данных в С++ BUILDER: учебное пособие. СПб. : БХВ-Петербург, 2006. 388 с.

DEVELOPMENT OF THE POGSR LABORATORY'S INFORMATION SYSTEM

P.M. Kosianov¹

Professor, Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: kospiter2012@yandex.ru

N.V. Manyukova^{1, 2}

Ph.D. (Ped.), Associate Professor, e-mail: manukovanv@mail.ru

¹Tyumen Industrial University, branch Nizhnevartovsk, Russia

²Nizhnevartovsk State University, Nizhnevartovsk, Russia

Abstract. The article is devoted to the peculiarities of the design and development of software that allows automating the process of equipment accounting and the creation of programs for the laboratory of physics of oil and gas systems and reservoirs.

Keywords: information system, information system development, equipment accounting, physics laboratory.

REFERENCES

1. Arkhangel'skii A.Ya. Yazyk C++ v C++Builder: sprav. posobie. Moscow, Binom-Press Publ., 2008. 944 p. (in Russian)
2. Arkhangel'skii A.Ya. Priemy programmirovaniya v C++Builder 6 i 2006: uchebnoe posobie. Moscow, Binom Publ., 2006, 992 p. (in Russian)
3. Brusakov I.A. and Chertovskoi V.D. Informatsionnye sistemy i tekhnologii v ekonomike: Ucheb. posobie. Moscow, Finansy i statistika Publ., 2007, 352 p. (in Russian)
4. Glushakov S.V. and Duravkina T.V. Programmirovanie na C++: sprav. posobie. 2-e izd., pererab. i dopoln. Moscow, AST Publ., 2008, 688 p. (in Russian)
5. Emel'yanova N.Z. and Partyka T.L. Proektirovanie informatsionnykh sistem: uchebnik dlya vuzov. Moscow, Forum Publ., 2009, 432 p. (in Russian)
6. Kos'yanov P.M. Virtual'nyi laboratornyi kompleks po kvantovoi, atomnoi i yadernoi fizike. Uchebnoe posobie, Bibliotechno-izdatel'skii kompleks TIU, 2016, 175 p. (in Russian)
7. Kos'yanov P.M. Virtual'nyi laboratornyi kompleks po kvantovoi fizike. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2020610888, 21.01.2020. Zayavka no. 2019667830 ot 30.12.2019. (in Russian)
8. Kos'yanov P.M. Virtual'nyi laboratornyi kompleks po yadernoi fizike. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya EVM RU 2020610889, 21.01.2020. Zayavka no. 2019667813 ot 30.12.2019. (in Russian)
9. Laptev V.V. C++. Ob"ektno-orientirovannoe programmirovanie: uchebnoe posobie. SPb., Piter Publ., 2008, 464 p. (in Russian)
10. Manyukova N.V. and Urzaeva L.Yu. Metodologiya proektirovaniya i razrabotki obuchayushchikh programmnykh kompleksov. V sbornike: Sovremennoe programmirovanie, Materialy II Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii, Otv. redaktor T.B. Kaziakhmedov, 2019, pp. 112–116. (in Russian)
11. Manyukova N.V. and Urzaeva L.Yu. CASE-sredstva v prepodavanii informatsionnykh tekhnologii dlya studentov napravleniya podgotovki «Informatika i vychislitel'naya tekhnika». Prepodavanie informatsionnykh tekhnologii v Rossiiskoi Federatsii, Materialy Shestnadtsatoi otkrytoi Vserossiiskoi konferentsii, 2018, pp. 93–95. (in Russian)
12. Pavlovskaya T.A. C/S++. Programmirovanie na yazyke vysokogo urovnya: uchebnoe posobie. SPb., Piter Publ., 2004, 461 p. (in Russian)
13. Utkin V.V. and Baldin K.V. Informatsionnye sistemy: uchebnik dlya stud. vyssh. ucheb. zavedenii. Moscow, Izdatel'skii tsentr "Akademiya", 2004, 288 p. (in Russian)
14. Khomonenko A.D., Tsygankov V.M., and Mal'tsev M.G. Bazy dannykh: uchebnik dlya vuzov. Pod red. prof. A.D. Khomonenko, 6-e izd., dop. i pererab., SPb., Korona-Vek Publ., 2007, 736 p. (in Russian)
15. Khomonenko A.D. and Adadurov S.A. Rabota s bazami dannykh v C++ BUILDER: uchebnoe posobie. SPb., BKhV-Peterburg Publ., 2006, 388 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 10.02.21

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ИЗВЛЕЧЕНИЯ СМЫСЛА ИЗ ТЕКСТА В КАТЕГОРИЗАЦИИ ОБРАЩЕНИЙ ГРАЖДАН

Е.А. Тюменцев

преподаватель, e-mail: etyumentcev@gmail.com

Т.В. Мелешенко

магистрант, e-mail: tanyamelesh@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Проверка возможности использования алгоритма обработки запросов пользователей в контексте форм ввода данных с целью определения категории обращений граждан

Ключевые слова: обработка, русский, естественный, язык, NLP, извлечение фактов из текста, обращения граждан.

Введение

Придомовые, муниципальные и федеральные собственности и/или территории порой приходят в негодность, а также происходят некоторые другие события, о которых можно сообщать для решения возникших проблем.

С целью получения информации об этих событиях были созданы различные государственные сервисы по обработке обращений граждан. Однако зачастую чётко не описываются критерии, по которым модератору или самому гражданину можно однозначно отнести запрос к конкретной категории.

Решить такую проблему можно с помощью обработки содержимого обращения с целью автоматического определения категории. Предложенное решение позволит сократить ошибочные категории, что может ускорить процесс обработки запроса. Кроме того, исключит участие человека в определении категории обращения, что также благоприятно скажется на скорости обработки обращения.

Таким образом, целью является проверка работоспособности описанной выше идеи с использованием ранее разработанного алгоритма [1].

Определены следующие задачи:

1. Описать правила для обработки обращений граждан.
2. В качестве результата отправлять полученную категорию в формате JSON.

В данной статье будут описаны особенности использования алгоритма, разработанного для извлечения смысла из текста в контексте создания форм данных, который подробно описан в статье [1], и возникшие сложности в реализации поставленных задач.

1. Постановка задачи

В качестве базы для описания правил и проверки работы алгоритма были получены обращения граждан из Республики Татарстан с объёмом более 25 тыс. записей.

Вся полученная информация об обращении разбита на следующие виды:

1. Дата подачи заявки;
2. Долгота;
3. Широта;
4. Адрес;
5. Категория, присвоенная модератором;
6. Описание заявки;
7. id исполнителя;
8. Статус заявки.

Для автоматического определения категории необходимы поля «Описание заявки» и «Адрес», а для составления правил – ещё дополнительно «Категория, присвоенная модератором».

Рассмотрим несколько примеров обращений из разных категорий, не включая поле «Адрес», т. к. оно зачастую имеет стандартный формат и интереса в данный момент не представляет:

Таблица 1. Примеры заявок и их категории

Категория	Заявка
Содержание и ремонт муниципальных дорог	Сделать съезд
Доступная среда	Сделать вход для колясочников установить пандус на входной группе к организации Спорт прогноз в здании где нет пандуса
Благоустройство территории	Сзади гаражного сектора и частных домов образовалась стихийная свалка. Просим привести в порядок

В первой заявке явно указано действие, которое при отсутствии другой информации можно отнести к указанной категории.

Категория второй заявки определяется с помощью действий («сделать вход», «установить пандус») и уточняющей информации — «для колясочников», также можно выделить причину заявки: «нет пандуса»; и место: «на входной группе», «к организации Спорт прогноз».

В третьей заявке действием будет «привести в порядок», местом — «сзади гаражного сектора и частных домов», а причиной — «образовалась стихийная свалка».

На примерах выше можно определить, информацию какого смысла необходимо извлекать из запроса для определения его категории: действие, место и причина.

Важно отметить, что не в каждом обращении обязательно будут присутствовать все три параметра, такие запросы наиболее часто встречаются и их также нужно обрабатывать. Поэтому предлагается использовать в качестве результата списки с правилами, которые удалось распознать. Более того, такой подход позволит разобрать обращения, в которых имеется избыточная для категоризации информация.

2. Реализация

2.1. Сравнение данной задачи с построением форм ввода данных

Основное отличие от описанного в статье [1] алгоритма заключается в получаемом ответе после обработки. Если при обработке запроса в контексте форм ввода данных целью являлось определить смысл запроса, то в данном случае целью является по смыслу запроса определить его категорию, т. е. выявление смысловых частей «действие», «место» и «причина» будет происходить на этапе семантического анализа. Притом теперь получить необходимо не один результат работы, а всё, что удалось найти во входящем запросе.

Каждое дерево, выделяющее смысловые части «действие», «место» и «причина» строится по алгоритму на рис. 1.

С целью получения категории было необходимо описать дополнительное дерево решений, которое по выделенному смыслу обращения отправляло ответ в виде категории данного обращения.

Однако если это отличие можно было описать ещё одним алгоритмом и реализовать за достаточно короткий промежуток времени, то правила для обработки таких обращений было необходимо заново описать вручную, что и заняло большую часть времени для проверки возможности использования ранее реализованного алгоритма.

Рассмотрим работу изменённого алгоритма на примере запроса «Благоустроенная площадка превратилась в свалку мусора», ожидаемая категория: «Благоустройство территории».

Начальным значением, подаваемым на вход алгоритма является сам текстовый запрос. Далее с помощью синтаксического анализа выявляются цепочки

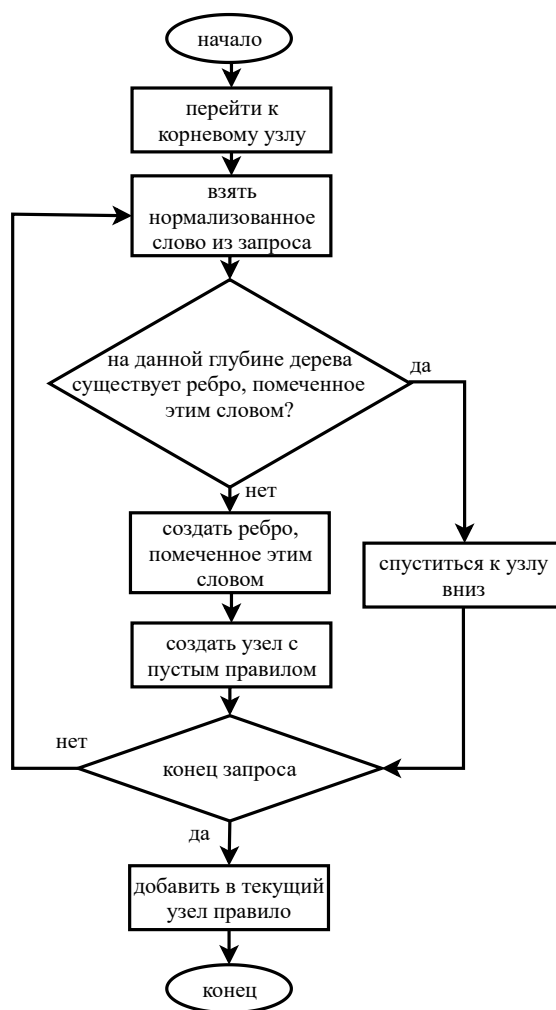


Рис. 1. Алгоритм построения дерева принятия решений

слов, которые после обработки семантическим анализом можно отнести к описанным ранее смысловым частям. Затем по выявленным значениям смысловых частей дерево определения категории пытается найти правило и отнести запрос к конкретной категории, что и будет являться результатом обработки запроса. Общий алгоритм обработки запроса представлен на рис. 2.

На этапе семантического анализа были разобраны следующие смысловые части:

```
[ {
    "type": "reason",
    "lexemes": [ "свалк", "мусор" ]
}]
```

где "type" — это смысловая часть запроса «причина», а "lexemes" — список разобранных лексем. Заметим, что результатом является именно список, т. к. именно на этом этапе определяются и другие смысловые части запроса.

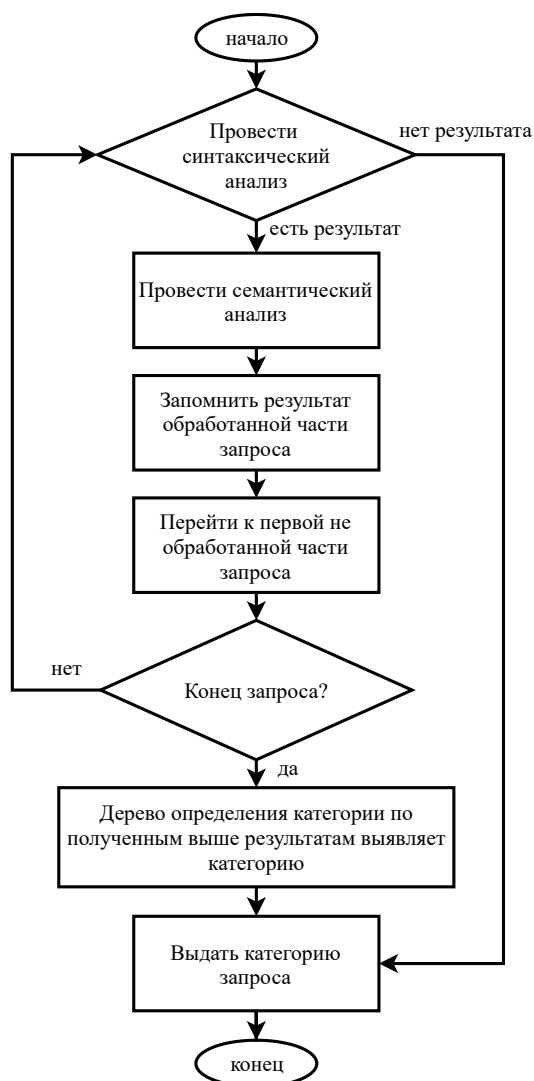


Рис. 2. Алгоритм обработки запросов граждан

С помощью дерева определения категории обращения из полученных правил можно получить следующий результат:

```

{
  "category": "Благоустройство территории"
}

```

Всего для определения категорий было описано более 8 тыс. правил лексического анализа, 5 тыс. на каждый из синтаксического и семантического анализов, а также более 4,5 тыс. правил для определения категории запроса.

В среднем правильность определения категории составила 75 %.

Для улучшения данного показателя необходимо либо вручную дописать правила для неправильно обработанных запросов, либо изменить подход к решению поставленной задачи. В качестве альтернативного решения можно при-

менить алгоритмы автоматического построения деревьев решений с помощью библиотек на языке Python.

2.2. Возникшие сложности

Стоит отметить, что в процессе описания правил для анализаторов были выявлены множественные несоответствия установленной категории и самого запроса. Схожие по смыслу запросы зачастую относились то к категории «Благоустройство территории», то к категории «Содержание и ремонт муниципальных дорог», что только усложнило процесс описания правил, т. к. для определения категории необходимо выявить чёткие границы и ключевые слова, к какой категории полученный запрос необходимо отнести.

Для решения этой проблемы стало необходимо изучить законодательство в разделении обязанностей между управляющими органами. Таким образом, придомовая территория и дороги прилегающие к ней — остаются на обеспечении управляющей компании дома, что относится к категории «Благоустройство территории». Обращения о разрушенных или не обслуживаемых дорогах города — к категории «Содержание и ремонт муниципальных дорог», а обращения о трассах между городами — к категории «Содержание и ремонт федеральных дорог».

Также помимо ошибочных категорий были обнаружены неразделённые по видам информации запросы. К примеру, поле «Описание заявки» одного запроса могло включать помимо самого текста обращения информацию ещё о нескольких других, не относящихся к данному, запросов.

По большей части данные выглядели следующим образом: «текст обращения 1//id исполнителя//Статус заявки Дата подачи заявки//Долгота//Широта//47/36-1, Адрес//Категория, присвоенная модератором//текст обращения 2//id исполнителя Статус заявки//».

Для упрощения проверки работоспособности алгоритма было решено не приводить ошибочные данные описанного выше вида к эталонному, а оставить их без обработки, т. к. для описания правил и проверки работы самого алгоритма было достаточно и меньшего объёма данных.

Заключение

Из описанного в статье можно сделать вывод, что разработанный ранее алгоритм для обработки голосовых запросов в контексте создания форм достаточно просто применяется и в других областях.

Преимуществом предложенного в настоящей и предыдущей статьях алгоритма является простота его расширения: при появлении не обрабатываемых ранее формулировок достаточно добавить несколько правил в деревья принятия решений и провести автоматизированные тесты для проверки корректности работы.

Однако сам процесс описания правил занимает весьма значительную долю от всего процесса разработки сервиса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешенко Т.В., Тюменцев Е.А. Алгоритм распознавания текстовых команд построения произвольной формы ввода данных // Математические структуры и моделирование. 2020. № 3(55). С. 103–116.

USING ALGORITHM FOR EXTRACTING MEANING FROM TEXT IN CATEGORIZATION OF CITIZEN REQUESTS

E.A. Tumetcev

Instructor, e-mail: etyumentcev@gmail.com

T.V. Meleshenko

Master's Degree Student, e-mail: tanyamelesh@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. Checking the possibility of using the algorithm for process user requests in data entry forms context to determine citizen requests category.

Keywords: processing, russian, natural, language, NLP, extract facts from text, citizen requests.

REFERENCES

1. Meleshenko T.V. and Tyumentsev E.A. Algoritm raspoznavaniya tekstovykh komand postroeniya proizvol'noi formy vvoda dannykh. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 3(55), pp. 103–116. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 10.03.2021

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета $\text{\LaTeX}$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор $\text{\LaTeX}$, так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми верхними кавычками ("abcdeг" или "abcdeг").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внёсшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищённые авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры и моделирование

№2(58)

Главный редактор

А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор

Н.Ф. Богаченко

Корректор:

И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:

А.Н. Кабанов

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,
Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



Подписано в печать 07.10.2021. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 18,72. Тираж 60 экз. Заказ № 147.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005

21058 >

