Математические структуры и моделирование
2021. № 1(57). С. 41–45

УДК 512.81+514.12
DOI 10.24147/2222-8772.2021.1.41-45

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ПОДОБИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

М.Н. Подоксёнов
к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ГиМА, e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com
Е.А. Иванова
студентка, e-mail: ekaterina2000ivyandex@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова, Витебск,
Республика Беларусь

Аннотация. Рассматривается однопараметрическая группа подобий четырёхмерного пространства Минковского, имеющая более одного инвариантного изотропного направления. Находятся все двумерные подпространства, инвариантные относительно действия этой группы. Полученные результаты очень важны для изучения автоморфизмов четырёхмерных алгебр Ли, являющихся одновременно подобиями и изометриями относительно заданного в алгебре Ли лоренцевого скалярного произведения.

Ключевые слова: алгебра Ли, пространство Минковского, лоренцева метрика, однопараметрическая группа, подобие, изометрия.

Риманово, или лоренцево, многообразие (M, g) называется самоподобным, если оно допускает существенную однопараметрическую группу подобий. Пусть рассматриваемое многообразие G представляет связную односвязную группу Ли, а $\mathcal{G}$ – соответствующая ей алгебра Ли. Как показано в работе [1], для того, чтобы найти все левоинвариантные лоренцевы метрики на группе Ли G, при которых она является самоподобным многообразием, необходимо сначала решить следующую задачу. Пусть в алгебре Ли $\mathcal{G}$ задано лоренцево скалярное произведение. Требуется найти все однопараметрические группы подобий $h(t) : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, сохраняющих операцию скобки Ли.

Будем рассматривать четырёхмерную алгебру Ли $\mathcal{G}$, снабжённую лоренцевым скалярным произведением. Она представляет собой пространство Минковского. Предположим, что $\mathcal{G}$ содержит одну или несколько двумерных подалгебр. Тогда эти подалгебры должны быть инвариантны относительно действия группы $h(t)$. Поэтому очень важно знать, какие существует инвариантные двумерные подпространства у данной группы преобразований. Доказанная в этой работе теорема существенно дополняет результат, полученный в работе [2].

Любая однопараметрическая группа подобий $h(t)$ пространства $\mathcal{G}$ имеет один или два инвариантных изотропных направления, либо весь изотропный конус состоит из инвариантных направлений. Согласно [3], если существуют два изотропных инвариантных направления, то в подходящем базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) группа подобий $h_1(t)$ задаётся матрицей $H_1(t) = e^{\mu t} F_1(t)$, где

$$F_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\nu t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}, \nu > 0, t \in \mathbf{R}$$

и звёздочками обозначена ортогональная матрица $Q(t)$. Матрица Грама базиса (e_1, e_2, e_3, e_4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расположение базисных векторов относительно конуса изотропных векторов

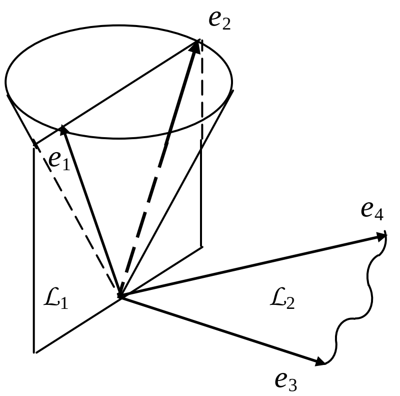

Рис. 1. Расположение базисных векторов

показано на рисунке 1. Если весь изотропный конус состоит из инвариантных направлений, то $\nu = 0$.

Рассмотрим однопараметрическую группу изометрий $f_1(t)$, которая задаётся матрицей $F_1(t)$. Она имеет те же инвариантные подпространства, что и $h_1(t)$. Нам необходимо рассмотреть два случая: 1) матрица $Q(t)$ не является постоянной; 2) матрица $Q(t)$ является постоянной. В первом случае эта матрица имеет вид

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at \\ \sin at & \cos at \end{pmatrix}, \; a \neq 0, \tag{1}$$

а во втором случае она является единичной.

Линейную оболочку векторов x, y будем обозначать $\langle x, y\rangle$.

Теорема 1. 1) *Подпространства $\mathcal{L}_1 = \langle e_1, e_2\rangle$ и $\mathcal{L}_2 = \langle e_3, e_4\rangle$ и только они являются двумерными подпространствами, инвариантными относительно действия однопараметрической группы $f_1(t)$, $t \in \mathbf{R}$, если матрица $Q(t)$ имеет вид (1).*

2) *Все двумерные подпространства, содержащиеся в трёхмерных подпространствах $\mathcal{H}_1 = \langle e_2, e_3, e_4\rangle$ и $\mathcal{H}_2 = \langle e_1, e_3, e_4\rangle$, а также подпространство $\mathcal{L}_1$, и только они являются инвариантными относительно действия однопараметрической группы $f_1(t), t \in \mathbf{R}$, если $\nu > 0$ и $Q(t) = E$.*

Доказательство. При решении задачи будем использовать следующий метод. Рассмотрим произвольный вектор $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и пусть $X'(t) = f_1(t)X$, $X''(t) = f_1(t)X'(t)$. Вектор X принадлежит инвариантному двумерному подпространству тогда и только тогда, когда векторы $X, X'(t), X''(t)$ линейно зависимы для любого $t \in \mathbf{R}$. Поскольку преобразования $f_1(t)$ образуют группу, то подпространство, инвариантное при всех $t \in \mathbf{R}$, будет инвариантно и при каждом фиксированном значении t.

1) Пусть матрица $Q(t)$ имеет вид (1). Очевидно, что существуют два инвариантных двумерных подпространства $\langle e_1, e_2\rangle$ и $\langle e_3, e_4\rangle$. Требуется доказать, что других не существует. Выберем $t_0 = \frac{\pi}{2a}$ и обозначим для удобства $k = e^{\nu t_0} > 1$. Тогда

$$X'(t_0)(kx_1, k^{-1}x_2, -x_4, x_3), X''(t_0)(k^2x_1, k^{-2}x_2, -x_3, -x_4).$$

Составим матрицу из координат векторов $X, X'(t_0), X''(t_0)$, а затем прибавим к третьей строке первую строку. Получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ kx_1 & k^{-1}x_2 & -x_4 & x_3 \\ (k^2+1)x_1 & (k^{-2}+1)x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Выберем минор порядка 3, расположенный в 1, 3 и 4 столбцах и приравняем его к нулю. Получим уравнение

$$(k^2+1)x_1(x_3^2+x_4^2) = 0.$$

Отсюда $x_1 = 0$ или $x_3^2 + x_4^2 = 0$, причём это выполнено независимо от значения ν. Аналогично, выбрав минор, расположенный в 2, 3 и 4 столбцах, получим $x_2 = 0$ или $x_3^2 + x_4^2 = 0$. В итоге имеем только два инвариантных подпространства $\langle e_1, e_2\rangle$ и $\langle e_3, e_4\rangle$.

2) Пусть теперь матрица $Q(t)$ является единичной и $\nu > 0$. Тогда

$$X'(t)(e^{\nu t}x_1, e^{-\nu t}x_2, x_3, x_4), X''(t)(e^{2\nu t}x_1, e^{-2\nu t}x_2, x_3, x_4).$$

Составим матрицу из координат векторов $X, X'(t), X''(t)$, а затем вычтем первую строку из второй и третьей. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ (e^{\nu t}-1)x_1 & (e^{-\nu t}-1)x_2 & 0 & 0 \\ (e^{2\nu t}-1)x_1 & (e^{-2\nu t}-1)x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a \neq 0.$$

Минор, расположенный в первых трёх столбцах, равен

$$\Big((e^{\nu t}-1)\frac{(1-e^{2\nu t})}{e^{2\nu t}} - (e^{2\nu t}-1)\frac{(1-e^{\nu t})}{e^{\nu t}}\Big)x_1x_2x_3.$$

Приравняем его к нулю и получим уравнение

$$(e^{-\nu t}-1)x_1x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2x_3 = 0.$$

Аналогично, приравнивая к нулю минор, расположенный в 1, 2 и 4 столбцах, получим $x_1x_2x_4 = 0$. Следовательно, либо $x_3 = x_4 = 0$, либо $x_1x_2 = 0$. Первое уравнение задаёт подпространство $\mathcal{L}_2$. Уравнение $x_1 = 0$ задаёт $\mathcal{H}_1$, а уравнение $x_2 = 0$ задаёт $\mathcal{H}_2$. Это значит, что любое двумерное подпространство, содержащееся в $\mathcal{H}_1$ или $\mathcal{H}_2$, является инвариантным относительно действия $f_1(t), t \in \mathbf{R}$.

$\blacksquare$

Следствие 1. *Подпространство $\mathcal{L}_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ и только оно является двумерным подпространством, инвариантным относительно действия однопараметрической группы $f_1(t), t \in \mathbf{R}$, на котором индуцируется лоренцево скалярное произведение.*

Литература

1. Подоксёнов М.Н. Подобия и изометрии однородного многообразия группы Гейзенберга, снабжённой левоинвариантной лоренцевой метрикой // Вестник Віцебского гос. ун-та. 2011. № 5. С. 10–15.
2. Черных В.В. Инвариантные подпространства одного специального класса преобразований // «Молодость. Интеллект. Инициатива». Материалы VIII Международной научно-практической конференции студентов и магистрантов. Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова. 2020. С. 36–38.
3. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds // Ann. of Global Anal. Geom. 1985. V. 3, No. 1. P. 59–84.

INVARIANT SUBSPACES OF THE ONE-PARAMETRIC GROUP OF SIMILARITIES OF THE MINKOWSKI SPACE

M.N. Podoksenov

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, Head of the Department "Geometry & Analysis", e-mail: Michael.Vitebsk@gmail.com

E.A. Ivanova

Student, e-mail: ekaterina2000ivyandex@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. We consider a one-parameter group of similarities of the four-dimensional Minkowski space, which has more than one invariant isotropic direction. Find all two-dimensional subspaces that are invariant under the action of this group. The results obtained are very important for the study of automorphisms of four-dimensional Lie algebras, which are simultaneously similarities and isometries with respect to the Lorentzian scalar product given in the Lie algebra.

Keywords: Lie algebra, Minkowski space, Lorentzian metric, one-parameter group, similarity, isometry.

References

1. Podoksenov M.N. Podobiya i izometrii odnorodnogo mnogoobraziya gruppy Geizenberga, snabzhennoi levoinvariantnoi lorentsevoi metrikoi. Vestnik Vitsebskogo gos. un-ta, 2011, no. 5, pp. 10–15. (in Russian)
2. Chernykh V.V. Invariantnye podprostranstva odnogo spetsial'nogo klassa preobrazovanii. «Molodost'. Intellekt. Initsiativa», Materialy VIII Mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i magistrantov, Vitebsk, VGU imeni P.M. Masherova Publ., 2020, pp. 36–38. (in Russian)
3. Alekseevski D. Self-similar Lorentzian manifolds. Ann. of Global Anal. Geom., 1985, vol. 3, no. 1, pp. 59–84.

Дата поступления в редакцию: 10.02.2021