Математические структуры и моделирование
2020. № 4(56). С. 5–19

УДК 519.214
DOI 10.24147/2222-8772.2020.4.5-19

О СТРОГОМ ПРИТЯЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ОТ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН К НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

А.Г. Гринь
профессор, д.ф.-м.н., e-mail: griniran@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Для симметрических функций от случайных величин из стационарных последовательностей, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, получены общие условия притяжения к нормальному закону в терминах распределений отдельных слагаемых. Основной результат работы обобщает все известные к настоящему времени результаты такого типа.

Ключевые слова: Симметрические функции, равномерно сильное перемешивание, строгое притяжение к нормальному закону, гипотеза Ибрагимова–Иосифеску.

Будем писать $\xi \overset{d}{=} \eta$ и $\xi_n \overset{d}{\to} \eta$ в случаях, когда, соответственно, распределения ξ и η совпадают и $\{\xi_n\}$ сходятся к η по распределению.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена симметрическая вещественнозначная функция f, то есть $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$ (на самом деле определена последовательность функций, но чтобы не загромождать рассуждений, мы не будем подчёркивать зависимость f от n какими-либо индексами и называть f последовательностью).

Будем обозначать $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ стационарную в узком смысле последовательность, $X_n = f\left(\xi_1, ..., \xi_n\right)$, а $\mathcal{N}(0,1)$ — случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

Если при некотором выборе нормирующих констант A_n и B_n

$$B_n^{-1}\left(X_n - A_n\right) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty,$$

то будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону. Если $\mathbb{E}X_n^2 < \infty,\ n = 1, 2, ...,$ и

$$\left(\mathbb{D}X_n\right)^{-1/2}\left(X_n - \mathbb{E}X_n\right) \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1),$$

то говорят, что к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

В настоящей работе рассматриваются стационарные последовательности, удовлетворяющие условию равномерно сильного перемешивания (φ–перемешивания).

Пусть $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная в узком смысле последовательность и пусть $\mathcal{F}_{\leqslant n}$ и $\mathcal{F}_{\geqslant n}$$-\sigma$-алгебры, порождённые семействами $\{\xi_i : i \leqslant n\}$ и $\{\xi_i : i \geqslant n\}$. Говорят, что последовательность $\{\xi_n\}$ удовлетворяет *условию равномерно сильного перемешивания (φ-перемешивания)* с коэффициентом перемешивания $\varphi(n)$, если

$$\varphi(n) = \sup\left\{\frac{|\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|}{\mathbb{P}(A)} :\ A \in \mathcal{F}_{\leqslant 0},\ B \in \mathcal{F}_{\geqslant n}\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Если к тому же $\varphi(1) < 1$, то такое условие будем называть условием *φ_1-перемешивания*.

Если $\{\xi_n\} = \{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ-перемешивания, ξ измерима относительно $\mathcal{F}_{\leqslant 0}$, η — относительно $\mathcal{F}_{\geqslant n}$, $\|\xi\|_s = (\mathbb{E}|\xi|^s)^{1/s} < \infty,\ \|\eta\|_t < \infty,\ s, t \geqslant 1,\ 1/s + 1/t = 1$, то

$$|\mathbb{E}\xi\eta - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta| \leqslant 2\varphi^{\frac{1}{s}}(n)\|\xi\|_s\|\eta\|_t \tag{1}$$

[1, с. 392].

В случае, когда $X_n = S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ притяжение (или нет) последовательностей $\{S_n\}$ к нормальному закону во многом обусловлено поведением дисперсий сумм S_n или дисперсий сумм «срезок» величин ξ_n (см., например [2]). Вместе с тем, существуют условия на распределение ξ_1, обеспечивающие притяжение к нормальному закону любой последовательности $\{S_n\}$, если только $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ_1-перемешивания (и, следовательно, при любом возможном поведении дисперсий сумм).

Пусть $\mathbb{E}\{\xi, A\} = \int\limits_A \xi\, \mathbb{P}(d\omega)$, а $L(\xi)$ обозначает распределение случайной величины ξ.

Обозначим через $\mathcal{N}$ классическую *область притяжения нормального закона*: $\mathcal{N} = \{L(\xi) : \mathbb{E}\{\xi^2, |\xi| \leqslant x\}$ – медленно меняющаяся функция$\}$, через $\mathcal{N}_0$ множество всех распределений таких, что если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ_1-перемешивания и $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_0$, то к $\{S_n\}$ применима центральная предельная теорема, а через $\mathcal{N}_1$–*область строгого притяжения нормального закона*, то есть если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ_1-перемешивания и $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_1$, то $\{S_n\}$ притягивается к нормальному закону.

Ясно, что $\mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{N}$.

Известны следующие результаты, касающиеся строгого притяжения стационарных последовательностей с φ_1-перемешиванием к нормальному закону.

1. Если $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty,\ p > 2$, то $L(\xi) \in \mathcal{N}_0$ (И.А. Ибрагимов [1, Теорема 18.5.1]).

2. Если $\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\}$ — правильно меняющаяся функция порядка -2, то $L(\xi) \in \mathcal{N}_1$ (М. Пелиград, [3]).

3. Если $\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\} = x^{-2}h(x)$, где $h(x)$ такова, что при любом $\lambda \geqslant 1$

$$0 < C_1 \leqslant \liminf_{x\to\infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} \leqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{h(\lambda x)}{h(x)} \leqslant C_2 < \infty,$$

то $L(\xi) \in \mathcal{N}_1$ (С.А. Клоков, [4]).

Описанные выше функции $h(x)$ названы в [5] SO-меняющимися; класс SO-меняющихся функций существенно шире класса медленно меняющихся функций: в него входят, например, все функции, отделённые от нуля и бесконечности.

Здесь же следует упомянуть не доказанную и не опровергнутую до настоящего времени *гипотезу Ибрагимова–Иосифеску*, которая утверждает, что $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}$ (см. [1], [3]).

Обозначим

$$b_n(p) = \| \max(\xi_1', .., \xi_n')\|_p = \{\mathbb{E}| \max(\xi_1', .., \xi_n')|^p\}^{\frac{1}{p}}, \ p > 0,$$

где через $\xi_1', .., \xi_n'$ обозначены *независимые* случайные величины такие, что $\xi_k' \overset{d}{=} \xi_k, \ k = 1, 2, ..., n$. Так как $\xi_1, ..., \xi_n$ одинаково распределены, то $b_n(p)$ при каждых $p > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ определяется только распределением ξ_1.

В [6] получено следующее обобщение приведённых выше результатов.

Теорема 1. *1. Если при некотором $p > 0$*

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n \int\limits_N^\infty \mathbb{P}\{\xi_1^2 \geqslant x b_n^2(p)\}\, dx = 0, \tag{2}$$

то $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_0$.

2. Если при некотором $p > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} n \int\limits_\varepsilon^1 \mathbb{P}\{\xi_1^2 \geqslant x b_n^2(p)\}\, dx = \infty, \tag{3}$$

то $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_1$.

Если $\mathbb{E}|\xi_1|^p < \infty$, $p > 2$, то выполняется (2), и мы получаем результат И.А. Ибрагимова, а если $\mathbb{P}\{|\xi_1| \geqslant x\} = x^{-2}h(x)$, где $h(x)$ SO-меняющаяся функция (в частности, если $\mathbb{P}\{|\xi_1| \geqslant x\}$ — правильно меняющаяся функция порядка -2), то выполняется (3), откуда следуют результаты М. Пелиград и С.А. Клокова. В случае, когда $\mathbb{P}\{|\xi_1| \geqslant x\} = x^{-\rho}h(x)$, $\rho > 0$, где $h(x)$ — SO-меняющаяся функция, условия (1) и (2) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_0$ и $L(\xi_1) \in \mathcal{N}_1$ соответственно, и сказанное можно сформулировать так: гипотеза Ибрагимова–Иосифеску выполняется в указанном классе распределений [6].

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ определена функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

f1. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{i_1}, ..., x_{i_n})$, для любых $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ для любой перестановки $\{i_1, ..., i_n\}$ множества $\{1, ..., n\}$;

f2. $f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$;

f3. $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$;

f4. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \sim f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$, если $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})| + |f(\mathbf{x})| + |f(\mathbf{y})| \to \infty$, (то есть хотя бы одно из слагаемых в $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$ стремится к бесконечности). Эквивалентность в f_3 понимается следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\tau(\mathbf{x},\mathbf{y}) > N$, то

$$|f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leqslant \varepsilon |f(\mathbf{x}+\mathbf{y})|.$$

Отсюда нетрудно вывести (см. [7])

$$|f(\mathbf{x_1} + ... + \mathbf{x_k}) - f(\mathbf{x_1}) - ... - f(\mathbf{x_k})| \leqslant \varepsilon(|f(\mathbf{x_1})| + ... + |f(\mathbf{x_{k-1}})| + (k-1)N. \quad (4)$$

Пусть, как и выше, $X_n = f(\xi_1, ..., \xi_n)$, $n = 1, 2, ...$, но функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $Y_n = f(\xi_n)$,

$$Z_n = \max(Y_1, ..., Y_n),\ Z_n' = \max(Y_1', ..., Y_n'),\ c_n(p) = \|Z_n'\|_p.$$

При каждых $p > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ $c_n(p)$ зависит только от распределения $Y_1 \overset{d}{=} X_1$, то есть от распределения ξ_1 и функции f, $\{c_n(p)\}$ не убывает по n.

Через $\mathcal{N}_0(f)$ будем обозначать множество всех распределений таких, что если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ_1-перемешивания и $L(X_1) \in \mathcal{N}_0(f)$, то к $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема, а через $\mathcal{N}_1(f)$ — *область строгого притяжения к нормальному закону*, то есть если $\{\xi_n\}$ удовлетворяет условию φ_1-перемешивания и $L(X_1) \in \mathcal{N}_1(f)$, то $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону.

В настоящей работе выводится следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *1. Если при некотором $p \geqslant 1$*

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n \int\limits_N^\infty \mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant x c_n^2(p)\}\, dx = 0, \quad (5)$$

то $L(X_1) \in \mathcal{N}_0(f)$.

2. Если при некотором $p \geqslant 1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} n \int\limits_\varepsilon^1 \mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant x c_n^2(p)\}\, dx = \infty, \quad (6)$$

то $L(X_1) \in \mathcal{N}_1(f)$.

Замечание 1. Теорема 2 справедлива и при $0 < p < 1$, но в этом случае не предполагается существование $\mathbb{E}|X_n|^p$, $p \geqslant 1$, и в доказательстве потребуются соответствующие корректировки (понадобится введение других центрирующих констант вместо $\mathbb{E}X_n$, $\|\xi\|_p$ не будет являться нормой и т. п.). Чтобы не приводить двух параллельных доказательств, мы ограничимся случаем $p \geqslant 1$.

Лемма 1. [3] *Для любых x и $n \geqslant 1$*

$$(1-\varphi(1))\mathbf{P}\{Z'_n \geqslant x\} \leqslant \mathbf{P}\{Z_n \geqslant x\} \leqslant (1+\varphi(1))\mathbf{P}\{Z'_n \geqslant x\}. \qquad (7)$$

При любом $p > 0$

$$(1-\varphi(1))c_n^p(p) \leqslant \mathbf{E}|Z_n|^p \leqslant (1+\varphi(1))c_n^p(p). \qquad (8)$$

Пусть $X_{k,n} = f(\Xi_{k,n}) = f(\xi_k, ..., \xi_n)$, $k \leqslant n$. Введём *симметризованные* величины $\widetilde{X}_{k,n} = f(\Xi_{k,n}) - f(\Xi'_{k,n})$, где векторы $\Xi_{k,n}$ и $\Xi'_{k,n}$ независимы и одинаково распределены, и пусть $\widetilde{Z}'_n = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \widetilde{Y}'_k$. Легко видеть, что для последовательности $\{\widetilde{X}_n\}$ выполняется соотношение (3), а последовательность $\{\widetilde{Y}_n\}$, $\widetilde{Y}_n = f(\xi_n) - f(\xi'_n)$ удовлетворяет условию φ-перемешивания с коэффициентом перемешивания $\widetilde{\varphi}(n) \leqslant 1-(1-\varphi(n))^2$ [8, Lemma 2.3].

Имеют место неравенства симметризации [9, с. 261]

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}(Y'_k-\mu) \geqslant x\right\} \leqslant 2\mathbb{P}\left\{\widetilde{Z}'_n \geqslant x\right\} \leqslant 4\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}(Y'_k-a) \geqslant x/2\right\} \qquad (9)$$

и слабые неравенства симметризации [9, с. 259]

$$\mathbb{P}\{|X_n-\mu_n| \geqslant x\} \leqslant 2\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_n| \geqslant x\} \leqslant 4\mathbb{P}\{|X_n-a| \geqslant x/2\}, \ x \geqslant 0. \qquad (10)$$

Здесь μ — медиана Y_1, μ_n — медиана X_n, $a \in \mathbb{R}$. Из (10) и (9) соответственно при $p > 0$ следуют соотношения

$$\mathbb{E}\left|\max_{1\leqslant k\leqslant n}(Y'_k-\mu)\right|^p \leqslant 2\mathbb{E}\left|\widetilde{Z}'_n\right|^p \leqslant 2^{p+2}\mathbb{E}\left|\max_{1\leqslant k\leqslant n}(Y'_k-a)\right|^p, \qquad (11)$$

$$\mathbb{E}\left\{|X_n-\mu_n|^p, \ |X_n-\mu_n| \geqslant x\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_n|^p, \ |\widetilde{X}_n| \geqslant x\} \leqslant 2^{p+2}\mathbb{E}\left\{|X_n-a|^p, \ |X_n-A_n| \geqslant x/2\right\}. \qquad (12)$$

Обозначим

$$\overline{X}_n = \max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{X}_k|, \ k,n \in \mathbb{N}.$$

Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что при $i+m \leqslant k$

$$|\widetilde{X}_n| \geqslant |\widetilde{X}_i| - (1+\varepsilon)|\widetilde{X}_{i+1,n}| - N. \qquad (13)$$

Введём ещё некоторые обозначения. Будем писать $\alpha(n) \ll \beta(n)$ в случае, когда $\alpha(n) = O(\beta(n))$, $n\to\infty$, и $\alpha(n) \asymp \beta(n))$, если $\alpha(n) \ll \beta(n)$ и $\beta(n) \ll \alpha(n)$.

Лемма 2. *Пусть $\varepsilon > 0$, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, $\varphi(1) < 1$, а $c_n \to \infty$. Если n таково, что $N < c_n$, где N — константа из* (13) *и*

$$\gamma = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \widetilde{\varphi}_1 < 1, \ \widetilde{\varphi}_1 = 1-(1-\varphi(1))^2,$$

то $\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right)^p \ll c_n^p + \mathbb{E}|\widetilde{X}_n|^p$.

Доказательство. Пусть $E_i = \{\overline{X}_{i-1} < (r+3)c_n \leqslant |\widetilde{X}_i|\}$, $i = 1, ..., n$. Тогда $E_iE_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \{\overline{X}_n \geqslant (r+3)c_n\}$. В силу (13) при $i \leqslant n-1$

$$\left\{|\widetilde{X}_i| \geqslant (r+3)c_n,\ |\widetilde{X}_{i+1,n}| < \frac{2c_n}{1+\varepsilon}\right\} \subseteq \left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant rc_n\right\},$$

то есть

$$\left\{|\widetilde{X}_n| < rc_n\right\} \subseteq \{|\widetilde{X}_i| < (r+3)c_n\} \cup \left\{|\widetilde{X}_{i+1,n}| \geqslant \frac{2c_n}{1+\varepsilon}\right\},$$

откуда

$$\left\{|\widetilde{X}_n| < rc_n, E_i\right\} \subseteq \left\{|\widetilde{X}_{i+1,n}| \geqslant \frac{2c_n}{1+\varepsilon}, E_i\right\}. \tag{14}$$

С помощью (14) и условия φ_1-перемешивания получаем

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant (r+3)c_n\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant rc_n\right\} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| < rc_n,\ E_i\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant rc_n\right\} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_{i+1,k}| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}, E_i\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant rc_n\right\} +$$

$$+\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \widetilde{\varphi}_1\right) \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{E_i\right\} \leqslant \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant rc_n\right\} +$$

$+\gamma\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant (r+3)c_n\}$, откуда

$$\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant (r+3)c_n\} \leqslant \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant rc_n\right\}. \tag{15}$$

Далее

$$\mathbb{E}\{|\xi|^p, |\xi| \geqslant N\} = N^p\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant N\} + p\int\limits_N^{\infty} x^{p-1}\mathbb{P}\{|\xi| \geqslant x\}\, dx.$$

Из (15) при $N \geqslant 1$ и достаточно больших n получаем

$$\mathbb{E}\overline{X}_n^p \leqslant (4Nc_n)^p + \mathbb{E}\left\{\overline{X}_n^p,\ |\overline{X}_n| \geqslant 4Nc_n\right\} \leqslant (4Nc_n)^p + (4Nc_n)^p\mathbb{P}\{\overline{X}_n \geqslant 4Nc_n\}+$$

$$+p(4c_n)^p \int\limits_N^{\infty} x^{p-1}\mathbb{P}\left\{\overline{X}_n \geqslant 4xc_n\right\}\, dx \leqslant (4Nc_n)^p + \frac{(4Nc_n)^p}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_n| \geqslant Nc_n\right\} +$$

$$+\frac{p(4c_n)^p}{1-\gamma}\int\limits_N^{\infty} x^{p-1}\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_n| \geqslant xc_n\}\, dx \ll c_n^p + \mathbb{E}|\widetilde{X}_n|^p.$$

■

Будем обозначать

$$B_n(p) = \|\widetilde{X}_n\|_p,\ p \geqslant 1,\ \sigma_n = B_n(2),\ \widetilde{Z}_n = \max(\widetilde{Y}_1, ..., \widetilde{Y}_n),$$

$$\widetilde{Z}'_n = \max(\widetilde{Y}'_1, ..., \widetilde{Y}'_n),\ \widetilde{c}_n(p) = \|\widetilde{Z}'_n\|_p,\ a_n = \sup\left\{x : n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant x\} \geqslant 1\right\}.$$

Тогда

$$n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\} \geqslant 1,\ n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| > a_n\} < 1,$$

$$\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| = a_n\} \leqslant \mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| > a_{n-1}\} - \mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant a_{n+1}\} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n^2-1} \quad (16)$$

$$\widetilde{c}^{\,p}_{n+m}(p) \leqslant \widetilde{c}^{\,p}_n(p) + \widetilde{c}^{\,p}_m(p). \quad (17)$$

Как и в [6], мы будем рассматривать последовательности $\{\xi_n\}$, у которых $\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant x\} > 0$ при любом $x > 0$; в этом случае $a_n \to \infty$, $\widetilde{c}_n(p) \to \infty$ (см. лемму 3). В противном случае условие (4) выполняется очевидным образом, а вопрос о применимости центральной предельной теоремы к последовательности $\{X_n\}$ решается, например, в теореме 3 из [10].

Лемма 3. *Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ_1-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, и пусть $\mathbf{E}|X_1|^p < \infty,\ p \geqslant 1$. Тогда*
a) $\|\overline{X}_n\|_p \ll B_n(p)$;
b) $a_n^p \leqslant 2\widetilde{c}^{\,p}_n(p),\ a_n^p \leqslant n\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\}$;
c) $1/2 \leqslant \widetilde{c}^{\,-p}_n(p)n\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_n\} \leqslant 4,\ n \geqslant 3.$;
d) $\widetilde{c}_n(p) \asymp c_n(p)$;
e) $B_n(p) \gg \widetilde{c}_n(p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. a) Положим в лемме 1 $c_n = N \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} B_k(p)$. Тогда

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} \mathbb{P}\left\{|\widetilde{X}_k| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^p}{N^p},$$

и, выбрав достаточно большое $N > 0$, мы обеспечим выполнение условий леммы 2, из которой следует $\|\overline{X}_n\|_p \ll \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} B_k(p)$. Далее $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} B_k(p) \ll B_n(p)$ [7, лемма 1], и мы получаем утверждение a).

b) Нетрудно показать (см., например [3]), что

$$\frac{n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant x\}}{1 + n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant x\}} \leqslant \mathbb{P}\{|\widetilde{Z}'_n| \geqslant x\} \leqslant n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant x\},\ x > 0. \quad (18)$$

Отсюда

$$\widetilde{c}^{\,p}_n(p) = \int_0^\infty \mathbb{P}\{|\widetilde{Z}'_n|^p \geqslant x\}\,dx \geqslant \int_0^{a_n^p} \frac{n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1|^p \geqslant x\}}{1 + n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1|^p \geqslant x\}}\,dx \geqslant \frac{a_n^p}{2}.$$

Далее

$$1 \leqslant n\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\} \leqslant n a_n^{-p}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\},$$

то есть $a_n^p \leqslant n\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\}$.

c) Из (18) следует

$$\frac{n}{2}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| > a_n\} \leqslant \mathbb{E}\{|\widetilde{Z}'_n|^p, |\widetilde{Z}'_n| > a_n\} \leqslant n\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\}, \qquad (19)$$

откуда с помощью утверждения b) и (16) выводим

$$\widetilde{c}_n^p(p) \geqslant \frac{n}{2}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| > a_n\} = \frac{n}{2}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\} - \frac{n}{2}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| = a_n\} =$$

$$= \frac{n}{2}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\} - \frac{n a_n^p}{2}\mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1| = a_n\} \geqslant \frac{n}{2}\mathbb{E}\{|\widetilde{Y}_1|^p, |\widetilde{Y}_1| \geqslant a_n\} - \frac{2n\widetilde{c}_n^p(p)}{n^2-1}.$$

Далее из (19) и утверждения b) получаем

$$\widetilde{c}_n^p(p) \leqslant a_n^p + \mathbb{E}\{|\widetilde{Z}'_n|^p, |\widetilde{Z}'_n| \geqslant a_n\} \leqslant 2n\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_n\}.$$

Так как $2n(n^2-1)^{-1} \leqslant 3/4,\ n \geqslant 3$, то из двух последних соотношений следует утверждение c).

d) С помощью (11) получаем

$$c_n^p(p) = \mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|Y'_k|^p \leqslant 2^{p-1}\mathbb{E}\left|\max_{1\leqslant k\leqslant n}(|Y'_k| - \nu)\right|^p + 2^{p-1}\nu^p \leqslant 2^p\mathbb{E}\left|\max_{1\leqslant k\leqslant n}(|Y'_k| - |Y''_k|)\right|^p +$$

$$+2^{p-1}\nu^p \leqslant 2^p\mathbb{E}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\widetilde{Y}'_k|^p + 2^p\mu^p = 2^p\widetilde{c}_n(p) + 2^{p-1}\nu^p.$$

Здесь $\nu > 0$ — медиана $|Y_1|$, а Y'_k и Y''_k независимы и одинаково распределены. Поскольку в наших предположениях $c_n(p) \to \infty,\ n \to \infty$, то отсюда следует $\widetilde{c}_n(p) \gg c_n(p)$. С другой стороны, $\widetilde{c}_n(p) = \|\widetilde{Z}'_n\|_p \leqslant 2\|Z'_n\|_p = 2c_n(p)$. Утверждение d) доказано.

e) Воспользуемся (4): $|\widetilde{X}_k - \widetilde{X}_{k-1} - \widetilde{Y}_k| \leqslant \varepsilon|\widetilde{Y}_k| + N$, откуда

$$|\widetilde{Y}_k| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(|\widetilde{X}_k| + |\widetilde{X}_{k-1}| + N), \text{ следовательно, } |\widetilde{Z}_n| \ll \overline{X}_n + N,$$

и, в силу леммы 1 и утверждения a),

$$\widetilde{c}_n(p) = \|\widetilde{Z}'_n\|_p \ll \|\widetilde{Z}_n\|_p \ll \|\overline{X}_n\|_p + N \ll B_n(p) + N.$$

Поскольку в наших предположениях $\widetilde{c}_n(p) \to \infty,\ n \to \infty$, то из последнего соотношения следует $\widetilde{c}_n(p) \ll B_n(p)$.

Лемма 4. [7] *Пусть $\varepsilon > 0$ и $r \geqslant 1$, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$, а $c_n \to \infty$. Если n таково, что в* (3) $(m+1)N < c_n$ *и*

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathbb{P}\left\{|X_j| \geqslant \frac{c_n}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m) \leqslant \gamma < 1,$$

то

$$\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant (r+6)c_n\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n| \geqslant rc_n\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j| \geqslant \frac{c_n}{m(1+\varepsilon)}\right\}.$$

Пусть $s \in \mathbb{N},\ \mathbf{1}(A) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Обозначим

$$\xi_j^{\triangledown}(s) = \xi_j \mathbf{1}(|f(\xi_j)| \leqslant 2\widetilde{c}_s(p)), \quad \xi_j^{\vartriangle}(s) = \xi_j \mathbf{1}(|f(\xi_j)| > 2\widetilde{c}_s(p)),$$

$$X_{j,n}^{\triangledown}(s) = f(\Xi_{j,n}^{\triangledown}) = f(\xi_j^{\triangledown}(s), ..., \xi_n^{\triangledown}(s)),\ X_{j,n}^{\vartriangle}(s) = f(\Xi_{j,n}^{\vartriangle}) = f(\xi_j^{\vartriangle}(s), ..., \xi_n^{\vartriangle}(s)),$$
$$X_{j,n}^{\prime\triangledown}(s) = f(\Xi_{j,n}^{\prime\triangledown}),\ X_{j,n}^{\prime\vartriangle}(s) = f(\Xi_{j,n}^{\prime\vartriangle}),$$

где векторы $(\Xi_{j,n}^{\triangledown})$ и $(\Xi_{j,n}^{\prime\triangledown})$ независимы и одинаково распределены, то же касается $(\Xi_{j,n}^{\vartriangle})$ и $(\Xi_{j,n}^{\prime\vartriangle})$. Далее, обозначим

$$X_{j,n}^{\blacktriangledown}(s) = X_{j,n}^{\triangledown}(s) - X_{j,n}^{\prime\triangledown}(s), \quad X_{j,n}^{\blacktriangle}(s) = X_{j,n}^{\vartriangle}(s) - X_{j,n}^{\prime\vartriangle}(s),$$

$$Y_j^{\triangledown}(s) = f(\xi_j^{\triangledown}(s)),\ Y_j^{\vartriangle}(s) = f(\xi_j^{\vartriangle}(s)),\ Y_j^{\blacktriangledown}(s) = Y_j^{\triangledown}(s) - Y_j^{\prime\triangledown}(s),$$
$$Y_j^{\blacktriangle}(s) = Y_j^{\vartriangle}(s) - Y_j^{\prime\vartriangle}(s),\ \sigma_n^{\blacktriangledown}(s) = \|X_n^{\blacktriangledown}(s)\|_2.$$

Нижний индекс n используется вместо $(1, n)$, например $X_n = X_{1,n}$.

Лемма 5. *В условиях леммы 3 Если $s \in \mathbb{N}$ достаточно велико, то*
a) $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \|X_j^{\blacktriangle}(ns)\|_p \ll \widetilde{c}_n(p)$*;*
b) $B_{nk}(p) \gg \sqrt{k}\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks),\ B_m(p) \gg \sqrt{k}\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks)$ *при* $nk \leqslant m \leqslant (k+1)n$*.*
c) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$*, то* $\sigma_{nk} \gg \sqrt{k}\sigma_n$ *и* $\sigma_m \asymp \sigma_{nk}$ *при* $nk \leqslant m \leqslant (k+1)n$*.*
d) Если $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$*, то* $\sigma_n \gg \widetilde{c}_n(p)$*.*

Доказательство. a) В силу леммы 3b)

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant j} \mathbb{P}\{|X_i^{\blacktriangle}(ns)| \geqslant x\} \leqslant n\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_1| > 2\widetilde{c}_{ns}(p)\} \leqslant n\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_1| > a_{ns}\} \leqslant \frac{1}{s},\ x > 0,$$

так что s и m можно выбрать такими, чтобы

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant j} \mathbb{P}\{|X_i^{\blacktriangle}(ns)| \geqslant x\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \frac{7^p\gamma}{1-\gamma} < 1$$

и из леммы 4 получаем при $x > 0$

$$\mathbb{P}\{|X_j^{\blacktriangle}(ns)| \geqslant 7x\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_j^{\blacktriangle}(ns)| \geqslant x\} + \frac{1}{1-\gamma}\mathbb{P}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant j} |Y_i^{\blacktriangle}(ns)| \geqslant \frac{x}{m(1+\varepsilon)}\right\}.$$

Откуда

$$\mathbb{E}|X_j^{\blacktriangle}(ns)|^p \leqslant \frac{7^p\gamma}{1-\gamma}\mathbb{E}|X_j^{\blacktriangle}(ns)|^p + \frac{(7m(1+\varepsilon))^p}{1-\gamma}\mathbb{E}\left\{\max_{1 \leqslant i \leqslant j} |Y_i^{\blacktriangle}(ns)|^p\right\}.$$

Отсюда с помощью (8) выводим

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathbb{E}|X_j^{\blacktriangle}(ns)|^p \ll \mathbb{E}\left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |Y_j^{\blacktriangle}(ns)|^p\right\} \leqslant \mathbb{E}\left\{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\widetilde{Y}_j|^p\right\} \ll \widetilde{c}_n^p(p). \tag{20}$$

b) Положим в лемме 4 $c_n = MB_n(p)$. Из (4) следует $|X_j^{\blacktriangledown}(ns)| \leqslant |\widetilde{X}_j| + (1+\varepsilon)|X_j^{\blacktriangle}(ns)| + N$ откуда с помощью (20) и леммы 3a) и e) получаем

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\left\{|X_j^{\blacktriangledown}(ns)| \geqslant \frac{MB_n(p)}{1+\varepsilon}\right\} \ll \max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\mathbb{E}|\widetilde{X}_j|^p + \mathbb{E}|X_j^{\blacktriangle}(ns)|^p + N^p}{(MB_n(p))^p} \ll \frac{1}{M^p},$$

так что, выбрав M и m достаточно большими, мы обеспечим выполнение условий леммы 4. Далее, из леммы 3 e) и (17) следует, что $MB_n(p) \gg M\widetilde{c}_n(p) \geqslant \sqrt{M}\widetilde{c}_{nr}(p)$, где $r = \left[M^{p/2}\right]$, а $[x]$ — целая часть x, так что при достаточно больших $M > 0$ $MB_n(p) > 2m(1+\varepsilon)\widetilde{c}_{ns}(p)$, и

$$\mathbb{P}\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n} |Y_j^{\blacktriangledown}(ns)| \geqslant \frac{MB_n(p)}{m(1+\varepsilon)}\right\} = 0.$$

Из леммы 3 получаем

$$\mathbb{P}\{|X_n^{\blacktriangledown}(ns)| \geqslant 7x\} \leqslant \frac{\gamma}{1-\gamma}\mathbb{P}\{|X_n^{\blacktriangledown}(ns)| \geqslant x\}, \ x \geqslant MB_n(p). \tag{21}$$

Если $M > 0$ и m таковы, что

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathbb{P}\left\{|X_j^{\blacktriangledown}(ns)| \geqslant \frac{MB_n(p)}{1+\varepsilon}\right\} + \varphi(m) \leqslant \gamma, \quad \frac{7^2\gamma}{1-\gamma} < 1,$$

то из (21) выводим

$$(\sigma_n^{\blacktriangledown}(ns))^2 = \mathbb{E}|X_n^{\blacktriangledown}(ns)|^2 \leqslant (7MB_n(p))^2 + \frac{7^2\gamma}{1-\gamma}\mathbb{E}|X_n^{\blacktriangledown}(ns)|^2,$$

откуда следует

$$B_n(p) \gg \sigma_n^{\blacktriangledown}(ns). \tag{22}$$

Далее, из леммы 3 e) и (17) выводим

$$\mathbb{E}|Y_j^{\blacktriangledown}(nks)|^2 = o(\widetilde{c}^{\,2}_{nks}(p)) = o(\widetilde{c}^{\,2}_{nk}(p)) = o(B^2_{nk}(p))$$

Так как в силу (4) $|X_m^{\blacktriangledown}(nks)| \leqslant (1+\varepsilon)(|Y_1^{\blacktriangledown}(nks)| + ... + |Y_m^{\blacktriangledown}(nks)|) + mN$, то при любых $k, s \in \mathbb{N}$ найдётся $m = m(n) \to \infty$ такое, что

$$\sigma_m^{\blacktriangledown}(nks) = o(B_{nk}(p)), \ \sigma_{km}^{\blacktriangledown}(nks) = o(B_{nk}(p)) \ n \to \infty.$$

Обозначим $U_j = X^{\blacktriangledown}_{(j-1)(n+m)+1, jn+(j-1)m}(nks), \ j = 1, ..., k$,
$V_j = X^{\blacktriangledown}_{jn+(j-1)m+1, j(n+m)}(nks), \ \ j = 1, ..., k-1, \ W = X^{\blacktriangledown}_{kn+1, kn+(k-1)m}(nks)$.

В силу (4)

$$|X_{nk}^{\blacktriangledown}(nks) - \sum_{j=1}^{k} U_j - \sum_{j=1}^{k-1} V_j - W| \leqslant \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{k}|U_j| + \sum_{j=1}^{k-1}|V_j| + |W|\right) + 2kN.$$

Отсюда

$$\left|\sigma_{nk}^{\blacktriangledown}(nks) - \left\|\sum_{j=1}^{k} U_j\right\|_2\right| \leqslant k\varepsilon\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks) + k(1+\varepsilon))\sigma_m^{\blacktriangledown}(nks) + (1+\varepsilon)\sigma_{km}^{\blacktriangledown}(nks) + 2kN =$$

$$= k\varepsilon\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks) + o(B_{nk}(p)). \qquad (23)$$

Из (1) следует, что $|\mathbb{E}U_jU_l| \leqslant 4\varphi^{1/2}(m)(\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks))^2,\ j \neq l$, откуда

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{k} U_j\right)^2 = k\mathbb{E}U_1^2 + \sum_{j\neq l=l}^{k} \mathbb{E}U_jU_l = k(\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks))^2(1 + o_n(1)). \qquad (24)$$

Из (22), (23) и (24) при $\varepsilon < k^{-1}$ получаем

$$B_{nk}(p) \gg \sigma_{nk}^{\blacktriangledown}(nks) \geqslant (\sqrt{k} - 1)\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks) + o(B_{nk}(p)),$$

откуда следует первое утверждение в b), а из него получается второе утверждение, так как $B_m(p) \gg B_{n(k-1)}(p)$ [7, лемма 1].

c) Доказательство $\sigma_{nk} \gg \sqrt{k}\sigma_n$ по сути повторяет доказательство утверждения b), где вместо $X_n^{\blacktriangledown}$ нужно взять $\widetilde{X}_n$.

В силу (4)

$$|\widetilde{X}_m - \widetilde{X}_{nk} - \widetilde{X}_{nk+1,m}| \leqslant \varepsilon|\widetilde{X}_{nk+1,m}| + N$$

и так как $\sigma_{m-nk} \ll \sigma_n$ [7, лемма 1], то $|\sigma_m - \sigma_{nk}| \ll \sigma_n + N \ll \dfrac{\sigma_{nk}}{\sqrt{k}}$.

d) Если $p \leqslant 2$, то в силу леммы 3 e) $\sigma_n \geqslant B_n(p) \gg \widetilde{c}_n(p)$.

Пусть $p > 2$. Положим $\rho_n = \dfrac{\widetilde{c}_n^p(p)}{\sigma_n^p}$. Из (17) и утверждения c) следует, что найдутся $n_0 \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что при $n \geqslant n_0$ $\rho_{kn} \leqslant Ck^{1-p/2}\rho_n \leqslant \tau\rho_n,\ \tau < 1$ если k достаточно велико. Отсюда $\rho_{k^m n_0} \leqslant \tau^m\rho_{n_0} \to 0,\ m \to \infty$ и из утверждения c) и неубывания $\{\widetilde{c}_n^p(p)\}$ по n следует $\rho_n \to 0,\ n \to \infty$. ■

Доказательство теоремы 2.

1) Пусть $\{\xi_n\}$ — стационарная последовательность, удовлетворяющая условию φ_1-перемешивания, функция f удовлетворяет условиям $f_1 - f_4$ и $L(X_1) \in \mathcal{N}_0(f)$.

Если $\xi \geqslant 0,\ \mathbb{E}\xi < \infty$, то $x\mathbb{P}\{\xi \geqslant x\} \to 0, x \to \infty$, так что

$$\mathbb{E}\{(Z_n')^2, |Z_n'| \geqslant Nc_n(p)\} = N^2c_n^2(p)\mathbb{P}\{|Z_n'| \geqslant Nc_n(p)\} + \int\limits_{N^2c_n^2(p)}^{\infty} \mathbb{P}\{(Z_n')^2 \geqslant x\}\,dx =$$

$$= c_n^2(p)\int\limits_{N^2}^{\infty} \mathbb{P}\{(Z_n')^2 \geqslant xc_n^2(p)\}\,dx + o_n(1) \leqslant nc_n^2(p)\int\limits_{N^2}^{\infty} \mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant xc_n^2(p)\}\,dx + o_n(1),$$

откуда в силу (5) следует, что последовательность $\{c_n^{-2}(p)(Z_n')^2\}$ равномерно интегрируема. Так как $\sigma_n^2 = 2\mathbb{D}X_n = 2(\sigma_n^*)^2$, то из лемм 3 d) и 5 d) получаем $\sigma_n^* \gg \sigma_n \gg \widetilde{c}_n(p) \gg c_n(p)$, так что равномерно интегрируемой является последовательность $\{(\sigma_n^*)^{-2}(Z_n')^2\}$. Отсюда, если $k = k(n) \to \infty$ достаточно медленно, с помощью (19) и лемм 3 b) и 5 c) при некотором $a > 0$ получаем

$$nk(\sigma_{nk}^*)^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, X_1^2 \geqslant \delta(\sigma_{nk}^*)^2\} \ll n(\sigma_n^*)^{-2}\mathbb{E}\left\{X_1^2, X_1^2 \geqslant a\delta k(\sigma_n^*)^2\right\} \ll$$

$$\ll (\sigma_n^*)^{-2}\mathbb{E}\left\{(Z_n')^2, (Z_n')^2 \geqslant a\delta k(\sigma_n^*)^2\right\} \to 0,\ n\to\infty.$$

Если $nk \leqslant m \leqslant n(k+1)$, то в силу леммы 5 c)

$$m(\sigma_m^*)^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, X_1^2 \geqslant \delta(\sigma_m^*)^2\} \ll n(\sigma_n^*)^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, X_1^2 \geqslant N(\sigma_n^*)^2\},\ N \gg k\delta,$$

откуда следует условие Линдеберга для последовательности $\{X_n\}$: при любом $\delta>0$

$$m(\sigma_m^*)^{-2}\mathbb{E}\{X_1^2, X_1^2 \geqslant \delta(\sigma_m^*)^2\} \to 0,\ m\to\infty.$$

В силу теоремы 3 из [10] к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема.

2) Из (10) и Леммы 3 d) при достаточно больших n получаем

$$\mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant xc_n^2(p)\} \leqslant \mathbb{P}\{|X_1-\mu| \geqslant \sqrt{x}c_n(p) - |\mu|\} \leqslant 2\mathbb{P}\{\widetilde{X}_1^2 \geqslant Cx\widetilde{c}_n^2(p)\}, \tag{25}$$

$C>0,\ x>0,\ \mu$ — медиана X_1, и из условия (6) следует теперь

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to\infty} n\int_\varepsilon^1 \mathbb{P}\{|\widetilde{X}_1|^2 \geqslant x\widetilde{c}_{nk}^2(p)\}\,dx = \infty. \tag{26}$$

В силу (4): $|X_j^{\blacktriangledown}(nks) - X_{j-1}^{\blacktriangledown}(nks) - Y_j^{\blacktriangledown}(nks)| \leqslant \varepsilon|Y_j^{\blacktriangledown}(nks)| + N$, откуда

$$|Y_j^{\blacktriangledown}(nks)| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}(|X_j^{\blacktriangledown}(nks)| + |X_{j-1}^{\blacktriangledown}(nks)| + N),$$

и, следовательно,

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j^{\blacktriangledown}(nks)| \ll \max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j^{\blacktriangledown}(nks)| + N.$$

С помощью леммы 3 a) выводим $\|\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} X_j^{\blacktriangledown}(nks)\|_2 \ll \|X_n^{\blacktriangledown}(nks)\|_2 = \sigma_n^{\blacktriangledown}(nks))$. Пусть $a_n^* = \sup\left\{x : n\mathbb{P}\left\{|Y_j^{\blacktriangledown}(nks)| \geqslant x\right\} \geqslant 1\right\} \leqslant a_n$.

Из (19), лемм 1 и 5 b) следует

$$B_{nk}^2(p) \gg k(\sigma_n^{\blacktriangledown}(nks))^2 \gg k\mathbb{E}(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|Y_j^{\blacktriangledown}(nks)| - N)^2 \gg$$

$$\gg nk\mathbb{E}\{|Y_1^{\blacktriangledown}(nks)|^2, |Y_1^{\blacktriangledown}(nks)| > a_n^*\} \geqslant nk\int_{a_n^2}^{4\widetilde{c}_{nks}^2(p)} \mathbb{P}\{|\widetilde{Y}_1|^2 \geqslant x\}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant nk\widetilde{c}_{nk}^2(p)\int_{\varepsilon_n^2}^1 \mathbb{P}\{|\widetilde{X}_1|^2 \geqslant x\widetilde{c}_{nk}^2(p)\}\,dx, \tag{27}$$

где в силу леммы 3 b) и c)

$$\varepsilon_n^p = \frac{a_n^p}{\widetilde{c}_{nk}^p(p)} \leqslant \frac{8n\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_n\}}{nk\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_{nk}\}} \leqslant \frac{8(f_n+g_n)}{kf_n},\ n\geqslant 3,\ \text{где}$$

$$f_n = \mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_{nk}\},\ g_n = \mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p,\ a_n \leqslant |\widetilde{X}_1| < a_{nk}\}.$$

Если $g_n \leqslant \sqrt{k} f_n$, то $\varepsilon_n^p \leqslant \dfrac{8(\sqrt{k}+1)}{k} \to 0,\ k \to \infty$, и в силу (26)

$$B_{nk}^2(p) \gg \widetilde{c}_{nk}^2(p)h(k),\ h(k) \to \infty,\ k \to \infty.$$

Если же $g_n > \sqrt{k} f_n$, то с помощью (27), леммы 3 b) и c) получаем

$$B_{nk}^p(p) \gg nk\mathbb{E}\{|X_1^\blacktriangledown(nks)|^p, |X_1^\blacktriangledown(nks)| \geqslant a_n\} = nk\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, a_n \leqslant |\widetilde{X}_1| \leqslant 2\widetilde{c}_{nks}(p)\} \gg$$

$$\gg nkg_n > \sqrt{k}nk\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_{nk}\} \gg \sqrt{k}\widetilde{c}_{nk}^p(p).$$

И в том и в другом случае $B_{nk}(p)/\widetilde{c}_{nk}(p) \to \infty$ при некотором $k = k(n) \to \infty$. Если $nk \leqslant m \leqslant n(k+1)$, то $B_m(p) \ll B_{n(k+1)}(p)$ [7, лемма 1], а в силу (17) $\widetilde{c}_m(p) \gg \widetilde{c}_{n(k+1)}(p)$, так что $B_m(p)/\widetilde{c}_m(p) \to \infty, m \to \infty$.

Далее при любом $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{c}_m^{\,-p}(p))\mathbb{E}\left\{\left|\widetilde{Z}'_m\right|^p, |\widetilde{Z}'_m| \geqslant \varepsilon\widetilde{c}_m(p)\right\} \leqslant 1,$$

откуда

$$B_m^{-p}(p)\mathbb{E}\left\{|\widetilde{Z}'_m|^p, |\widetilde{Z}'_m| \geqslant \varepsilon B_m(p)\right\} \to 0,$$

и так как $\varepsilon B_m(p) > a_m$ при достаточно больших m, из (19) получаем условие Линдеберга порядка p:

$$mB_m^{-p}(p)\mathbb{E}\left\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant \varepsilon B_m(p)\right\} \to 0.$$

В силу Теоремы 3 из [7] $\{\widetilde{X}_n\}$, а вместе с ней и $\{X_n\}$ притягиваются к нормальному закону. Теорема доказана.

Замечание 2. 1. Пусть $\mathbb{E}|X_1|^p < \infty,\ p > 2$. Из (25) и леммы 3 b) получаем

$$n\mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant xc_n^2(p)\} \leqslant 2n\mathbb{P}\{\widetilde{X}_1^2 \geqslant Cx\widetilde{c}_n^2(p)\} \leqslant 2n\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_1| > a_{ny}\} \leqslant \frac{2}{y},$$

где $x > 0,\ y = \left[1/2(Cx)^{p/2}\right]$, $[x]$ — целая часть x. Отсюда

$$n\int_N^\infty \mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant xc_n^2(p)\}\,dx \ll \int_N^\infty x^{-p/2}\,dx \to 0,\ N \to \infty,$$

так что выполняется (5), значит, к последовательности $\{X_n\}$ применима центральная предельная теорема и мы получаем обобщение теоремы И.А. Ибрагимова из [1].

2. Пусть $\mathbb{P}\{|X_1| \geqslant x\}$ — правильно меняющаяся функция порядка -2. Тогда $\mathbb{P}\{|\widetilde{X}_1| \geqslant x\}$ — правильно меняющаяся функция порядка -2 [11, с. 319] и при $p < 2$ получаем $\widetilde{c}_n^p \leqslant 2n\mathbb{E}\{|\widetilde{X}_1|^p, |\widetilde{X}_1| \geqslant a_n\} \ll a_n^p$ [11, с. 322].

С помощью леммы 3 с) и (10) при $x > 0$ и некотором $C_1 > 0$ выводим

$$2n\mathbb{P}\{X_1^2 \geqslant xc_n^2(p)\} \geqslant n\mathbb{P}\{\widetilde{X}_1^2 \geqslant 2C_1 x\widetilde{c}_n^2(p)\} \geqslant n\mathbb{P}\{\widetilde{X}_1^2 \geqslant C_1 x a_n^2\} \sim \frac{1}{x\sqrt{C_1}}.$$

Так как $\int\limits_{\varepsilon}^{1} x^{-1}\,dx \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, то из последнего соотношения следует (6), последовательность $\{X_n\}$ притягивается к нормальному закону, и мы имеем обобщение результата М. Пелиград из [3].

Литература

1. Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М. : Наука, 1965. 524 с.
2. Гринь А.Г. Нормирующие последовательности в предельных теоремах для слабо зависимых величин // Теория вероятностей и её применения. 1991. Т. 36, № 2. С. 285–300.
3. Peligrad M. On Ibragimov–Iosifescu conjecture for φ-mixing sequences // Stochastic Processes and their Applications. 1990. V .35. P. 293–308.
4. Клоков С.А. Строгое притяжение к нормальному закону для стационарных последовательностей с равномерно сильным перемешиванием // Вестник Омского университета. 1997. № 2. С. 11–13.
5. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М. : Наука, 1983. 142 с.
6. Гринь А.Г. О строгом притяжении стационарных последовательностей к нормальному закону // Теория вероятностей и её применения. 1999. Т. 44, № 4. С. 1–10.
7. Гринь А.Г. О притяжении к нормальному закону функций от слабо зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2020. № 2(54). С. 24–39.
8. Bradley R. On the φ-mixind condition for stationary random sequences // Duke Math. J. 1980. V. 47. P. 421–433.
9. Лоэв М. Теория вероятностей. М. : ИЛ, 1962. 719 с.
10. Гринь А.Г. Об асимптотически нормальных функциях от зависимых величин // Математические структуры и моделирование. 2019. № 4(52). С. 5–16.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 2. М. : Мир, 1984. 751 с.

ON THE STRONG ATTRACTION OF FUNCTIONS ON DEPENDENT VARIABLES TO THE NORMAL LAW

A.G. Grin
Professor, Dr.Sc.(Phys.-Math.), e-mail: griniran@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. For symmetric functions on random variables from stationary sequences satisfying the uniformly strong mixing condition, the general conditions of attraction to the normal law in terms of distributions of individual items are obtained. The main result of the paper generalizes all known to present results of this type.

Keywords: Symmetric functions, uniformly strong mixing, strong attraction to the normal law, Ibragimov-Iosifesku hypothesis.

References

1. Ibragimov I.A. and Linnik Yu.V. Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny. Moscow, Nauka Publ., 1965, 524 p. (in Russian)
2. Grin' A.G. Normiruyushchie posledovatel'nosti v predel'nykh teoremakh dlya slabo zavisimykh velichin. Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 285–300. (in Russian)
3. Peligrad M. On Ibragimov–Iosifescu conjecture for φ-mixing sequences. Stochastic Processes and their Applications, 1990, vol .35, pp. 293–308.
4. Klokov S.A. Strogoe prityazhenie k normal'nomu zakonu dlya statsionarnykh posledovatel'nostei s ravnomerno sil'nym peremeshivaniem. Vestnik Omskogo universiteta, 1997, no. 2, pp. 11–13. (in Russian)
5. Seneta E. Pravil'no menyayushchiesya funktsii. Moscow, Nauka Publ., 1983, 142 p. (in Russian)
6. Grin' A.G. O strogom prityazhenii statsionarnykh posledovatel'nostei k normal'nomu zakonu. Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya, 1999, vol. 44, no. 4, pp. 1–10. (in Russian)
7. Grin' A.G. O prityazhenii k normal'nomu zakonu funktsii ot slabo zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2020, no. 2(54), pp. 24–39. (in Russian)
8. Bradley R. On the φ-mixind condition for stationary random sequences. Duke Math. J., 1980, vol. 47, pp. 421–433.
9. Loev M. Teoriya veroyatnostei. Moscow, IL Publ., 1962, 719 p. (in Russian)
10. Grin' A.G. Ob asimptoticheski normal'nykh funktsiyakh ot zavisimykh velichin. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 4(52), pp. 5–16. (in Russian)
11. Feller V. Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya. Vol. 2. Moscow, Mir Publ., 1984, 751 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 18.11.2020