

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ИНТЕРВАЛЬНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ СЛУЖБЫ ЗАНЯТОСТИ

Н.Ф. Богаченко

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

Д.Н. Лавров

к.т.н., доцент, e-mail: dmitry.lavrov72@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Для определения весовых коэффициентов функции эффективности работы службы занятости использованы метод анализа иерархий и интервальная арифметика. Это позволило учесть мнения различных экспертов без потери согласованности матриц парных сравнений.

Ключевые слова: метод анализа иерархий, интервальная арифметика, функция эффективности.

Введение

В рамках выполнения научного проекта «Методология и инструменты оценки эффективности активной политики занятости на рынке труда» предложена функция эффективности работы службы занятости F , учитывающая причины снятия безработных граждан с учёта и услуги, оказанные им службой занятости:

$$F = \alpha G - \beta R, \quad G = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N x_i}, \quad R = \frac{\sum_{k=1}^M \left[v_k \sum_{i=1}^X u_{ik} \right]}{\sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^X u_{ik}},$$

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i = X, \quad u_{ik} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^M u_{ik} \geq 1, \quad u_k = \sum_{i=1}^X u_{ik},$$

где x_i — число безработных, завершивших период безработицы с i -ой причиной снятия с учёта; N — число статистически значимых причин снятия с учёта; w_i — условная результативность или вес i -ой причины снятия с учёта; X — число безработных; u_{ik} — число услуг вида k , оказанных i -ому безработному; v_k — условная трудоёмкость оказания услуги, или вес услуги вида k ; M — число видов услуг; α, β — нормировочные коэффициенты [1]. Часть параметров модели вычисляется статистически на основе данных, предоставленных службой занятости. Для определения весовых коэффициентов w_i и v_k были привлечены эксперты и использован метод анализа иерархий (МАИ), хорошо

известный из теории поддержки принятия решений [2]. МАИ используется в случаях принятия решений на основе плохо структурированных данных, в ситуациях неопределённости, когда в зависимости от применяемых критериев мы получаем разные результаты. При работе с экспертами выяснилось, что их оценки обладают высокой вариативностью и часто сильно отличаются друг от друга. Особенно это касается экспертов, привлечённых от службы занятости. Связано это с субъективными факторами: эксперт считает более важными те критерии, которые характеризуют качество именно его работы. Решить данную проблему можно несколькими способами. Первый описан в [3] и предполагает корректировку и возможно расширение списка критериев МАИ. В данной статье предлагается применить другой подход: использование интервального МАИ для контроля получаемых в результате его работы весовых коэффициентов w_i и v_k вышеприведённой целевой функции. В этом случае и сама целевая функция F становится интервальной.

1. Реализация классического МАИ

Применение МАИ начинается со структурирования задачи в виде иерархии.

Для вычисления w_i построена трёхуровневая иерархия: цель, критерии и альтернативы. Уровень альтернатив — это $N = 9$ статистически значимых причин снятия с учёта. Вершина иерархии (цель) — ожидаемый результат работы метода — ранжирование причин снятия с учёта по степени влияния на результативность (G) работы службы занятости. После консультаций с экспертами и специалистами службы занятости были выбраны 4 критерия, влияющих на достижение поставленной цели [3].

Для оценки трудоёмкости оказания услуг (R) построена двухуровневая иерархия. Уровень альтернатив — это $M = 14$ видов услуг, оказываемых службой занятости. Вершина иерархии (цель) — ранжирование услуг по трудоёмкости их оказания службой занятости. Уровень критериев в данной иерархии отсутствует.

Следующий этап — построение матриц парных сравнений. Каждая пара критериев или альтернатив сравнивается по обратносимметричной девятибалльной шкале:

$$1/9, 1/8, \dots, 1/2, 1, 2, 3, \dots, 9.$$

Единица означает равное влияние, а 9 — подавляющее преимущество. Полную шкалу оценок и их смысловых эквивалентов можно найти в [2]. В трёхуровневой иерархии матрица парных сравнений уровня критериев имеет размерность 4×4 , а четыре матрицы парных сравнений уровня альтернатив имеют размерность 9×9 . В двухуровневой иерархии матрица парных сравнений имеет размерность 14×14 .

Мера согласованности суждений экспертов в матрице парных сравнений определяется индексом согласованности

$$CI = \frac{|\lambda_{\max} - n|}{n - 1},$$

где λ_{\max} — максимальное собственное число матрицы, n — размерность матрицы. На основе индекса согласованности рассчитывается относительная согласованность

$$CR = \frac{CI}{RI_n},$$

где RI_n — случайный индекс согласованности, зависящий от размерности матрицы [2].

Учёт мнений всех экспертов может быть сделан различными способами. Например, простым усреднением матриц парных сравнений. К сожалению, такой подход может привести к несогласованным матрицам, хотя каждая матрица конкретного эксперта по отдельности может быть идеально согласована.

В следующем разделе будет описан метод, основанный на интервальной арифметике.

2. Получение интервальных весов

Учёт расхождения мнений экспертов можно контролировать введением интервальных весовых коэффициентов (весов).

Для обозначения интервальных скалярных переменных будем использовать квадратные скобки:

$$[a] = [\underline{a}, \bar{a}],$$

где \underline{a} — левая граница интервала, \bar{a} — правая граница. Матрицы и векторы будем обозначать полужирным шрифтом, например так: \mathbf{A} , а интервальные матрицы и векторы — полужирным шрифтом в квадратных скобках: $[\mathbf{A}]$. Компоненты векторов и матриц нумеруются нижними индексами, так для матрицы \mathbf{A} элемент, стоящий в i -ой строке и j -ом столбце, обозначается $A_{i,j}$.

Кратко нашу идею интервального расширения МАИ можно описать следующим образом:

1. Вычисляем для каждой матрицы парных сравнений собственный вектор и соответствующее ему максимальное собственное число с помощью степенного метода [4].
2. По вычисленным собственным векторам на минимаксной основе строим интервальные векторы весов и интервальные собственные числа матриц парных сравнений.
3. Интервальные векторы весов используем для оценки целевой функции эффективности работы службы занятости $[F]$, а интервальные собственные числа — для интервальной оценки согласованности $[CR]$.

Другие авторы часто строят интервальные матрицы парных сравнений [5–7]. Данные подходы обычно используют для оценки собственного вектора метод геометрического среднего или метод арифметического среднего [2, 8]. Степенной метод может быть применён, но как показано в [9], объём интервального «бруса» собственного вектора в итеративных алгоритмах неограниченно растёт. Наш подход основан на простой идее: необходимо отобразить матрицы парных сравнений с помощью степенного метода в множество соответствующих им собственных векторов, а затем аппроксимировать данное

множество интервальным «брусом», который будет представлен теперь уже интервальным собственным вектором.

Опишем данный подход более подробно. Даны матрицы парных сравнений, полученные от S экспертов:

$$\mathcal{A}_s = \{\mathbf{A}^{(i,j)}\},$$

где i — номер уровня в иерархии ($i = 0, \dots, N - 2$, N — число уровней в иерархии); j — номер критерия на i -ом уровне иерархии ($j = 0, \dots, M_i - 1$, M_i — число критериев на i -ом уровне); s — номер эксперта ($s = 0, \dots, S - 1$); $\mathbf{A}^{(i,j)}$ — матрица парных сравнений s -ого эксперта (индекс s у матрицы будем опускать, чтобы не загромождать обозначения).

Для каждого эксперта структура иерархии неизменна, но набор матриц индивидуален. Пример структуры дан на рисунке 1.

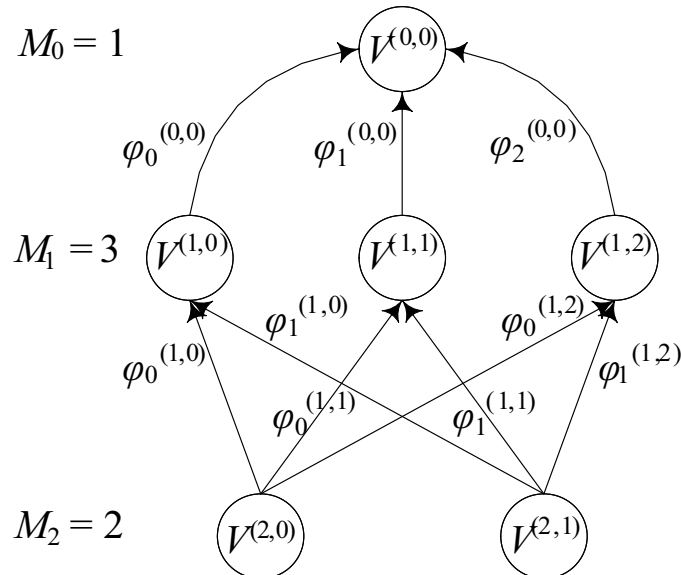


Рис. 1. Пример трёхуровневой иерархии

Для каждой матрицы парных сравнений каждого эксперта с помощью степенного метода находим собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению. Эти векторы образуют множество

$$\Phi_s = \{\Phi^{(i,j)}\}.$$

Экспериментально замечено, что в случае равных компонент вектора начального приближения сходимость степенного метода достигается за число шагов, равное размерности матрицы. Для ускорения сходимости начальное приближение вычисляем методом средних [8], в ситуации идеальной согласованности оно даёт точное решение. Для корректировки решения в случае рассогласованности суждений будет достаточно всего лишь нескольких итераций степенного метода.

```

function INITIAL_VECTOR(A)
   $n \leftarrow \text{SIZE}(\mathbf{A})$ 
   $\varphi \leftarrow \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ штук}}$ 
   $s \leftarrow \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ штук}}$ 
  for  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  do
    for  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  do
       $s_i \leftarrow s_i + A_{j,i}$ 
    end for
    for  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  do
       $A_{j,i} \leftarrow A_{j,i}/s_i$ 
    end for
  end for
  for  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  do
    for  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  do
       $\varphi_i \leftarrow \varphi_i + A_{i,j}$ 
    end for
  end for
   $\varphi_i \leftarrow \varphi_i/n$ 
end for
return  $\varphi$ 
end function

```

```

function POWER_METHOD(A,  $\varepsilon$ )
   $\varphi \leftarrow \text{INITIAL\_VECTOR}(\mathbf{A})$ 
   $n \leftarrow \text{SIZE}(\mathbf{A})$ 
  repeat
     $\psi \leftarrow \varphi$ 
     $\varphi \leftarrow \mathbf{A} * \psi$ 
     $\lambda \leftarrow \|\varphi\|_1$ 
     $\varphi \leftarrow \varphi/\lambda$ 
  until  $\|\varphi - \psi\|_1 < \varepsilon$ 
  return  $\lambda, \varphi$ 
end function

```

Интервальный вектор собственных чисел вычисляется по правилу:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} [\min_i \varphi_1^{(i)}, \max_i \varphi_1^{(i)}] \\ [\min_i \varphi_2^{(i)}, \max_i \varphi_2^{(i)}] \\ \vdots \\ [\min_i \varphi_n^{(i)}, \max_i \varphi_n^{(i)}] \end{pmatrix}$$

```

function INTERVAL_WEIGHT( $\mathcal{A}_s, \varepsilon$ )
   $N \leftarrow \text{SIZE}(\mathcal{A}_s)$ 
   $[\varphi] \leftarrow \underbrace{([\infty, -\infty], \dots, [\infty, -\infty])}_{n \text{ штук}}$ 
  for  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_s$  do
     $\mathbf{w} \leftarrow \text{POWER\_METHOD}(\mathbf{A}, \varepsilon)$ 
    for  $i \in \{0, \dots, N - 1\}$  do
       $[\varphi_i, \overline{\varphi}_i] \leftarrow [\min(\underline{w}_i, \varphi_i), \max(\overline{w}_i, \varphi_i)]$ 
    end for
  end for
  return  $[\varphi]$ 
end function

```

Далее уже в интервальной арифметике производится суммирование весов по уровням иерархии и делается заключение о размере интервалов и точности оценки весов для выбора альтернатив. Расчёт итоговых весов производится от вершины иерархии к уровню альтернатив по формулам:

$$[V^{(i,j)}] = \sum_{k=0}^{M_{i-1}-1} [\varphi_j^{(i-1,k)}][V^{(i-1,k)}]$$

$$[V^{(0,0)}] = [1, 1],$$

где верхние индексы отвечают за номер уровня и номер критерия внутри этого уровня, а нижние индексы — за компоненты векторов.

Затем данные веса используются в вычислениях функции эффективности службы занятости $[F]$.

Заключение

В ходе проведённой работы были получены следующие результаты:

- предложена одна из возможных интервальных реализаций МАИ, адаптированная к задаче оценки эффективности работы службы занятости;
- предложен способ ускорения сходимости степенного метода для МАИ.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-010-00489.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богаченко Н.Ф., Лавров Д.Н., Стукен Т.Ю. Математическая модель эффективности работы службы занятости // Математическое и компьютерное моделирование : сборник материалов VIII Международной научной конференции. Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2020. С. 151–153.

2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process. New York : McGraw Hill, 1980.
3. Богаченко Н.Ф., Лавров Д.Н., Стукен Т.Ю. Формирование экспертных оценок критериев эффективности работы службы занятости Омской области для метода анализа иерархий // Омские научные чтения — 2020 : материалы Четвёртой Всероссийской научной конференции. Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2020 (в печати).
4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М. : Высш. шк., 1994. 544 с.
5. Zadnik S.L., Groselj P. Estimating Priorities in Group AHP Using Interval Comparison Matrices // Multiple Criteria Decision Making. 2013. No. 8. P. 143–159.
6. Pamucar D., Stankovic M.S., Janackovic G.Lj. Modification of the AHP method based on interval valued rough numbers // International conference Transport and Logistics. 2017. V. 6. P. 295–301.
7. Entani T. Interval AHP for a group of decision makers // Proceedings of the Joint 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference. Lisbon, Portugal, July 20-24, 2009. P. 155–160.
8. Таха Х.А. Введение в исследование операций. М. : Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.
9. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск : Издательство «XYZ», 2020. 643 с.

**ON THE FEATURES OF THE IMPLEMENTATION OF THE INTERVAL
METHOD FOR ANALYTIC HIERARCHY PROCESS IN THE PROBLEM OF
ASSESSING THE EFFECTIVENESS OF THE EMPLOYMENT SERVICE**

N.F. Bogachenko

Ph.D.(Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: nfbogachenko@mail.ru

D.N. Lavrov

Ph.D.(Eng.), Associate Professor, e-mail: dmitry.lavrov72@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. To determine the weight coefficients of the efficiency function of the employment service, the analytic hierarchy process and interval arithmetic were used. This made it possible to take into account the opinions of various experts without losing the consistency of the matrices of pairwise comparisons.

Keywords: analytic hierarchy process, interval arithmetic, efficiency function.

REFERENCES

1. Bogachenko N.F., Lavrov D.N., and Stuken T.Yu. Matematicheskaya model' effektivnosti raboty sluzhby zanyatosti. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie, Sbornik materialov VIII Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2020, pp. 151–153. (in Russian)

2. Saaty T.L. The Analytic Hierarchy Process. New York, McGraw Hill, 1980.
3. Bogachenko N.F., Lavrov D.N., and Stuken T.Yu. Formirovanie ekspertnykh otsenok kriteriev effektivnosti raboty sluzhby zanyatosti Omskoi oblasti dlya metoda analiza ierarkhii. Omskie nauchnye chteniya — 2020, materialy Chetvertoi Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii, Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2020 (v pechati). (in Russian)
4. Amosov A.A., Dubinskii Yu.A., and Kopchenova N.V. Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1994, 544 p. (in Russian)
5. Zadnik S.L. and Groselj P. Estimating Priorities in Group AHP Using Interval Comparison Matrices. Multiple Criteria Decision Making, 2013, no. 8, pp. 143–159.
6. Pamucar D., Stankovic M.S., and Janackovic G.Lj. Modification of the AHP method based on interval valued rough numbers. International conference Transport and Logistics, 2017, vol. 6, pp. 295–301.
7. Entani T. Interval AHP for a group of decision makers. Proceedings of the Joint 2009 International Fuzzy Systems Association World Congress and 2009 European Society of Fuzzy Logic and Technology Conference, Lisbon, Portugal, July 20-24, 2009, pp. 155–160.
8. Takha Kh.A. Vvedenie v issledovanie operatsii. Moscow, Izdatel'skii dom «Vil'yams&S», 2001, 912 p. (in Russian)
9. Sharyi S.P. Konechnomernyi interval'nyi analiz. Novosibirsk, Izdatel'stvo «XYZ», 2020, 643 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 23.11.2020