Математические структуры и моделирование
2020. № 3(55). С. 22–30

УДК 535.2
DOI 10.24147/2222-8772.2020.3.22-30

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ СПЕКТРА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ

М.Б. Моисеев
к.т.н., доцент, e-mail: moiseevmb@mail.ru

Омский государственный университет путей сообщения, Омск, Россия

Аннотация. Энергия излучения электромагнитного поля в некотором промежутке частот пропорциональна квадрату модуля Фурье-образа этого поля. Определение энергии излучения составляет прямую задачу и имеет самостоятельную ценность в решении многих задач теории излучения. Представляет большой интерес, по известному спектру распределения энергии излучения по частотам, найти функцию электромагнитного поля, создавшую этот спектр, т. е. решить обратную задачу теории излучения. В работе решается указанная обратная задача, а именно, отыскивается функция электромагнитного поля по известной функции спектра, имеющей конечное число нулей на частотном промежутке.

Ключевые слова: функция спектра излучения, электромагнитное поле, обратная задача теории излучения, нули функции спектра, односторонние интегралы Фурье, краевая задача Римана.

Большое количество работ посвящено исследованию излучения электромагнитных волн [1–11]. Рассматриваются прямые характеристики излучения: спектральный состав, угловая направленность и др.

С точностью до определённого типа констант прямая задача исследования излучения начинается с равенства:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E\left(t\right)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt\right|^2 = S\left(\omega\right), \tag{1}$$

в котором $E(t)$ — заданная функция.

При решении обратной задачи теории излучения волн предполагается противоположный подход. Известным считается спектр излучения волн, заданный функцией $S(\omega)$, а требуется вычислить функцию поля $E(t)$, создающую этот спектр.

В работах [12–14] показано, что извлечение квадратного корня в равенстве (1) невозможно.

Отыскиваемая функция $E(t)$ должна удовлетворять физическим ограничениям. Первое такое ограничение заключается в том, что функцию $E(t)$ можно считать заданной на положительной полуоси. Действительно, для создания наблюдаемого спектра электромагнитное поле имеет своё начало. Не умаляя общности, начало действия этого поля можем совместить с моментом времени t равным нулю. Сказанное реализуется, например, в устройствах под названием ондуляторы [4, 5]. Таким образом, Фурье-образ электромагнитного поля в общем случае может быть представлен односторонним интегралом Фурье:

$$\Phi^{+}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt. \tag{2}$$

Такое обозначение Фурье-образа (равенство (2)) удобно с точки зрения дальнейшего изложения.

Спектральная функция представляет собой модуль Фурье-образа, возведённый в квадрат, т. е. справедливо равенство:

$$S(\omega) = \Phi^{+}(\omega) \cdot \left(\Phi^{+}(\omega)\right)^{*}, \tag{3}$$

здесь звездочкой помечено комплексное сопряжение функции.

Комплексно-сопряженную функцию этого равенства (3) можно записать поразному. В случае отображения функции $E(t)$ на отрицательную полуось нечетным образом получим:

$$\left(\Phi^{+}(\omega)\right)^{*} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt\right)^{*} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \Phi^{-}(\omega). \tag{4}$$

Если продолжить функцию $E(t)$ на отрицательную полуось как четную, то получится равенство:

$$\left(\Phi^{+}(\omega)\right)^{*} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt\right)^{*} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = -\Phi^{-}(\omega). \tag{5}$$

Возможность отображений (4), (5) приводит к поиску функции поля $E(t)$ как нечетной функции (в случае (4)) или четной функции (в случае (5)), представленной односторонними интегралами Фурье (2), (4), (5) как на положительной, так и на отрицательной полуосях.

Следующее ограничение, накладываемое на функцию $E(t)$, сводится к требованию интегрируемости её по модулю в квадрате, т. е. того, что $E(t)$ относится к классу L_2 [15, с. 12] и к функции $E(t)$, применимо условие Гельдера [16, с. 52]. При указанных ограничениях равенства (2), (4), (5) представляют собой предельные значения односторонних интегралов Фурье [15, с. 24].

Тогда функции $\Phi^{+}(\omega)$, $\Phi^{-}(\omega)$ также принадлежат классу H (говорят: удовлетворяют условию Гельдера [16, с. 20]).

В работе [15, с. 20] показана связь односторонних интегралов Фурье с интегралами типа Коши.

Принятые ограничения сводят задачу к равенству:

$$\Phi^{+}(\omega) \cdot \Phi^{-}(\omega) = S(\omega), \tag{6}$$

если функция $E(t)$ на отрицательную полуось отображена нечётно, и равенству:

$$\Phi^+(\omega) \cdot \left(-\Phi^-(\omega)\right) = S(\omega), \tag{7}$$

если функция $E(t)$ на отрицательную полуось имеет чётное отображение.

Мы накладывали условия на искомую функцию поля $E(t)$. Однако для некоторых ограничений возможен и другой подход. Если функции $\Phi^+(\omega)$, $\Phi^-(\omega)$ удовлетворяют условию Гёльдера, то и их произведение удовлетворяет этому условию [16, с. 20]. Тогда согласно равенствам (6), (7) мы должны потребовать, чтобы функция $S(\omega)$ удовлетворяла условию Гёльдера. Но если функция $S(\omega)$ удовлетворяет условию Гёльдера и справедливы равенства (6), (7), то и функции $\Phi^+(\omega)$, $\Phi^-(\omega)$ удовлетворяют этому условию, а, следовательно, функция электромагнитного поля $E(t)$ также будет удовлетворять этому условию.

Предположим, что заданная функция $S(\omega)$ определена и отлична от нуля на системе интервалов действительной оси L. L состоит из n интервалов положительной действительной оси частот за исключением точек — концов отрезков $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$, в которых функция $S(\omega)$ обращается в ноль. Расстояние $a(\omega_{k+1}) - b(\omega_k)$ между концом k-го и началом следующего k+1-го отрезков равно нулю. Во всех точках L определены логарифмы левых и правых частей равенств (6), (7). Логарифмируя равенства (6), (7), получим:

$$\ln \Phi^+(\omega) = (-1) \cdot \ln \Phi^-(\omega) + \ln S(\omega), \ \omega \in L, \tag{8}$$

$$\ln \Phi^+(\omega) = (-1) \cdot \ln \left(-\Phi^-(\omega)\right) + \ln S(\omega), \ \omega \in L. \tag{9}$$

Здесь равенства (8), (9) соответствуют нечётному и чётному отображению функции $E(t)$ на отрицательную полуось. Данные равенства при сделанных выше предположениях можно рассматривать как краевую задачу Римана [15, с. 27; 16, с. 106], заданную на действительной оси ω с разрывным коэффициентом

$$G(\omega) = \begin{cases} -1, \ \omega \in L, \\ \ \ 1, \ \omega \notin L \end{cases} \tag{10}$$

и свободным членом

$$g(\omega) = \begin{cases} \ln S(\omega), \ \omega \in L, \\ 0, \ \omega \notin L. \end{cases} \tag{11}$$

Учитывая введенные обозначения (10), (11), задачу можно записать в виде

$$\ln \Phi^+(\omega) \cdot \ln \left(\pm\Phi^-(\omega)\right) + g(\omega). \tag{12}$$

Знаки плюс или минус перед функцией $\Phi^-(\omega)$ в (12) означают нечётное (знак +) и чётное (знак –) продолжение функции $E(t)$ на отрицательную полуось. Коэффициент задачи $G(\omega)$ имеет разрывы первого рода в конечных точках отрезков $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$. Для того чтобы устранить разрыв коэффициента $G(\omega)$, следуя [16, с. 442], сделаем замену

$$\ln \left(\pm\Phi^\pm(\omega)\right) = \prod_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\omega - a(\omega_k)}{\omega \pm i} \right)^{\gamma_k} \cdot \left(\frac{\omega - b(\omega_k)}{\omega \pm i} \right)^{\gamma_k'} \right] \cdot \Phi_1^\pm(\omega). \tag{13}$$

После замены задача (12) примет вид

$$\Phi_1^+(\omega) = G(\omega)\,\Phi_1^-(\omega) + g_1(\omega)\,, \tag{14}$$

где

$$G_1(\omega) = \prod_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^{-\gamma_k} \cdot \left(\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^{-\gamma_k'}\right] \cdot G(\omega)$$

и

$$g_1(\omega) = \prod_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{\omega - a(\omega_k)}{\omega + i}\right)^{-\gamma_k} \cdot \left(\frac{\omega - b(\omega_k)}{\omega + i}\right)^{-\gamma_k'}\right] \cdot g(\omega)\,.$$

В (14) функции вида $[(\omega - i)\,/\,(\omega + i)]^{-\gamma_k}$, по определению [16, с. 25], после перехода через точки $a(\omega_k)$, $b(\omega_k)$ получат множитель $\exp[i2\pi\gamma_k]$. Например, многозначная функция $[(\omega - i)\,/\,(\omega + i)]^{-\gamma_k}$ на интервале $(-\infty;\ a(\omega_k))$ имеет главное значение $[(\omega - i)\,/\,(\omega + i)]^{-\gamma_k}$, а после прохождения точки $a(\omega_k)$ (на интервале $(a(\omega_k)\,;\ \infty)$ получит значение, равное $[(\omega - i)\,/\,(\omega + i)]^{-\gamma_k}\exp[i2\pi\gamma_k]$. Скачок функции $[(\omega - i)\,/\,(\omega + i)]^{-\gamma_k}$ в точке $a(\omega_k)$ равен $\exp[i2\pi\gamma_k]$. При этом, если скачок функции $G(\omega)$ в точке $\omega = a(\omega_k)$ равен $\exp[i2\pi\gamma_k]$, то это приведёт к непрерывности произведения $[(\omega - i)\,/\,(\omega + i)]^{-\gamma_k} \cdot G(\omega)$ в этой точке. Следовательно, нужным подбором γ_k и γ_k' мы можем устранить разрывы коэффициента $G(\omega)$ в точках $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$. Запишем

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \tfrac{1}{2\pi i}\left(ln\tfrac{G(a(\omega_k)-0)}{G(a(\omega_k)+0)} - i2\pi æ_k\right),\\ \gamma_k' &= \tfrac{1}{2\pi i}\left(ln\tfrac{G(b(\omega_k)-0)}{G(b(\omega_k)+0)} - i2\pi æ_k'\right),\end{aligned} \tag{15}$$

где $G(a(\omega_k) - 0)$, $G(a(\omega_k) + 0)$ и $G(b(\omega_k) - 0)$, $G(b(\omega_k) + 0)$ — лево- и правосторонние пределы коэффициента в точках $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$, а $æ_k$ и $æ'_k$ — целые числа. Сумма целых чисел $æ_k$ и $æ_k$ определяет индекс æ задачи, т. е. $æ = æ_k + æ'_k$, а набор целых чисел γ_k и γ_k' определяет функции, в классе которых отыскивается решение [16, с. 101].

В рамках данной работы имеет физический смысл лишь класс ограниченных функций. Действительно, если предположить обратное, допустив решение задачи (14), удовлетворяющее в окрестностях точек $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$ условиям:

$$\begin{aligned}\left|\Phi_1^\pm(\omega)\right| &\leqslant \tfrac{C}{|\omega - a(\omega_k)|^\lambda},\ C = const,\ 0 < \lambda < 1,\\ \left|\Phi_1^\pm(\omega)\right| &\leqslant \tfrac{C'}{|\omega - b(\omega_k)|^{\lambda'}},\ C' = const,\ 0 < \lambda' < 1.\end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая замену (13), будем иметь оценки

$$\begin{aligned}|\Phi^\pm(\omega)| &\leqslant e^{\frac{C_1}{|\omega - a(\omega_k)|^{\lambda_1}}} \qquad C_1 = const,\ 0 < \lambda_1 < 1,\\ |\Phi^\pm(\omega)| &\leqslant e^{\frac{C_1'}{|\omega - b(\omega_k)|^{\lambda_1'}}} \qquad C_1' = const,\ 0 < \lambda_1' < 1,\end{aligned} \tag{17}$$

согласно которым функции $\Phi^\pm(\omega)$ экспоненциально расходятся в окрестностях точек $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$, но это противоречит равенствам (3–7). Следовательно, единственно возможным классом физически реализуемых решений является класс ограниченных функций. В этом классе из (15) найдём $\gamma_k = \gamma'_k = 1/2$, æ$_k$ = – 1, æ$'_k$ = 0. Индекс задачи (14) æ = – n. С учетом найденных величин γ_k, γ'_k, æ$_k$, æ$'_k$, æ задача (14) запишется:

$$\Phi_1^+(\omega) = \left(\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^{-n} \cdot \Phi_1^-(\omega) + R(\omega), \tag{18}$$

$$R(\omega) = \begin{cases} \frac{(\omega+i)^n \cdot \ln S(\omega)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n [(\omega - a(\omega_k))(\omega - b(\omega_k))]}}, \ \omega \in L \\ 0, \ \omega \notin L, \end{cases} \tag{19}$$

а соответствующая ей однородная задача

$$\Phi_1^+(\omega) = \left(\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^{-n} \cdot \Phi_1^-(\omega). \tag{20}$$

имеет лишь нулевое решение [16, с. 433], а неоднородная задача (18) разрешима однозначно, если выполнены n условий разрешимости:

$$\int_{a(\omega_k)}^{b(\omega_k)} \frac{\ln S(\omega)}{\sqrt{(\omega - a(\omega_k))(\omega - b(\omega_k))}} \cdot \omega^{k-1} \cdot d\omega = 0, \tag{21}$$

которые с физической точки зрения означают, что электромагнитное поле, выраженное ограниченной функцией *E(t),* может создать спектр, задаваемый функцией $S(\omega)$ на каждом интервале $(a(\omega_k); b(\omega_k))$.

Решение задачи (18) при выполнении условий (21) в односторонних интегралах Фурье запишется в виде:

$$\Phi_1^+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx, \tag{22}$$

$$\Phi_1^-(\omega) = \left(\frac{\omega - i}{\omega + i}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx\right), \tag{23}$$

Здесь функция $r(x)$ является оригиналом Фурье преобразования функции $R(\omega)$ и запишется в виде:

$$r(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty R(x) \cdot e^{-ixw} \cdot d\omega. \tag{24}$$

Принимая во внимание замену (13) и вводя функции

$$\chi^+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx, \tag{25}$$

$$\chi^-(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx, \tag{26}$$

для которых справедливо равенство Сохоцкого [16, с. 37]

$$\chi^{+}(\omega) - \chi^{-}(\omega) = R(\omega), \tag{27}$$

найдём решение задачи (8), (9) при нечётном (чётном) отображении $E(t)$ на отрицательную ось соответственно:

$$\Phi^{+}(\omega) = e^{L^{+}(\omega)}, \tag{28}$$

$$\Phi^{-}(\omega) = \pm e^{L^{-}(\omega)}, \tag{29}$$

где минус в (29) после знака равенства соответствует чётному отображению,

$$L^{\pm}(\omega) = \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{n}\left[(\omega - a(\omega_k))(\omega - b(\omega_k))\right]}}{(\omega + i)^n} \cdot \chi^{\pm}(\omega) .30)$$

Согласно равенствам (2), (4), (28), (29) полное Фурье-преобразование электромагнитного поля $E(t)$ при нечетном отображении на отрицательную полуось запишется в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E_1(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt = \Phi^{+}(\omega) - \Phi^{-}(\omega) = e^{L^{+}(\omega)} + e^{L^{-}(\omega)} = K(\omega); \tag{30}$$

при чётном отображении, учитывая равенства (2), (5), (28), (29), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E_2(t)\cdot e^{i\omega t}\cdot dt = \Phi^{+}(\omega) - \Phi^{-}(\omega) = e^{L^{+}(\omega)} + e^{L^{-}(\omega)} = P(\omega). \tag{31}$$

Из равенств (30), (31) найдём обратные Фурье-преобразования:

$$E_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot d\omega, \tag{32}$$

$$E_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega)\cdot e^{-i\omega t}\cdot d\omega. \tag{33}$$

В равенстве (33), учитывая ранее принятые предположения, для всех неотрицательных t необходимо выбрать действительную нечётную составляющую функции $E_1(t)$, а в выражении (33) для функции $E_2(t)$ необходимо для всех неотрицательных t взять действительную чётную составляющую. Тогда отыскиваемое электромагнитное поле $E(t)$ при заданной функции спектра $S(\omega)$ на интервалах $(a(\omega_k); b(\omega_k))$ и выполнении условий (21) определится равенством

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t). \tag{35}$$

Таким образом, если функция спектра $S(\omega)$, имеющая конечное число нулей на частотном промежутке, удовлетворяет условию Гёльдера и выполняются n (число нулей) условий разрешимости, то по заданной функции спектра $S(\omega)$ определяется функция $E(t)$ электромагнитного поля, создавшая данный спектр.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Изд. 2-е перераб. М. : Гостехиздат, 1948. 364 с.
2. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М. : Наука, 1983. 304 с.
3. Тернов И.М. Синхротронное излучение // УФН. 1995. Т. 165, № 4. С. 429–456.
4. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М. : Наука. 1975. 415 с.
5. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учётом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. 2-е перераб. и доп. М. : Наука. 1979. 432 с.
6. Алфёров Д.Ф., Башмаков Ю.А., Бессонов Е.Г. Ондуляторное излучение // Труды ФИАН. 1975. № 80. С. 100–124.
7. Никитин М.М., Медведев А.Ф., Моисеев М.Б. Интерференция синхротронного излучения // Письма в журнал технической физики. 1979. Т. 5, вып. 14. С. 843–848.
8. Тернов И.М., Халилов В.Р., Багров В.Г. Излучение систем с релятивистскими электронами // Известия высших учебных заведений. Физика. 1980. Т. 23, № 2. С. 5–31.
9. Никитин М.М., Эпп В.Я. Влияние параметров электронного пучка на свойства ондуляторного излучения // Журнал технической физики. 1976. Т. 46, № 11. С. 2386–2391.
10. Медведев А.Ф., Никитин М.М., Эпп В.Я. Экспериментальное исследование свойств ондуляторного излучения релятивистских электронов // Письма в журнал технической физики. 1979. Т. 5, № 13. С. 795–801.
11. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Radiation Emitted by Relativistic Particles in Periodic Structures // JETP. 1973. V. 36, No. 6. P. 1120–1124.
12. Моисеев М.Б., Неворотов Б. К. Формирование спектра излучения заданной формы на конечном отрезке частот. Часть 1 // Омский научный вестник. 2006. № 36. С. 71–74.
13. Моисеев М.Б., Неворотов Б.К. Формирование спектра излучения заданной формы на конечной системе отрезков частот. Часть 2 // Омский научный вестник. 2006. № 4. С. 74–76.
14. Моисеев М.Б., Неворотов Б.К. Обратная задача теории электромагнитного излучения // Омский научный вестник. 2013. № 2. С. 12–15.
15. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свёртки. М. : Наука, 1978. 296 с.
16. Гахов Ф.Д. Краевые задачи: моногр. Изд. 3-е. М. : Наука, 1977. 640 с.

AN INVERSE PROBLEM OF THE THEORY OF THE ELECTROMAGNETIC RADIATION FOR A FUNCTION SPECTRUM WITH A FINITE NUMBER OF ZEROS

M.B. Moiseev
PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: moiseevmb@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The radiation energy of an electromagnetic field in a certain frequency interval is proportional to the square of the modulus of the Fourier transform of this field. The determination of the radiation energy is a direct problem and has an independent value in solving many problems of radiation theory. It is of great interest, according to the known spectrum of the energy distribution of radiation over frequencies, to find the function of the electromagnetic field that created this spectrum, i.e. solve the inverse problem of radiation theory. In this paper, the above inverse problem is solved, namely, the function of the electromagnetic field is sought from a known function of the spectrum having a finite number of zeros on the frequency interval.

Keywords: radiation spectrum function, electromagnetic field, inverse problem of radiation theory, zeros of the spectrum function, one-sided Fourier integrals, the Riemann boundary value problem.

References

1. Landau L.D. and Lifshits E.M. Teoriya polya. Izd. 2-e pererab. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948, 364 p. (in Russian)
2. Sokolov A.A. and Ternov I.M. Relyativistskii elektron. Moscow, Nauka Publ., 1983, 304 p. (in Russian)
3. Ternov I.M. Sinkhrotronnoe izluchenie. UFN, 1995, vol. 165, no. 4, pp. 429–456. (in Russian)
4. Ginzburg V.L. Teoreticheskaya fizika i astrofizika. Moscow, Nauka Publ., 1975, 415 p. (in Russian)
5. Agranovich V.M. and Ginzburg V.L. Kristallooptika s uchetom prostranstvennoi dispersii i teoriya eksitonov. Izd. 2-e pererab. i dop. Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p. (in Russian)
6. Alferov D.F., Bashmakov Yu.A., and Bessonov E.G. Ondulyatornoe izluchenie. Trudy FIAN, 1975, no. 80, pp. 100–124. (in Russian)
7. Nikitin M.M., Medvedev A.F., and Moiseev M.B. Interferentsiya sinkhrotronnogo izlucheniya. Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki, 1979, vol. 5, iss. 14, pp. 843–848. (in Russian)
8. Ternov I.M., Khalilov V.R., Bagrov V.G. et all. Izluchenie sistem s relyativistskimi elektronami. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika, 1980, vol. 23, no. 2, pp. 5–31. (in Russian)

9. Nikitin M.M. and Epp V.Ya. Vliyanie parametrov elektronnogo puchka na svoistva ondulyatornogo izlucheniya. Zhurnal tekhnicheskoi fiziki, 1976, vol. 46, no. 11, pp. 2386–2391. (in Russian)
10. Medvedev A.F., Nikitin M.M., and Epp V.Ya. Eksperimental'noe issledovanie svoistv ondulyatornogo izlucheniya relyativistskikh elektronov. Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki, 1979, vol. 5, no. 13, pp. 795–801. (in Russian)
11. Baier V.N., Katkov V.M., and Strakhovenko V.M. Radiation Emitted by Relativistic Particles in Periodic Structures. JETP, 1973, vol. 36, no. 6, pp. 1120–1124.
12. Moiseev M.B. and Nevorotov B. K. Formirovanie spektra izlucheniya zadannoi formy na konechnom otrezke chastot. Chast' 1. Omskii nauchnyi vestnik, 2006, no. 36, pp. 71–74. (in Russian)
13. Moiseev M.B. and Nevorotov B.K. Formirovanie spektra izlucheniya zadannoi formy na konechnoi sisteme otrezkov chastot. Chast' 2. Omskii nauchnyi vestnik, 2006, no. 4, pp. 74–76. (in Russian)
14. Moiseev M.B. and Nevorotov B.K. Obratnaya zadacha teorii elektromagnitnogo izlucheniya. Omskii nauchnyi vestnik, 2013, no. 2, pp. 12–15. (in Russian)
15. Gakhov F.D. and Cherskii Yu.I. Uravneniya tipa svertki. Moscow, Nauka Publ., 1978, 296 p. (in Russian)
16. Gakhov F.D. Kraevye zadachi: monogr. Izd. 3-e. Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 02.10.2020