

ISSN 2222-8772

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ

№ 3(55)
2020



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
СТРУКТУРЫ
И
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

№ 3(55)

Омск
2020

Редакционная коллегия

А. К. Гуц	главный редактор, председатель редакционной коллегии, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
Д. Н. Лавров	зам. глав. редактора, канд. техн. наук, доцент, проректор по информационным технологиям, зав. каф. компьютерных технологий и сетей, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
Н. Ф. Богаченко	технический редактор, зам. глав. редактора, канд. физ.-мат. наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
В. П. Голубятников	доктор физ.-мат. наук, профессор Новосибирского государственного университета, главный научный сотрудник Института математики СО РАН, г. Новосибирск.
С. И. Горлов	доктор физ.-мат. наук, профессор, ректор Нижневартковского государственного университета.
А. Г. Гринь	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
В. А. Еровенко	доктор физ.-мат. наук, профессор, кафедра общей математики и информатики, Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь.
B. Zilber	Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Logic, Mathematical Institute, University of Oxford, UK.
А. Н. Кабанов	канд. физ.-мат. наук, кафедра кибернетики, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского.
А. В. Копыльцов	доктор техн. наук, профессор, кафедра информационных систем, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина).
А. Г. Коробейников	доктор техн. наук, профессор, зам. директора по науке Санкт-Петербургского филиала Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН.
П. А. Корчагин	доктор техн. наук, профессор, проректор по научной работе, Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), г. Омск.
V. Kreinovich	Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, Computer Science Department, University of Texas at El Paso, Texas, USA.
В. А. Плетюхов	доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина, г. Брест, Республика Беларусь.
Л. Б. Соколинский	доктор физ.-мат. наук, профессор, проректор по информатизации, зав. кафедрой системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), г. Челябинск.
A. A. Fedorenko	Ph.D. (Phys.-Math.), Researcher (CR1) at the French National Centre of Scientific Research (CNRS) Laboratoire de Physique de l'ENS-Lyon, France.
А. Н. Фирсов	доктор техн. наук, профессор, Высшая школа киберфизических систем и управления, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.
A. Jadczyk	Ph.D., Professor, Researcher, Laboratoire de Physique, Universite de Toulouse III et CNRS, France.

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Омский государственный университет
им. Ф. М. Достоевского».
Свидетельство о регистрации средства
массовой информации ПИ № ФС77-72200
от 15 января 2018 г. выдано Роскомнадзором.

Адрес редакции, издателя и типографии

644077, Омская обл., г. Омск,
пр-т Мира, д. 55а.

Дата выхода в свет: 30.12.2020.

Тираж 60 экз.

Свободная цена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Журнал основан в 1998 году. В журнале публикуются статьи, в которых излагаются результаты исследований по фундаментальной и прикладной математике, теоретической физике, компьютерным наукам, философии и истории математики и информатики, а также размышления, касающиеся окружающей нас природы и общества. Объекты исследования должны быть представлены в форме некоторых математических структур и моделей.

Все статьи журнала проходят обязательное рецензирование. Рефераты статей журнала опубликованы в «Реферативном журнале» и «Mathematical Reviews» (США). Журнал индексируется в РИНЦ (elibrary.ru) и «Zentralblatt für Mathematik» (Германия). Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание учёных степеней (Приказ Минобрнауки России от 25 июля 2014 г. № 793).

Все статьи в журнале публикуются под лицензией Attribution 4.0 International (CC-BY).

Электронная версия журнала представлена в сети:

<http://msm.univer.omsk.su>
<http://msm.omsu.ru>

Подписной индекс по каталогу «Пресса России»: 94082

Электронная почта главного редактора:

guts@omsu.ru

Электронная почта выпускающего редактора:

lavrov@omsu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Фундаментальная математика и физика

А.К. Гуц. *Моделирование распада пространства на «атомы пространства»* 4

А.К. Гуц. *Частицы-призраки, сцепленность исторических эпох и машина времени* 12

М.Б. Моисеев. *Обратная задача теории электромагнитного излучения для функции спектра с конечным числом нулей* 22

М.М. Чернявский. *Сравнительный анализ критериев устойчивости полиномов* 31

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Lexicographic-Type Extension of Min-Max Logic Is Not Uniquely Determined* 55

Прикладная математика и моделирование

А.Г. Обухов. *Расчёт скоростных характеристик восходящего закрученного потока газа в условиях бокового ветрового воздействия* ... 61

Компьютерные науки

Д.М. Белозеров, А.К. Гуц. *Программная Web-реализация ДСМ-метода автоматического порождения гипотез, основанного на индуктивной логике* 72

Е.А. Тюменцев, Т.В. Мелешенко. *Алгоритм распознавания текстовых команд построения произвольной формы ввода данных* 103

Т.А. Дейнеко, Д.А. Бобров. *Чат-бот ВКонтакте «Расписание занятий ОмГУ»* 117

Проблемы образования

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Advice to New Instructors: Systems Approach* 123

О. Kosheleva, V. Kreinovich. *Online Teaching — Systems Approach: Questions and Answers* 127

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПАДА ПРОСТРАНСТВА НА «АТОМЫ ПРОСТРАНСТВА»

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье показано, каким образом можно математически описать процесс распада пространства на бесконечное число несвязных кусков, которое может произойти при полной потере сцепленности (запутанности) частей бесконечно удалённой границы в рамках AdS/CFT -соответствия.

Ключевые слова: пространство, возникающее пространство, AdS/CFT -соответствие, пространство и запутанность подсистем.

В последние годы стало популярным воззрение, что пространство — это возникающая сущность из некоторого фундаментального объекта (см. обзор [1]).

Структура пространства, например топология или метрика, в математике вводится на некоторой *подложке*, каковой в общей теории относительности (ОТО) является канторовское множество. Элементы этого множества, представляемые в форме «точки», трактуются как события, которые произошли в каком-то месте и в какое-то время.

Но возможны и другие, более абстрактные, подложки. В матричных моделях физическое пространство-время эффективно возникает из набора матриц, а не задаётся в качестве априорного многообразия. Это эффективное описание пространства-времени часто называется некоторыми авторами возникающим пространством-временем.

Таким образом, отметим, что и под возникновением пространства понимается нечто более *изощённо-утончённое*:

Я почти уверен, что пространство и время являются иллюзиями. Эти примитивные понятия будут замещены чем-то более утончённым (Nathan Seiberg).

Процитированный Зейберг считает, что пространство и время не должны присутствовать в исходной формулировке фундаментальной физической теории, а появляются только как макроскопическое приближение [2].

Более определённо высказывается Роберт Дейкгрофф [3]:

Пространство и время не являются основой наших рассуждений. Напротив, пространство и время сами появляются в результате этих рассуждений. За этими рассуждениями скрывается нечто более фундаментальное.

В высказываниях Зейберта и Дейкгроффа видится желание не только отказаться в фундаментальности структуре пространства, но и отказаться от фундаментальности подложки, на которой реализуются структура пространства. Подложка должна *возникнуть* (to emerge) из чего-то *иного*. Следует поэтому обратить внимание на работу [4], авторы которой заявляют, что пространство-время — это явление, возникшее в предшествующей особой субквантовой среде, и что сцепленность (запутанность) и туннельный эффект могут быть объяснены в терминах нелинейной связи между пространством и временем, обязанной субквантовым волнам.

В философии Гегеля Мир возникает по логике (а не во времени) из Ничего, которое есть чистое Бытие, и это чистое Бытие и есть подложка пространства, а значит и пространства-времени, которая в *конкретном* Бытии может быть и «Иным» [5, с. 139–140]. Другими словами, в рассуждениях о нефундаментальности пространства и времени скрывается поиск адекватного математического описания акта, который мы называем рождением Мира. Все существующие подходы неудовлетворительны в силу того, что они отрывают материю от духа (сознания). Неудовлетворенность современными физическими теориями выросла до неудовлетворенности самим постулатом о фундаментальности пространства и времени.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы дать математическую модель возникающей подложки пространства, а значит и возникающей подложки пространства-времени, на которых легко обнаруживаются топология и геометрия, отождествляемые нами с реальным пространством и пространством-временем. Причём факты возникновения (и исчезновения) пространства мы ассоциируем с аналогичными фактами возникновения и исчезновения пространства, обязанными сцепленности частей удаленной границы балка в рамках *AdS/CFT*-соответствия.

Мы покажем каким образом можно математически смоделировать распад пространства на бесконечное число несвязных друг с другом кусочков, т. е. на «атомы пространства». В какой-то мере этот процесс отвечает полной потере сцепленности (запутанности) частей бесконечно удалённой конформной границы пространства (балка) в теории голографической вселенной [6].

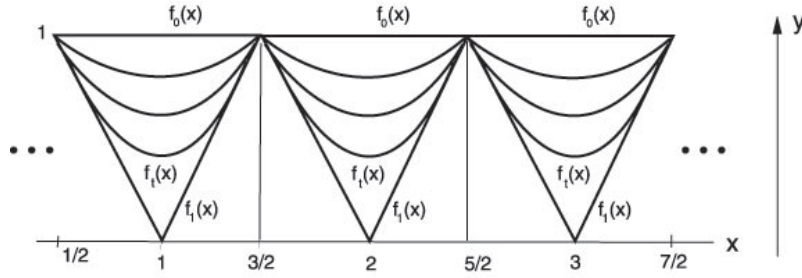
1. «Исчезновение» прямой

Для начала разорвём прямую $\mathbb{R}$ на счетное число отрезков.

На отрезке $[0, 1]$ определим параметрическое семейство функций $f_t(x)$, $t \in [0, 1]$, такое, что для любого $x \in [1/2, 3/2]$

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = 2|x - 1|,$$

а при $t \in (0, 1)$ семейство функций f_t представляет непрерывную деформацию функции f_0 в функцию f_1 , причём все $f_t(x)$ ($t < 1$) непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого в точке $x = 1$, является $f_1(x)$ (см. рис. 1). Более того, для

Рис. 1. Семейство $f_t(x)$.

любого t

$$f_t(0) = f_t(1) = 1.$$

Построенные функции f_t продолжим на всю прямую $\mathbb{R}$ (см. рис.1).

Две точки $a, b \in \mathbb{R}$ назовём t -эквивалентными тогда и только тогда, когда $a = b = k/2$, k — целое число.

Если этот случай не имеет места, то $a, b \in \mathbb{R}$ назовём t -эквивалентны, если

1) $a = b$;

2) $f_t(a) = f_t(b)$;

3) $\lim_{x \rightarrow a-0} f'_t(x) = \lim_{x \rightarrow b+0} f'_t(x)$.

Профакторизуем пространство $\mathbb{R}$ по введённому отношению эквивалентности $\sim_t$. Получаем фактор-пространство $\Gamma_t = \mathbb{R}/\sim_t$.

Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство Γ_t при $t < 1$ гомеоморфно отрезку $\mathbb{R}$, а при $t = 1$ — несвязному пространству

$$\dots \cup [-2, -1] \cup [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \dots$$

Другими словами, прямая распалась на счетное объединение непересекающихся отрезков, т. е. на «атомы пространства».

Удобно последнее несвязное пространство обозначить как

$$\Gamma_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k_+, (k+1)_-].$$

Итак, мы определили семейство топологических пространств $\{\langle \Gamma_t, \mathcal{T}_t \rangle\}$, где $\mathcal{T}_t$ — рассмотренная фактор-топология на Γ_t . При этом если $t \neq 1$, то $\Gamma_t \approx [0, 1]$, а $\Gamma_1 = [0, (1/2)_-] \cup [(1/2)_+, 1]$, и справедливы соотношения $[0, (1/2)_-] \approx [0, 1]$ и $[(1/2)_+, 1] \approx [0, 1]$. Таким образом, мы рассмотрели разрыв отрезка на два с топологической точки зрения.

2. «Исчезновение» плоскости

Для описания изменения топологии плоскости $\mathbb{R}^2$, ведущей к потере связности и распада плоскости на квадраты с целочисленными координатами вершин

(k, m) , $k, m \in \mathbb{Z}$ квадратов, по аналогии с предыдущим параграфом вводим семейство функций

$$z = f_t(x, y),$$

причём при $t < 1$

$$f_t(x, y) \in C^\infty,$$

$$f_0(x, y) \equiv 1,$$

$$0 < f_t(x, y) \leq 1, \quad f_t(k/2, m/2) = 1, \quad f_t(x, y) > f_{t'}(x, y) \quad (t < t'), \quad f_1(x, y) < f_t(x, y)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} f_t(x, y) = f_1(x, y),$$

и функция $f_1(x, y)$ показана на рис.2.

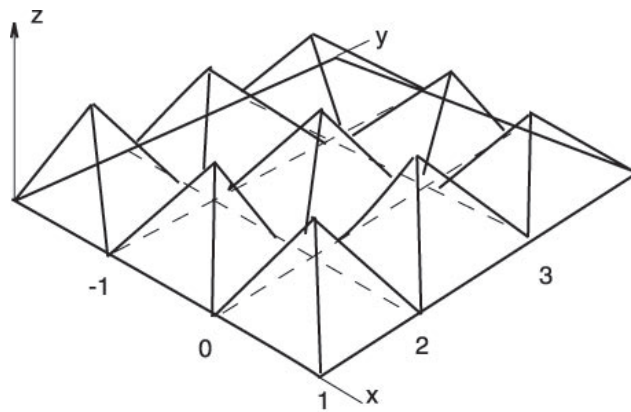


Рис. 2. Функция $f_1(x, y)$.

Мы видим, что функция $f_1(x, y)$ теряет гладкость на прямых $x = k$ и $y = m$, по которым будем разрывать плоскость.

Точки (a, b) и (c, d) считаем эквивалентными, если $a = c = k/2$ и $b = d = m/2$.

Если этот случай не имеет места, то $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ назовём t -эквивалентными, если

- 1) $a = b, c = d$;
- 2) $f_t(a, b) = f_t(c, d)$;
- 3)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ y \rightarrow b-0}} \frac{\partial f_t}{\partial x}(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow c+0 \\ y \rightarrow d+0}} \frac{\partial f_t}{\partial x}(x, y),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ y \rightarrow b-0}} \frac{\partial f_t}{\partial y}(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow c+0 \\ y \rightarrow d+0}} \frac{\partial f_t}{\partial y}(x, y).$$

Профакторизуем пространство $\mathbb{R}^2$ по введенному отношению эквивалентности $\sim_t$. Получаем фактор-пространство $\Gamma_t = \mathbb{R}^2 / \sim_t$.

Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство Γ_t при $t < 1$ гомеоморфно плоскости $\mathbb{R}^2$, а при $t = 1$ — несвязному пространству, состоящему из счётного числа компонент связности S_α , каждая из которых гомеоморфна квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$.

Другими словами, плоскость распалась на счётное объединение непересекающихся квадратов, т. е. на «атомы пространства» $S_\alpha = [k_+, (k+1)_-]$, $k \in Z$:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma_1 = \bigcup_{\alpha \in Z} S_\alpha.$$

3. «Исчезновение» сферы S^2

Нетрудно понять, что **подобным же образом можно устроить распад сферы S^2 вдоль меридианов и параллелей.**

4. «Исчезновение» пространства

Для описания изменения топологии плоскости $\mathbb{R}^3$, ведущей к потере связности и распаду плоскости на квадраты с целочисленными координатами вершин (k, m, n) , $k, m, n \in Z$ кубов, по аналогии с предыдущим параграфом вводим семейство функций

$$u = f_t(x, y, z),$$

причём при $t < 1$

$$f_t(x, y, z) \in C^\infty,$$

$$f_0(x, y, z) \equiv 1,$$

$$0 < f_t(x, y, z) \leq 1, \quad f_t(k/3, m/2, n/2) = 1,$$

$$f_t(x, y, z) > f_{t'}(x, y, z) \quad (t < t'), \quad f_1(x, y, z) < f_t(x, y, z)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} f_t(x, y, z) = f_1(x, y, z)$$

и функция $u = f_1(x, y, z)$ строится по аналогии с предыдущими функциями $f_1(x)$ $f_1(x, y)$. Но показать её затруднительно, поскольку её график выходит в 4-е измерение u . Функция $f_1(x, y, z)$ теряет гладкость на плоскостях $x = k$, $y = m$ и $z = n$, по которым будем разрывать пространство на кубы.

Точки (a, b, v) и (c, d, w) считаем эквивалентными, если $a = c = k/2$ и $b = d = m/2$ и $v = w = n/2$.

Если этот случай не имеет места, то $(a, b, v), (c, d, w) \in \mathbb{R}^3$ назовем t -эквивалентными, если

- 1) $a = b, c = d, v = w$;
- 2) $f_t(a, b, v) = f_t(c, d, w)$;
- 3)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ y \rightarrow b-0 \\ z \rightarrow v-0}} \frac{\partial f_t}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{\substack{x \rightarrow c+0 \\ y \rightarrow d+0 \\ z \rightarrow w+0}} \frac{\partial f_t}{\partial x}(x, y, z),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ y \rightarrow b-0 \\ z \rightarrow w-0}} \frac{\partial f_t}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{\substack{x \rightarrow c+0 \\ y \rightarrow d+0 \\ z \rightarrow w+0}} \frac{\partial f_t}{\partial y}(x, y, z),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a-0 \\ y \rightarrow b-0 \\ z \rightarrow v-0}} \frac{\partial f_t}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{\substack{x \rightarrow c+0 \\ y \rightarrow d \\ z \rightarrow w+0}} \frac{\partial f_t}{\partial z}(x, y, z).$$

Профакторизуем пространство $\mathbb{R}^3$ по введённому отношению эквивалентности $\sim_t$. Получаем фактор-пространство $\Gamma_t = \mathbb{R}/\sim_t$.

Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство Γ_t при $t < 1$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^3$, а при $t = 1$ — несвязному пространству, состоящему из счётного числа компонент связности Q_α , каждая из которых гомеоморфна кубу $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Другими словами, плоскость распалась на счётное объединение непересекающихся кубов, т. е. на «атомы пространства» Q_α :

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \Gamma_1 = \bigcup_{\alpha \in Z} Q_\alpha.$$

Непрерывно деформируя плоскости $x = k$, $y = m$ и $z = n$, мы можем привести ситуацию к разрыву пространства на деформированные кубы разной формы и размера.

Эти деформированные кубы и есть «атомы пространства», образующие подложку пространства в том случае, когда на бесконечно удалённой 2-мерной границе пространства полностью отсутствует какая-либо сцепленность (запутанность) её частей, и на которой в соответствии с голографическим принципом кодируются не только топологические метаморфозы потери связности, но и сопутствующие им геометрические процессы бесконечного удаления друг от друга компонент связности в распадающемся пространстве в ходе изменения метрики пространства:

$$g_{\alpha\beta}(x, y, z) = \frac{1}{[f_0(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{[f_{t'}(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{[f_t(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{[f_1(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z),$$

$$0 \leq t' < t < 1,$$

где $g_{\alpha\beta}$ — исходная метрика пространства.

Поскольку $f_1(k, m, n)^2 = 0$, то расстояние между кубами стремится к $+\infty$ при $t \rightarrow 1$, как и должно быть при ослаблении сцепленности.

Множество Γ_1 — это нечто более фундаментальное, чем пространство.

Действительно, ведь можно склеить кубы в точки, и тогда пространство распадается на элементарные геометрические объекты — точки, т. е. имеем переход

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1^\circ.$$

Фактически мы имеем дело с Ничем, или с чистым Бытием Гегеля. Это чистое Бытие, моделируемое нами как Γ_1 или Γ_1° , и есть подложка пространства, которая в конкретном Бытии может быть и «Иным».

5. «Исчезновение» сферы S^3

Также как и в случае двумерной сферы, используя модель распада пространства $\mathbb{R}^3$, можно **подобным же образом устроить распад сферы S^3** .

6. Возникновение пространства

Обратный процесс

$$\Gamma_1^\circ \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_t \rightarrow \Gamma_{t'}, \quad 0 \leq t' < t < 1, \quad (1)$$

на топологическом уровне означает склеивание кубов в единое пространство в результате процесса запутывания областей на границе, т. е. из атомов пространства возникает полное пространство – подложка под структуру, т. е. под оснащение топологией и геометрией. На геометрическом уровне имеем деформацию 3-метрики:

$$\begin{aligned} \frac{1}{[f_1(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) &\rightarrow \frac{1}{[f_t(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) \rightarrow \frac{1}{[f_{t'}(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{[f_0(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) = g_{\alpha\beta}(x, y, z), \quad 0 \leq t' < t < 1, \end{aligned}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — исходная метрика пространства.

Следовательно, бесконечное расстояние между кубами=«атомами пространства» при $t \rightarrow 0$ становится конечным, как и должно быть при усилении сцепленности.

Возникновение пространства из «Ничего» — это одновременно и возникновение пространства-времени с метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{1}{[f_t(x, y, z)]^2} g_{\alpha\beta}(x, y, z) dx^\alpha dx^\beta.$$

Здесь параметр t — это фактор осознания Мира людьми, т. е. это время, возникающее при гегелевском логическом переходе (1) из чистого бытия Мира к его конкретному бытию; из «Ничего» к «Нечто» [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Теории пространства-времени // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 4. С. 23–47.
2. Seiberg N. Emergent Spacetime. URL: <http://arXiv:hep-th/0601234v1> (дата обращения: 01.10.2020).
3. Дейкгрофф Р. Конец пространства и времени. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=-B0PIWml9uw> (дата обращения: 01.10.2020).
4. Castro P., Gatta M., Croca J.R., Moreira R. Spacetime as an Emergent Phenomenon: A Possible Way to Explain Entanglement and the Tunnel Effect // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018. V. 6. P. 2107–2118. URL: <http://www.scirp.org/journal/jamp> (дата обращения: 01.10.2020).

5. Гегель Г.В.Ф. Наука логики: в 3 т. Т. 2. М. : Мысль, 1972.
6. Van Raamsdonk M. Building up spacetime with quantum entanglement. URL: <https://arxiv.org/pdf/1005.3035v1.pdf> (дата обращения: 01.10.2020).

MODELING OF THE SPACE DECAY INTO "ATOMS OF SPACE"

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The article shows how you can mathematically describe the process of decay of space into an infinite number of disconnected pieces that can occur with a complete loss of entanglement parts of the infinitely distant boundary within the *AdS/CFT*-duality.

Keywords: space, emergent space, *AdS/CFT*-duality, space and entanglement of subsystems.

REFERENCES

1. Guts A.K. Teorii prostranstva-vremeni. Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeistviya, 2019, no. 4, pp. 23-47. (in Russian)
2. Seiberg N. Emergent Spacetime. URL: <http://arXiv:hep-th/0601234v1>.
3. Deikgroff R. Konets prostranstva i vremeni. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=-B0PIWml9uw>. (in Russian)
4. Castro P., Gatta M., Croca J.R., and Moreira R. Spacetime as an Emergent Phenomenon: A Possible Way to Explain Entanglement and the Tunnel Effect. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2018, vol. 6, pp. 2107-2118. URL: <http://www.scirp.org/journal/jamp>.
5. Gegel' G.V.F. Nauka logiki: v 3 t. Vol. 2, Moscow, Mysl' Publ., 1972. (in Russian)
6. Van Raamsdonk M. Building up spacetime with quantum entanglement. URL: <https://arxiv.org/pdf/1005.3035v1.pdf>.

Дата поступления в редакцию: 11.10.2020

ЧАСТИЦЫ-ПРИЗРАКИ, СЦЕПЛЕННОСТЬ ИСТОРИЧЕСКИХ ЭПОХ И МАШИНА ВРЕМЕНИ

А.К. Гуц

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье изучается возможность создания машины времени, основанной на механизме квантового сцепления макроскопических обычных (много)частичных конфигураций и (много)частично-призрачных конфигураций различных исторических эпох, принадлежащих различным параллельным эвереттовским вселенным.

Ключевые слова: Машина времени, частицы-призраки, сцепленность исторических эпох, параллельные вселенные.

Введение

Дойч в книге «Структура реальности» [1] частицы во вселенной, параллельной нашей Вселенной в смысле эвереттовской интерпретации квантовой механики, называл *теневыми*.

Е.В. Палешева в статье [2] связала теневые частицы параллельной вселенной с *частицами-призраками* нашей Вселенной. Она также подтвердила мысль Дойча, что теневые частицы, т. е. частицы-призраки могут слабо взаимодействовать с обычными частицами нашей Вселенной посредством квантовой интерференции.

В статьях [3,4] мы предложили связывать пространственно-временные траектории, появляющиеся в геометродинамике Уилера–ДеВитта с реально существующими параллельными историческими эпохами, которые представляют собой различные временные эпохи человеческой цивилизации. Переход от одной эпохи к другой, осуществляемый посредством запуска особого аппарата, называемого машиной времени, реализовался благодаря механизму квантового сцепления (запутывания) компактных пространственно-временных областей различных исторических эпох. Однако в этой статье не говорилось, как происходит это сцепление.

В данной статье предлагается рассмотреть в качестве такого механизма сцепление макроскопических обычных (много)частичных конфигураций и (много)частично-призрачных конфигураций. Последние в силу идеи Е.В. Палешевой и есть конфигурации из параллельной вселенной.

1. Частицы-призраки

Частица-призрак — это частица, тензор момента-импульса которой является нулевым, но при этом ненулевым является её ток, который в случае биспинора равен

$$j^i = \psi^+ \gamma^i \psi.$$

Следовательно, такая частица не несет ни энергии, ни импульса.

Такие неабелевы решения уравнений Янга–Миллса были найдены Лоосом в 1967 году [5]. Напомним, что кванты полей Янга–Миллса являются векторными частицами (то есть бозонами со спином 1) и обладают нулевой массой. Однако с помощью механизма спонтанного нарушения симметрии физические поля Янга–Миллса могут приобретать ненулевую массу. При рассмотрении слабого взаимодействия квантом поля Янга–Миллса считают W -частицу, имеющую заряд $+1$, 0 или -1 . Для сильного взаимодействия квантом поля Янга–Миллса являются глюоны, удерживающие вместе протоны и нейтроны.

В случае частиц, распространяющихся во внешнем пространстве, частицы-призраки были открыты в 1974 году Гриффитсом [6], а затем соответствующие решения уравнений Эйнштейна–Дирака были найдены и опубликованы в работах [7, 8, 10–19, 21, 22] 1970-80-х годов XX века, и уже в XXI веке — [23–29]. Нейтрино-призраки и массивные призраки-биспиноры найдены во вселенных Робинсона–Уолкера, т. е. во вселенных Фридмана [29]. «Что самое интересное в решениях-призраках — это то, как нейтринное поле распространяется в фоновом пространстве-времени, не меняя его, что означает, что мы не можем обнаружить призрачные нейтрино по их гравитационным эффектам» [24].

«Первой реакцией, пишет М. Новелло в статье "Призрачная основа для нейтрино" (1974), — на эти решения может быть отказ от них на физических основаниях. Однако тот факт, что они, по-видимому, присутствуют в любой геометрии¹, делает целесообразным менее поверхностное их исследование. Чтобы иметь возможность изучить некоторые детали этих призраков, мы должны найти не только одно, но и класс этих решений в данной геометрии». И он обнаруживает удивительный результат: приводит пример пространства-времени, порождённого нейтрино, причём само это нейтрино есть линейная комбинация нейтрино-призраков [11].

Однако до работы Е.В. Палешевой никто не дал хоть какой-нибудь интерпретации частицам-призракам.

Объединяя результаты Палешевой и Новелло, можно высказать следующую гипотезу.

Вселенная, наше присутствие в которой мы осознаем, состоит из реальных частиц, т. е. частиц с ненулевым тензором энергии-импульса. Частицы-призраки — это гости из параллельных вселенных. Но параллельных вселенных бесконечно много; все они симметричны относительно нашего анализа (нет

¹ В [12] утверждается, что призрачные нейтрино (описываемые общековариантным уравнением Вейля $\varphi^A_{||A\dot{X}} = 0$) существуют только в алгебраически специальных пространствах-времени с вектором потока нейтрино, параллельным одному из основных нулевых векторов конформного тензора.

выделенной «нашей» Вселенной), следовательно, могут существовать только частицы-призраки. Энергия и импульс придаются частице из конкретной рассматриваемой, т. е. зафиксированной чьим-то сознанием, вселенной, если, с точки зрения математики, она есть линейная комбинация частиц-призраков. Но для разложения частицы в линейную комбинацию требуется некий механизм, присутствующий во вселенной, который осуществляет и подтверждает факт разложения. Очевидно, что это тот же механизм, который фиксировал конкретную вселенную. И механизм этот есть сознание, есть наблюдатель, присутствующий, живущий в этой вселенной.

Сознание своим вниманием к окружающей его вселенной совершает акт творения, выражающийся в порождении линейных комбинаций частиц-призраков: от хаоса частиц-призраков к порядку=«линейным комбинациям», от простого к сложному.

Важно: Палешева показала, что частицы-призраки, т. е. частицы параллельной вселенной, взаимодействуют с нашими частицами и это взаимодействие проявляется в форме квантовой интерференции.

Однако возможно иное взаимодействие частиц нашей Вселенной и параллельной. Это квантовая сцепленность (запутанность). Опишем это *несиловое* взаимодействие частиц разных вселенных.

2. Примеры частиц-призраков

Рассмотрим спинорные частицы, описываемые уравнением Дирака:

$$i\hbar\gamma^{(k)}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - mc\psi = 0. \quad (1)$$

Тогда биспинор

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar}x^2 + f(x^0+x^3) + ig(x^0+x^3)} \quad (2)$$

является решением уравнения Дирака. Здесь $g(x^0 + x^3)$ и $f(x^0 + x^3)$ — гладкие вещественные функции.

Опираясь на результаты теоремы 12.1 из [30], получаем, что (2) описывает спинорного призрака только лишь в том случае, когда $g(x^0 + x^3) = \text{const} \in \mathbb{R}$.

Возьмём решение для реальной волны в виде:

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar}x^2 + i(x^0+x^3)}, \quad (3)$$

а для спинорного призрака положим

$$\phi(y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar} y^2}. \quad (4)$$

3. Сцепление частицы и частицы-призраки

Пусть $|\psi(\pm)\rangle_r$ и $|\phi(\pm)\rangle_g$ — состояния реальной частицы и призрака, соответствующие решениям-биспинорам $\psi(x, \pm)$ и $\phi(x, \pm)$ уравнения Дирака с разными проекциями $\pm$ спина [31].

Сцепленное состояние двух частиц в таком случае описывается кет-вектором

$$|\psi(+)\rangle_r \otimes |\phi(-)\rangle_g + |\psi(-)\rangle_r \otimes |\phi(+)\rangle_g.$$

В соответствии с утверждением **ER=EPR**, говорящим о существовании моста Эйнштейна–Розена, или 3-мерной кротовой норы, соединяющей места нахождения сцепленных (запутанных) частиц (ЭПР-пары) [32], можно сказать, что имеется 3-мерная кротовая нора, соединяющая частицу нашей Вселенной с теневой частицей, или частицей-призраком, из параллельной вселенной.

4. Как сцепить (запутать) частицы?

«Как запутать частицы: возьмите кристалл с нелинейными оптическими свойствами — то есть такой, взаимодействие света с которым зависит от интенсивности этого света. Например, триборат лития, бета-борат бария, ниобат калия. Облучите его лазером подходящей длины волны — и высокоэнергетические фотоны лазерного излучения будут иногда распадаться на пары запутанных фотонов меньшей энергии (это явление называется «спонтанным параметрическим рассеянием») и поляризованных в перпендикулярных плоскостях. Остаётся удержать запутанные частицы в целости и разнести как можно дальше друг от друга» [33].

Как видим, механизмы сцепления уже имеются. Хотя пока не те, что нам нужны.

5. Макроскопическая сцепленность

Для реализации нашей цели нам нужна макроскопическая многочастичная сцепленность. Существует ли она? Распространено мнение, что в природе макроскопическая сцепленность не возникает вне искусственно созданных ситуаций. На чем основано это мнение?

Известно, что по мере увеличения размера физических систем становится всё *труднее полностью изолировать их от окружающей среды*, а взаимодействие с окружающей средой — декогеренция — разрушает квантовые харак-

теристики, такие как суперпозиции и сцепленность, т. е., в частности, разрушается сцепленность многочастичных конфигураций из параллельных эпох.

Прелесть квантового описания объекта в том, что такой объект — это квантовый объект, представляемый когерентной суперпозицией волн, обладающей и интерференционной картиной и, возможно, сцепленностью. Но даже если макросцепленность есть, ее трудно обнаружить в макроскопическом масштабе, поскольку квантовые объекты взаимодействуют с большим числом степеней свободы, и любая неточность в исходных данных или последующее наблюдение (крупнозернистое) ведёт к декогеренции, потере согласованности между волнами, описывающими все эти степени свободы, и к исчезновению их интерференционной картины, к потере сцепленности. Следовательно, теряется то, что составляет сущность квантового описания, дающего фантастические с точки зрения классической физики возможности.

Для нашей цели — переброска макрообъекта, человека в другую эпоху — необходимо убедиться, что законы квантовой механики справедливы и для макрообъектов. Для этого *нужно обратить внимание на те из их механических степеней свободы макрообъекта, которые хорошо изолированы от окружающей среды и поэтому хорошо защищены от декогеренции*. Нужна макроскопическая квантовая механика.

Появление такой «механики стало возможным благодаря недавнему прогрессу в квантовой оптомеханике: физики смогли использовать свет (иногда микроволны) для преобразования макроскопических механических объектов в почти чистые квантовые состояния $\langle \dots \rangle$. Вскоре они смогут позволить этим механическим объектам развиваться без особой декогеренции и измерять конечные состояния, тем самым делая сравнения с предсказаниями квантовой механики» [34].

Обратим внимание на то, что мы используем понятия «макроскопический» на чисто интуитивном уровне, и это не очень правильно при научном подходе к изучаемой проблеме.

Важно предварительно определиться с тем, что считать макроскопическим объектом: «хотя квантовые системы трудно поддерживать и наблюдать в макромасштабе, их можно легко создать. С другой стороны, естественно возникает вопрос: действительно ли полученное состояние макроскопическое? На основе экспериментальных результатов мы показали, что запутанное состояние, которое можно получить с помощью доступных в настоящее время технологий, будет включать в себя достаточно большое количество фотонов, которые можно увидеть невооружённым глазом» [35]. Это делает наш подход удовлетворительным, если макроскопичность является понятием, связанным с размером. Мы также упомянули, что компоненты запутанного состояния можно легко отличить простым лавинным фотодиодом, если посмотреть на дисперсию распределения числа фотонов. Это радует тех, кто считает, что макро-запутанные состояния должны иметь компоненты, которые можно легко различить. Хотя наше исследование показало, что полученное состояние отличалось неожиданной устойчивостью к потерям, мы показали, что он также становится всё более хрупким при фазовом возмущении при увеличении его размера. Таким обра-

зом, наш подход также является удовлетворительным, если макроскопические средства чувствительны к декогеренции, и подчёркивает сложность возможных взаимодействий между данной квантовой системой и её окружением. Мы также видели, что точность измерения, необходимая для выявления квантовой природы создаваемого состояния, увеличивается с его размерами. Это также делает нашу схему удовлетворительной, если макроскопичность связана с требованием к точности измерения. В заключение отметим, что есть много других кандидатов на меру макроскопичности [36]. Тестирование каждого из них «работает на будущее» [37].

6. Сцепленность и кротовые норы

Допустим, что в ближайшее время мы научимся создавать макроскопические сцепленные многочастичные конфигурации. Но для наших целей, связанных с машиной времени, этого мало, надо сцеплять конфигурации с конфигурациями-призраками.

Что следует ожидать, если и это сумеем сделать?

Квантовое явление сцепленности тесно связано с классическим явление образования 3-мерной кротовой норы. Следовательно, сцепленность в пространстве породит 3-мерную кротовую нору или 4-мерную кротовую нору между параллельными вселенными, между различными историческими эпохами. Переходы по такой кротовой норе – это и есть квантовая машина времени [3, 4].

Однако, поскольку 3-мерные кротовые норы неустойчивы, то следует думать о порождении 4-мерных кротовых нор [41]. Последнее, скорее всего, говорит о сцепленности во времени [42] (Time Entanglement), т. е. формула **EPR=ER** заменяется на формулу **EPR=TE**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дойч Д. Структура реальности. Москва-Ижевск : РХД, 2001.
2. Palesheva E.V. Ghost spinors, shadow electrons and the Deutsch Multiverse. *arXiv: gr-qc/0108017v2* (2001).
3. Гуц А.К. Временные эффекты коллапса волнового пакета в суперпространстве Уилера // Международный научный семинар «Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии» GRACOS-16. Лекции школы и материалы семинара (5–7 ноября 2016 г., Казань). Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2016. С. 273–280.
4. Гуц А.К. Квантовая машина времени // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 3. С. 20–44.
5. Loos H.G. Free Ghost Gauge Fields // *Nuovo cimento*. 1967. V. LII A, No. 4. P. 1085–1091.
6. Griffiths J.B. Gravitational radiation and neutrinos // *Communications in Mathematical Physics*. 1972. V. 28. P. 295–299.
7. Davis T.M., Ray J.R. Ghost neutrinos in general relativity // *Physical Review D*. 1974. V. 9, Iss. 2. P. 331–333.

8. Davis T.M., Ray J.R. Ghost neutrinos in plane-symmetric spacetimes // Journal of Mathematical Physics. 1975. V. 16. P. 75.
9. Ghost neutrinos emerge from mathematics // Nature. 1974. V. 248. P. 471–472.
10. Letelier P.S. Ghost neutrons in the Einstein-Cartan theory of gravitation // Physics Letters A. 1975. V. 54, Iss. 5. P. 351–352
11. Novello M. Ghost basis for neutrino // Physics Letters A. 1976. V. 58, Iss. 2. P. 75–76.
12. Audretsch J. Ghost neutrinos as test fields in curved space-time I // Physics Letters A. 1976. V. 56, Iss. 1. P. 15–16.
13. Davis T.M., Ray J.R. Neutrinos and Bianchi I universes // Journal of Mathematical Physics 17, 1049 (1976).
14. Griffiths J.B. On the propagation of photons and neutrinos in curved space-time // General Relativity and Gravitation. 1977. V. 8. P. 365–370.
15. Гуц А.К. Новое решение уравнений Эйнштейна-Дирака // Известия вузов. Физика. 1979. № 8. С. 91–95.
16. Michalik T.R., Melvin M. A. Spatially homogeneous neutrino cosmologies // Journal of Mathematical Physics. 1980. V. 21. P. 1952–1964.
17. Griffiths J.B. Ghost neutrinos in Einstein–Cartan theory // Phys. Lett. 1980. A75. P. 441–442.
18. Dereli T., Tucker R.W. Exact neutrino solutions in the presence of torsion // Physics Letters A. 1981. V. 82, Iss. 5. P. 229–231.
19. Demakis A., Müller-Hoissena F. Massive ghost Dirac fields in Einstein-Cartan theory // Physics Letters A. 1982. V. 92, Iss. 9. P. 431–432.
20. Demakis A., Müller-Hoissena F. Solutions of the Einstein-Cartan-Dirac equations with vanishing energy-momentum tensor // Journal of Mathematical Physics. 1985. V. 26. P. 1040–1048.
21. Torres del Castillo G.F.. Wavelike solutions to the Einstein equations coupled to neutrino and gauge fields // Journal of Mathematical Physics. 1986. V. 27. P. 2756.
22. Torres del Castillo G.F. Ghost Neutrino Fields in Flat Space-Time // General Relativity and Gravitation. 1987. V. 19, No. 7. P. 699–705.
23. Garcia de Andrade L.C.. Ghost neutrinos and radiative Kerr metric in Einstein-Cartan gravity. [arXiv:gr-qc/0204084v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0204084v1) (2002).
24. Muxin Han, Yapeng Hu, Hongbao Zhang. Exhaustive Ghost Solutions to Einstein-Weyl Equations for Two Dimensional Spacetimes. 2004. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0409019v2> (дата обращения: 10.09.2020).
25. Davis T.M., Ray J.R. Neutrinos and Bianchi I universes // Journal of Mathematical Physics. 1976. V. 17. P. 1049.
26. Herrera L., Jimenez J. Neutrino fields in axially and reflection symmetric space-times // Journal of Mathematical Physics. 1979. V. 20(1). P. 195–198.
27. Wils P. A class of exact solutions of the Einstein–Dirac equations // Journal of Mathematical Physics. 1991. V. 32. P. 231–233.
28. Talebaoui W. Non-ghost massless solution of the Einstein-Dirac field equations // Class. Quantum Grav. 1995. V. 12. P. 2051–2057.
29. Zekka A. The Einstein-Dirac Equation in Robertson-Walker Space-Time Does Not Admit Standard Solutions // Int. J. Theor. Phys. 2009. V. 48. P. 2305–2310.
30. Гуц А.К. Элементы теории времени. М. : УРСС, 2012.

31. Bittencourt S.V., Bernardini A.E., Blasone M. Effects of Lorentz boosts on Dirac bispinor entanglement. [arXiv:1810.01568v1](https://arxiv.org/abs/1810.01568v1) (2018).
32. Maldacena J., Susskind L. Cool horizons for entangled black holes/ [arXiv:1306.0533](https://arxiv.org/abs/1306.0533).
33. Васильев С. Квантовая запутанность — королева парадоксов. URL: <https://naked-science.ru/article/nakedscience/kvantovaya-zaputannost> (дата обращения: 10.09.2020).
34. Chen Y. Macroscopic quantum mechanics: theory and experimental concepts of optomechanics // Journal of physics B: atomic, molecular and optical physics. 2013. V. 46. P. 104001.
35. Sekatski P., Sanguinetti B. et al. Cloning Entangled Qubits to Scales One Can See. 2010. URL: <https://arxiv.org/abs/1005.5083v1> (дата обращения: 10.09.2020).
36. Frowis F., Dür W. Measures of macroscopicity for quantum spin systems // New Journal of Physics. 2012. V. 14. P. 093039–093062.
37. Sekatski P., Sangouard N., Stobinska M., Bussieres F., Afzelius M., Gisin N. Proposal for Exploring Macroscopic Entanglement with a Single Photon and Coherent States. 2013. URL: <http://arXiv:1206.1870v2> [quant-ph] (дата обращения: 10.09.2020).
38. Sekatski P., Sangouard N., Gisin N. Size of quantum superpositions as measured with classical detectors // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. P. 012116.
39. De Martini F. Entanglement and Quantum Superposition of a Macroscopic Macroscopic system. 2010. URL: <https://arxiv.org/abs/0903.1992v2> (дата обращения: 10.09.2020).
40. Kitaev A., Preskill J. Topological entanglement entropy. 2006. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0510092v2> (дата обращения: 10.09.2020).
41. Гуц А.К. Физика реальности. Омск : изд-во КАН, 2012.
42. Nowakowski M. Quantum Entanglement in Time // AIP Conference Proceedings. 2017. V. 1841, P. 020007. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4982771> (дата обращения: 10.09.2020).

GHOST PARTICLES, ENTANGLEMENT OF HISTORICAL EPOCHS AND TIME MACHINE

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article the possibility of creating a time machine, based on the mechanism of quantum entanglement of macroscopic ordinary (many)partial configurations and (many)partially ghostly configurations of different historical epochs belonging to different parallel Everett universes is investigated.

Keywords: Time machine, ghost particles, entanglement historical epochs, parallel universes.

REFERENCES

1. Doich D. Struktura real'nosti. Moskva-Izhevsk, RKhD, 2001. (in Russian)
2. Palesheva E.V. Ghost spinors, shadow electrons and the Deutsch Multiverse. [arXiv: gr-qc/0108017v2](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0108017v2) (2001).
3. Guts A.K. Vremennye efekty kollapsa volnovogo paketa v superprostranstve Uilera. Mezhdunarodnyi nauchnyi seminar «Nelineinye modeli v mekhanike, statistike, teorii polya i kosmologii» GRACOS-16, Lektsii shkoly i materialy seminara (5–7 noyabrya 2016 g., Kazan'). Kazan', Kazanskii (Privolzhskii) federal'nyi universitet, 2016, pp. 273–280. (in Russian)
4. Guts A.K. Kvantovaya mashina vremeni. Prostranstvo, vremya i fundamental'nye vzaimodeistviya, 2019, no. 3, pp. 20–44. (in Russian)
5. Loos H.G. Free Ghost Gauge Fields. Nuovo cimento, 1967, vol. LII A, no. 4, pp. 1085–1091.
6. Griffiths J.B. Gravitational radiation and neutrinos. Communications in Mathematical Physics, 1972, vol. 28, pp. 295–299.
7. Davis T.M. and Ray J.R. Ghost neutrinos in general relativity. Physical Review D., 1974, vol. 9, iss. 2, pp. 331–333
8. Davis T.M. and Ray J.R. Ghost neutrinos in plane-symmetric spacetimes. Journal of Mathematical Physics, 1975, vol. 16, pp. 75.
9. Ghost neutrinos emerge from mathematics. Nature, 1974, vol. 248, pp. 471–472.
10. Letelier P.S. Ghost neutrons in the Einstein-Cartan theory of gravitation. Physics Letters A., 1975, vol. 54, issue 5, pp. 351–352
11. Novello M. Ghost basis for neutrino. Physics Letters A., 1976, vol. 58, iss. 2, pp. 75–76. (in Russian)
12. Audretsch J. Ghost neutrinos as test fields in curved space-time I. Physics Letters A., 1976, vol. 56, iss. 1, pp. 15–16.
13. Davis T.M. and Ray J.R. Neutrinos and Bianchi I universes. Journal of Mathematical Physics 17, 1049 (1976).
14. Griffiths J.B. On the propagation of photons and neutrinos in curved space-time. General Relativity and Gravitation, 1977, vol. 8, pp. 365–370.
15. Guts A.K. Novoe reshenie uravnenii Einshteina-Diraka. Izvestiya vuzov. Fizika, 1979, no. 8. pp. 91–95. (in Russian)
16. Michalik T.R. and Melvin M.A. Spatially homogeneous neutrino cosmologies. Journal of Mathematical Physics, 1980, vol. 21, pp. 1952–1964.
17. Griffiths J.B. Ghost neutrinos in Einstein–Cartan theory. Phys. Lett., 1980, A75, pp. 441–442.
18. Dereli T. and Tucker R.W. Exact neutrino solutions in the presence of torsion. Physics Letters A., 1981, vol. 82, iss. 5, pp. 229–231.
19. Demakis A. and Müller-Hoissena F. Massive ghost Dirac fields in Einstein-Cartan theory. Physics Letters A., 1982, vol. 92, iss. 9, pp. 431–432.
20. Demakis A. and Müller-Hoissena F. Solutions of the Einstein-Cartan-Dirac equations with vanishing energy-momentum tensor. Journal of Mathematical Physics, 1985, vol. 26, pp. 1040–1048.
21. Torres del Castillo G.F.. Wavelike solutions to the Einstein equations coupled to neutrino and gauge fields. Journal of Mathematical Physics, 1986, vol. 27, pp. 2756.

22. Torres del Castillo G.F. Ghost Neutrino Fields in Flat Space-Time. General Relativity and Gravitation, 1987, vol. 19, no. 7, pp. 699–705.
23. Garcia de Andrade L.C.. Ghost neutrinos and radiative Kerr metric in Einstein-Cartan gravity. [arXiv:gr-qc/0204084v1](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0204084v1) (2002).
24. Muxin Han, Yapeng Hu, and Hongbao Zhang. Exhaustive Ghost Solutions to Einstein-Weyl Equations for Two Dimensional Spacetimes. 2004. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0409019v2>.
25. Davis T.M. and Ray J.R. Neutrinos and Bianchi I universes. Journal of Mathematical Physics, 1976, vol. 17, pp. 1049.
26. Herrera L. and Jimenez J. Neutrino fields in axially and reflection symmetric spacetimes. Journal of Mathematical Physics, 1979, vol. 20(1), pp. 195–198.
27. Wils P. A class of exact solutions of the Einstein–Dirac equations. Journal of Mathematical Physics, 1991, vol. 32, pp. 231–233.
28. Talebaoui W. Non-ghost massless solution of the Einstein-Dirac field equations. Class. Quantum Grav, 1995, vol. 12, pp. 2051–2057.
29. Zekka A. The Einstein-Dirac Equation in Robertson-Walker Space-Time Does Not Admit Standard Solutions. Int. J. Theor. Phys., 2009, vol. 48, pp. 2305–2310.
30. Guts A.K. Elementy teorii vremeni. Moscow, URS Publ., pp. 2012. (in Russian)
31. Bittencourt S.V., Bernardini A.E., and Blasone M. Effects of Lorentz boosts on Dirac bispinor entanglement. [arXiv:1810.01568v1](https://arxiv.org/abs/1810.01568v1) (2018).
32. Maldacena J. and Susskind L. Cool horizons for entangled black holes. [arXiv:1306.0533](https://arxiv.org/abs/1306.0533)
33. Vasil'ev S. Kvantovaya zaputannost' – koroleva paradoksov. URL: <https://naked-science.ru/article/nakedscience/kvantovaya-zaputannost>. (in Russian)
34. Chen Y. Macroscopic quantum mechanics: theory and experimental concepts of optomechanics. Journal of physics B: atomic, molecular and optical physics, 2013, vol. 46, pp. 104001.
35. Sekatski P., Sanguinetti B. et al. Cloning Entangled Qubits to Scales One Can See. URL: <https://arxiv.org/abs/1005.5083v1> (2010).
36. Frowis F. and Dür W. Measures of macroscopicity for quantum spin systems. New Journal of Physics, 2012, vol. 14, pp. 093039–093062.
37. Sekatski P., Sangouard N., Stobinska M., Bussières F., Afzelius M., and Gisin N. Proposal for Exploring Macroscopic Entanglement with a Single Photon and Coherent States. 2013. URL: <http://arXiv:1206.1870v2> [quant-ph].
38. Sekatski P., Sangouard N., and Gisin N. Size of quantum superpositions as measured with classical detectors. Phys. Rev. A., 2014, vol. 89, pp. 012116.
39. De Martini F. Entanglement and Quantum Superposition of a Macroscopic Macroscopic system. 2010. URL: <https://arxiv.org/abs/0903.1992v2>.
40. Kitaev A. and Preskill J. Topological entanglement entropy. 2006. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-th/0510092v2>.
41. Guts A.K. Fizika real'nosti. Omsk, izd-vo KAN, 2012. (in Russian)
42. Nowakowski M. Quantum Entanglement in Time. AIP Conference Proceedings, 2017, vol. 1841, pp. 020007. URL: <https://doi.org/10.1063/1.4982771>. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 05.10.2020

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ СПЕКТРА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НУЛЕЙ

М.Б. Моисеев

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: moiseevmb@mail.ru

Омский государственный университет путей сообщения, Омск, Россия

Аннотация. Энергия излучения электромагнитного поля в некотором промежутке частот пропорциональна квадрату модуля Фурье-образа этого поля. Определение энергии излучения составляет прямую задачу и имеет самостоятельную ценность в решении многих задач теории излучения. Представляет большой интерес, по известному спектру распределения энергии излучения по частотам, найти функцию электромагнитного поля, создавшую этот спектр, т. е. решить обратную задачу теории излучения. В работе решается указанная обратная задача, а именно, отыскивается функция электромагнитного поля по известной функции спектра, имеющей конечное число нулей на частотном промежутке.

Ключевые слова: функция спектра излучения, электромагнитное поле, обратная задача теории излучения, нули функции спектра, односторонние интегралы Фурье, краевая задача Римана.

Большое количество работ посвящено исследованию излучения электромагнитных волн [1–11]. Рассматриваются прямые характеристики излучения: спектральный состав, угловая направленность и др.

С точностью до определённого типа констант прямая задача исследования излучения начинается с равенства:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \right|^2 = S(\omega), \quad (1)$$

в котором $E(t)$ — заданная функция.

При решении обратной задачи теории излучения волн предполагается противоположный подход. Известным считается спектр излучения волн, заданный функцией $S(\omega)$, а требуется вычислить функцию поля $E(t)$, создающую этот спектр.

В работах [12–14] показано, что извлечение квадратного корня в равенстве (1) невозможно.

Отыскиваемая функция $E(t)$ должна удовлетворять физическим ограничениям. Первое такое ограничение заключается в том, что функцию $E(t)$ можно считать заданной на положительной полуоси. Действительно, для создания

наблюдаемого спектра электромагнитное поле имеет своё начало. Не умаляя общности, начало действия этого поля можем совместить с моментом времени t равным нулю. Сказанное реализуется, например, в устройствах под названием ондуляторы [4, 5]. Таким образом, Фурье-образ электромагнитного поля в общем случае может быть представлен односторонним интегралом Фурье:

$$\Phi^+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt. \quad (2)$$

Такое обозначение Фурье-образа (равенство (2)) удобно с точки зрения дальнейшего изложения.

Спектральная функция представляет собой модуль Фурье-образа, возведённый в квадрат, т. е. справедливо равенство:

$$S(\omega) = \Phi^+(\omega) \cdot (\Phi^+(\omega))^*, \quad (3)$$

здесь звездочкой помечено комплексное сопряжение функции.

Комплексно-сопряжённую функцию этого равенства (3) можно записать по-разному. В случае отображения функции $E(t)$ на отрицательную полуось нечетным образом получим:

$$(\Phi^+(\omega))^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \right)^* = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \Phi^-(\omega). \quad (4)$$

Если продолжить функцию $E(t)$ на отрицательную полуось как четную, то получится равенство:

$$(\Phi^+(\omega))^* = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt \right)^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 E(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = -\Phi^-(\omega). \quad (5)$$

Возможность отображений (4), (5) приводит к поиску функции поля $E(t)$ как нечетной функции (в случае (4)) или четной функции (в случае (5)), представленной односторонними интегралами Фурье (2), (4), (5) как на положительной, так и на отрицательной полуосях.

Следующее ограничение, накладываемое на функцию $E(t)$, сводится к требованию интегрируемости её по модулю в квадрате, т. е. того, что $E(t)$ относится к классу L_2 [15, с. 12] и к функции $E(t)$, применимо условие Гельдера [16, с. 52]. При указанных ограничениях равенства (2), (4), (5) представляют собой предельные значения односторонних интегралов Фурье [15, с. 24].

Тогда функции $\Phi^+(\omega)$, $\Phi^-(\omega)$ также принадлежат классу H (говорят: удовлетворяют условию Гельдера [16, с. 20]).

В работе [15, с. 20] показана связь односторонних интегралов Фурье с интегралами типа Коши.

Принятые ограничения сводят задачу к равенству:

$$\Phi^+(\omega) \cdot \Phi^-(\omega) = S(\omega), \quad (6)$$

если функция $E(t)$ на отрицательную полуось отображена нечётно, и равенству:

$$\Phi^+(\omega) \cdot (-\Phi^-(\omega)) = S(\omega), \quad (7)$$

если функция $E(t)$ на отрицательную полуось имеет чётное отображение.

Мы накладывали условия на искомую функцию поля $E(t)$. Однако для некоторых ограничений возможен и другой подход. Если функции $\Phi^+(\omega)$, $\Phi^-(\omega)$ удовлетворяют условию Гёльдера, то и их произведение удовлетворяет этому условию [16, с. 20]. Тогда согласно равенствам (6), (7) мы должны потребовать, чтобы функция $S(\omega)$ удовлетворяла условию Гёльдера. Но если функция $S(\omega)$ удовлетворяет условию Гёльдера и справедливы равенства (6), (7), то и функции $\Phi^+(\omega)$, $\Phi^-(\omega)$ удовлетворяют этому условию, а, следовательно, функция электромагнитного поля $E(t)$ также будет удовлетворять этому условию.

Предположим, что заданная функция $S(\omega)$ определена и отлична от нуля на системе интервалов действительной оси L . L состоит из n интервалов положительной действительной оси частот за исключением точек — концов отрезков $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$, в которых функция $S(\omega)$ обращается в ноль. Расстояние $a(\omega_{k+1}) - b(\omega_k)$ между концом k -го и началом следующего $k+1$ -го отрезков равно нулю. Во всех точках L определены логарифмы левых и правых частей равенств (6), (7). Логарифмируя равенства (6), (7), получим:

$$\ln \Phi^+(\omega) = (-1) \cdot \ln \Phi^-(\omega) + \ln S(\omega), \quad \omega \in L, \quad (8)$$

$$\ln \Phi^+(\omega) = (-1) \cdot \ln (-\Phi^-(\omega)) + \ln S(\omega), \quad \omega \in L. \quad (9)$$

Здесь равенства (8), (9) соответствуют нечётному и чётному отображению функции $E(t)$ на отрицательную полуось. Данные равенства при сделанных выше предположениях можно рассматривать как краевую задачу Римана [15, с. 27; 16, с. 106], заданную на действительной оси ω с разрывным коэффициентом

$$G(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega \in L, \\ 1, & \omega \notin L \end{cases} \quad (10)$$

и свободным членом

$$g(\omega) = \begin{cases} \ln S(\omega), & \omega \in L, \\ 0, & \omega \notin L. \end{cases} \quad (11)$$

Учитывая введенные обозначения (10), (11), задачу можно записать в виде

$$\ln \Phi^+(\omega) \cdot \ln (\pm \Phi^-(\omega)) + g(\omega). \quad (12)$$

Знаки плюс или минус перед функцией $\Phi^-(\omega)$ в (12) означают нечётное (знак +) и чётное (знак −) продолжение функции $E(t)$ на отрицательную полуось. Коэффициент задачи $G(\omega)$ имеет разрывы первого рода в конечных точках отрезков $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$. Для того чтобы устранить разрыв коэффициента $G(\omega)$, следуя [16, с. 442], сделаем замену

$$\ln (\pm \Phi^\pm(\omega)) = \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{\omega - a(\omega_k)}{\omega \pm i} \right)^{\gamma_k} \cdot \left(\frac{\omega - b(\omega_k)}{\omega \pm i} \right)^{\gamma'_k} \right] \cdot \Phi_1^\pm(\omega). \quad (13)$$

После замены задача (12) примет вид

$$\Phi_1^+(\omega) = G(\omega) \Phi_1^-(\omega) + g_1(\omega), \quad (14)$$

где

$$G_1(\omega) = \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{\omega - i}{\omega + i} \right)^{-\gamma_k} \cdot \left(\frac{\omega - i}{\omega + i} \right)^{-\gamma'_k} \right] \cdot G(\omega)$$

и

$$g_1(\omega) = \prod_{k=1}^n \left[\left(\frac{\omega - a(\omega_k)}{\omega + i} \right)^{-\gamma_k} \cdot \left(\frac{\omega - b(\omega_k)}{\omega + i} \right)^{-\gamma'_k} \right] \cdot g(\omega).$$

В (14) функции вида $[(\omega - i) / (\omega + i)]^{-\gamma_k}$, по определению [16, с. 25], после перехода через точки $a(\omega_k)$, $b(\omega_k)$ получают множитель $\exp[i2\pi\gamma_k]$. Например, многозначная функция $[(\omega - i) / (\omega + i)]^{-\gamma_k}$ на интервале $(-\infty; a(\omega_k))$ имеет главное значение $[(\omega - i) / (\omega + i)]^{-\gamma_k}$, а после прохождения точки $a(\omega_k)$ (на интервале $(a(\omega_k); \infty)$) получит значение, равное $[(\omega - i) / (\omega + i)]^{-\gamma_k} \exp[i2\pi\gamma_k]$. Скачок функции $[(\omega - i) / (\omega + i)]^{-\gamma_k}$ в точке $a(\omega_k)$ равен $\exp[i2\pi\gamma_k]$. При этом, если скачок функции $G(\omega)$ в точке $\omega = a(\omega_k)$ равен $\exp[i2\pi\gamma_k]$, то это приведёт к непрерывности произведения $[(\omega - i) / (\omega + i)]^{-\gamma_k} \cdot G(\omega)$ в этой точке. Следовательно, нужным подбором γ_k и γ'_k мы можем устранить разрывы коэффициента $G(\omega)$ в точках $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$. Запишем

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \frac{G(a(\omega_k)-0)}{G(a(\omega_k)+0)} - i2\pi\alpha_k \right), \\ \gamma'_k &= \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \frac{G(b(\omega_k)-0)}{G(b(\omega_k)+0)} - i2\pi\alpha'_k \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $G(a(\omega_k) - 0)$, $G(a(\omega_k) + 0)$ и $G(b(\omega_k) - 0)$, $G(b(\omega_k) + 0)$ — лево- и правосторонние пределы коэффициента в точках $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$, а α_k и α'_k — целые числа. Сумма целых чисел α_k и α'_k определяет индекс α задачи, т. е. $\alpha = \alpha_k + \alpha'_k$, а набор целых чисел γ_k и γ'_k определяет функции, в классе которых отыскивается решение [16, с. 101].

В рамках данной работы имеет физический смысл лишь класс ограниченных функций. Действительно, если предположить обратное, допустив решение задачи (14), удовлетворяющее в окрестностях точек $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$ условиям:

$$\begin{aligned} |\Phi_1^\pm(\omega)| &\leq \frac{C}{|\omega - a(\omega_k)|^\lambda}, \quad C = \text{const}, \quad 0 < \lambda < 1, \\ |\Phi_1^\pm(\omega)| &\leq \frac{C'}{|\omega - b(\omega_k)|^{\lambda'}}, \quad C' = \text{const}, \quad 0 < \lambda' < 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая замену (13), будем иметь оценки

$$\begin{aligned} |\Phi^\pm(\omega)| &\leq e^{\frac{C_1}{|\omega - a(\omega_k)|^{\lambda_1}}} \quad C_1 = \text{const}, \quad 0 < \lambda_1 < 1, \\ |\Phi^\pm(\omega)| &\leq e^{\frac{C'_1}{|\omega - b(\omega_k)|^{\lambda'_1}}} \quad C'_1 = \text{const}, \quad 0 < \lambda'_1 < 1, \end{aligned} \quad (17)$$

согласно которым функции $\Phi^\pm(\omega)$ экспоненциально расходятся в окрестностях точек $a(\omega_k)$ и $b(\omega_k)$, но это противоречит равенствам (3–7). Следовательно,

единственно возможным классом физически реализуемых решений является класс ограниченных функций. В этом классе из (15) найдём $\gamma_k = \gamma'_k = 1/2$, $\alpha_k = -1$, $\alpha'_k = 0$. Индекс задачи (14) $\alpha = -n$. С учетом найденных величин γ_k , γ'_k , α_k , α'_k , α задача (14) запишется:

$$\Phi_1^+(\omega) = \left(\frac{\omega - i}{\omega + i} \right)^{-n} \cdot \Phi_1^-(\omega) + R(\omega), \quad (18)$$

$$R(\omega) = \begin{cases} \frac{(\omega+i)^n \cdot \ln S(\omega)}{\sqrt{\prod_{k=1}^n [(\omega-a(\omega_k))(\omega-b(\omega_k))]}}, & \omega \in L \\ 0, & \omega \notin L, \end{cases} \quad (19)$$

а соответствующая ей однородная задача

$$\Phi_1^+(\omega) = \left(\frac{\omega - i}{\omega + i} \right)^{-n} \cdot \Phi_1^-(\omega). \quad (20)$$

имеет лишь нулевое решение [16, с. 433], а неоднородная задача (18) разрешима однозначно, если выполнены n условий разрешимости:

$$\int_{a(\omega_k)}^{b(\omega_k)} \frac{\ln S(\omega)}{\sqrt{(\omega - a(\omega_k))(\omega - b(\omega_k))}} \cdot \omega^{k-1} \cdot d\omega = 0, \quad (21)$$

которые с физической точки зрения означают, что электромагнитное поле, выраженное ограниченной функцией $E(t)$, может создать спектр, задаваемый функцией $S(\omega)$ на каждом интервале $(a(\omega_k); b(\omega_k))$.

Решение задачи (18) при выполнении условий (21) в односторонних интегралах Фурье запишется в виде:

$$\Phi_1^+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx, \quad (22)$$

$$\Phi_1^-(\omega) = \left(\frac{\omega - i}{\omega + i} \right)^n \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx \right), \quad (23)$$

Здесь функция $r(x)$ является оригиналом Фурье преобразования функции $R(\omega)$ и запишется в виде:

$$r(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty R(\omega) \cdot e^{-i\omega x} \cdot d\omega. \quad (24)$$

Принимая во внимание замену (13) и вводя функции

$$\chi^+(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx, \quad (25)$$

$$\chi^-(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 r(x) \cdot e^{i\omega x} \cdot dx, \quad (26)$$

для которых справедливо равенство Сохоцкого [16, с. 37]

$$\chi^+(\omega) - \chi^-(\omega) = R(\omega), \quad (27)$$

найдем решение задачи (8), (9) при нечетном (четном) отображении $E(t)$ на отрицательную ось соответственно:

$$\Phi^+(\omega) = e^{L^+(\omega)}, \quad (28)$$

$$\Phi^-(\omega) = \pm e^{L^-(\omega)}, \quad (29)$$

где минус в (29) после знака равенства соответствует четному отображению,

$$L^\pm(\omega) = \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^n [(\omega - a(\omega_k))(\omega - b(\omega_k))]} }{(\omega + i)^n} \cdot \chi^\pm(\omega). \quad (30)$$

Согласно равенствам (2), (4), (28), (29) полное Фурье-преобразование электромагнитного поля $E(t)$ при нечетном отображении на отрицательную полуось запишется в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \Phi^+(\omega) - \Phi^-(\omega) = e^{L^+(\omega)} + e^{L^-(\omega)} = K(\omega); \quad (30)$$

при четном отображении, учитывая равенства (2), (5), (28), (29), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E_2(t) \cdot e^{i\omega t} \cdot dt = \Phi^+(\omega) - \Phi^-(\omega) = e^{L^+(\omega)} + e^{L^-(\omega)} = P(\omega). \quad (31)$$

Из равенств (30), (31) найдем обратные Фурье-преобразования:

$$E_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d\omega, \quad (32)$$

$$E_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cdot e^{-i\omega t} \cdot d\omega. \quad (33)$$

В равенстве (33), учитывая ранее принятые предположения, для всех неотрицательных t необходимо выбрать действительную нечетную составляющую функции $E_1(t)$, а в выражении (33) для функции $E_2(t)$ необходимо для всех неотрицательных t взять действительную четную составляющую. Тогда отыскиваемое электромагнитное поле $E(t)$ при заданной функции спектра $S(\omega)$ на интервалах $(a(\omega_k); b(\omega_k))$ и выполнении условий (21) определится равенством

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t). \quad (35)$$

Таким образом, если функция спектра $S(\omega)$, имеющая конечное число нулей на частотном промежутке, удовлетворяет условию Гельдера и выполняются n (число нулей) условий разрешимости, то по заданной функции спектра $S(\omega)$ определяется функция $E(t)$ электромагнитного поля, создавшая данный спектр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Изд. 2-е перераб. М. : Гостехиздат, 1948. 364 с.
2. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М. : Наука, 1983. 304 с.
3. Тернов И.М. Синхротронное излучение // УФН. 1995. Т. 165, № 4. С. 429–456.
4. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М. : Наука. 1975. 415 с.
5. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учётом пространственной дисперсии и теория экситонов. Изд. 2-е перераб. и доп. М. : Наука. 1979. 432 с.
6. Алфёров Д.Ф., Башмаков Ю.А., Бессонов Е.Г. Ондюляторное излучение // Труды ФИАН. 1975. № 80. С. 100–124.
7. Никитин М.М., Медведев А.Ф., Моисеев М.Б. Интерференция синхротронного излучения // Письма в журнал технической физики. 1979. Т. 5, вып. 14. С. 843–848.
8. Тернов И.М., Халилов В.Р., Багров В.Г. Излучение систем с релятивистскими электронами // Известия высших учебных заведений. Физика. 1980. Т. 23, № 2. С. 5–31.
9. Никитин М.М., Эпп В.Я. Влияние параметров электронного пучка на свойства ондуляторного излучения // Журнал технической физики. 1976. Т. 46, № 11. С. 2386–2391.
10. Медведев А.Ф., Никитин М.М., Эпп В.Я. Экспериментальное исследование свойств ондуляторного излучения релятивистских электронов // Письма в журнал технической физики. 1979. Т. 5, № 13. С. 795–801.
11. Baier V.N., Katkov V.M., Strakhovenko V.M. Radiation Emitted by Relativistic Particles in Periodic Structures // JETP. 1973. V. 36, No. 6. P. 1120–1124.
12. Моисеев М.Б., Неворотов Б. К. Формирование спектра излучения заданной формы на конечном отрезке частот. Часть 1 // Омский научный вестник. 2006. № 36. С. 71–74.
13. Моисеев М.Б., Неворотов Б.К. Формирование спектра излучения заданной формы на конечной системе отрезков частот. Часть 2 // Омский научный вестник. 2006. № 4. С. 74–76.
14. Моисеев М.Б., Неворотов Б.К. Обратная задача теории электромагнитного излучения // Омский научный вестник. 2013. № 2. С. 12–15.
15. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свёртки. М. : Наука, 1978. 296 с.
16. Гахов Ф.Д. Краевые задачи: моногр. Изд. 3-е. М. : Наука, 1977. 640 с.

AN INVERSE PROBLEM OF THE THEORY OF THE ELECTROMAGNETIC RADIATION FOR A FUNCTION SPECTRUM WITH A FINITE NUMBER OF ZEROS

M.B. Moiseev

PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: moiseevmb@mail.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The radiation energy of an electromagnetic field in a certain frequency interval is proportional to the square of the modulus of the Fourier transform of this field. The determination of the radiation energy is a direct problem and has an independent value in solving many problems of radiation theory. It is of great interest, according to the known spectrum of the energy distribution of radiation over frequencies, to find the function of the electromagnetic field that created this spectrum, i.e. solve the inverse problem of radiation theory. In this paper, the above inverse problem is solved, namely, the function of the electromagnetic field is sought from a known function of the spectrum having a finite number of zeros on the frequency interval.

Keywords: radiation spectrum function, electromagnetic field, inverse problem of radiation theory, zeros of the spectrum function, one-sided Fourier integrals, the Riemann boundary value problem.

REFERENCES

1. Landau L.D. and Lifshits E.M. *Teoriya polya*. Izd. 2-e pererab. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948, 364 p. (in Russian)
2. Sokolov A.A. and Ternov I.M. *Relyativistskii elektron*. Moscow, Nauka Publ., 1983, 304 p. (in Russian)
3. Ternov I.M. *Sinkhrotronnoe izluchenie*. UFN, 1995, vol. 165, no. 4, pp. 429–456. (in Russian)
4. Ginzburg V.L. *Teoreticheskaya fizika i astrofizika*. Moscow, Nauka Publ., 1975, 415 p. (in Russian)
5. Agranovich V.M. and Ginzburg V.L. *Kristallogoptika s uchetom prostranstvennoi dispersii i teoriya eksitonov*. Izd. 2-e pererab. i dop. Moscow, Nauka Publ., 1979, 432 p. (in Russian)
6. Alferov D.F., Bashmakov Yu.A., and Bessonov E.G. *Ondulyatornoe izluchenie*. Trudy FIAN, 1975, no. 80, pp. 100–124. (in Russian)
7. Nikitin M.M., Medvedev A.F., and Moiseev M.B. *Interferentsiya sinkhrotronnogo izlucheniya*. Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki, 1979, vol. 5, iss. 14, pp. 843–848. (in Russian)
8. Ternov I.M., Khalilov V.R., Bagrov V.G. et al. *Izluchenie sistem s relyativistskimi elektronami*. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Fizika, 1980, vol. 23, no. 2, pp. 5–31. (in Russian)

9. Nikitin M.M. and Epp V.Ya. Vliyanie parametrov elektronnoy puchki na svoystva ondulatornogo izlucheniya. Zhurnal tekhnicheskoy fiziki, 1976, vol. 46, no. 11, pp. 2386–2391. (in Russian)
10. Medvedev A.F., Nikitin M.M., and Epp V.Ya. Eksperimental'noye issledovanie svoystv ondulatornogo izlucheniya relyativistskikh elektronov. Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki, 1979, vol. 5, no. 13, pp. 795–801. (in Russian)
11. Baier V.N., Katkov V.M., and Strakhovenko V.M. Radiation Emitted by Relativistic Particles in Periodic Structures. JETP, 1973, vol. 36, no. 6, pp. 1120–1124.
12. Moiseev M.B. and Nevorotov B. K. Formirovaniye spektra izlucheniya zadannoy formy na konechnom otrezke chastot. Chast' 1. Omskii nauchnyi vestnik, 2006, no. 36, pp. 71–74. (in Russian)
13. Moiseev M.B. and Nevorotov B.K. Formirovaniye spektra izlucheniya zadannoy formy na konechnoy sisteme otrezkov chastot. Chast' 2. Omskii nauchnyi vestnik, 2006, no. 4, pp. 74–76. (in Russian)
14. Moiseev M.B. and Nevorotov B.K. Obratnaya zadacha teorii elektromagnitnogo izlucheniya. Omskii nauchnyi vestnik, 2013, no. 2, pp. 12–15. (in Russian)
15. Gakhov F.D. and Cherskii Yu.I. Uravneniya tipa svertki. Moscow, Nauka Publ., 1978, 296 p. (in Russian)
16. Gakhov F.D. Kraevye zadachi: monogr. Izd. 3-e. Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 02.10.2020

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛИНОМОВ

М.М. Чернявский

аспирант, кафедра инженерной физики, e-mail: misha360ff@mail.ru

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Витебск, Республика Беларусь

Аннотация. В статье осуществлён сравнительный анализ двух критериев устойчивости полиномов. Они не требуют получения какой-либо информации о корнях, а позволяют судить об устойчивости непосредственно по коэффициентам полинома. На конкретных числовых примерах рассмотрены особенности их применения. В статье также в символьном виде получены выражения связи между коэффициентами полиномов шестой и четвёртой степеней для случаев, когда между корнями этих полиномов существует линейная или определённая нелинейная связь. В этих случаях алгебраическое уравнение шестой степени можно разрешить в радикалах.

Ключевые слова: многочлен, критерий Гурвица, матрица Гурвица, теория устойчивости, алгебраические уравнения, решение в радикалах..

При исследовании дифференциальных уравнений и их систем, возникающих, например, в математической теории устойчивости, часто важным требованием со стороны исследователя выступает необходимость расположения всех корней характеристического уравнения в левой половине комплексной плоскости [1]. Важной задачей является разработка способов проверки требуемого расположения корней без их непосредственного вычисления. Наибольший практический интерес представляют те способы, которые дают информацию о расположении всех корней путём простого анализа коэффициентов многочлена. Такую задачу называют проблемой Рауса–Гурвица, далее в статье она будет рассмотрена подробнее.

Цель статьи — провести сравнительный анализ двух различных критериев устойчивости полиномов, не требующих получения дополнительной информации о их корнях.

1. Известные результаты из теории устойчивости полиномов

Рассмотрим полином n -й степени

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами, где $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$.

Определение 1. Известно, что полином (1) называется *полиномом Гурвица*, если все его корни обладают отрицательными действительными частями $\operatorname{Re} z_j < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) [2, с. 95]. В теории устойчивости полиномы Гурвица называют *устойчивыми полиномами*.

Математическая проблема Рауса–Гурвица заключается в том, чтобы, не находя корни конкретного многочлена, непосредственно по коэффициентам выяснить, устойчив он или нет [3].

Также стоит напомнить о справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Если полином вида (1) является полиномом Гурвица, то все его коэффициенты положительны.

Определение 2. Матрицей Гурвица для полинома (1) называется квадратная матрица порядка n , имеющая следующий вид:

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_s = 0$ при $s < 0$ и $s > n$.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

иногда просто называют определителями Гурвица.

Первым критерием устойчивости полиномов, который рассматривается в статье, является *условие Гурвица*, которое формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2. (Теорема Гурвица). Для того чтобы полином вида (1) являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица M_f .

Доказательства данной теоремы достаточно объёмны, одно из наиболее простых приведено в известном классическом учебнике Б.П. Демидовича по теории устойчивости [2].

Стоит также отметить, что для применения критерия Гурвица на практике можно пользоваться другой теоремой, исторически доказанной позже, чем само условие Гурвица, и позволяющей снизить число проверок детерминантных неравенств. Эту теорему называют теоремой Лъенара–Шипара [4, с. 96].

Теорема 3. (Теорема Льенара–Шипара). Многочлен $f(z)$ вида (1) нечётной (чётной) степени с положительными вещественными коэффициентами тогда и только тогда устойчив, когда положительны его определители Гурвица чётного (нечётного) порядка.

Продemonстрируем применение критерия Гурвица на конкретных числовых примерах.

Пример 1. Пусть

$$f_1(z) = z^4 + 16z^3 + 99z^2 + 280z + 300;$$

$$f_2(z) = z^4 + 16z^3 + 99z^2 + 20z + 300;$$

$$f_3(z) = z^5 + 17z^4 + 117z^3 + 405z^2 + 700z + 500;$$

$$f_4(z) = z^5 + 17z^4 + 117z^3 + 405z^2 + 50z + 500.$$

Для каждого из представленных полиномов составим матрицу Гурвица:

$$M_{f_1} = \begin{pmatrix} 280 & 300 & 0 & 0 \\ 16 & 99 & 280 & 300 \\ 0 & 1 & 16 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{f_2} = \begin{pmatrix} 20 & 300 & 0 & 0 \\ 16 & 99 & 20 & 300 \\ 0 & 1 & 16 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{f_3} = \begin{pmatrix} 700 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 117 & 405 & 700 & 500 & 0 \\ 1 & 17 & 117 & 405 & 700 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{f_4} = \begin{pmatrix} 50 & 500 & 0 & 0 & 0 \\ 117 & 405 & 50 & 500 & 0 \\ 1 & 17 & 117 & 405 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & 117 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ниже построчно приведём значения определителей Гурвица для каждого полинома из примера, начиная с Δ_2 :

$$\Delta_2(f_1) = 22920; \quad \Delta_3(f_1) = \Delta_4(f_1) = 288320;$$

$$\Delta_2(f_2) = 15000; \quad \Delta_3(f_2) = \Delta_4(f_2) = -45520;$$

$$\Delta_2(f_3) = 225000; \quad \Delta_3(f_3) = 18345000; \quad \Delta_4(f_3) = \Delta_5(f_3) = 226440000;$$

$$\Delta_2(f_4) = -38250; \quad \Delta_3(f_4) = -4492750; \quad \Delta_4(f_4) = \Delta_5(f_4) = -60710500.$$

Таким образом, согласно теореме Гурвица многочлены $f_1(z)$ и $f_3(z)$ являются устойчивыми, а $f_2(z)$ и $f_4(z)$ неустойчивы, несмотря на визуальное сходство полиномов между собой.

Критерий Гурвица является не единственным способом установления устойчивости полинома. Вторым рассматриваемым в настоящей статье критерием устойчивости является упоминаемый в уже ставшей классической монографии В.В. Прасолова [3] способ, впервые предложенный в статье [5]. Данный критерий формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n -$$

многочлен с вещественными коэффициентами,

$$q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m,$$

где $m = n(n-1)/2$ — многочлен, корнями которого служат все суммы пар корней многочлена $p(z)$. Многочлен $p(z)$ устойчив тогда и только тогда, когда все коэффициенты многочленов $p(z)$ и $q(z)$ положительны.

Несмотря на простую формулировку этого решения проблемы Рауса–Гурвица на настоящий момент не существует общих аналитических формул перехода от коэффициентов полинома $p(z)$ к коэффициентам полинома $q(z)$. Можно говорить лишь о частных случаях при конкретном значении n . Для случаев $n = 2$ и $n = 3$ задача решается несложно, поэтому в данной статье рассматривать их не будем. В следующих двух разделах статьи будут представлены соответствующие формулы связи для случаев $n = 4$ и $n = 5$.

2. Установление наличия линейной связи между корнями полиномов четвёртой и шестой степеней

В данном разделе установлены и доказаны необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты полинома комплексного аргумента шестой степени вида (2)

$$P_6(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \quad (2)$$

с коэффициентами полинома четвёртой степени вида (3)

$$Q_4(z) = z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4 \quad (3)$$

при наличии линейной связи между корнями этих полиномов. Коэффициенты полиномов (2) и (3) в общем случае являются комплексными.

Обозначим корни полинома (3) через p_1, p_2, p_3, p_4 и, кроме того, обозначим попарно их суммы

$$\begin{aligned} q_1 &= p_1 + p_2, & q_2 &= p_1 + p_3, & q_3 &= p_1 + p_4, \\ q_4 &= p_2 + p_3, & q_5 &= p_2 + p_4, & q_6 &= p_3 + p_4. \end{aligned}$$

Теорема 5. Числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) являются корнями полинома (2) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) система уравнений

$$c_1 = 3a_1, \quad (4)$$

$$c_2 = 3a_1^2 + 2a_2, \quad (5)$$

$$c_3 = a_1^3 + 4a_1a_2, \quad (6)$$

$$c_4 = 2a_1^2a_2 + a_1a_3 + a_2^2 - 4a_4, \quad (7)$$

$$c_5 = a_1(a_1a_3 + a_2^2 - 4a_4), \quad (8)$$

$$c_6 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2. \quad (9)$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы уравнений (4) – (9) относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) являются соотношения

$$c_3 = \frac{2}{3}c_1c_2 - \frac{5}{27}c_1^3, \quad (10)$$

$$c_5 = \frac{1}{81}c_1^5 - \frac{1}{27}c_1^3c_2 + \frac{1}{3}c_1c_4, \quad (11)$$

$$c_6 = \frac{61}{46656}c_1^6 - \frac{5}{1296}c_1^4c_2 + \frac{1}{36}c_1^2c_4. \quad (12)$$

При этом

$$a_1 = \frac{c_1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{6}c_1^2 + \frac{1}{2}c_2,$$

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2, \quad a_4 = -\frac{13}{2592}c_1^4 - \frac{1}{144}c_1^2c_2 + \frac{1}{16}c_2^2 - \frac{1}{4}c_4.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) являются корнями полинома (2), тогда данный полином представим в виде

$$P_6(z) = (z - p_1 - p_2)(z - p_1 - p_3)(z - p_1 - p_4) \times \\ \times (z - p_2 - p_3)(z - p_2 - p_4)(z - p_3 - p_4),$$

следовательно, коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$c_1 = -3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4);$$

$$c_2 = 3(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) + 8(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4);$$

$$c_3 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \times \\ \times (6(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4) + (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2));$$

$$c_4 = 30p_1p_2p_3p_4 + [2(p_1^3p_2 + p_1^3p_3 + p_1^3p_4 + p_1p_2^3 + p_1p_3^3 + p_1p_4^3 + p_2^3p_3 + \\ + p_2^3p_4 + p_2p_3^3 + p_2p_4^3 + p_3^3p_4 + p_3p_4^3) + 13(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + \\ + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + \\ + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2) + 5(p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2)];$$

$$c_5 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) [(6p_1p_2p_3p_4 + (p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + \\ + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) + 3(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + \\ + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)];$$

$$\begin{aligned}
c_6 = & (p_1^3 p_2^2 p_3 + p_1^3 p_2^2 p_4 + p_1^3 p_2 p_3^2 + p_1^3 p_2 p_4^2 + p_1^3 p_3^2 p_4 + p_1^3 p_3 p_4^2 + p_1^2 p_2^3 p_3 + \\
& + p_1^2 p_2^3 p_4 + p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2 p_4^2 + p_1^2 p_3^3 p_4 + p_1 p_2^3 p_3^2 + p_1 p_2^3 p_4^2 + p_1 p_2^2 p_3^3 + \\
& + p_1 p_2^2 p_4^3 + p_2^2 p_3^2 p_4^2 + p_2 p_3^2 p_4^2 + p_2 p_3^2 p_4^2 + p_1 p_3^3 p_4^2 + p_1 p_3^2 p_4^3 + p_2^3 p_3^2 p_4 + \\
& + p_2^3 p_3 p_4^2 + p_2^2 p_3^3 p_4) + [2(p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2 p_4^2 + p_1^2 p_3^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 p_4^2) + \\
& + 2(p_1 p_2^3 p_3 p_4 + p_1^3 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3^3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_4^3) + 4(p_1 p_2^2 p_3^2 p_4 + p_1 p_2^2 p_3 p_4^2 + \\
& + p_1 p_2 p_3^2 p_4^2 + p_1^2 p_2^2 p_3 p_4 + p_1^2 p_2 p_3^2 p_4 + p_1^2 p_2 p_3 p_4^2)].
\end{aligned}$$

Равенства (4), (5) и (6) получаются непосредственно из соотношений Виета для полинома четвёртой степени.

Суммы, стоящие в круглых скобках в выражениях c_4 , c_5 , c_6 , представляют собой симметричные полиномы от переменных i , согласно известной теореме ([6, с. 322]) о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (2). Прделав соответствующие преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (7) — (9).

Проведём анализ этой системы. Из первого уравнения выражаем $a_1 = c_1/3$ и подставляем его в оставшиеся уравнения исходной системы. Получим систему

$$-\frac{c_1^2}{3} - 2a_2 + c_2 = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{1}{27}c_1^3 - \frac{4}{3}a_2c_1 + c_3 = 0, \quad (14)$$

$$-\frac{2}{9}a_2c_1^2 - a_2^2 - \frac{1}{3}a_3c_1 + 4a_4 + c_4 = 0, \quad (15)$$

$$-\frac{1}{3}c_1a_2^2 - \frac{1}{9}a_3c_1^2 + \frac{4}{3}c_1a_4 + c_5 = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{1}{3}a_2a_3c_1 + \frac{1}{9}a_4c_1^2 + a_3^2 + c_6 = 0. \quad (17)$$

Из уравнения (13) однозначно выражается коэффициент a_2 : $a_2 = -c_1^2/6 + c_2/2$. Подставим его в оставшиеся уравнения (14) — (17) и получим:

$$\frac{5}{27}c_1^3 - \frac{2}{3}c_1c_2 + c_3 = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{108}c_1^4 + \frac{1}{18}c_1^2c_2 - \frac{1}{4}c_2^2 - \frac{1}{3}a_3c_1 + 4a_4 + c_4 = 0, \quad (19)$$

$$-\frac{1}{108}c_1^5 + \frac{1}{18}c_1^3c_2 - \frac{1}{12}c_1c_2^2 - \frac{1}{9}a_3c_1^2 + \frac{4}{3}c_1a_4 + c_5 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{18}a_3c_1^3 - \frac{1}{6}a_3c_1c_2 + \frac{1}{9}a_4c_1^2 + a_3^2 + c_6 = 0. \quad (21)$$

Из уравнения (18) сразу получаем первое условие разрешимости системы (4) — (9). Это соотношение (10). Выразим из уравнения (19) коэффициент a_4 :

$$a_4 = -\frac{1}{432}c_1^4 - \frac{1}{72}c_1^2c_2 + \frac{1}{16}c_2^2 - \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{12}c_1a_3.$$

Подстановка данного выражения в формулу (20) даёт в точности второе условие разрешимости системы (4) – (9). Это соотношение (11).

Если подставить выраженное a_4 в формулу (21), то получим квадратное уравнение относительно коэффициента a_3 , корнями которого являются числа

$$a_{3,1} = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2 + \frac{1}{216}\sqrt{61c_1^6 - 180c_1^4c_2 + 1296c_1^2c_4 - 46656c_6}; \quad (22)$$

$$a_{3,2} = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2 - \frac{1}{216}\sqrt{61c_1^6 - 180c_1^4c_2 + 1296c_1^2c_4 - 46656c_6}. \quad (23)$$

Проанализируем подкоренное выражение в формулах (22) и (23). Подставим в него c_1 , c_2 , c_4 и c_6 из уравнений (4), (5), (7) и (9) исходной системы. После преобразований получим

$$61c_1^6 - 180c_1^4c_2 + 1296c_1^2c_4 - 46656c_6 = 729(a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3)^2.$$

Следовательно,

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2 \pm \frac{27}{216}|a_1^3 - 4a_1a_2 + 8a_3|. \quad (24)$$

Из уравнений (4) и (5) выразим $a_1^3 - 4a_1a_2 = 7c_1^3/27 - 2c_1c_2/3$ и подставим в уравнение (24), откуда однозначно получаем значение a_3 :

$$a_3 = -\frac{7}{216}c_1^3 + \frac{1}{12}c_1c_2.$$

Таким образом, мы фактически доказали, что дискриминант квадратного по a_3 уравнения (21) равен нулю. Выражение коэффициента a_4 через коэффициенты полинома (2), приведённое в формулировке теоремы, следует автоматически. Подставляя a_3 в уравнение (21), после упрощений получаем в точности условие (12).

Достаточность. Пусть выполнены равенства (10) – (12) и коэффициенты уравнения (2) выражаются через a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) в соответствии с системой (4) – (9). Полагая

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4,$$

$$a_3 = -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4), \quad a_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (2) выражаются следующим образом:

$$c_1 = -(q_1 + q_2 + \dots + q_6), \quad c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \dots + q_5q_6, \quad \dots, \quad c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа $q_1, q_2, \dots, q_6$ являются его корнями.

Теорема 5 доказана. ■

Таким образом, если требуется проверить на устойчивость полином четвёртой степени $Q_4(z)$ вида (3), то можно вычислить по формулам (4) – (9)

коэффициенты соответствующего полинома $P_6(z)$ и проверить их положительность. Например, сделаем это для полиномов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ из примера 1. Для $f_1(z)$ формулы (4) — (9) дают значения

$$c_1 = 48; \quad c_2 = 966; \quad c_3 = 10432; \quad c_4 = 63769; \quad c_5 = 209296; \quad c_6 = 288320.$$

Для $f_2(z)$ аналогично находим

$$c_1 = 48; \quad c_2 = 966; \quad c_3 = 10432; \quad c_4 = 59609; \quad c_5 = 142736; \quad c_6 = -45520.$$

Для второго полинома значение $c_6 < 0$, что свидетельствует о его неустойчивости. Действительно, $f_2(z)$ имеет два корня с положительной действительной частью, а у $f_1(z)$ таковых корней нет.

Отметим, что кроме проверки полиномов четвёртой степени на устойчивость теорема 5 может быть использована для ответа на вопрос, являются ли корни заданного полинома шестой степени $P_6(z)$ попарными суммами корней некоего полинома четвёртой степени $Q_4(z)$. Кроме того, если такой полином существует, то по представленным в теореме 5 формулам можно найти его коэффициенты, а затем и корни, причём в радикалах. Приведём пример, описывающий данную ситуацию.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$x^6 + 12x^5 + 34x^4 - 48x^3 - 359x^2 - 540x - 252 = 0.$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (10) – (12). По формулам для a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) вычислим соответствующие значения коэффициентов и получим выражение для полинома четвёртой степени:

$$Q_4(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24.$$

Его корнями являются числа $p_1 = 1$; $p_2 = 2$; $p_3 = -3$; $p_4 = -4$. Тогда

$$q_1 = 3; \quad q_2 = -2; \quad q_3 = -3; \quad q_4 = -1; \quad q_5 = -2; \quad q_6 = -7.$$

Путём подстановки данных чисел в исходное уравнение убеждаемся, что все они являются его решениями.

3. Установление наличия линейной связи между корнями полиномов пятой и десятой степеней

В этой части статьи приведены необходимые и достаточные условия существования линейной связи между полиномами пятой и десятой степеней.

Пусть дан полином

$$P_{10}(z) = z^{10} + c_1 z^9 + c_2 z^8 + c_3 z^7 + c_4 z^6 + c_5 z^5 + c_6 z^4 + c_7 z^3 + c_8 z^2 + c_9 z + c_{10}. \quad (25)$$

Установим связь его коэффициентов с коэффициентами полинома пятой степени

$$Q_5(z) = z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5 \quad (26)$$

при наличии линейной связи между их корнями.

Обозначим корни полинома (26) через p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 и запишем коэффициенты полинома (25), используя соотношение Виета для коэффициентов многочлена пятой степени:

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5);$$

$$a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5;$$

$$a_3 = -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + \\ + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5);$$

$$a_4 = p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5;$$

$$a_5 = -p_1p_2p_3p_4p_5.$$

Кроме того, обозначим все суммы корней полинома (26):

$$q_1 = p_1 + p_2, \quad q_2 = p_1 + p_3, \quad q_3 = p_1 + p_4, \quad q_4 = p_1 + p_5, \quad q_5 = p_2 + p_3, \\ q_6 = p_2 + p_4, \quad q_7 = p_2 + p_5, \quad q_8 = p_3 + p_4, \quad q_9 = p_3 + p_5, \quad q_{10} = p_4 + p_5.$$

Теорема 6. Числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) являются корнями полинома (25) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) система уравнений

$$c_1 = 4a_1, \tag{27}$$

$$c_2 = 6a_1^2 + 3a_2, \tag{28}$$

$$c_3 = 4a_1^3 + 9a_1a_2 + a_3, \tag{29}$$

$$c_4 = a_1^4 + 9a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 3a_2^2 - 3a_4, \tag{30}$$

$$c_5 = 3a_1^3a_2 + 5a_1^2a_3 + 6a_1a_2^2 - 5a_1a_4 + 2a_2a_3 - 11a_5, \tag{31}$$

$$c_6 = 2a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 - 2a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 - 22a_1a_5 + a_2^3 - 2a_2a_4 - a_3^2, \tag{32}$$

$$c_7 = 4a_1^2a_2a_3 + a_1a_2^3 - 16a_1^2a_5 + a_2^2a_3 - 4a_2a_5 - 4a_3a_4, \tag{33}$$

$$c_8 = -4a_1^3a_5 + a_1^2a_2a_4 + a_1^2a_3^2 + \\ + 2a_1a_2^2a_3 - 9a_1a_2a_5 - 3a_1a_3a_4 - a_2a_3^2 + a_2^2a_4 + 7a_3a_5 - 4a_4^2, \tag{34}$$

$$c_9 = -4a_1^2a_2a_5 + a_1a_2a_3^2 + a_1a_2^2a_4 + 4a_1a_3a_5 - 4a_1a_4^2 - a_2^2a_5 - a_3^3 + 4a_4a_5, \tag{35}$$

$$c_{10} = -a_1^2a_4^2 - a_1a_2^2a_5 + a_1a_2a_3a_4 + 2a_1a_4a_5 + a_2a_3a_5 - a_3^2a_4 - a_5^2. \tag{36}$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости системы уравнений (27) – (36) относительно a_k ($k = 1, 2, \dots, 5$) являются соотношения (37):

$$c_6 = -\frac{3}{64}c_1^6 + \frac{5}{16}c_1^4c_2 - \frac{3}{8}c_1^3c_3 - \frac{19}{36}c_1^2c_2^2 - \frac{1}{4}c_1^2c_4 + \\ + \frac{13}{9}c_1c_2c_3 + \frac{1}{2}c_1c_5 - \frac{1}{27}c_2^3 + \frac{2}{9}c_2c_4 - c_3^2;$$

$$\begin{aligned}
c_7 &= -\frac{21}{352}c_1^7 + \frac{39}{88}c_1^5c_2 - \frac{49}{88}c_1^4c_3 - \frac{181}{198}c_1^3c_2^2 + \frac{3}{11}c_1^3c_4 + \frac{1}{22}c_1^2c_5 + \frac{415}{198}c_1^2c_2c_3 + \\
&\quad + \frac{94}{297}c_1c_2^3 - \frac{4}{3}c_1c_3^2 - \frac{104}{99}c_1c_2c_4 - \frac{41}{99}c_2^2c_3 + \frac{4}{33}c_2c_5 + \frac{4}{3}c_3c_4; \\
c_8 &= -\frac{1229}{45056}c_1^8 + \frac{7}{1024}c_1^6 + \frac{3757}{16896}c_1^6c_2 - \frac{403}{1408}c_1^5c_3 - \frac{3}{128}c_1^4c_2 - \frac{3403}{6336}c_1^4c_2^2 + \frac{13}{44}c_1^4c_4 + \\
&\quad + \frac{1}{32}c_1^3c_3 + \frac{929}{792}c_1^3c_2c_3 - \frac{7}{44}c_1^3c_5 - \frac{221}{198}c_1^2c_2c_4 + \frac{799}{2376}c_1^2c_2^3 - \frac{145}{198}c_1^2c_2^2 - \frac{301}{594}c_1c_2^2c_3 + \\
&\quad + \frac{139}{99}c_1c_3c_4 + \frac{6}{11}c_1c_2c_5 - \frac{1}{27}c_2^4 + \frac{7}{27}c_2^2c_4 + \frac{1}{11}c_2c_3^2 - \frac{7}{11}c_3c_5 - \frac{4}{9}c_4^2; \\
c_9 &= -\frac{13499}{720896}c_1^9 - \frac{17}{32768}c_1^8 + \frac{4087}{22528}c_1^7c_2 + \frac{43}{12288}c_1^6c_2 - \frac{1931}{8448}c_1^6c_3 - \frac{58787}{101376}c_1^5c_2^2 + \\
&\quad + \frac{587}{8448}c_1^5c_4 - \frac{1}{384}c_1^5c_3 - \frac{5}{768}c_1^4c_2^2 + \frac{1}{384}c_1^4c_4 + \frac{743}{528}c_1^4c_2c_3 - \frac{1}{22}c_1^4c_5 + \frac{1}{144}c_1^3c_2c_3 + \\
&\quad + \frac{3913}{6336}c_1^3c_2^3 - \frac{173}{198}c_1^3c_3^2 - \frac{51}{176}c_1^3c_2c_4 + \frac{1}{6}c_1^2c_2c_5 + \frac{35}{99}c_1^2c_3c_4 + \frac{1}{432}c_1^2c_2^3 - \frac{1}{144}c_1^2c_2c_4 - \\
&\quad - \frac{835}{396}c_1^2c_2^2c_3 + \frac{19}{132}c_1c_2^2c_4 - \frac{95}{3564}c_1c_2^4 + \frac{245}{99}c_1c_2c_3^2 - \frac{16}{99}c_1c_4^2 - \frac{7}{33}c_1c_3c_5 + \\
&\quad + \frac{2}{99}c_2^3c_3 - \frac{1}{33}c_2^2c_5 - \frac{8}{99}c_2c_3c_4 - c_3^3 + \frac{4}{33}c_4c_5; \\
c_{10} &= -\frac{61}{15488}c_1^{10} + \frac{323}{7744}c_1^8c_2 - \frac{51}{968}c_1^7c_3 - \frac{10595}{69696}c_1^6c_2^2 + \frac{43}{1936}c_1^6c_4 - \frac{1}{968}c_1^5c_5 + \\
&\quad + \frac{711}{1936}c_1^5c_2c_3 + \frac{1207}{5808}c_1^4c_2^3 - \frac{203}{1452}c_1^4c_2c_4 + \frac{1}{1452}c_1^3c_2c_5 - \frac{17819}{26136}c_1^3c_2^2c_3 + \\
&\quad + \frac{391}{2178}c_1^3c_3c_4 - \frac{817}{13068}c_1^2c_2^4 + \frac{2809}{13068}c_1^2c_2^2c_4 - \frac{16}{1089}c_1^2c_4^2 - \frac{7}{726}c_1^2c_3c_5 + \\
&\quad + \frac{3}{242}c_1c_2^2c_5 - \frac{577}{1089}c_1c_2c_3c_4 + \frac{8}{363}c_1c_4c_5 - \frac{7}{363}c_2c_3c_5 - \frac{1}{3}c_3^3c_1 - \frac{2021}{8712}c_3^2c_1^4 + \\
&\quad + \frac{865}{1089}c_3^2c_1^2c_2 - \frac{103}{1089}c_3^2c_2^2 + \frac{1}{3}c_3^2c_4 - \frac{1}{121}c_5^2.
\end{aligned}
\tag{37}$$

При этом

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{c_1}{4}; \quad a_2 = -\frac{c_1^2}{8} + \frac{c_2}{3}; \quad a_3 = \frac{7}{32}c_1^3 - \frac{3}{4}c_1c_2 + c_3; \\
a_4 &= \frac{17}{256}c_1^4 - \frac{13}{48}c_1^2c_2 + \frac{1}{9}c_2^2 + \frac{1}{3}c_1c_3 - \frac{1}{3}c_4; \\
a_5 &= -\frac{53}{11264}c_1^5 + \frac{21}{704}c_1^3c_2 - \frac{17}{396}c_1c_2^2 - \frac{17}{528}c_1^2c_3 + \frac{2}{33}c_2c_3 + \frac{5}{132}c_1c_4 - \frac{1}{11}c_5.
\end{aligned}
\tag{38}$$

Доказательство. Доказательство осуществляется по тому же алгоритму, что использовался при доказательстве теоремы 5. Промежуточные вычисления являются достаточно громоздкими, читатель может их проделать в системе компьютерной математики. В статье приведены только важные опорные моменты.

Пусть числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) являются корнями полинома (25). Запишем коэффициенты этого полинома, используя соотношение Виета для коэффициентов полинома десятой степени, а затем подставим туда числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 10$). Таким образом мы получим выражения коэффициентов полинома десятой степени через корни полинома пятой степени (26).

$$c_1 = -(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 + q_8 + q_9 + q_{10}) \Leftrightarrow$$

$$c_1 = -4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5).$$

Используя соотношения Виета для коэффициентов полинома пятой степени, получим формулы (27) — (36). Для коэффициента c_1 имеем $c_1 = 4a_1$. Для остальных коэффициентов выражения более сложные.

$$c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + q_1q_4 + q_1q_5 + q_1q_6 + q_1q_7 + q_1q_8 + q_1q_9 + q_1q_{10} + \dots + q_9q_{10};$$

$$c_2 = 6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 + 3(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) = 6a_1^2 + 3a_2.$$

$$c_3 = -(q_1q_2q_3 + q_1q_2q_4 + q_1q_2q_5 + \dots + q_7q_8q_{10} + q_7q_9q_{10} + q_8q_9q_{10}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_3 &= -(4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^3 + 9(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)(p_1p_2 + p_1p_3 + \\ &+ p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) + (p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + \\ &+ p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5)) = \\ &= 4a_1^3 + 9a_1a_2 + a_3. \end{aligned}$$

$$c_4 = q_1q_2q_3q_4 + q_1q_2q_3q_5 + \dots + q_7q_8q_9q_{10}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_4 &= (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^4 + 9(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2(p_1p_2 + p_1p_3 + \\ &+ p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) + 3(p_1p_2 + p_1p_3 + \\ &+ p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)^2 + 4(p_1 + p_2 + p_3 + \\ &+ p_4 + p_5)(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + \\ &+ p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5) - 3(p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + \\ &+ p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5) = a_1^4 + 9a_1^2a_2 + 4a_1a_3 + 3a_2^2 - 3a_4. \end{aligned}$$

$$c_5 = -(q_1q_2q_3q_4q_5 + q_1q_2q_3q_4q_6 + \dots + q_6q_7q_8q_9q_{10}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_5 &= -(3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^3(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + \\ &+ p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) + 6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)(p_1p_2 + p_1p_3 + \\ &+ p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)^2 + 5(p_1 + p_2 + p_3 + \\ &+ p_4 + p_5)^2(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + \\ &+ p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5) + 2(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + \\ &+ p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5)(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + \\ &+ p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) - 5(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \times \\ &\times (p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5) - 11p_1p_2p_3p_4p_5). \end{aligned}$$

$$c_5 = 3a_1^3a_2 + 5a_1^2a_3 + 6a_1a_2^2 - 5a_1a_4 + 2a_2a_3 - 11a_5.$$

$$c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6 + q_1q_2q_3q_4q_5q_7 + \dots + q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}$$

$$\begin{aligned}
c_6 = & 3(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)^2 \times \\
& \times (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 + 2(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + \\
& + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5)(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^3 + \\
& + (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5)^3 + \\
& + 6(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + \\
& + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + p_3p_4p_5) \times (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + \\
& + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) - 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 \times \\
& \times (p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5) - (p_1p_2p_3 + \\
& + p_1p_2p_4 + p_1p_2p_5 + p_1p_3p_4 + p_1p_3p_5 + p_1p_4p_5 + p_2p_3p_4 + p_2p_3p_5 + p_2p_4p_5 + \\
& + p_3p_4p_5) - 2(p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_5 + p_1p_2p_4p_5 + p_1p_3p_4p_5 + p_2p_3p_4p_5) \times \\
& \times (p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5) - \\
& - 22p_1p_2p_3p_4p_5(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5).
\end{aligned}$$

$$c_6 = 2a_1^3a_3 + 3a_1^2a_2^2 - 2a_1^2a_4 + 6a_1a_2a_3 - 22a_1a_5 + a_2^3 - 2a_2a_4 - a_3^2.$$

Аналогичным образом при помощи системы компьютерной математики получаем оставшиеся соотношения (33) — (36).

Выражая поочередно коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 из системы уравнений, получаем выражения (38). Путём подстановки их в уравнения (32) — (36) выходим на условия (37). ■

Таким образом, используя формулы (27) — (36) из теоремы 6, можно проверить полином пятой степени с действительными положительными коэффициентами на устойчивость. Сделаем это для $f_3(z)$ и $f_4(z)$ из примера 1, представленного в первой части настоящей статьи. Для $f_3(z)$ формулы (27) — (36) дают значения

$$c_1 = 68, c_2 = 2085, c_3 = 37958, c_4 = 454345, c_5 = 3735736, c_6 = 21363351,$$

$$c_7 = 83868526, c_8 = 31665730, c_9 = 190864200, c_{10} = 226440000,$$

а для $f_4(z)$ —

$$c_1 = 68, c_2 = 2085, c_3 = 37958, c_4 = 456295, c_5 = 3790986, c_6 = 21891151,$$

$$c_7 = 84921526, c_8 = 16165180, c_9 = 200735750, c_{10} = -60710500.$$

Для $f_4(z)$ значение $c_{10} < 0$, что свидетельствует о его неустойчивости согласно теореме 4. Действительно, $f_4(z)$ имеет два корня с положительной действительной частью, а у $f_3(z)$ таковых корней нет.

Условия (37) можно использовать для ответа на вопрос, существует ли для заданного полинома десятой степени $P_{10}(z)$ полином пятой степени $Q_5(z)$, такой, что корни полинома $P_{10}(z)$ будут являться в точности попарными суммами корней полинома $Q_5(z)$. Приведём конкретный пример.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$x^{10} + 12x^9 - 15x^8 - 564x^7 - 1089x^6 + 4980x^5 + \\ + 12587x^4 - 8316x^3 - 21852x^2 + 3888x + 10368 = 0.$$

Для полинома, стоящего в левой части этого уравнения, условия (37) выполнены. Поэтому по формулам (38) находим коэффициенты соответствующего полинома $Q_5(z)$, который примет вид

$$Q_5(x) = x^5 + 3x^4 - 23x^3 - 51x^2 + 94x + 120.$$

Находим его корни. Это числа $p_1 = -1$, $p_2 = 2$, $p_3 = -3$, $p_4 = 4$, $p_5 = 5$. Их попарными суммами являются числа

$$q_1 = 1, \quad q_2 = -4, \quad q_3 = 3, \quad q_4 = 4, \quad q_5 = -1, \\ q_6 = 6, \quad q_7 = 7, \quad q_8 = 1, \quad q_9 = 2, \quad q_{10} = 9.$$

Подставляя поочерёдно их в исходное уравнение десятой степени, убеждаемся, что все они являются его корнями.

Подытожим результаты, приведённые во второй и третьей частях статьи. При увеличении на единицу степени полинома, который требуется проверить на устойчивость, значительно возрастает сложность получения формул для выражения коэффициентов полинома степени $n(n-1)/2$ через коэффициенты полинома степени n . Несомненно, доказательства теорем, аналогичных теоремам 5 и 6 настоящей статьи, для случаев $n > 5$ представляют собой развитие фундаментального знания, однако применение таких теорем в качестве критерия устойчивости полиномов становится менее целесообразным по сравнению с другими существующими способами, в частности, условием Гурвица.

4. Анализ коэффициентов полинома шестой степени, корни которого представимы в виде попарных произведений корней некоторых полиномов четвёртой степени

Во второй части настоящей статьи были доказаны необходимые и достаточные условия связи между коэффициентами полиномов шестой и четвёртой степеней для случая, когда между корнями упомянутых полиномов существует простая линейная связь (теорема 5). Естественным будет вопрос, можно ли получить некие аналогичные условия связи между коэффициентами этих полиномов в случае, когда между их корнями существует определённая нелинейная связь? Четвёртая и пятая части статьи посвящены изучению данного вопроса.

В этом разделе установлены и доказаны необходимые и достаточные условия, связывающие коэффициенты полинома комплексного аргумента шестой степени вида (39)

$$P(z) = z^6 + c_1z^5 + c_2z^4 + c_3z^3 + c_4z^2 + c_5z + c_6 \quad (39)$$

с коэффициентами семейства полиномов четвёртой степени вида (40)

$$Q_{4,i}(z) = z^4 + a_{1,i}z^3 + a_{2,i}z^2 + a_{3,i}z + a_{4,i} \quad (40)$$

при наличии связи между корнями этих полиномов, о которой далее пойдёт речь. В общем случае коэффициенты рассматриваемых полиномов могут быть комплексными.

Обозначим корни i -го полинома из семейства (40) через p_{1i} , p_{2i} , p_{3i} , p_{4i} и, кроме того, обозначим все возможные их произведения:

$$\begin{aligned} q_1 &= p_{1i}p_{2i}, & q_2 &= p_{1i}p_{3i}, & q_3 &= p_{1i}p_{4i}, \\ q_4 &= p_{2i}p_{3i}, & q_5 &= p_{2i}p_{4i}, & q_6 &= p_{3i}p_{4i}. \end{aligned}$$

Теорема 7. Числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) являются корнями полинома (39) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) система уравнений

$$c_1 = -a_2, \quad (41)$$

$$a_1a_3 - a_4 - c_2 = 0, \quad (42)$$

$$2a_2a_4 - a_1^2a_4 - a_3^2 - c_3 = 0, \quad (43)$$

$$a_1a_3a_4 - a_4^2 - c_4 = 0, \quad (44)$$

$$c_5 = -a_2a_4^2, \quad (45)$$

$$c_6 = a_4^3. \quad (46)$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (41) – (46) относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) являются соотношения

$$c_5 = \left(\frac{c_4}{c_2}\right)^2 c_1, \quad (47)$$

$$c_6 = \left(\frac{c_4}{c_2}\right)^3. \quad (48)$$

При этом решением системы (41) – (46) являются ровно 4 различных набора чисел a_k ($k = 1, 2, 3, 4$), в которых все a_2 и a_4 определены единообразно:

$$a_2 = -c_1, \quad a_4 = \frac{c_4}{c_2},$$

а элементы $a_{1,k}$ и $a_{3,k}$ связаны соотношениями:

$$a_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2c_4c_2} \sqrt{c_4c_2(-2c_1c_2c_4 - c_2^2c_3 + d)}, \quad a_{3,1} = \frac{c_2^2 + c_4}{a_{1,1}c_2};$$

$$a_{1,2} = -a_{1,1}, \quad a_{3,2} = -a_{3,1};$$

$$a_{1,3} = \frac{\sqrt{2}}{2c_4c_2} \sqrt{-c_4c_2(2c_1c_2c_4 + c_2^2c_3 + d)}; \quad a_{3,3} = \frac{c_2^2 + c_4}{a_{1,3}c_2};$$

$$a_{1,4} = -a_{1,3}, \quad a_{3,4} = -a_{3,3},$$

где $d = \sqrt{c_2(4c_1^2c_2c_4^2 + 4c_1c_2^2c_3c_4 - 4c_2^4c_4 + c_2^3c_3^2 - 8c_2^2c_4^2 - 4c_4^3)}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) являются корнями полинома (39), тогда при любом фиксированном i коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$\begin{aligned} c_1 &= -(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4); \\ c_2 &= 3p_1p_2p_3p_4 + (p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + \\ &\quad + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2); \\ c_3 &= -(p_1^3p_2p_3p_4 + p_1p_2^3p_3p_4 + p_1p_2p_3^3p_4 + p_1p_2p_3p_4^3) - (p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2 + \\ &\quad + p_1^2p_3^2p_4^2) - 2(p_1^2p_2^2p_3p_4 + p_1^2p_2p_3^2p_4 + p_1^2p_2p_3p_4^2 + p_1p_2^2p_3^2p_4 + p_1p_2^2p_3p_4^2 + p_1p_2p_3^2p_4^2); \\ c_4 &= p_1p_2p_3p_4(3p_1p_2p_3p_4 + (p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + \\ &\quad + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)); \\ c_5 &= -p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4); \\ c_6 &= p_1^3p_2^3p_3^3p_4^3. \end{aligned}$$

Равенства (41), (45) и (46) следуют непосредственно из формул Виета для полинома четвёртой степени.

Суммы, стоящие в скобках для выражений c_2 , c_3 , c_4 , представляют собой симметричные полиномы от переменных p_j ($j = 1, 2, 3, 4$) и, согласно известной теореме о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (40) [6, с. 322]. Прделав нужные преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (42) — (44).

Проведём анализ этой системы. Из первого уравнения выражаем a_2 и подставляем его в оставшиеся уравнения системы. На втором шаге из уравнения (42) выражаем a_3 :

$$a_3 = (a_4 + c_2) / a_1.$$

Подставим его в уравнение (44) и получим однозначное выражение

$$a_4 = c_4 / c_2.$$

Тогда из формул (45) и (46) сразу вытекают равенства (47) и (48).

Теперь осталось выражение

$$a_3 = \frac{a_4 + c_2}{a_1} = \frac{c_4 + c_2^2}{a_1c_2}$$

подставить в уравнение (43), которое превратится в биквадратное по переменной a_1 :

$$a_1^4 + \left(2c_1 + \frac{c_2c_3}{c_4}\right)a_1^2 + \frac{(c_4 + c_2^2)^2}{c_2c_4} = 0.$$

Решая данное уравнение, получаем в точности формулы, приведённые в формулировке теоремы.

Достаточность. Пусть выполнены равенства (47) и (48) и коэффициенты многочлена (39) выражаются через a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) в соответствии с системой (41) — (46). Полагая

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4,$$

$$a_3 = -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4), \quad a_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (39) выражаются следующим образом:

$$c_1 = -(q_1 + q_2 + \dots + q_6), \quad c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \dots + q_5q_6, \quad \dots, \quad c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа $q_1, q_2, \dots, q_6$ являются его корнями.

Теорема 7 доказана. ■

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$x^6 + 7x^5 - 112x^4 - 1204x^3 - 2688x^2 + 4032x + 13824 = 0. \quad (49)$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (47) и (48). По формулам для a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) вычислим значения коэффициентов интересующих нас четырёх полиномов четвёртой степени:

$$Q_{4,1}(x) = x^4 + \frac{11\sqrt{6}}{6}x^3 - 7x^2 - 8\sqrt{6}x + 24, \quad (50)$$

$$Q_{4,2}(x) = x^4 - \frac{11\sqrt{6}}{6}x^3 - 7x^2 + 8\sqrt{6}x + 24, \quad (51)$$

$$Q_{4,3}(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24, \quad (52)$$

$$Q_{4,4}(x) = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24. \quad (53)$$

Ниже построчно приведём значения корней полиномов (50) — (53) соответственно:

$$-2\sqrt{6}, \quad \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad -\sqrt{6};$$

$$2\sqrt{6}, \quad -\frac{\sqrt{6}}{2}, \quad -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad \sqrt{6};$$

$$1, \quad 2, \quad -3, \quad -4;$$

$$-1, \quad -2, \quad 3, \quad 4.$$

Несложно убедиться в том, что попарное умножение корней полиномов (50) — (53) даёт один и тот же результат, а именно числа:

$$q_1 = 12; \quad q_2 = 2; \quad q_3 = -8; \quad q_4 = -6; \quad q_5 = -4; \quad q_6 = -3.$$

Путём подстановки данных чисел в исходное уравнение (49) убеждаемся, что все они являются его решениями. Таким образом, можно сделать вывод, что из четырёх наборов формул для коэффициентов полинома четвёртой степени (40) можно выбирать любой, например дающий в конкретном примере менее громоздкие выражения, либо корни которого находятся проще.

5. Анализ связи между коэффициентами полиномов шестой и четвёртой степеней в случае иной конкретной нелинейной связи между их корнями

Данная часть статьи посвящена установлению и доказательству необходимых и достаточных условий, связывающих коэффициенты полинома шестой степени над полем комплексных чисел вида

$$P_6(z) = z^6 + c_1 z^5 + c_2 z^4 + c_3 z^3 + c_4 z^2 + c_5 z + c_6 \quad (54)$$

с коэффициентами семейства полиномов четвёртой степени вида

$$Q_{4,i}(z) = z^4 + a_{1,i} z^3 + a_{2,i} z^2 + a_{3,i} z + a_{4,i} \quad (55)$$

при наличии определённой нелинейной связи между корнями этих полиномов, о которой далее пойдёт речь. В общем случае все коэффициенты рассматриваемых полиномов могут быть комплексными.

Обозначим корни i -го полинома из семейства (55) через p_{1i} , p_{2i} , p_{3i} , p_{4i} , а все попарные комбинации их сумм и произведений через

$$\begin{aligned} q_1 &= p_{1i} p_{2i} (p_{3i} + p_{4i}), & q_2 &= p_{1i} p_{3i} (p_{2i} + p_{4i}), & q_3 &= p_{1i} p_{4i} (p_{2i} + p_{3i}), \\ q_4 &= p_{2i} p_{3i} (p_{1i} + p_{4i}), & q_5 &= p_{2i} p_{4i} (p_{1i} + p_{3i}), & q_6 &= p_{3i} p_{4i} (p_{1i} + p_{2i}). \end{aligned}$$

Теорема 8. Числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) являются корнями полинома (54) тогда и только тогда, когда разрешима относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) система уравнений

$$c_1 = 3a_3, \quad (56)$$

$$2a_2 a_4 + 3a_3^2 - c_2 = 0, \quad (57)$$

$$a_3 (4a_2 a_4 + a_3^2) - c_3 = 0, \quad (58)$$

$$a_4 (a_1 a_3 a_4 + a_2^2 a_4 + 2a_2 a_3^2 - 4a_4^2) - c_4 = 0, \quad (59)$$

$$a_3 a_4^2 (a_1 a_3 + a_2^2 - 4a_4) - c_5 = 0, \quad (60)$$

$$a_4^3 (a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3 + a_3^2) + c_6 = 0. \quad (61)$$

В свою очередь необходимым и достаточным условием разрешимости системы уравнений (56) – (61) относительно a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) являются соотношения

$$c_3 = -\frac{5}{27} c_1^3 + \frac{2}{3} c_1 c_2, \quad (62)$$

$$c_5 = \frac{1}{3} c_1 c_4 + \frac{1}{81} c_1^5 - \frac{1}{27} c_1^3 c_2. \quad (63)$$

При этом решением системы (56) – (61) являются ровно 6 различных наборов чисел a_k ($k = 1, 2, 3, 4$), в которых все a_3 определены единообразно

$$a_3 = \frac{c_1}{3},$$

а остальные элементы находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
 a_{4,1} &= \frac{1}{36} \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s}; \\
 a_{4,2} &= \frac{1}{72} (-1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s}; \\
 a_{4,3} &= \frac{1}{72} (-1 - i\sqrt{3}) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 + s}; \\
 a_{4,4} &= \frac{1}{36} \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s}; \\
 a_{4,5} &= \frac{1}{72} (-1 + i\sqrt{3}) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s}; \\
 a_{4,6} &= \frac{1}{72} (-1 - i\sqrt{3}) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2c_2 - 11664c_4 - s},
 \end{aligned}$$

где $s = 18\sqrt{61c_1^8 - 180c_1^6c_2 + 1296c_1^4c_4 - 46656c_1^2c_6}$;

$$a_{2,i} = \frac{3c_2 - c_1^2}{6a_{4,i}}; \quad a_{1,i} = \frac{c_1^4 + 432a_{4,i}^3 + 6c_1^2c_2 - 27c_2^2 + 108c_4}{36c_1a_{4,i}^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть числа q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) являются корнями полинома (54), тогда данный полином представим в виде

$$\begin{aligned}
 P_6(z) &= (z - p_1p_2(p_3 + p_4))(z - p_1p_3(p_2 + p_4))(z - p_1p_4(p_2 + p_3)) \times \\
 &\quad \times (z - p_2p_3(p_1 + p_4))(z - p_2p_4(p_1 + p_3))(z - p_3p_4(p_1 + p_2)).
 \end{aligned}$$

При любом фиксированном i коэффициенты данного полинома будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -3(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4); \\
 c_2 &= 3(p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_1^2p_3^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2) + \\
 &\quad + 8p_1p_2p_3p_4(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4); \\
 c_3 &= -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4)[(p_1^2p_2^2p_3^2 + p_1^2p_2^2p_4^2 + p_1^2p_3^2p_4^2 + p_2^2p_3^2p_4^2) + \\
 &\quad + 6p_1p_2p_3p_4(p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4)]; \\
 c_4 &= p_1p_2p_3p_4[2(p_1^3p_2^3p_3^2 + p_1^3p_2^3p_4^2 + p_1^3p_2^2p_3^3 + p_1^3p_2^2p_4^3 + p_1^3p_3^3p_4^2 + p_1^2p_3^3p_4^3 + p_2^3p_3^3p_4^2 + p_2^3p_3^3p_4^3 + p_2^2p_3^3p_4^3 + p_2^2p_3^3p_4^4) + \\
 &\quad + 5p_1p_2p_3p_4(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) + 30p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2 + 13p_1p_2p_3p_4(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + \\
 &\quad + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_1p_3p_4^2 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)]; \\
 c_5 &= -p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4)[(p_1^2p_2^2 + p_1^2p_3^2 + p_1^2p_4^2 + p_2^2p_3^2 + p_2^2p_4^2 + p_3^2p_4^2) + \\
 &\quad + 6p_1p_2p_3p_4 + 3(p_1^2p_2p_3 + p_1^2p_2p_4 + p_1^2p_3p_4 + p_1p_2^2p_3 + p_1p_2^2p_4 + p_1p_2p_3^2 + p_1p_2p_4^2 + p_1p_3^2p_4 + p_2^2p_3p_4 + p_2p_3^2p_4 + p_2p_3p_4^2)];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_6 = & p_1^3 p_2^3 p_3^3 p_4^3 [(p_1^3 p_2^2 p_3 + p_1^3 p_2^2 p_4 + p_1^3 p_2 p_3^2 + p_1^3 p_2 p_4^2 + p_1^3 p_3^2 p_4 + p_1^3 p_3 p_4^2 + p_1^2 p_2^3 p_3 + \\
& + p_1^2 p_2^3 p_4 + p_1^2 p_2 p_3^3 + p_1^2 p_2 p_4^3 + p_1^2 p_3^3 p_4 + p_1^2 p_3 p_4^3 + p_1 p_2^3 p_3^2 + p_1 p_2^3 p_4^2 + p_1 p_2^2 p_3^3 + p_1 p_2^2 p_4^3 + \\
& + p_1 p_3^3 p_4^2 + p_1 p_3^2 p_4^3 + p_2^3 p_3^2 p_4 + p_2^3 p_3 p_4^2 + p_2^2 p_3^3 p_4 + p_2^2 p_3 p_4^3 + p_2 p_3^3 p_4^2 + p_2 p_3^2 p_4^3 + \\
& + 2(p_1^2 p_2^2 p_3^2 + p_1^2 p_2^2 p_4^2 + p_1^2 p_3^2 p_4^2 + p_2^2 p_3^2 p_4^2) + 2p_1 p_2 p_3 p_4 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) + \\
& + 4p_1 p_2 p_3 p_4 (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_3 p_4)].
\end{aligned}$$

Равенство (56) следует непосредственно из формул Виета для полинома четвёртой степени. Суммы, стоящие в скобках для выражений оставшихся коэффициентов полинома, представляют собой симметричные полиномы от переменных p_k ($k = 1, 2, 3, 4$) и, согласно известной теореме [6, с. 322] о возможности их представления через элементарные симметрические полиномы, могут быть выражены через коэффициенты полинома (55). Прделав нужные преобразования, получаем оставшиеся уравнения системы (57) — (61).

Проведём анализ этой системы. Из первого уравнения выражаем $a_3 = c_1/3$ и подставляем его в оставшиеся уравнения системы. Тогда получим

$$-2a_2 a_4 - \frac{c_1^2}{3} + c_2 = 0, \quad (64)$$

$$-\frac{4}{3}c_1 a_2 a_4 - \frac{1}{27}c_1^3 + c_3 = 0, \quad (65)$$

$$-\frac{1}{3}a_1 a_4^2 c_1 - a_2^2 a_4^2 - \frac{2}{9}a_4 a_2 c_1^2 + 4a_4^3 + c_4 = 0, \quad (66)$$

$$-\frac{1}{9}c_1^2 a_4^2 a_1 - \frac{1}{3}c_1 a_4^2 a_2^2 + \frac{4}{3}c_1 a_4^3 + c_5 = 0, \quad (67)$$

$$a_1^2 a_4^4 - \frac{1}{3}a_4^3 a_1 a_2 c_1 + \frac{1}{9}a_4^3 c_1^2 + c_6 = 0. \quad (68)$$

Теперь естественным будет выразить из уравнения (64) произведение $a_2 a_4$:

$$a_2 a_4 = -\frac{c_1^2}{6} + \frac{c_2}{2},$$

подставляя которое в уравнение (65), получим в точности условие (62)

$$c_3 = -\frac{5}{27}c_1^3 + \frac{2}{3}c_1 c_2.$$

Подставляя $a_2 a_4$ в остальные уравнения системы (66) — (68), приведём их к виду

$$-\frac{1}{3}a_1 a_4^2 c_1 + \frac{1}{108}c_1^4 + \frac{1}{18}c_1^2 c_2 - \frac{1}{4}c_2^2 + 4a_4^3 + c_4 = 0, \quad (69)$$

$$-\frac{1}{9}c_1^2 a_4^2 a_1 - \frac{1}{108}c_1^5 + \frac{1}{18}c_1^3 c_2 - \frac{1}{12}c_1 c_2^2 + \frac{4}{3}c_1 a_4^3 + c_5 = 0, \quad (70)$$

$$a_1^2 a_4^4 + \frac{1}{18}a_1 a_4^2 c_1^3 - \frac{1}{6}a_1 a_4^2 c_1 c_2 + \frac{1}{9}a_4^3 c_1^2 + c_6 = 0. \quad (71)$$

Чтобы теперь получить условие (63), необходимо из умноженного на c_1 уравнения (69) вычесть уравнение (70), умноженное на 3. Получим

$$c_1 c_4 + \frac{1}{27} c_1^5 - \frac{1}{9} c_1^3 c_2 - 3c_5 = 0,$$

откуда сразу получается условие (63). Далее из уравнения (69) выражаем

$$a_1 a_4^2 = 3 \frac{c_4}{c_1} + \frac{c_1^3}{36} + \frac{c_1 c_2}{6} - \frac{3 c_2^2}{4 c_1} + 12 \frac{a_4^3}{c_1}$$

и подставляем в уравнение (71), которое после умножения на $c_1^2 \neq 0$ (в противном случае из формул (62) и (63) следует, что $c_1 = c_3 = c_5 = 0$ и исходный полином простой заменой переменной сведётся к кубическому, что делает бесполезной нашу идею отыскания полиномов четвёртой степени) и упрощения примет вид:

$$144a_4^6 + \left(2c_1^2 c_2 + \frac{13}{9} c_1^4 + 72c_4 - 18c_2^2\right) a_4^3 + 9c_4^2 - \frac{1}{8} c_1^2 c_2^3 + \frac{9}{16} c_2^4 + \frac{1}{2} c_1^2 c_2 c_4 - \\ - \frac{9}{2} c_4 c_2^2 + c_1^2 c_6 + \frac{1}{432} c_1^{12} + \frac{1}{72} c_1^{10} c_2 - \frac{1}{12} c_1^4 c_2^2 + \frac{1}{3} c_1^4 c_4 = 0.$$

Полученное уравнение заменой $a_4^3 = t$ сводится к квадратному по переменной t , а значит разрешимо в радикалах. Для упрощения обозначим

$$s = 18\sqrt{61c_1^8 - 180c_1^6 c_2 + 1296c_1^4 c_4 - 46656c_1^2 c_6},$$

тогда решения последнего уравнения запишутся в виде

$$a_{4,1} = \frac{1}{36} \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2 c_2 - 11664c_4 + s}; \\ a_{4,2} = \frac{1}{72} \left(-1 + i\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2 c_2 - 11664c_4 + s}; \\ a_{4,3} = \frac{1}{72} \left(-1 - i\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2 c_2 - 11664c_4 + s}; \\ a_{4,4} = \frac{1}{36} \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2 c_2 - 11664c_4 - s}; \\ a_{4,5} = \frac{1}{72} \left(-1 + i\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2 c_2 - 11664c_4 - s}; \\ a_{4,6} = \frac{1}{72} \left(-1 - i\sqrt{3}\right) \sqrt[3]{2916c_2^2 - 234c_1^4 - 324c_1^2 c_2 - 11664c_4 - s}.$$

Осталось для каждого $a_{4,i}$ выразить из формул (64) и (66) соответствующие значения $a_{2,i}$ и $a_{1,i}$:

$$a_{2,i} = \frac{3c_2 - c_1^2}{6a_{4,i}}; \quad a_{1,i} = \frac{c_1^4 + 432a_{4,i}^3 + 6c_1^2 c_2 - 27c_2^2 + 108c_4}{36c_1 a_{4,i}^2} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Достаточность. Пусть выполнены равенства (62) и (63) и коэффициенты многочлена (54) выражаются через a_k ($k = 1, 2, 3, 4$) в соответствии с системой (56) — (61). Полагая

$$a_1 = -(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad a_2 = p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_3p_4,$$

$$a_3 = -(p_1p_2p_3 + p_1p_2p_4 + p_1p_3p_4 + p_2p_3p_4), \quad a_4 = p_1p_2p_3p_4,$$

получаем, что коэффициенты полинома (54) выражаются следующим образом:

$$c_1 = -(q_1 + q_2 + \dots + q_6), \quad c_2 = q_1q_2 + q_1q_3 + \dots + q_5q_6, \quad \dots, \quad c_6 = q_1q_2q_3q_4q_5q_6,$$

т. е. в силу теоремы Виета числа $q_1, q_2, \dots, q_6$ являются его корнями.

Теорема 8 доказана. ■

Для большей наглядности приведём конкретный числовой пример.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$x^6 - 66x^5 + 1116x^4 + 4136x^3 - 240384x^2 + 1710720x - 3483648 = 0. \quad (72)$$

Для коэффициентов этого уравнения выполнены условия связи (62) и (63). По формулам для $a_{k,i}$ ($k = 1, 2, 3, 4; \quad i = 1, 2, \dots, 6$) вычислим значения коэффициентов интересующих нас шести полиномов четвёртой степени и построим их:

$$Q_{4,1}(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24; \quad (73)$$

$$Q_{4,2}(x) = x^4 + (-2 + 2i\sqrt{3})x^3 + \left(\frac{7}{2} + \frac{7i\sqrt{3}}{2}\right)x^2 - 22x - 12 + 12i\sqrt{3}; \quad (74)$$

$$Q_{4,3}(x) = x^4 + (-2 - 2i\sqrt{3})x^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{7i\sqrt{3}}{2}\right)x^2 - 22x - 12 - 12i\sqrt{3}; \quad (75)$$

$$Q_{4,4}(x) = x^4 + \frac{4054 \cdot 4199^{1/3}}{4199}x^3 - \frac{168 \cdot 4199^{2/3}}{4199}x^2 - 22x + 4199^{1/3}; \quad (76)$$

$$Q_{4,5}(x) = x^4 + \left(-\frac{2027 \cdot 4199^{1/3}}{4199} + \frac{2027i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{4199}\right)x^3 + \\ + \left(\frac{84 \cdot 4199^{2/3}}{4199} + \frac{84i\sqrt{3} \cdot 4199^{2/3}}{4199}\right)x^2 - 22x - \frac{4199^{1/3}}{2} + \frac{i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{2}; \quad (77)$$

$$Q_{4,6}(x) = x^4 + \left(-\frac{2027 \cdot 4199^{1/3}}{4199} - \frac{2027i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{4199}\right)x^3 + \\ + \left(\frac{84 \cdot 4199^{2/3}}{4199} - \frac{84i\sqrt{3} \cdot 4199^{2/3}}{4199}\right)x^2 - 22x - \frac{4199^{1/3}}{2} - \frac{i\sqrt{3} \cdot 4199^{1/3}}{2}. \quad (78)$$

Ниже построчно приведены значения корней полиномов (73) — (78) соответственно:

$$\begin{aligned}
 & 1, \quad 2, \quad -3, \quad -4; \\
 & \frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 2 - 2i\sqrt{3}; \\
 & \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}, \quad -1 - i\sqrt{3}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, \quad 2 + 2i\sqrt{3}; \\
 & -u, \quad -\frac{u}{13}, \quad \frac{u}{19}, \quad \frac{u}{17}; \\
 & \frac{u}{2} (1 - i\sqrt{3}), \quad -\frac{u}{38} (1 - i\sqrt{3}), \quad \frac{u}{26} (1 - i\sqrt{3}), \quad -\frac{u}{34} (1 - i\sqrt{3}); \\
 & \frac{u}{2} (1 + i\sqrt{3}), \quad -\frac{u}{38} (1 + i\sqrt{3}), \quad \frac{u}{26} (1 + i\sqrt{3}), \quad -\frac{u}{34} (1 + i\sqrt{3}),
 \end{aligned}$$

где $u = 4199^{1/3}$.

Несложно убедиться в том, что комбинации этих корней в соответствии с формулами для q_j ($j = 1, 2, \dots, 6$) дают один и тот же результат, а именно числа:

$$q_1 = -14; \quad q_2 = 4; \quad q_3 = 6; \quad q_4 = 16; \quad q_5 = 18; \quad q_6 = 36.$$

На практике при использовании исследуемого метода для отыскания корней полинома шестой степени с действительными коэффициентами не имеет особого смысла строить полиномы четвёртой степени с комплексными коэффициентами (в данном примере это $Q_{4,2}(x)$, $Q_{4,3}(x)$, $Q_{4,5}(x)$, $Q_{4,6}(x)$). В статье это сделано с целью проверки и подтверждения формул, представленных в теореме 8.

Заключение

Таким образом, в данной статье проведено сравнение двух различных критериев устойчивости алгебраических полиномов с действительными коэффициентами. Первый из них — на данный момент «классический» критерий Гурвица, второй — менее известный, простой в своём доказательстве, но требующий построения определённого полинома более высокой степени. Можно утверждать, что до широкого распространения систем компьютерной алгебры теорема 4 из настоящей статьи представляла лишь определённый теоретический интерес, но была бесполезной на практике. Действительно, без использования символьных вычислений на компьютере получать формулы выражения коэффициентов необходимых полиномов высоких степеней через коэффициенты того, что проверяется на устойчивость, крайне затруднительно.

На основе проведённого сравнительного анализа двух исследуемых способов проверки на устойчивость можно утверждать, что критерий Гурвица с упрощением в виде теоремы Лъенара–Шипара является более универсальным и простым в применении на практике, поскольку имеет единый алгоритм применения для полиномов различных степеней, в том числе и достаточно больших.

В статье наглядно показано, что усложнение конструкций, возникающих в ходе применения метода из теоремы 4, происходит крайне быстро по сравнению с ростом сложности вычислений определителей Гурвица.

Разумеется, список существующих критериев устойчивости не исчерпывается двумя, рассмотренными в настоящей статье. Иные возможные способы решения проблемы Рауса–Гурвица в значительной степени не превосходят по эффективности критерий Гурвица и описаны, например, в [4].

Стоит отметить, что в случае выполнения условия теорем 5, 7 или 8 в конкретных примерах алгебраическое уравнение шестой степени может быть разрешено в радикалах, поэтому текст настоящей статьи может представлять интерес не только для специалистов в области дифференциальных уравнений, но и для всех, кто увлекается классической математикой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. 244 с.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости: учебное пособие. СПб. : Изд-во «Лань», 2008. 480 с.
3. Прасолов В.В. Многочлены. М. : МЦНМО, 2014. 336 с.
4. Постников М.М. Устойчивые многочлены. М. : Едиториал УРСС, 2004. 176 с.
5. Strelitz Sh. On the Routh–Hurwitz Problem // The American Mathematical Monthly. 1977. V. 84, No. 7. P. 542–544.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: учебник. СПб. : Издательство «Лань», 2013. 432 с.

COMPARATIVE ANALYSIS OF STABILITY CRITERIA FOR POLYNOMIALS

М.М. Chernyavsky

Postgraduate Student of the Department of Engineering Physics,
e-mail: misha360ff@mail.ru

Masherov Vitebsk State University, Vitebsk, Belarus

Abstract. The article provides a comparative analysis of two stability criteria for polynomials. They do not require obtaining any information about the roots, but allow us to judge stability directly by the coefficients of the polynomial. On specific numerical examples, the features of their application are considered. The article also provides symbolic expressions of the relationship between the coefficients of sixth and fourth degree polynomials for cases where there is a linear or definite nonlinear relationship between the roots of these polynomials. In these cases, an algebraic equation of the sixth degree can be solved in radicals.

Keywords: polynomial, Hurwitz criterion, Hurwitz matrix, stability theory, algebraic equations, solution in radicals.

REFERENCES

1. Boikov I.V. Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii. Penza, Izd-vo Penz. gos. un-ta, 2008, 244 p. (in Russian)
2. Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti: Uchebnoe posobie. SPb., Izd-vo Lan', 2008, 480 p. (in Russian)
3. Prasolov V.V. Mnogochleny. Moscow, MTsNMO, 2014. 336 p. (in Russian)
4. Postnikov M.M. Ustoichivye mnogochleny. Moscow, Editorial URSpp. 2004. 176 p. (in Russian)
5. Strelitz Sh. On the Routh–Hurwitz Problem. The American Mathematical Monthly, 1977, vol. 84, no. 7, pp. 542–544.
6. Kurosh A.G. Kurs vysshei algebrы: Uchebnik. SPb., Izdatel'stvo Lan', 2013. 432 p. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 02.07.2020

LEXICOGRAPHIC-TYPE EXTENSION OF MIN-MAX LOGIC IS NOT UNIQUELY DETERMINED

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. Since in a computer, “true” is usually represented as 1 and “false” as 0, it is natural to represent intermediate degrees of confidence by numbers intermediate between 0 and 1; this is one of the main ideas behind *fuzzy logic* – a technique that has led to many useful applications. In many such applications, the degree of confidence in $A \& B$ is estimated as the minimum of the degrees of confidence corresponding to A and B , and the degree of confidence in $A \vee B$ is estimated as the maximum; for example, $0.5 \vee 0.3 = 0.5$. It is intuitively OK that, e.g., $0.5 \vee 0.3 < 0.51$ and, more generally, that $0.5 \vee 0.3 < 0.5 + \varepsilon$ for all $\varepsilon > 0$. However, intuitively, an additional argument in favor of the statement should increase our degree of confidence, i.e., we should have $0.5 < 0.5 \vee 0.3$. To capture this intuitive idea, we need to extend the min-max logic from the interval $[0, 1]$ to a lexicographic-type order on a larger set. Such extension has been proposed – and successfully used in applications – for some propositional formulas. A natural question is: can this construction be uniquely extended to all “and”-“or” formulas? In this paper, we show that, in general, such an extension is not unique.

Keywords: fuzzy logic, min-max logic, lexicographic extension.

1. Formulation of the Problem

Need for intermediate degrees of belief. In the usual 2-valued logic, every statement is either true or false. In a computer, “true” is usually represented as 1, and “false” as 0.

In practice, for many statements, we do not know whether they are true or false, but we have some degree of confidence that they are true. A reasonable idea is to describe this degree of confidence by numbers intermediate between 0 (false, absolutely no confidence) and 1 (true, absolute confidence). Using such degrees of confidence is one of the main ideas behind *fuzzy logic*, a technique that has been successful in many applications; see, e.g., [5, 8–12, 15].

Need for “and”- and “or”-operations. For each statement provided by an expert, we can ask this expert to also provide his/her degree of confidence in this

statement. However, to make conclusions, we usually need to use several such statements.

For example, sometimes, the conclusion is true only if both statements A and B are true, i.e., if a composite statement $A \& B$ is true. Sometime, the conclusion can be derived from each of these statements, so the conclusion is true if either A is true or B is true, i.e., if a composite statement $A \vee B$ is true. In general, we can have more complex composite statements.

So, in addition to degrees of confidence in individual statements, we also need to know degrees of confidence in such composite statements. For n basic statements $A_1, \dots, A_n$, we can have exponentially many composite statements – e.g., we have $A_{i_1} \& \dots \& A_{i_k}$ for each of $2^n - (n + 1)$ non-trivial subsets $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Even for reasonable-size n like $n = 30$, this means billions of possible composite statements. There is no way we can ask the experts to provide degree of confidence in each of these statements. So, we need to be able to estimate the degree of confidence in such statements – in particular, in statements $A \& B$ and $A \vee B$ – based on the known degrees of confidence a and b in statements A and B . For “and”- and “or”-statements, the resulting estimates are known as “*and*”-operations and “*or*”-operations, or, for historical reasons, t-norms and t-conorms. In this paper, we will denote these operations by $a \& b$ and $a \vee b$.

These operations much satisfy some natural requirements. For example, since $A \& B$ means the same as $B \& A$, it is reasonable to require these two formulas should result in the same estimate, i.e., that we should always have $a \& b = b \& a$. Similarly, the fact that $A \& (B \& C)$ means the same as $(A \& B) \& C$ implies that it is reasonable to have $a \& (b \& c) = (a \& b) \& c$, etc.

Our degree of confidence in a stronger statement “ A and B ” cannot be larger than our degree of confidence in each individual statement, i.e., we must have $a \& b \leq a$ and $a \& b \leq b$. Similarly, our degree of confidence in a weaker statement $A \vee B$ cannot be smaller than our degree of confidence in each of the original statements, so we should have $a \leq a \vee b$ and $b \leq a \vee b$.

There many other similar natural requirements. There are many different “and”- and “or”-operations satisfying all these requirements; see, e.g., [5, 8–12, 15].

Min-max logic. It seems natural to also impose some additional requirements: e.g., if our degree of confidence in a statement C is larger than (or equal to) our degrees of confidence in A and in B , then it should also be larger than or equal to our degree of confidence in a statement “ A or B ”. In precise terms: if $a \leq c$ and $b \leq c$, then we should have $a \vee b \leq c$.

For $a \leq b$ and $c = b$, the fact that we have $a \leq b$ and $b \leq b$ immediately implies that $a \vee b \leq b$. Since we always have $b \leq a \vee b$, this implies that $a \vee b = \max(a, b)$, i.e., that we have a max “or”-operation.

Similar, it is reasonable to require that if $c \leq a$ and $c \leq b$, then $c \leq a \& b$. For $a \leq b$ and $c = a$, since we have $a \leq a$ and $a \leq b$, we thus imply that $a \leq a \& b$. Since we always have $a \& b \leq a$, this implies that $a \& b = \min(a, b)$, i.e., that we have a min “and”-operations.

Need for a lexicographic extension. Formally, in the min-max logic, we have,

e.g., $0.5 \vee 0.3 = 0.5$. However, intuitively, if we have an additional argument in favor of the statement – even if that additional argument is weaker than the original one – this should boost our degree of confidence in a statement.

In other words, it is OK that $0.5 \vee 0.3$ is smaller than 0.6, smaller than 0.51, smaller than 0.501 – and, in general, smaller than $0.5 + \varepsilon$ for an arbitrary small $\varepsilon > 0$, but we would like to require that $0.5 < 0.5 \vee 0.3$. So, it is desirable to extend the set of possible values of degree of confidence from the interval $[0, 1]$ to some more general ordered set.

A possibility to have values which are greater than 0.5 but smaller than all larger numbers occurs, e.g., in lexicographic orderings of pairs of non-negative numbers, when $(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$ if and only if:

- either $a_1 < b_1$
- or $a_1 = b_1$ and $b_1 < b_2$;

in this case, $(0.5, 0) < (0.5, 0.3)$ but $(0.5, 0.3) < (0.5 + \varepsilon, 0)$ for all $\varepsilon > 0$. So, it is reasonable to call the desired extension *lexicographic-type*.

For some composite formulas, such an extension was proposed and used in [1–4, 14]. This extension was successfully used to deal with uncertainty in petroleum engineering and in other application areas; see, e.g., [14].

Comment. What we should get is, in effect, a new value which differs from 0.5 by an infinitesimal number – similar to what is done in *nonstandard analysis*; see, e.g., [6, 7, 13].

Natural question. A natural question is: how unique is this extension?

Our conclusion is that it is *not* unique.

2. Our Answer

A natural formalization. Let us first formulate the above question in precise terms.

We want to consider expressions E of the type a , $a \vee b$, $a \& (b \vee c)$, i.e., expressions obtained from numbers from the interval $[0, 1]$ by using symbols $\vee$ and $\&$.

The following natural formalization comes from the fact that for most other “or”-operations, we have $a < a \vee b$ for all $a < 1$. The max-operation can be represented as a limit of such operations. Similarly, for most other “and”-operations, we have $a \& b < a$ for all $a > 0$. The min-operation can be represented as a limit of such operations.

So, let us consider a family $\vee_p$ of “or”-operations:

- that tend to $\max(a, b)$, i.e., for which $a \vee_p b \rightarrow \max(a, b)$ as $p \rightarrow \infty$, and
- for which, for each $a < 1$ and b , we have $a < a \vee_p b$ for all sufficiently large p .

We can have many such families. For example, we can take

$$a \vee_p b = \min \left((a^p + b^p)^{1/p}, 1 \right).$$

One can easily check that all the elements of this sequence are “or”-operations (t-conorms), and that the above expression indeed tends to $\max(a, b)$ as p increases.

Similarly, let us consider a family $\&_p$ of “and”-operations that:

- tend to $\min(a, b)$, i.e., for which $a \&_p b \rightarrow \min(a, b)$ as $p \rightarrow \infty$, and
- for which, for all $a > 0$ and b , we have $a \&_p b < a$ for all sufficiently large p .

We can have many such families. For example, we can take

$$a \&_p b = (a^{-k \cdot p} + b^{-k \cdot p})^{-1/(k \cdot p)},$$

for some $k > 0$. One can easily check that all the elements of this sequence are “and”-operations (t-norms), and that the above expression indeed tends to $\min(a, b)$ as p increases.

For each expression and for each p , we can get a value E_p if we interpret $\vee$ as $\vee_p$ and $\&$ as $\&_p$. For example, for the expression $E = 0.3 \vee (0.5 \& 0.4)$, we have $E_p \stackrel{\text{def}}{=} 0.3 \vee_p (0.5 \&_p 0.4)$. In the limit $p \rightarrow \infty$, the value E_p tends to the value of E in the min-max logic.

For two expressions E and E' , we can then say that $E < E'$ if for all sufficiently large p , we have $E_p < E'_p$. By the properties of the operations $\vee_p$, this will guarantee, e.g., that $0.5 < 0.5 \vee 0.3$, and, in general, that $a < a \vee b$ for all $a < 1$ and b .

Now, we can formulate the above question in precise terms.

Question. When $a < 1$, then for expressions a and $a \vee b$, we have $a < a \vee b$ no matter what families $\vee_p$ and $\&_p$ we select. In this sense, for these two expressions, the lexicographic-type extension of min-max logic is unique.

A natural question is whether this is true for all pairs of expressions.

Our answer. Our answer is that there exist pairs of expressions E and E' for which the order depends on which families $\vee_p$ and $\&_p$ we select: for some families, we have $E < E'$, while for others, we have $E' < E$.

As an example, we can take the expressions $E = (a \& a) \vee (a \& a)$ and $E' = a$ for which $E_p = (a \&_p a) \vee_p (a \&_p a)$ and $E'_p = a$.

Different orders can be observed already for the above examples of families: specifically, different orders can be observed for different values k .

When k is very large, then, in comparison with the “or”-operation, we practically have $a \&_p b \approx \min(a, b)$. In particular, $a \&_p a \approx a$, and thus, the value E_p is thus approximately equal to $a \vee_p a$. We know that $a < a \vee_p a$, so in this case, we have $E'_p < E_p$, and thus, by definition $E' < E$.

On the other hand, when k is very small, then, in effect, the opposite happens: in comparison with the “and”-operation, we practically have $a \vee_p b \approx \max(a, b)$. Thus,

$$E_p = (a \&_p a) \vee_p (a \&_p a) \approx \max(a \&_p a, a \&_p a) = a \&_p a.$$

We know that $a \&_p a < a$, so in this case, we have $E_p < E'_p$ and thus, $E < E'$.
Non-uniqueness is proven.

Acknowledgments

This work was supported in part by the National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

The authors are thankful to Ildar Batyrshin for valuable discussions.

REFERENCES

1. Batyrshin I.Z. Lexicographic estimates of the likelihood with universal bounds. I. Transactions of the Russian Academy of Sciences: Technical Cybernetics, 1994, no. 5, pp. 44–59.
2. Batyrshin I.Z. Modus ponens generating function in the class of Λ -valuations of plausibility. Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Seattle, Washington, July 29–31, 1994, pp. 55–59.
3. Batyrshin I.Z. Uncertainties with memory in construction of strict monotonic t-norms and t-conorms for finite ordinal scales: basic definitions and applications. Applied and Computational Mathematics, 2011, vol. 10, no. 3, pp. 498–513.
4. Batyrshin I.Z. and Batyrshin I.I. Negations, strict monotonic t-norms and t-conorms for finite ordinal scales. Proceedings of the 8th Joint Conference on Information Sciences (JCIS) and 10th International Conference on Fuzzy Theory and Technology, Salt Lake City, July 21–26, 2005, pp. 50–53.
5. Belohlavek R., Dauben J.W., and Klir G.J. Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective. Oxford University Press, New York, 2017.
6. Goldblatt R. Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
7. Gordon E.I., Kusraev A.G. and Kutateladze S.S. Infinitesimal Analysis. Kluwer, Dordrecht, 2002.
8. Klir G. and Yuan B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
9. Mendel J.M. Uncertain Rule-Based Fuzzy Systems: Introduction and New Directions. Springer, Cham, Switzerland, 2017.
10. Nguyen H.T. and Kreinovich V. Nested intervals and sets: concepts, relations to fuzzy sets, and applications. In: R.B. Kearfott and V. Kreinovich (eds.). Applications of Interval Computations, Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 245–290.
11. Nguyen H.T., Walker C., and Walker E.A. A First Course in Fuzzy Logic. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2019.
12. Novák V., Perfilieva I., and Močkoř J. Mathematical Principles of Fuzzy Logic. Kluwer, Boston, Dordrecht, 1999.
13. Robinson A. Nonstandard Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1996.

14. Sheremetov L., Batyrshin I.Z., Filatov D., Martinez J., and Rodriguez H. Fuzzy expert system for solving lost circulation problem. Applied Soft Computing, 2008, vol. 8, pp. 14–29.
15. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, vol. 8, pp. 338–353.

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЕ РАСШИРЕНИЕ ЛОГИКИ МИНИМАКСА НЕ ОПРЕДЕЛЕНО ОДНОЗНАЧНО

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. Поскольку в компьютере «истина» обычно представлена как 1, а «ложь» — как 0, естественно представлять промежуточные степени достоверности числами между 0 и 1; это одна из основных идей, лежащих в основе *нечёткой логики* — техники, которая привела к множеству полезных приложений. Во многих таких приложениях степень уверенности в $A \& B$ оценивается как минимум из степеней уверенности, соответствующих A и B , а степень уверенности в $A \vee B$ оценивается как максимум; например $0,5 \vee 0,3 = 0,5$. Интуитивно понятно, что, например, $0,5 \vee 0,3 < 0,51$ и, в более общем смысле, $0,5 \vee 0,3 < 0,5 + \varepsilon$ для всех $\varepsilon > 0$. Однако интуитивно дополнительный аргумент в пользу утверждения должен повысить нашу степень уверенности, т.е. мы должны иметь $0,5 < 0,5 \vee 0,3$. Чтобы уловить эту интуитивную идею, нам нужно расширить логику минимакса с интервала $[0, 1]$ до порядка лексикографического типа на большем множестве. Такое расширение было предложено — и успешно используется в приложениях — для некоторых формул высказываний. Возникает естественный вопрос: можно ли однозначно распространить эту конструкцию на все пропозициональные формулы? В этой статье мы показываем, что такое расширение, вообще говоря, не единственно.

Ключевые слова: нечёткая логика, минимаксная логика, лексикографическое расширение.

Дата поступления в редакцию: 13.07.2020

РАСЧЁТ СКОРОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА ГАЗА В УСЛОВИЯХ БОКОВОГО ВЕТРОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.Г. Обухов

д.ф.-м.н., профессор, e-mail: agobukhov@inbox.ru

Тюменский индустриальный университет, Тюмень, Россия

Аннотация. В работе приводятся результаты численного моделирования бокового ветрового воздействия на трехмерные нестационарные течения воздуха, в восходящем закрученном потоке искусственно созданного торнадо, находящегося в стационарном режиме функционирования. Математической моделью является полная система уравнений Навье-Стокса при учёте вязкости и теплопроводности движущегося газа, а также действия сил тяжести и Кориолиса. С использованием явной разностной схемы и при соответствующем выборе начальных и краевых условий численно получены решения полной системы уравнений Навье-Стокса в прямоугольной расчётной области. В фиксированные моменты времени рассчитаны все компоненты скорости течения газа и построены мгновенные линии тока при учёте постоянной горизонтально направленной скорости ветра. Расчеты показали, что результатом ветрового воздействия на восходящий закрученный поток является несимметричное изменение окружной скорости, его неравномерная деформация на противоположных участках, и общее смещение вихря по направлению ветра. Кроме того, установлено смещение, и искривление вертикальной части вихря в направлении ветра, зафиксирован «отрыв» некоторых мгновенных линий тока от вертикальной вращающейся части и появление в центре вихря увеличивающейся в диаметре области, свободной от линий тока. В исследованном диапазоне изменения времени наблюдается устойчивость воздушного вихря к ветровому воздействию, а также устойчивая работа используемой вычислительной схемы.

Ключевые слова: газовая динамика, полная система уравнений Навье-Стокса, начально-краевые условия, разностные методы.

Введение

Численное моделирование сложных трёхмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в природных атмосферных вихрях актуально. Результаты численных исследований на основе адекватных моделей могут быть взяты за основу минимизации негативных разрушительных последствий атмосферных вихрей. При этом аналитические исследования поз-

воляют на строгом математическом уровне установить свойства решений рассматриваемых задач. Численное же моделирование даёт конкретные числовые характеристики рассматриваемых течений, в том числе для их сопоставления с данными натурных и экспериментальных наблюдений. Схема возникновения и устойчивого функционирования восходящего закрученного потока воздуха [1] предполагает наличие достаточно длительного по времени восходящего потока и сопутствующего ему радиального течения воздуха, а также действие силы Кориолиса, придающее существенную окружную скорость частицам воздуха в придонной части. Факт возникновения закрутки и ее направление строго математически доказан на уровне соответствующих теорем [2, 3] и подтвержден экспериментально [4, 5]. Наблюдения за природными восходящими закрученными потоками [6] позволили высказать гипотезу о существовании границы, отделяющей внешний покоящийся воздух от воздуха, движущегося в восходящем закрученном потоке. В газовой динамике такая граница называется контактной поверхностью [7, 8]. Поэтому для создания стабильного восходящего закрученного потока в лабораторных условиях в качестве контактной поверхности используется непроницаемая для воздуха вертикальная цилиндрическая труба с вентилятором вытяжного действия, направляющим воздух по трубе снизу вверх [3, 9]. Исходя из результатов проведенных экспериментов, были численно смоделированы и рассчитаны все газодинамические параметры [3, 10], включая скоростные и энергетические характеристики трёхмерного нестационарного восходящего закрученного течения газа конкретного масштаба, вызванного вертикальным продувом. Численные расчёты подобного течения газа позволили дать конкретные предложения и рекомендации по возможному проведению крупномасштабного эксперимента по закрутке больших масс воздуха — искусственного торнадо. Полученные ранее численные результаты [10–12] лежат в основе дальнейших исследований в газодинамической теории разрушительных атмосферных вихрей. В частности, весьма интересным представляется численное моделирование явления искривления вертикальной части восходящего закрученного потока — «хобота», визуально наблюдаемого в природных торнадо [6]. Этот эффект очевидно свидетельствует о значительной устойчивости атмосферного вихря и пока не имеет достаточно адекватного научного объяснения. Целью данной работы и является численное моделирование функционирования искусственного торнадо и расчёт его скоростных характеристик в условиях бокового ветрового воздействия на него.

1. Математическая модель

В качестве математической модели, описывающей сложные трёхмерные нестационарные течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа (каким является атмосферный воздух), используется полная система уравнений Навье–Стокса, которая в безразмерных переменных с учётом действия сил тяжести и

Кориолиса в векторной форме имеет следующий вид [3]:

$$\begin{cases} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[\frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}. \end{cases}$$

В этой системе: t — время; x, y, z — декартовы координаты; ρ — плотность газа; $\mathbf{V} = (u, v, w)$ — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси; T — температура газа; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести, а $g = \text{const} > 0$; $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} = (av - bw, -au, bu)$ — вектор ускорения силы Кориолиса, где $a = 2\Omega \sin \psi$, $b = 2\Omega \cos \psi$, $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$; $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки O — начала декартовой системы координат $Oxyz$, вращающейся вместе с Землёй; $\mu_0 = 0.001$, $\kappa_0 \approx 1.46\mu_0$ — постоянные безразмерные значения коэффициентов вязкости и теплопроводности.

Расчётная область (рис. 1) представляет собой прямоугольный параллелепипед с длинами сторон $x^0 = 1$, $y^0 = 1$ и $z^0 = 0.04$ вдоль осей Ox , Oy и Oz соответственно, которая заполняется трёхмерной сеткой узлов пересечения трёх семейств плоскостей $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$, где $x_i = i \cdot \Delta x$, $y_j = j \cdot \Delta y$, $z_k = k \cdot \Delta z$, $0 \leq i \leq L$, $0 \leq j \leq M$, $0 \leq k \leq N$. Разностные шаги по трём пространственным переменным $\Delta x = x^0/L$, $\Delta y = y^0/M$, $\Delta z = z^0/N$, $L = 200$, $M = 200$, $N = 20$.

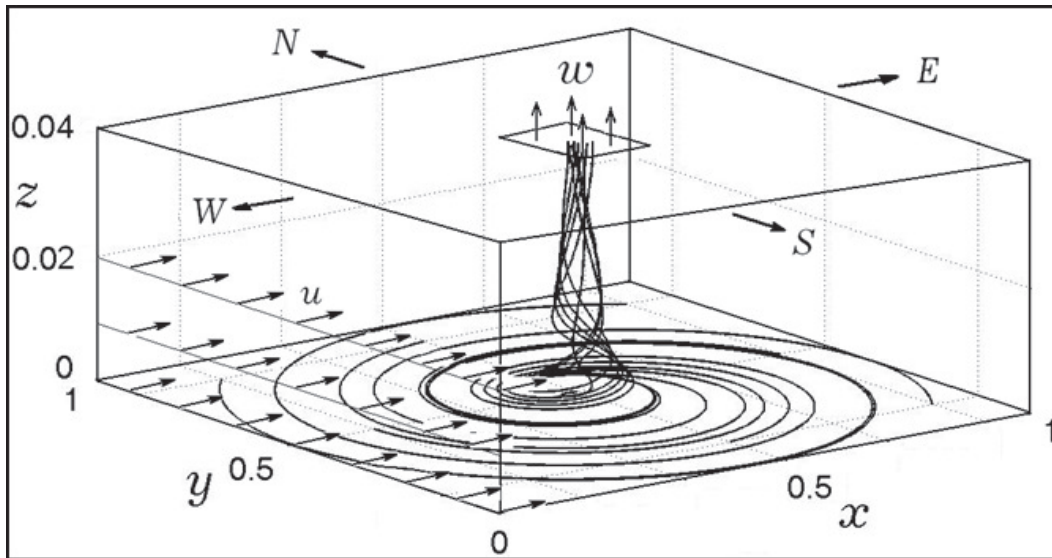


Рис. 1. Расчётная область

За начальные условия во всех внутренних узлах расчётной области принимаются значения искоемых пяти функций, характеризующих течение воздуха в искусственно созданном торнадо на момент $t = t_s$ выхода его на стационарный режим функционирования [11, 12]: $u = u(x, y, z, t_s)$, $v = v(x, y, z, t_s)$, $w = w(x, y, z, t_s)$, $T = T(x, y, z, t_s)$, $\rho = \rho(x, y, z, t_s)$.

Граничные условия на гранях расчётной области устанавливаются следующим образом. Плотность на четырёх боковых гранях расчётного параллелепипеда $x = 0$, $x = x^0$, $y = 0$, $y = y^0$, принимается равной значениям из стационарного распределения плотности атмосферного воздуха [3]

$$\rho|_{x=0, x=x^0} = \rho_0(x, y, z), \quad \rho|_{y=0, y=y^0} = \rho_0(x, y, z),$$

$$\rho_0(z) = (1 - \alpha z)^{\nu-1}, \quad \alpha = \frac{lx_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \frac{K}{m}, \quad x_{00} = 50m, \quad T_{00} = 288^\circ K, \quad \nu = \frac{\gamma g}{\alpha}.$$

Плотность на нижней $z = 0$ и верхней грани $z = z^0$ подчиняется условию непрерывности потока. Это означает, что значения плотности на границы области сносятся линейной экстраполяцией по нормали к данной граничной поверхности из внутренней части расчётной области [3].

Для температуры на всех боковых гранях задаются значения из стационарного распределения температуры атмосферного воздуха

$$T|_{x=0, x=x^0} = T_0(x, y, z), \quad T|_{y=0, y=y^0} = T_0(x, y, z), \quad T_0(z) = 1 - \alpha z.$$

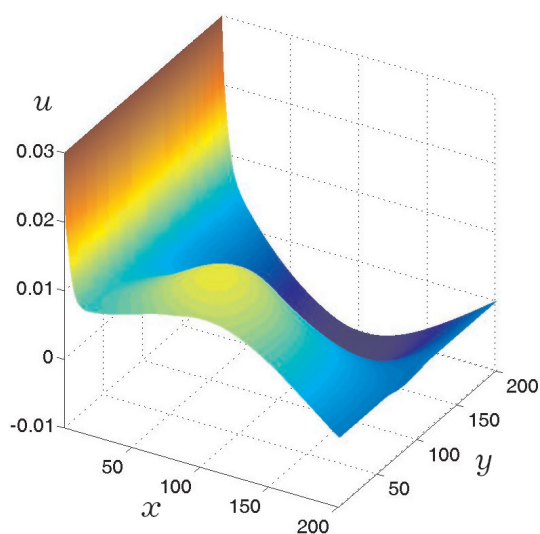
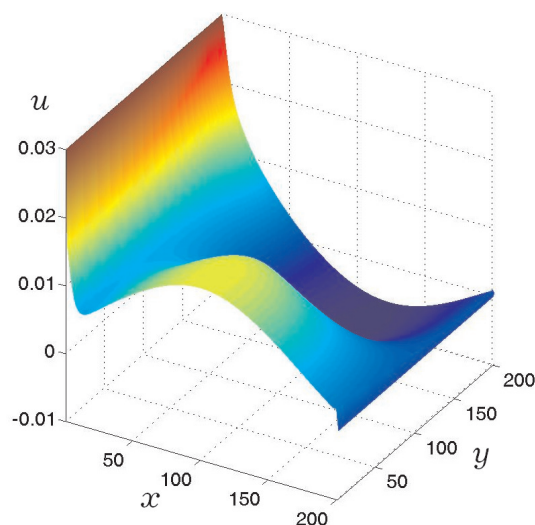
Температура на нижней $z = 0$ и верхней $z = z^0$ грани соответствует условию симметрии. При этом значения температуры считаются из условия равенства нулю их производной по нормали к данной грани.

На верхней и нижней гранях задаются условия непротекания. При этом третья компонента скорости равна нулю $w|_{z=0, z=z^0} = 0$, а первая и вторая компоненты вектора скорости определяются из условия симметрии, то есть считаются из условия равенства нулю их производной по нормали к данной грани. Кроме того, через квадратное отверстие размером 0.1×0.1 в центре верхней грани задаётся вертикальная скорость $w = 0.03$, моделирующая вертикальный продув воздуха со скоростью 10 м/с через трубу диаметром 5 м.

На боковых гранях расчётной области для всех нормальных к граням компонент вектора скорости задаются условия непрерывности, а две тангенциальные компоненты скорости рассчитываются по условию симметрии. Дополнительно на левой (западной) грани $x = 0$ при $0 < z < z^0/2$ задаётся нормальная составляющая скорости, равная скорости ветра $u = 0.03$. Таким образом, моделируется горизонтально направленное ветровое воздействие на восходящий закрученный поток искусственно созданного торнадо.

Для аппроксимации производных по времени используются значения функции с двух последовательных временных слоёв, а для аппроксимации производных по пространственным переменным используются центральные разности значений функций.

Расчёт трёхмерного нестационарного течения ведётся по явной разностной схеме переходом с очередного n -го временного слоя на следующий $(n + 1)$ временной слой с постоянным заданным шагом Δt . Вычисляются значения всех искоемых функций во всех внутренних точках прямоугольного параллелепипеда. После этого значения искоемых функций определяются во всех внутренних точках каждой из шести граней. Значения всех искоемых функций во внутренних точках всех двенадцати рёбер прямоугольного параллелепипеда находятся как

Рис. 2. Скорость u для $t_1 = 1$ сРис. 3. Скорость u для $t_2 = 10$ с

среднее арифметическое двух промежуточных значений, определённых линейной интерполяцией по значениям функций в двух точках на нормалях к ребру в каждой из граней.

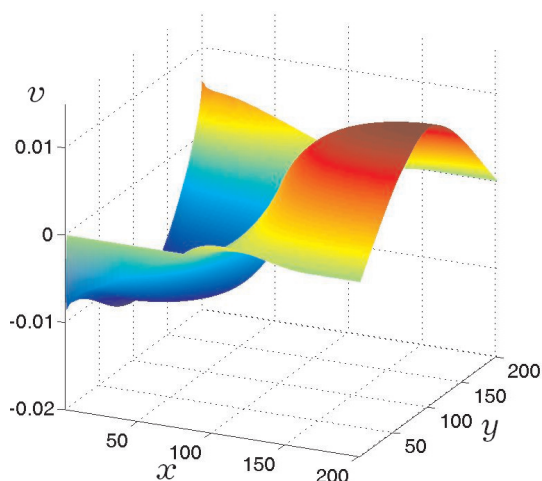
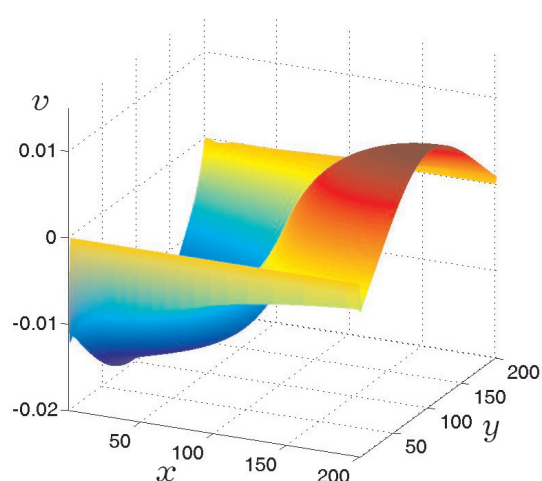
Расчёты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны соответственно $\rho_{00} = 1,2928$ кг/м³, $u_{00} = 333$ м/с, $x_{00} = 50$ м, $t_{00} = x_{00}/u_{00} = 0,15$ с. Разностные шаги по трём пространственным переменным $\Delta x = \Delta y = 0,005$, $\Delta z = 0,002$, а шаг по времени $\Delta t = 0,001$.

2. Результаты расчётов

Приводится анализ расчёта скоростных характеристик течения воздуха в искусственном торнадо при наличии ветровой нагрузки на нижнюю половину его придонной части. На рисунках 2-7 представлены графики трех компонент скорости для высоты $z = 0,2$ м и для двух фиксированных моментов времени $t_1 = 1$ с, $t_2 = 10$ с. По осям Ox и Oy отложены номера узлов расчётной сетки, по оси z — скорость газа в безразмерных величинах.

На рисунках 2-3 приводятся рассчитанные поверхности первой компоненты скорости течения газа как графическое изображение функций двух переменных $u(x, y)$ для упомянутых выше высоты и моментов времени.

На приведённых рисунках графики первой компоненты u скорости отражают наличие на западной (левой) грани $x = 0$ расчётной области заданной скорости ветра 0,03 (размерное значение 10 м/с). Горизонтальное, направленное вдоль оси абсцисс, движение воздуха достаточно быстро теряет свою скорость до значений 0,008 (размерное значение 2,7 м/с) при встрече с вращающимся в положительном направлении потоком (рис. 2). При этом встречное движение воздуха в ветровом потоке и северной части вихря приводит к их взаимодей-

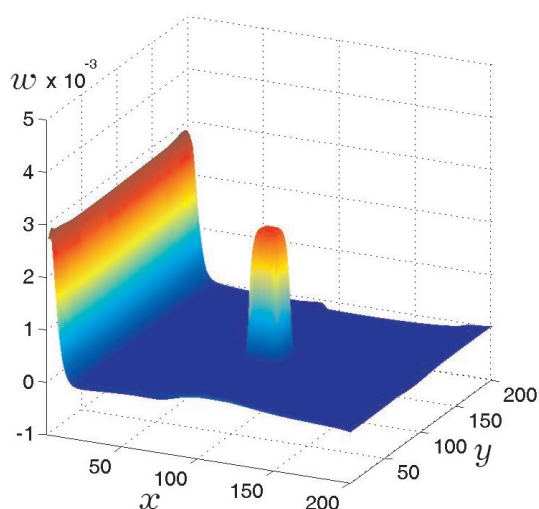
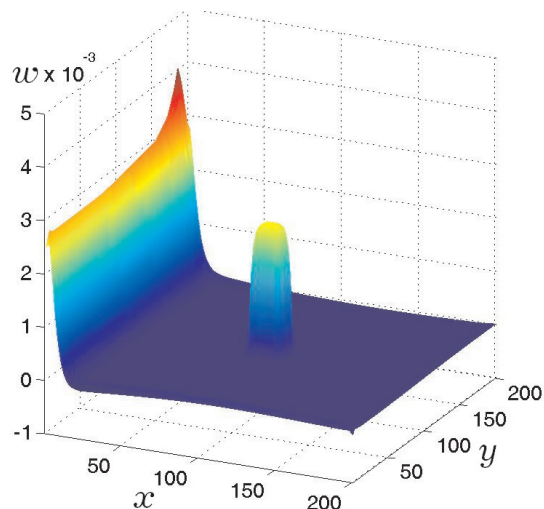
Рис. 4. Скорость v для $t_1 = 1$ сРис. 5. Скорость v для $t_2 = 10$ с

ствию, в результате которого скорость ветра вычитается из окружной скорости вихря, которая в итоге принимает отрицательное значение $-0,01$ (размерное значение $-3,33$ м/с), а вихрь целиком смещается в восточном направлении (рис. 3). В то же время движение воздуха в ветровом потоке совпадает по направлению с движением воздуха в южной части вихря. В результате скорость ветра складывается с окружной скоростью вихря в южной его части, достигая суммарной скорости $0,02$ (размерное значение $6,66$ м/с). Таким образом, результатом ветрового воздействия на восходящий закрученный поток является его неравномерная деформация в северо-восточном направлении, несимметричное изменение окружной скорости и общее смещение вихря по направлению ветра.

На рисунках 4-5 приводятся рассчитанные поверхности второй компоненты скорости течения газа как графическое изображение функций двух переменных $v(x, y)$ для упомянутых выше высоты и фиксированных моментов времени. Из представленных рисунков можно судить о поведении второй составляющей v скорости течения газа.

В течение первых пяти секунд расчётного времени происходит увеличение абсолютного значения этой компоненты скорости, направленной на юг расчётной области к грани $y = 0$ (левая часть на рисунках) в пределах $0,01 \div 0,015$ (размерные значения $3,33 \div 5,0$ м/с). Это связано с тем, что в этот период времени происходит интенсивное сложение двух перпендикулярно направленных течений — течения воздуха в вихре, направленного на юг, и заданного ветрового течения, направленного на восток (рис. 4). Для второй половины расчётного времени характерно замедление роста этой компоненты скорости в указанной части расчётной области при одновременном смещении её к восточной части и возрастании скорости в этой части вихря, направленной на север (рис. 5). Описанный выше процесс изменения второй v компоненты скорости говорит о деформации и смещении вихря как единого целого в северо-восточном направлении при заданной изначально скорости ветра.

На рисунках 6-7 изображены графики третьей w компоненты скорости для

Рис. 6. Скорость w для $t_1 = 1$ сРис. 7. Скорость w для $t_2 = 10$ с

рассматриваемых моментов времени. Характерно наличие локального повышения этой компоненты скорости до значения 0,0025 (размерное 0,83 м/с) в центре расчётной области, соответствующей квадратному отверстию продува воздуха в верхней грани расчётной области. Кроме того, на рисунках присутствует область увеличенных значений скорости w до значений 0,003 (размерное 1 м/с) вблизи левой (западной) грани расчётной области, которая на расстоянии порядка 10 расчётных узлов (2,5 м) уменьшается до нуля. Наблюдается также некоторое увеличение со временем значений вертикальной скорости вблизи северо-западного вертикального ребра расчётной области, наличие которого можно трактовать как результат взаимодействия встречных течений воздуха.

Численные расчёты трёх компонентов скоростей дают возможность построить мгновенные линии тока сложных трёхмерных нестационарных течений в рассматриваемых восходящих закрученных потоках искусственного торнадо при воздействии на него внешнего потока воздуха. На рисунках 8-9 приведены мгновенные линии тока в боковой проекции перпендикулярной оси абсцисс. На рисунках количество мгновенных линий тока одинаково, и выводятся они из горизонтальной поверхности, примыкающей к плоскости $z = 0$. Рисунки с мгновенными линиями тока соответствуют тем же моментам времени $t_1 = 1$ с, $t_2 = 10$ с. По осям координат отложены расстояния в безразмерных величинах.

За рассчитанный промежуток времени центр вихря в основании придонной части сместился в восточном направлении (вправо) на расстояние 0,08 (размерное значение 4 м), а центр вихря вверху вертикальной части в том же направлении на расстояние 0,04 (размерное значение 2 м). При этом вся вертикальная часть вихря — его «хобот» — подвергается изгибу с выпуклостью в восточном направлении (вправо). Кроме того, на рисунках отчётливо видно увеличение диаметра вихря, начинающееся в придонной части и переходящее в вертикальную его часть. Результатом такой деформации можно считать появление в центре вихря увеличивающейся области, свободной от линий тока.

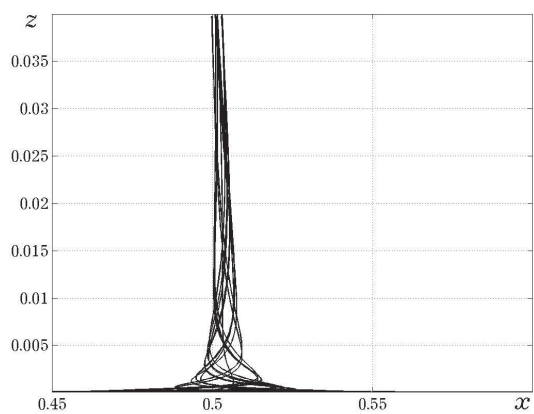


Рис. 8. Вид сбоку на линии тока для $t_1 = 1$ с

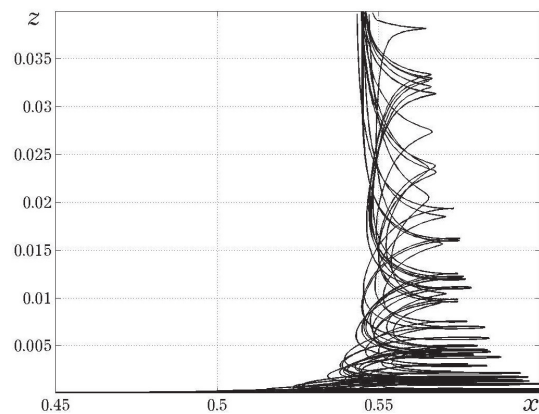


Рис. 9. Вид сбоку на линии тока для $t_2 = 10$ с

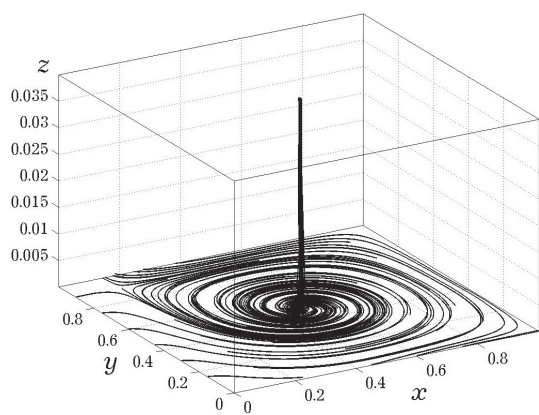


Рис. 10. Вид под углом на линии тока для $t_1 = 1$ с

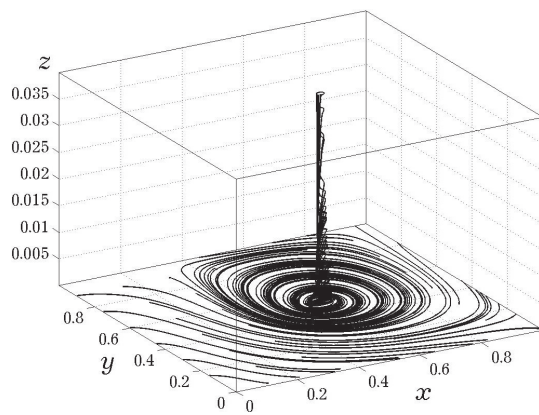


Рис. 11. Вид под углом на линии тока для $t_2 = 10$ с

Рисунки 10-11 представляют мгновенные линии тока в соответствующие моменты времени под некоторым углом. Они позволяют наблюдать общую картину ветрового воздействия на вихрь и отметить ещё одну особенность. На рисунке 11 видно, что от вертикальной части начинают «отрываться» некоторые линии тока. Эффект видно также и на рисунке 9. Это можно объяснить как существенной деформацией вихревого течения в северо-восточном направлении, так и различной скоростью окружного течения газа в разных частях вихря. Наконец, построенные мгновенные линии тока позволяют следить за тем, как постепенно происходит огибание вихря с южной стороны течением внешнего ветрового потока.

3. Заключение

В работе проведено численное моделирование бокового ветрового воздействия на трёхмерные нестационарные течения воздуха в восходящем закрученном потоке искусственно созданного торнадо, находящегося в стационарном режиме функционирования. С использованием явной разностной схемы численно получены решения полной системы уравнений Навье–Стокса в расчётной области в виде прямоугольного параллелепипеда. Рассчитаны в фиксированные моменты времени все скоростные характеристики течений и мгновенные линии тока течений в условиях действия сил тяжести и Кориолиса, а также при учёте постоянной горизонтально направленной скорости ветра.

Установлены количественные значения смещения, искривления вертикальной части вихря в направлении ветра, увеличения диаметра вихря, начинающегося в придонной части и переходящего в вертикальную его часть. Зафиксирован «отрыв» некоторых линии тока от вертикальной части и появление в центре вихря увеличивающейся области, свободной от линий тока.

В исследованном диапазоне изменения времени наблюдается устойчивость воздушного вихря к ветровому воздействию и устойчивая работа используемой вычислительной схемы.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Баутину Сергею Петровичу за многочисленные дискуссии, замечания и интерес к проводимым исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск : Наука, 2008. 96 с.
2. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск : Наука, 2009. 368 с.
3. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси: монография / С.П. Баутин [и др.]. Екатеринбург : УрГУПС, 2017. 336 с.

4. Баутин К.В., Баутин С.П., Макаров В.Н. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса // Вестник УрГУПС. 2013. № 2(18). С. 27–33.
5. Баутин С.П., Макаров В.В. Создание потока воздуха, закрученного силой Кориолиса при использовании трубы двухметрового диаметра // Вестник УрГУПС. 2016. № 4(32). С. 39–45.
6. Наливкин Д.В. Смерчи. М. : Наука, 1984. 112 с.
7. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1970. 904 с.
9. Bautin S.P., Obukhov A.G. Mathematical simulation of the near-bottom section of an ascending twisting flow // High Temperature. 2013. V. 51, No. 4. P. 509–512.
10. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчёт скоростных характеристик трёхмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2014. № 3. С. 88–94.
11. Волков Р.Е., Обухов А.Г., Терехова Н.В. Численные расчёты энергетических характеристик при моделировании выхода на стационарный режим искусственного торнадо // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2018. № 1. С. 84–92.
12. Волков Р.Е., Обухов А.Г. Трёхмерные мгновенные линии тока течений газа при моделировании выхода на стационарный режим лабораторного торнадо // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2018. № 2. С. 71–76.

CALCULATION OF THE SPEED CHARACTERISTICS OF AN UPWARD SWIRLING GAS FLOW UNDER CONDITIONS OF SIDE WIND

A.G. Obukhov

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: agobukhov@inbox.ru

Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia

Abstract. The paper presents the results of numerical modeling of lateral wind effects on three-dimensional unsteady air flows in an upward swirling stream of an artificially created tornado in a stationary mode of operation. The mathematical model is the complete system of Navier-Stokes equations taking into account the viscosity and thermal conductivity of a moving gas, as well as the action of gravity and Coriolis. Using an explicit difference scheme and an appropriate choice of initial and boundary conditions, solutions are obtained numerically for the complete system of Navier-Stokes equations in the computational domain in the form of a rectangular parallelepiped. All components of the gas flow velocity were calculated at fixed time instants and instantaneous streamlines were constructed with constant horizontal wind direction taken into account. The calculations showed that the result of the wind effect on the upward swirling flow is an asymmetric change in peripheral speed, its uneven deformation in opposite sections, and the total displacement of the vortex in the direction of the wind. In addition, the displacement and curvature of the vertical part of the vortex in the direction of the wind was established, a “detachment” of some instantaneous streamlines from the vertical rotating part and the appearance in the

center of the vortex of an area that is free of streamlines increasing in diameter were recorded. In the studied time variation range, the stability of the air vortex to wind action and the stable operation of the used computational scheme are observed.

Keywords: gas dynamics, a complete system of Navier-Stokes equations, initial-boundary conditions, difference methods.

REFERENCES

1. Bautin S.P. Tornado i sila Koriolisa. Novosibirsk, Nauka Publ., 2008, 96 p. (in Russian)
2. Bautin S.P. Kharakteristicheskaya zadacha Koshi i ee prilozheniya v gazovoi dinamike. Novosibirsk, Nauka Publ., 2009. 368 p. (in Russian)
3. Razrushitel'nye atmosferynye vikhri i vrashchenie Zemli vokrug svoei osi: Monografiya. C.P. Bautin [i dr.]. Ekaterinburg, UrGUPpp, 2017, 336 p. (in Russian)
4. Bautin K.V., Bautin S.P., and Makarov V.N. Eksperimental'noe podtverzhdenie vozmozhnosti sozdaniya potoka vozdukha, zakruchennogo siloi Koriolisa. Vestnik UrGUPpp, 2013, no. 2(18), pp. 27-33. (in Russian)
5. Bautin S.P. and Makarov V.V. Sozdanie potoka vozdukha, zakruchennogo siloi Koriolisa pri ispol'zovanii truby dvukhmetrovoogo diametra. Vestnik UrGUPpp, 2016, no. 4(32), pp. 39-45. (in Russian)
6. Nalivkin D.V. Smerchi. Moscow, Nauka Publ., 1984. 112 p. (in Russian)
7. Ovsyannikov L.V. Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki. Moscow; Izhevsk, In-t komp'yuternykh issledovaniy, 2003. 336 p. (in Russian)
8. Loitsyanskii L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza. Moscow, Nauka Publ., 1970. 904 p. (in Russian)
9. Bautin S.P. and Obukhov A.G. Mathematical simulation of the near-bottom section of an ascending twisting flow. High Temperature, 2013, vol. 51, no. 4, pp. 509–512.
10. Abdubakova L.V. and Obukhov A.G. Chislennyi raschet skorostnykh kharakteristik trekhmernogo voskhodyashchego zakruchennogo potoka gaza. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Neft' i gaz, 2014, no. 3, pp. 88–94. (in Russian)
11. Volkov R.E., Obukhov A.G., and Terekhova N.V. Chislennye raschety energeticheskikh kharakteristik pri modelirovanii vykhoda na statsionarnyi rezhim iskusstvennogo tornado. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Neft' i gaz, 2018, no. 1, pp. 84–92. (in Russian)
12. Volkov R.E. and Obukhov A.G. Trekhmernye mgnovennye linii toka techenii gaza pri modelirovanii vykhoda na statsionarnyi rezhim laboratornogo tornado. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Neft' i gaz, 2018, no. 2, pp. 71–76. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 26.08.2020

ПРОГРАММНАЯ WEB-РЕАЛИЗАЦИЯ ДСМ-МЕТОДА АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОРОЖДЕНИЯ ГИПОТЕЗ, ОСНОВАННОГО НА ИНДУКТИВНОЙ ЛОГИКЕ

Д.М. Белозеров,
магистрант, e-mail: evelend1@gmail.com
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В статье представлено web-приложение, реализующее ДСМ-метод Финна. Приложение позволяет на основе индуктивной логики Милля извлекать новые знания из имеющейся базы знаний.

Ключевые слова: ДСМ-метод, индуктивная логика Милля, web-приложение.

В данной работе будет рассмотрен один из методов извлечения новых знаний из массивов уже существующих, известный под названием ДСМ-метода.

Автор ДСМ-метода В.К. Финн называет этот процесс knowledge discovery (обнаружение знаний) [1]. Предполагается, что знания уже содержатся в исходных данных, остаётся их только получить. В основе метода — идеи логики индуктивных рассуждений, предложенные английским логиком XIX века Д.С. Миллем. ДСМ-метод позволяет строить гипотезы на основе предыдущего опыта без каких-либо знаний о предметной области. Например, можно сделать выводы относительно свойств некоторых геометрических фигур, совсем ничего не зная об аксиомах геометрии, при этом используя полученные ранее наблюдения о других фигурах. Можно судить о свойствах сложных химических соединений, ничего не зная о химии, не производя сложное компьютерное моделирование, используя лишь индуктивные методы на массивах полученных ранее данных. Очевидно, что применений такому подходу получения знаний можно найти много.

Работы В.К. Финна положили начало исследованиям по использованию средств и языка математической логики в социологических исследованиях в России.

Первые применения разработанного В.К. Финном ДСМ-метода автоматического порождения гипотез для анализа социологических данных и порождения детерминант социального поведения представлены в двух статьях В.К. Финна и его соавторов из Института социологии РАН. Совместно с М.А. Михеенковой [2] им были разработаны методы анализа данных, применимые не только для анализа готовности к действиям, но и для анализа и прогнозирования мнений.

За рубежом начало исследованиям по применению средств и языка математической логики в социологических и политических исследованиях положили работы американского социолога Ч. Рейджина. Он изучал возможности использования булевой алгебры для формализации сравнительного анализа небольшого количества объектов. Первая публикация, описывающая метод сравнительного качественного анализа (СКА), вышла в 1987 году.

В основе логических методов, предложенных В.К. Финном и Ч. Рейджином, лежат, как уже было сказано, идеи Дж.С. Милля и его логические правила причинного вывода, согласно которым сходства, обнаруженные у объектов, обладающих определённым одинаковым свойством, являются детерминантами проявления у них этого свойства.

Для СКА идеи Дж.С. Милля (см. [3]) являются лишь одной из методологических предпосылок, в то время как с помощью ДСМ-метода все пять правил Дж.С. Милля могут быть формализованы и положены в основу рассуждений при сравнении и анализе каких-либо объектов.

СКА Рейджина и ДСМ-метод Финна «схожим образом трактуют понятие причины, а именно как сочетание условий, вызывающих определённое явление. Речь идёт о "множественной причинности подразумевающей, что для подгрупп объектов, обладающих изучаемым поведением (свойством), может быть установлено несколько моделей объяснения его наличия у них. В этой связи признаки, с помощью которых описываются объекты, рассматриваются в ходе анализа не по отдельности, а напротив, изучаются сочетания значений признаков, тем самым обеспечивается целостное описание объектов» [4].

Наша цель — создать программный инструмент для работы с ДСМ-методом [5]. Сделать его максимально простым, для того чтобы работать в системе могли люди без какой-либо специальной подготовки и особых навыков. Добавить возможность работы над задачами сразу нескольких человек. Реализуется разделение доступа между людьми для минимизации вероятности случайных ошибок и намеренных сбоев.

1. ДСМ-метод

ДСМ-метод автоматического порождения гипотез (АПГ) был предложен В.К. Финном [6]. Назван он так в честь Д.С. Милля. В.К. Финн в рассмотренных автором статьях [1, 6–8] опирается на его работы и продолжает формализацию методов Д.С. Милля. Основные идеи логики индуктивных рассуждений, предложенных Д.С. Миллем, по мнению В.К. Финна, заключаются в следующем [1]:

- индукция основывается на установлении сходства явлений изучаемой реальности;
- эти явления представлены отношением между характеристиками объектов и эффектами, которые присущи этим объектам;
- посылками индуктивного вывода является множество рассматриваемых явлений, число представителей которых больше или равно двум;

- следствием из посылок индуктивного вывода является утверждение о том, что общая часть характеристик объектов, входящих в сходные явления, есть причина некоторых общих характеристик соответствующих им эффектов (таким образом, следствие индуктивного вывода содержит новое отношение: «причина — следствие»);
- при получении индуктивного вывода относительно некоторой причины соответствующего эффекта следует установить, что не имеется причин, препятствующих наличию этого эффекта;
- достаточным основанием для индуктивного вывода является закон единообразия природы, который состоит в том, что каждый эффект наблюдаемого явления имеет свою причину.

Одной из главных идей самого ДСМ-метода АПГ является формализация взаимодействия трёх познавательных процедур — индукции, аналогии, абдукции [1].

ДСМ-метод в своей работе оперирует следующими сущностями:

- объекты;
- свойства объектов;
- структурные компоненты.

Для понимания работы будущего веб-приложения введём ещё одну сущность — задачу. Задачи изолированы друг от друга. Каждая задача имеет свой набор объектов, свойств и структурных компонентов. Задачи вычисляются отдельно, поэтому далее будем считать, что речь идёт о работе с дочерними сущностями одной задачи.

У каждого объекта есть набор свойств (целевых признаков). Предполагается, что свойства не влияют друг на друга. Подмножества структурных компонентов являются предполагаемыми причинами наличия, или отсутствия свойств у объектов. Отдельный структурный компонент может либо присутствовать, либо отсутствовать у объекта. Информация о присутствии всех структурных свойств имеется в базе знаний изначально.

Перед началом работы ДСМ-метода полагаем, что уже есть некая база знаний — *база фактов*. К фактам из базы применяются строго описанные *процедуры*, основанные на индуктивной логике, дающие на каждом шаге набор формул, именуемых *гипотезами*. Их включают в *базу знаний*. Они пополняют начальную *базу фактов*:

$$\boxed{\text{База фактов}} \subset \boxed{\text{База знаний}} .$$

Процедуры могут быть двух типов, одна из которых основана на индукции, а вторая на аналогии. База знаний (фактов) содержит [6]:

- O — множество объектов;
- P — множество свойств объектов (целевых признаков);
- C — множество элементов структуры (возможных причин свойств);
- V — множество значений свойств. В нашем случае это $\{1, -1, 0, -\}$;
- функцию $P: O \Rightarrow 2^C$, которая определяет наличие у объектов подмножества целевых признаков;
- функцию $F: O * P \Rightarrow V$, которая определяет начальное значение свойств объектов.

Значения функции F из области V можно описать следующим образом [6]:

- $F(o, p) = 1$ — объект o обладает свойством p ;
- $F(o, p) = -1$ — объект o не обладает свойством p ;
- $F(o, p) = 0$ — есть противоречивые аргументы относительно наличия свойства p у объекта o ;
- $F(o, p) = -$ — заранее не известно о наличии свойства p у объекта o .

Задача ДСМ-метода состоит в том, чтобы доопределить все значения функции F , содержащей значение $\{-\}$ до одного из значений $\{1, -1, 0\}$. Происходит это путём формирования гипотез:

- о связи подмножества структурных признаков со значением свойства. Это гипотезы о возможных причинах свойств;
- о значении свойства для объектов, изначально имевших значение $\{-\}$ (путём применения гипотез о возможных причинах свойств).

Гипотезы о возможных причинах свойств обозначим функцией $H: C * P \Rightarrow V$. Значения этой функции можно описать следующим образом [2]:

- $H(c, p) = 1$ — подмножество структурных признаков c является возможной причиной наличия свойства p ;
- $H(c, p) = -1$ — подмножество структурных признаков c является возможной причиной отсутствия свойства p ;
- $H(c, p) = 0$ — есть аргументы как за, так и против того, что подмножество структурных признаков c является причиной свойства p ;
- $H(c, p) = -$ — нет информации о связи подмножества структурных признаков c со свойством p .

Итак, ДСМ-метод заключается в последовательном применении познавательных процедур [1]:

- индукции — правила вывода первого рода для получения гипотез о возможных причинах свойств (функция H);
- аналогии — правила вывода второго рода для получения гипотез о наличии свойств у объектов (доопределение функции F);
- абдукции — для проверки каузальной полноты.

Правила вывода первого и второго рода последовательно применяются до тех пор, пока удаётся сгенерировать ещё хотя бы одну гипотезу и пока имеются недоопределённые объекты. Считается что чем больше шагов потребовалось для генерирования очередной гипотезы, тем меньше её достоверность, так как она опирается на результаты других гипотез.

Абдукция применяется только после того, как завершено применение правил первого и второго рода.

Правило первого рода — это некоторая функция, использующая базу знаний для получения функции H . Определим правило первого рода как $H = \text{PIR1}(F)$. Далее опишем алгоритм работы правил первого рода.

Можно поделить все объекты o в базе на:

- положительные примеры для свойства p относительно матрицы F , если $F(o, p) = 1$;
- отрицательные примеры для свойства p относительно матрицы F , если $F(o, p) = -1$;
- противоречивые примеры для свойства p относительно матрицы F , если $F(o, p) = 0$.

Объекты, для которых справедливо: $F(o, p) = -$ не рассматриваются, так как они не участвуют в формировании функции H .

Для каждого набора структурных признаков необходимо найти множество положительных, отрицательных и противоречивых примеров соответственно. Введём обозначения для этого:

- $M+(F, c, p)$ — набор структурных признаков c вкладывается хотя бы в один объект, являющийся положительным примером относительно F для свойства p ;
- $M-(F, c, p)$ — набор структурных признаков c вкладывается хотя бы в один объект, являющийся отрицательным примером относительно F для свойства p ;
- $M0(F, c, p)$ — набор структурных признаков c вкладывается хотя бы в один объект, являющийся противоречивым примером относительно F для свойства p .

Теперь можно определить функцию $H(c, p)$ следующими значениями [2]:

- 1, если $M+(F, c, p) \wedge \neg M-(F, c, p) \wedge \neg M0(F, c, p)$,
- -1, если $M-(F, c, p) \wedge \neg M+(F, c, p) \wedge \neg M0(F, c, p)$,
- 0, если $(M+(F, c, p) \wedge M-(F, c, p)) \vee M0(F, c, p)$,
- -, если $\neg M+(F, c, p) \wedge \neg M-(F, c, p) \wedge \neg M0(F, c, p)$.

На этом действие индукции завершено, гипотезы сформированы.

Правила вывода второго рода преобразуют функцию F , доопределяя некоторые её значения. Обозначим новую функцию $F1$ как доопределённую в результате применения аналогии функцию F . Тогда функция $F1(o, p)$ будет принимать значения исходной функции F , если $F(o, p) = \{1, -1, 0\}$. Остальные значения определяются применением правил второго рода при использовании матрицы H : $F1 = PIR2(F, H)$.

Аналогично правилам первого рода введём новые обозначения:

- $K+(H, o, p)$ — в объект o вкладывается хотя бы одна гипотеза из H о наличии свойства p ,
- $K-(H, o, p)$ — в объект o вкладывается хотя бы одна гипотеза из H об отсутствии свойства p ,
- $K0(H, o, p)$ — в объект o вкладывается хотя бы одна противоречивая гипотеза из H .

Тогда доопределим функцию $F1$ следующими значениями:

- 1, если $K+(H, o, p) \wedge \neg K-(H, o, p) \wedge \neg K0(H, o, p)$,
- -1, если $K-(H, o, p) \wedge \neg K+(H, o, p) \wedge \neg K0(H, o, p)$,
- 0, если $(K+(H, o, p) \wedge K-(H, o, p)) \vee K0(H, o, p)$,
- -, если $\neg K+(H, o, p) \wedge \neg K-(H, o, p) \wedge \neg K0(H, o, p)$.

На этом заканчивается применение правил вывода второго рода. После того, как правила вывода первого и второго рода попеременно применены максимальное количество раз, проведём проверку каузальной полноты.

С этой целью для всех объектов в функции $F(o, p)$, значения для которых были известны изначально, необходимо проверить, что имеется хотя бы одна гипотеза из $H(c, p)$, которая объясняла бы это значение [6]. Если объяснения начальных значений найдены, то проверка каузальной полноты считается пройденной и результаты ДСМ-метода можно применять. В противном случае рекомендуется расширить базу фактов, пересмотреть набор структурных признаков или способ кодирования структурных признаков.

2. Реализация web-приложения

В этой главе будут описаны основные особенности реализации, используемые подходы и инструменты для разработки web-приложения.

2.1. Используемые инструменты для разработки

В качестве среды разработки используется Microsoft Visual Studio 2017 RC [9]. Версия release candidate используется для тестирования среды разработки и распространяется без ограничений. Преимуществом среды разработки Visual Studio является её широкое распространение, и, следовательно, большее количество справочного материала, создаваемого в том числе сообществом пользователей. Также преимуществом для авторов статьи является хорошая осведомлённость о возможностях и особенностях Visual Studio.

Используется система контроля версий TFS [10]. Она позволяет создавать версии исходного кода web-приложения, смотреть изменения, вносимые в код, повышает удобство дальнейшей работы с кодом. Также код теперь хранится не только на устройствах авторов, но и на серверах Microsoft, что уменьшает вероятность потерять результаты работы. Адрес репозитория: <https://evelent.visualstudio.com/JSMethod/>. Репозиторий закрытый, для получения к нему доступа необходимо связаться с авторами. Visual Studio по умолчанию имеет интеграцию с TFS, так что делать коммиты можно прямо из среды разработки.

В своей web-разработке авторы старались использовать наиболее современные технологии, даже в ущерб плохой их поддержке старыми браузерами, например, IE9 (поддержка которого закончилась в 2016 году [11]). По этой причине рекомендуется для работы с системой использовать один из современных браузеров последней версии. Используемые технологии будут описаны ниже.

Для создания web-приложения был выбран фреймворк ASP.NET MVC [12] на движке Razor [13], файлы представлений в котором не являются статичными, а генерируют ответ каждый раз в зависимости от состояния моделей.

С целью упрощения и ускорения создания оформления на web-приложении был применён HTML, CSS и Javascript фреймворк Bootstrap [14]. Не стояло задачи делать какой-либо уникальный дизайн, а оформление от Bootstrap по умолчанию выглядит очень хорошо. Фреймворк также позволил сократить трудозатраты на создание адаптивной вёрстки, при которой сайтом удобно пользоваться на устройствах с различной шириной экрана, и на создание простого меню для сайта.

Естественно, использовалась JavaScript библиотека jQuery [15]. Она помогает легко взаимодействовать с деревом элементов браузера, изменять атрибуты элементов, предоставляет удобный интерфейс для AJAX [16] запросов и требуется для работы некоторых других компонентов, используемых в разработке.

Создание таблиц облегчил клиентский фреймворк Kendo UI [17]. Встроенный компонент Kendo Grid [18] реализует стандартное поведение таблиц, имеет поддержку серверной пагинации, гибкие настройки и достаточно полную документацию всего функционала на сайте разработчика системы.

Экспорт в Excel производится с помощью интеграции фреймворка Kendo UI и библиотеки JSZip [19]. Библиотека способна сформировать Excel файл сразу на стороне клиента, используя данные из таблиц Kendo Grid. Такой подход уменьшает нагрузку на сервер, снимает необходимость реализовывать экспорт самостоятельно.

2.2. Особенности реализации

Для удобного подключения всех используемых JavaScript и CSS файлов применяется BundleConfig [20]. Он позволяет задать соответствие между конкретными файлами и абстрактными сущностями, которые можно подключить на страницу. Так как скриптов и файлов стилей в проекте используется немного, и они почти всегда все нужны на всех страницах, то было создано всего две сущности:

«/Content/js» и «/Content/css», пример добавления сопоставления показан ниже:

```
bundles.Add(new ScriptBundle("~/Content/js").Include( // добавление сущности  
    "~/Content/js/jquery-{version}.js" , // привязка файла к сущности
```

Также стоит заметить, что BundleConfig позволяет использовать маски в именах файлов, например, «version». Таким образом, после замены библиотеки на новую версию не надо будет что-либо менять в коде.

В основной модели данных ДСМ-метода используются следующие сущности:

- задача (класс Problem);
- объект (класс Subject);
- свойство (класс Property);
- элемент структуры (класс Composition);
- значение свойства (класс ValueOfProperty);
- значение элемента структуры (класс ValueOfComposition).

Отдельные классы для значений свойств и структурных признаков созданы для удобства хранения их в базе данных. К тому же заранее не известны количество и состав свойств. Собственно, свойств, описывающих состояние самого класса, мало. Для задач, свойств и объектов это свойство: имя (Name), для классов, отвечающих за хранение значения — значение (Value).

Отношения между классами показаны ниже (рис. 1).

Работа напрямую с базой данных не ведётся. Используется подход Code First и Entity фреймворк [21] в качестве инструмента. Преимущества подхода Code First:

- таблицы в базе данных генерируются автоматически;

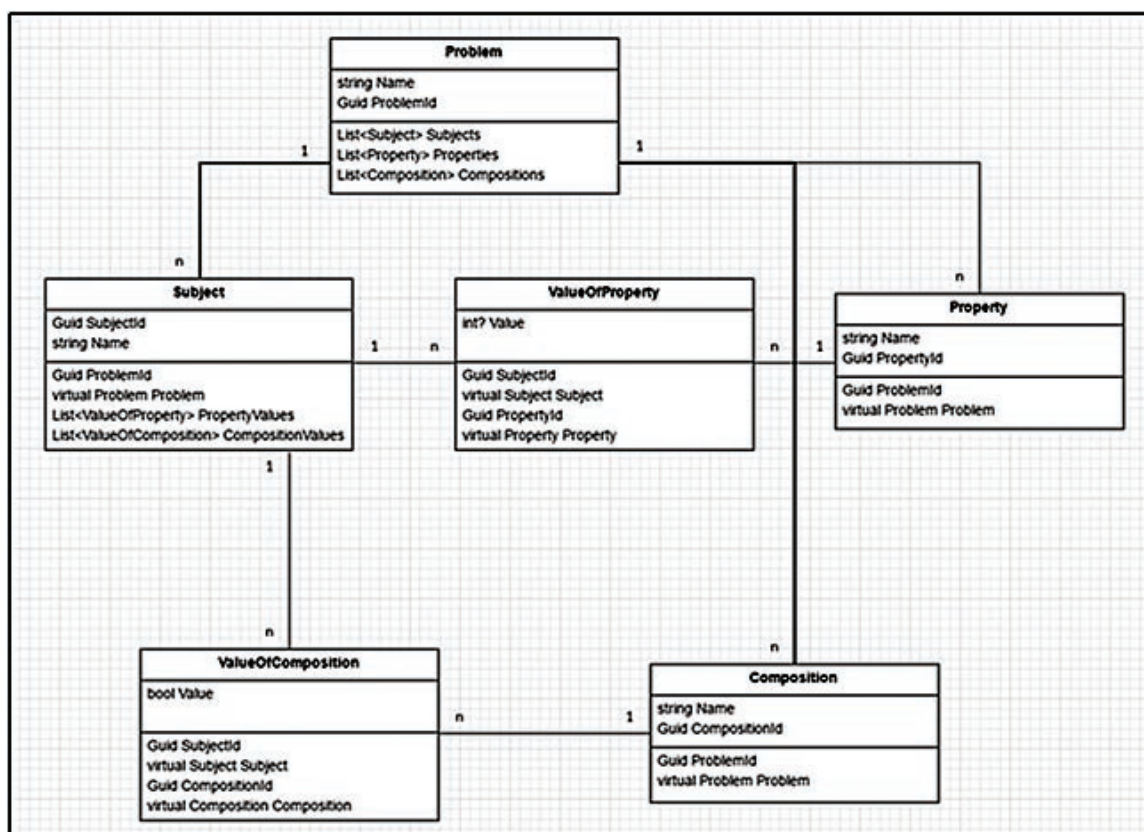


Рис. 1. Диаграмма классов сущностей ДСМ-метода.

- сопоставления между базой данных и программными объектами не нужно описывать отдельно;
- запросы к базе на языке sql генерируются автоматически, прозрачно для пользователя;
- простое изменение схемы данных, изменения для базы генерируются автоматически;
- установка среды разработки происходит автоматически с помощью системы миграций.

Таким образом, просто описав систему классов, показанную выше, можно сразу переходить к работе с ДСМ-методом и не заботиться о том, как данные будут храниться в базе.

Данные заносятся в систему с помощью контроллера `DataInputController`. Возможность вводить данные есть не у всех пользователей, а только у тех, кто принадлежит к группе «Операторы». Реализуется это при помощи `AspNet Identity` [22] библиотеки, а в классе описывается добавлением атрибута: `[Authorize(Roles = Const.OperatorRole)]`

Где атрибут `Authorize` указывает, что пользователь обязательно должен быть авторизован для работы с контроллером ввода данных и иметь роль «Оператор», иначе ни один запрос, даже GET к API получения данных, не пройдет [23]. Принадлежность пользователя к ролям настраивается администратором системы через web-интерфейс.

Контроллер `DataInputController` обслуживает запросы с трёх страниц: `Problems`, `Problem`, `Subjects`. Страница `Problems` в табличном виде выводит все созданные ранее задачи, позволяет добавлять новые задачи, удалять и переименовывать уже созданные. Страница `Problem` предназначена для изменения описания задачи. А именно: состав свойств и структурных признаков. Редактирование доступно также в табличном виде, как и для задач. Страница `Subjects` нужна для редактирования набора объектов задачи. Таблица для редактирования объектов более сложная, т. к. содержит переменное количество колонок и позволяет делать отправку сразу нескольких объектов на сервер в одном запросе.

Опишу более подробно функционирование страницы `Subjects`. Таблица на стороне клиента строится с плагином `Kendo Grid`. Выглядит это следующим образом:

```
jQuery(document).ready(function () {
//Код выполняется после загрузки документа
$("#subjectsTable").kendoGrid({ //Указывается таблица
  dataSource: { //Описываются источники данных
    type: "json" ,
    transport: {
      create: {
        url: "@Url.Action("Subjects_Create" , new { problemId =
Model.Problem.ProblemId })" , //Привязка действия для создания элемента
//Тут же указывается дополнительный параметр problemId [20]
        dataType: "json" , //Описание типа данных
        type: "POST"//Тип запроса POST [21]
      },
      read: {
        url: "@Url.Action("Subjects_Read" , new { problemId =
Model.Problem.ProblemId })" , //Привязка действия для чтения элементов
        dataType: "json" ,
        type: "POST"
      },
      update: {
        url: "@Url.Action("Subjects_Update" , new { problemId =
Model.Problem.ProblemId })" , //Привязка действия для обновления элементов
        dataType: "json" ,
        type: "POST"
      },
      destroy: {
        url: "@Url.Action("Subjects_Destroy" , new { problemId =
Model.Problem.ProblemId })" , //Привязка действия для удаления элемента
```

```

    dataType: "json" ,
    type: "POST"
  },
  pageSize: 10, //Размер страниц при пагинации
  schema: {
    model: { //Описание схемы данных модели
      id: "SubjectId" ,
      fields: @Html.Raw(Model.Fields) //Поле Fields модели //данных возвращает
        описание столбцов таблицы
    },
    total: "total" ,
    data: "data"
  },
  serverPaging: true, //Включение серверной пагинации
  batch: true //Включение режима отправки многих элементов
},
height: 550, //Высота таблицы
toolbar: ["create" , "save" , "cancel"], //Кнопки в меню таблицы
pageable: { //Настройка пагинатора
  refresh: true, //Показывать кнопку обновления
  pageSizees: true, //Показывать кнопку выбора размера страницы
  buttonCount: 5,
  pageSizees: [10, 20, 50] //Возможные размеры страницы
},
columns: @Html.Raw(Model.GetColumns(150, 50, 110, true)),
//GetColumns возвращает описание колонок таблицы (с именами)
  editable: true //Включение возможности редактирования элементов
});
});

```

Как видно, код для описания таблицы действительно очень прост. Теперь стоит показать, как выглядит метод получения объектов на стороне сервера. Стоит заметить, что все методы, в которых есть работа с базой данных, выполняются на сервере асинхронно (ключевое слово `async` [26]), и в момент запроса к базе метод ставится на паузу, поток освобождается для обработки других запросов. Это позволяет значительно повысить пропускную способность сервера.

```

public async Task<ActionResult> Subjects_Read(Guid problemId, int? skip, int?
take) //Входные параметры автоматически извлекаются из запроса
{
    var allItemsQuery = JsmContext.Subjects.Where(i => i.ProblemId ==
problemId);
//Создание запроса для получения всех объектов из базы, объекты в этот //мо-
мент ещё не запрашиваются
    var query = allItemsQuery;
    query = query.OrderBy(p => p.Name); //Указываем что необходима //сорти-
ровка

```

```
if (skip.HasValue) //Далее пропускаем необходимое количество //элементов и
получаем необходимое количество элементов. Так реализуется //серверная паги-
нация
    query = query.Skip(skip.Value);
if (take.HasValue)
    query = query.Take(take.Value);
var items = await query.Include(x => x.PropertyValues).Include(x =>
x.CompositionValues).ToListAsync();
//Метод Include указывает что необходимо так же извлечь объекты, //отвеча-
ющие за хранение значений свойств и структурных компонентов [27]. //Await
позволяет поставить выполнение метода на паузу и освободить поток, до //тех
пор, пока не будет выполнен запрос к базе
SubjectsViewVodel subjectsModel = await SubjectsViewVodel.FromDb(problemId,
JsmContext);
//Получение объектов из базы
var models = items.Select(dm =>
subjectsModel.FromDataModel(dm)).ToListAsync();
//Формирование модели представления для отправки клиенту
var response = new //Формирование ответа
{
    total = await allItemsQuery.CountAsync(), //Количество всех //элементов
    data = models
};
//Отправка ответа клиенту в формате Json [28]
return Json(response, JsonRequestBehavior.AllowGet);
}
```

Методы добавления, изменения, удаления объектов выглядят аналогично. Разница только в логике обращения к базе, но она проста во всех случаях, рассмотрения одного этого метода достаточно.

Теперь, когда способ ввода данных в систему определён, перейдём к выполнению вычислений. Для выполнения вычислений создан контроллер CalculatingController. И две страницы, которые этот контроллер обслуживает: Problems и Result. Доступ к работе с этим разделом сайта имеют все зарегистрированные пользователи. Открыть доступ для всех можно по причине того, что из этого контроллера пользователь никак не может изменить данные. Всё, что можно сделать — пользоваться результатами вычислений ДСМ-метода. Проведение вычислений так же не затрагивает начальное состояние моделей.

На странице Problems отображаются все задачи. При клике на имя задачи происходит переход к представлению Result с одновременной передачей идентификатора задачи в это представление.

Вычисления начинаются в момент формирования ответа на запрос представления Result. Когда представление отображается пользователю, все вычисления уже проведены и диагностическая информация уже собрана. Также страница результатов содержит таблицу с объектами. В отличие от страницы с объектами в контроллере DataInputController тут не поддерживается редактирование объектов, пагинация производится на стороне клиента (так как все данные

уже получены), и те свойства, которые не были определены раньше, теперь имеют определённые значения. В этом и состоит задача web-приложения — доопределить свойства объектов.

В таблице также имеется возможность экспорта результатов вычислений в Excel.

Помимо таблицы объектов на странице Results содержится раскрываемая область с диагностическими данными о ходе выполнения ДСМ-метода. Вывод этих данных был добавлен, так как только по одному состоянию объектов не всегда можно судить о правильности выполнения метода. Также иногда полезно посмотреть, какие гипотезы были сгенерированы на определённом шаге, какие свойства, в какой последовательности доопределены. В лог выводится следующая информация:

- начало и окончание расчёта определённого свойства;
- количество объектов, для которых не определено значение свойства на каждом шаге;
- возможные причины наличия / отсутствия структурных признаков и противоречивые гипотезы;
- успешно ли пройдена проверка каузальной полноты;
- какие объекты и почему не удовлетворяют проверке каузальной полноты;
- какие свойства доопределены у каких объектов.

Рассмотрим обработчик запроса страницы Result.

```
public async Task<ActionResult> Result(Guid problemId)
{ //Как и другие обработчики выполняется асинхронно
//Сначала идет получение задачи из базы, включая все связанные значения
    Problem problem = await JsmContext.Problems
        .Include(i => i.Properties).Include(i => i.Compositions).Include(i =>
i.Subjects)
        .Include(i => i.Subjects.Select(s => s.PropertyValues)).Include(i =>
i.Subjects.Select(s => s.CompositionValues))
        .SingleOrDefaultAsync(i => i.ProblemId == problemId);
    var calc = new JsmCalculator(problem);
    calc.Calculate(); //Создание объекта «калькулятора» и //произведение вычис-
лений (подробнее будет рассмотрено ниже)
    string log = calc.Log.Replace(Environment.NewLine, @"<br />" );
//Получение логов вычислений
    SubjectsViewVodel model = await SubjectsViewVodel.FromDb(problemId,
JsmContext);
    model.Log = log;
//Формирование массива объектов для таблицы результатов
//Объект problem уже содержит конечное состояние задачи
```

```

        model.Subjects = problem.Subjects.Select(dm =>
model.FromDataModel(dm)).ToList();
//Возврат результата
return View(model);
}

```

Теперь более подробно рассмотрим, как работает класс, отвечающий за вычисления ДСМ-метода.

Основная функция приведена ниже. Тут объект Problem — свойство класса JsmCalculator. Каждое целевое свойство рассчитывается отдельно. Расчёт следующего свойства начинается после прохождения всех шагов вычисления предыдущего, так как в ДСМ-методе нет зависимости между разными свойствами (только зависимость между структурными признаками и свойством).

```

public void Calculate()
{
    WriteLog($"Начало вычислений для задачи с именем: '{Problem.Name}'." );
    foreach (var property in Problem.Properties)
    { //Проход по всем свойствам
        int pastNullCount = Int32.MaxValue;
        int nullCount = ToCountNullPropValues(property);
        int stepCount = 0;
        WriteLog($"Свойство: '{property.Name}'. Неопределённых объектов:
{nullCount}." , true);
        var plusExamples = new List<CalcExample>();
        var minusExamples = new List<CalcExample>();
        var contradictoryExamples = new List<CalcExample>();
        while (nullCount != 0 && nullCount != pastNullCount)
        //Расчёт ведётся пока не доопределены значения свойства для всех объектов, и
        //пока удастся найти хотя бы одно значение свойства за один шаг
        {
            stepCount++;
            WriteLog($"Шаг № {stepCount}." , true);
            pastNullCount = nullCount;
            CalculateStep(property, ref plusExamples, ref minusExamples, ref
contradictoryExamples); //Функция для вычисления шага ДСМ-метода
            nullCount = ToCountNullPropValues(property);
            WriteLog($"Осталось неопределённых объектов: {nullCount}." );
        }
        bool causalCompleteness = CheckConditionOfCausalCompleteness(property,
plusExamples, minusExamples);
        //Проверка каузальной полноты
        if (causalCompleteness)
            WriteLog($"Проверка каузальной полноты пройдена успешно.");
        }
        WriteLog($"Вычисления завершены." , true);
    }
}

```

Далее рассмотрим метод `CalculateStep`. Расчёт шага подразумевает последовательное выполнение правил первого рода (процедура индукции) и правил второго рода (процедура аналогии). Из метода `CalculateStep` происходит вызов соответствующих методов, поэтому листинг кода приводиться не будет. `GetPossibleReasons` отвечает за выполнение процедуры индукции, `DefineObjects` — процедуры аналогии.

Процедура аналогии также поделена на методы с высоким уровнем абстракции. Оттуда происходит поочерёдный вызов следующих методов:

1. `FindSubsetsOfCompositions`. Поиск возможных наборов структурных признаков для гипотез.
2. `CheckSubsets`. Для проверки принадлежности каждого из наборов структурных признаков к положительным, отрицательным и противоречивым.
3. `RemoveNestedContradictoryExamples`. Для удаления вложенных противоречивых примеров из списка гипотез.

Метод `FindSubsetsOfCompositions` представляется важным, поэтому рассмотрим его с комментариями. Задачей этого метода является поиск всех наборов структурных признаков. Для этого необходимо рассмотреть все возможные их комбинации, которых два в степени их количества.

```
void FindSubsetsOfCompositions(Property property, ref List<CalcExample>
plusExamples, ref List<CalcExample> minusExamples, ref List<CalcExample>
contradictoryExamples)
{
    int combinationsCount = (int)Math.Pow(2, Problem.Compositions.Count);
    //Просматриваются все возможные комбинации
    for (int i = 1; i < combinationsCount; i++)
    {
        List<Composition> includedComposition = new
List<Composition>(Problem.Compositions.Count);
        var includeCombination = Convert.ToString(i, 2);
        //Число — это «код» возможных комбинаций, где единицами обозначается
        //включение структурного признака
        for(int j = includeCombination.Count() - 1; j >= 0; j--)
        {
            if (includeCombination[j] == '1')
            {
                int index = Problem.Compositions.Count - includeCombination.Length + j;
                includedComposition.Add(Problem.Compositions[index]);
            }
        }
    }
    //На данном этапе в переменной includeCombination все включённые //комби-
    нации
    List<Subject> plusSubjects = new List<Subject>();
    List<Subject> minusSubjects = new List<Subject>();
}
```

```

List<Subject> zeroSubjects = new List<Subject>();
foreach (var subject in Problem.Subjects)
{
//Проверяем все объекты на наличие текущего набора структурных признаков
bool includedAllComposition = true;
foreach (var composition in includedComposition)
{
if (!subject.CompositionValues.Single(cv => cv.CompositionId ==
composition.CompositionId).Value)
includedAllComposition = false;
}
if (includedAllComposition)
{
var value = subject.PropertyValues.Single(pv => pv.PropertyId ==
property.PropertyId).Value;
//Если весь набор включён, то добавляем этот объект как пример
if (value == 1)
plusSubjects.Add(subject);
else if (value == -1)
minusSubjects.Add(subject);
else if (value == 0)
zeroSubjects.Add(subject);
}
}
//Если объектов больше определённого количества, то добавляем это набор как
//возможную гипотезу
if (plusSubjects.Count >= _MinExamplesCount)
AddExample(plusExamples, includedComposition, plusSubjects);
if (minusSubjects.Count >= _MinExamplesCount)
AddExample(minusExamples, includedComposition, minusSubjects);
if (zeroSubjects.Count >= _MinExamplesCount)
AddExample(contradictoryExamples, includedComposition, zeroSubjects);
}
}

```

Метод FindSubsetsOfCompositions имеет самую большую вычислительную сложность в вычислениях ДСМ-метода ($O(s \cdot 2^n)$), где n — количество структурных признаков, s — количество объектов).

Следующий метод — CheckSubsets. Теперь, когда возможные гипотезы найдены, необходимо проверить, удовлетворяют ли они всем объектам или некоторые объекты будут служить контрпримером для них.

```

void CheckSubsets(Property property, ref List<CalcExample>
plusExamples, ref List<CalcExample> minusExamples, ref List<CalcExample>
contradictoryExamples)
{
//Складываем все примеры в один массив
List<CalcExample> allExamples =
plusExamples.Union(minusExamples).Union(contradictoryExamples).ToList();

```

```

    plusExamples.Clear();
    minusExamples.Clear();
    contradictoryExamples.Clear();
//Остальные массивы очищаем (они будут перезаполнены после перепроверки)
    foreach (var example in allExamples)
    {
        int plusCount = 0;
        int minusCount = 0;
        int zeroCount = 0;
        foreach (var subject in Problem.Subjects)
        {
            var subjectsCompositionValues = subject.CompositionValues.Where(cv =>
example.Compositions.Any(c => c.CompositionId == cv.CompositionId));
            if (subjectsCompositionValues.All(sc => sc.Value == true))
            {
                var value = subject.PropertyValues.Single(pv => pv.PropertyId ==
property.PropertyId).Value;
                if (value == 1)
                    plusCount++;
                else if (value == -1)
                    minusCount++;
                else if (value == 0)
                    zeroCount++;
            }
        }
//Производится подсчёт свойств с положительными, отрицательными и //нуле-
выми значениями
        if (plusCount >= _MinExamplesCount && minusCount == 0 && zeroCount ==
0)
//В соответствии с логикой ДСМ-метода, если у набора признаков только //по-
ложительные примеры, то он становится положительной гипотезой
            plusExamples.Add(example);
        else if (minusCount >= _MinExamplesCount && plusCount == 0 && zeroCount
== 0)
            minusExamples.Add(example);
//Если только отрицательные — отрицательной
        else if (zeroCount > 0 || (plusCount > 0 && minusCount > 0))
            contradictoryExamples.Add(example);
//Если как положительные, так и отрицательные — противоречивой
    }
}

```

На выходе из этого метода мы получаем набор готовых гипотез. Однако их необходимо отфильтровать. Рассмотрим пример, допустим у нас есть положительный набор структурных признаков: {c1, c2}, отрицательный набор: {c1, c3} и противоречивый: {c1}. Тут c1 — включён как в положительный набор, так и в отрицательный, очевидно, что гипотеза {{c1} — следует противоречие} не будет представлять ценность при определении свойств

объектов, а даже будет «мешать» другим, более полным гипотезам. Поэтому такие гипотезы следует удалить из набора. За это и отвечает метод `RemoveNestedContradictoryExamples`, который достаточно прост в реализации и подробно рассматриваться не будет.

Напоминаю, что на выходе метода `GetPossibleReasons`, который мы рассмотрели, будут массивы с готовыми гипотезами. Гипотезы сами по себе уже являются новым знанием, но их ещё можно применить для определения свойств объектов, которые были не известны до этого. Рассмотрим метод `DefineObjects`.

```

void DefineObjects(Property property, List<CalcExample> plusExamples,
List<CalcExample> minusExamples, List<CalcExample> contradictoryExamples)
{
    //Просматриваются все объекты
    foreach (var subject in Problem.Subjects)
    {
        var propertyValue = subject.PropertyValues.Single(pv => pv.PropertyId ==
property.PropertyId);
        if (propertyValue.Value != null)
            continue; //Если свойство уже задано, происходит переход на //следующую
итерацию цикла
        bool satisfiesPlusExample = plusExamples.Any(ex =>
CheckSubjectIsSatisfiesExample(subject, ex));
        //Проверка сколько гипотез разного типа можно применить к объекту
        bool satisfiesMinusExample = minusExamples.Any(ex =>
CheckSubjectIsSatisfiesExample(subject, ex));
        bool satisfiescontradictoryExample = contradictoryExamples.Any(ex =>
CheckSubjectIsSatisfiesExample(subject, ex));
        bool define = false;
        if (satisfiesPlusExample && !satisfiesMinusExample &&
!satisfiescontradictoryExample)
        {
            //В соответствии с логикой ДСМ-метода применяем гипотезы
            //И задаем значение свойства равным 1, если объект удовлетворяет только //по-
ложительным гипотезам
            propertyValue.Value = 1;
            define = true;
        }
        else if (!satisfiesPlusExample && satisfiesMinusExample &&
!satisfiescontradictoryExample)
        {
            //Равным минус единице, если только отрицательным
            propertyValue.Value = -1;
            define = true;
        }
        else if (satisfiescontradictoryExample || (satisfiesPlusExample &&
satisfiesMinusExample))
        {
            propertyValue.Value = 0;
        }
    }
}

```

```

    define = true;
}
//И нулю, если существуют факты как положительные, так и отрицательные
if (define)
    WriteLog($"Доопределено свойство '{property.Name}' объекта
'{subject.Name}' значением '{propertyValue.Value}");
}
}

```

Теперь, после выполнения нескольких шагов индукции и аналогии необходимо выполнить проверку каузальной полноты. Проверка пройдена, если все положительные и отрицательные примеры свойств можно объяснить с помощью полученных гипотез, рассмотрим метод.

```

bool CheckConditionOfCausalCompleteness(Property property,
List<CalcExample> plusExamples, List<CalcExample> minusExamples)
{
    bool success = true;
    foreach(var subject in Problem.Subjects)
    {
        //Проверяем все объекты
        var propertyValue = subject.PropertyValues.Single(pv => pv.PropertyId ==
property.PropertyId);
        if ((propertyValue.Value == 1 && !plusExamples.Any(ex =>
CheckSubjectIsSatisfiesExample(subject, ex)))
|| (propertyValue.Value == -1 && !minusExamples.Any(ex =>
CheckSubjectIsSatisfiesExample(subject, ex))))
        {
            //Если какой-либо из них не может быть обоснован, то проверка не пройдена
            success = false;
            WriteLog($"Объект '{subject.Name}' по свойству '{property.Name}' не удовле-
творяет условию каузальной полноты.");
            //В лог сразу записывается информация об объектах, ставших причиной //невы-
полнения проверки
        }
    }
    return success;
}

```

После прохождения проверки каузальной полноты работу ДСМ-метода можно считать завершённой. Если проверка каузальной полноты не была выполнена успешно, то использовать его результаты не рекомендуется, вероятнее всего, необходимо дополнить начальную базу фактов большим количеством примеров.

Таким образом, в данной главе были рассмотрены наиболее важные участки кода по реализации ДСМ-метода.

3. Результаты

Результатом разработок стало web-приложение, позволяющее работать с ДСМ-методом без каких-либо специальных навыков. В этом параграфе web-приложение рассматривается со стороны web-интерфейса, показано, как пользователи могут с ним работать. При первом входе пользователь попадает на главную страницу. Так как он пока не зарегистрирован, для него отображается неполное верхнее меню и нет доступа к основным функциям (рис. 2).

На различных устройствах web-приложение может выглядеть по-разному из-за использования подхода адаптивной верстки [29].

Ниже продемонстрирован вид главной страницы на устройствах с узким экраном (рис. 3), можно заметить, что меню при этом также принимает иной вид (рис. 4).

Далее пользователь может пройти регистрацию, указав свою электронную почту и пароль. Пароль отправляется на сервер в зашифрованном виде, и в базе данных хранится только его хэш. За эти операции отвечает фреймворк asp identity. После регистрации пользователю доступна привычная форма для входа на сайт (рис. 5).

У пользователей могут быть разные права доступа. Принадлежность к группам доступа настраивает администратор системы (рис. 6).

Из служебных страниц также имеется страница управления пользователем, откуда он может перейти на страницу смены пароля или удалить собственный аккаунт (рис. 7).

Теперь перейдём непосредственно к работе с ДСМ-методом. О том, как функционирует страница добавления задач, было сказано в предыдущем параграфе, здесь обратим внимание на внешний вид и удобство использования. Задачи можно редактировать при помощи таблицы (рис. 8). Тут доступны все CRUD [30] операции. При удалении задачи будут удалены все связанные с ней записи из базы данных. При клике на название задачи происходит переход на страницу настроек её свойств. Ссылка «объекты» ведет сразу к странице настроек объектов.

На всех скриншотах будет показана работа с известным примером ДСМ-метода из вики: можно ли описать окружность вокруг прямоугольника. Вывод будет сделан на основе таких структурных признаков, как наличие оси симметрии, наличие прямого угла и других. Следующий скриншот показывает страницу после перехода по названию задачи (рис. 9).

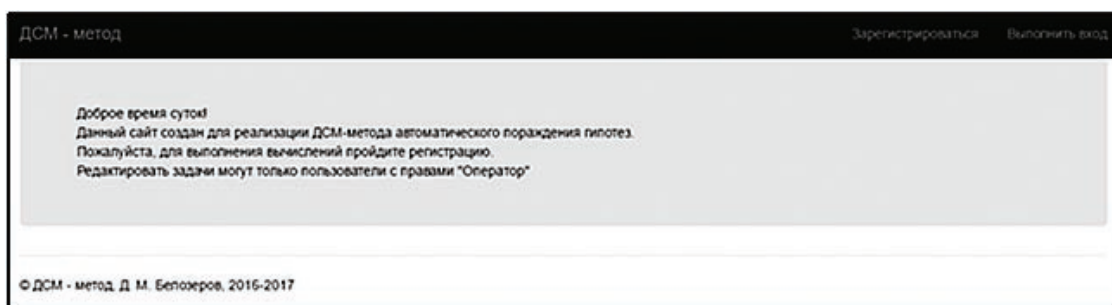


Рис. 2. Домашняя страница

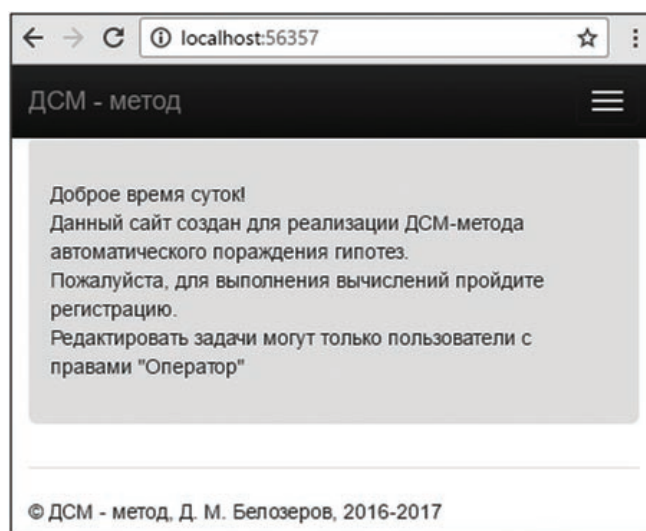


Рис. 3. Вид главной страницы на устройствах с узким экраном

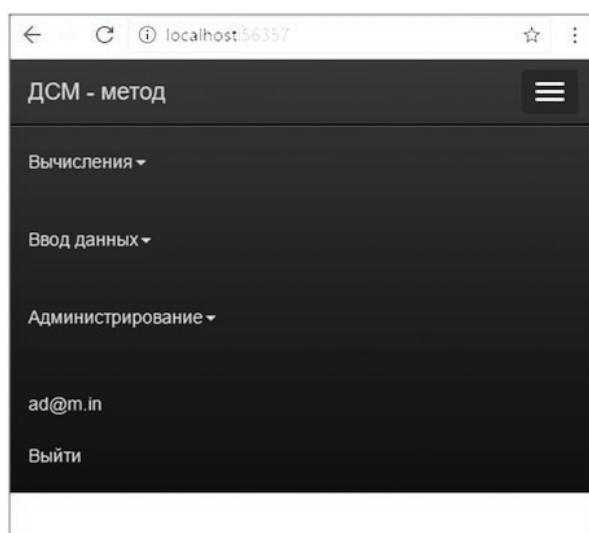


Рис. 4. Вид меню на устройствах с узким экраном

Тут отображается название задачи (изменять его можно с предыдущей

The screenshot shows a web interface for a user login. At the top, there is a header bar with the text "ДСМ - метод" on the left and two links, "Зарегистрироваться" and "Выполнить вход", on the right. Below the header, the main heading is "Выполнить вход." followed by the instruction "Используйте локальную учетную запись для входа." There are two input fields: "Адрес электронной почты" with the value "ad@m.in" and "Пароль" with masked characters. Below these fields is a checkbox labeled "Запомнить меня" and a button labeled "Выполнить вход". At the bottom of the form, there is a link "Регистрация нового пользователя" and a footer "© ДСМ - метод, Д. М. Белозеров, 2016-2017".

Рис. 5. Форма авторизации пользователя

The screenshot shows a web interface for user settings. The header bar contains "ДСМ - метод" and three dropdown menus: "Вычисления", "Ввод данных", and "Администрирование". The main heading is "Настройка пользователей" with the subtitle "Форма настройки пользователя: ad@m.in". There are two checked checkboxes: "Оператор" and "Администратор". Below them is a button labeled "Применить". At the bottom, there is a footer "© ДСМ - метод, Д. М. Белозеров, 2016-2017".

Рис. 6. Настройка доступа

The screenshot shows a web interface for user management. The header bar contains "ДСМ - метод" and three dropdown menus: "Вычисления", "Ввод данных", and "Администрирование". The main heading is "Управление." with the subtitle "Изменение параметров учетной записи". There are two rows of controls: "Пароль:" with a button "[Смена пароля]" and "Пользователь:" with a button "[Удалить пользователя]". At the bottom, there is a footer "© ДСМ - метод, Д. М. Белозеров, 2016-2017".

Рис. 7. Страница управление профилем

страницы), ссылки на возврат ко всем задачам и к странице описания объектов. Целевые свойства не обязательно должны иметь уникальное имя, так как уникальность обеспечивается уникальным идентификатором [31], но это

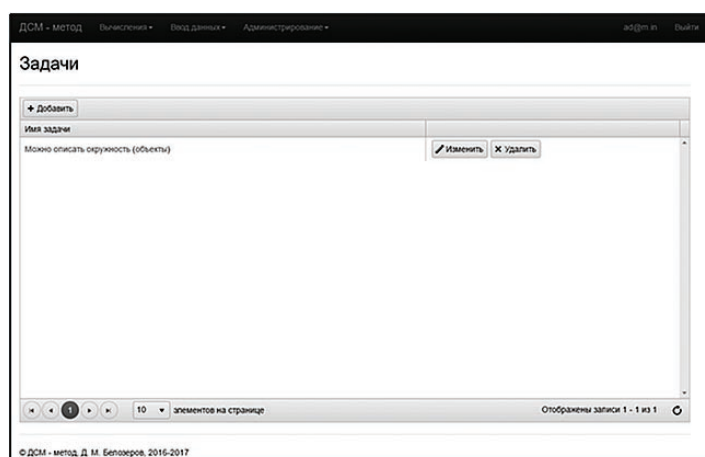


Рис. 8. Страница управления задачами

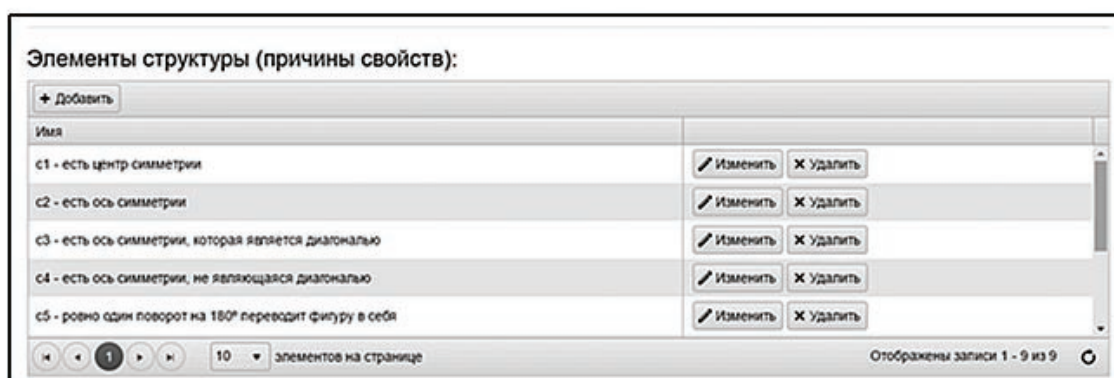
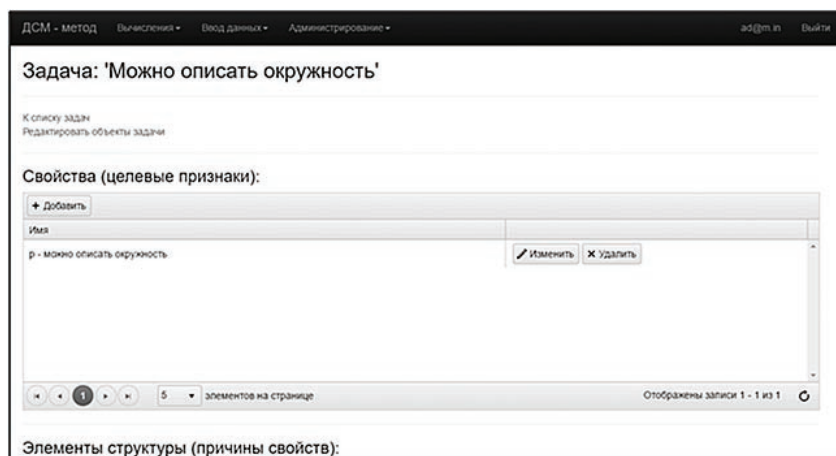


Рис. 10. Таблица редактирования структурных свойств

Задача: 'Можно описать окружность'

К списку задач

Объекты:

+ Добавить ✓ Сохранить изменения ✕ Отменить изменения

Имя	p - мо...	c1 - ес...	c2 - ес...	c3 - ес...	c4 - ес...	c5 - ро...	c6 - ро...	c7 - ес...	c8 - ме...	c9 - ме...	
o1 (квадрат)	1	true	true	true	true	false	false	true	false	false	X Удалить
o2 (прямоугольник)		true	true	false	true	true	false	true	false	false	X Удалить
o3 (ромб)	-1	true	true	true	false	true	false	false	true	true	X Удалить
o4 (параллелограмм)	-1	true	false	false	false	true	true	false	true	true	X Удалить
o5 (равнобокая трапеция)	1	false	true	false	true	false	true	false	true	false	X Удалить
o6 (дельтоид)	-1	false	true	true	false	false	true	false	true	true	X Удалить
o7 (прямоугольный дельтоид)	1	false	true	true	false	false	true	true	false	true	X Удалить

10 элементов на странице Отображены записи 1 - 7 из 7

Рис. 11. Страница редактирования объектов задачи

ДСМ - метод Вычисления Вход данных Администрирование ad@tm.ru Выйти

Конечное состояние объектов:

Экспорт в Excel

Имя	p - мож...	c1 - ест...	c2 - ест...	c3 - ест...	c4 - ест...	c5 - пос...	c6 - поп...	c7 - ест...	c8 - мет...	c9 - мет...
o1 (квадрат)	1	true	true	true	true	false	false	true	false	false
o2 (прямоугольник)	1	true	true	false	true	true	false	true	false	false
o3 (ромб)	-1	true	true	true	false	true	false	false	true	true
o4 (параллелограмм)	-1	true	false	false	false	true	true	false	true	true
o5 (равнобокая трапеция)	1	false	true	false	true	false	true	false	true	false
o6 (дельтоид)	-1	false	true	true	false	false	true	false	true	true
o7 (прямоугольный дельтоид)	1	false	true	true	false	false	true	true	false	true

10 элементов на странице Отображены записи 1 - 7 из 7

Показать логи вычислений

Рис. 12. Таблица с конечным состоянием объектов

рекомендуется во избежание замешательств у пользователей. Ниже на этой же странице размещена таблица для редактирования структурных элементов

задачи (рис. 10).

Далее обратим внимание на страницу редактирования объектов. Тут в таблице первый столбец — это название объекта, со второго до предпоследнего — по очереди сначала все свойства, потом все структурные признаки, последний столбец занимает кнопка для удаления элемента. В этой таблице поддерживается массовое редактирование элементов. Ячейки, которые были отредактированы недавно, помечаются красным треугольником, при нажатии на кнопку «Сохранить изменения» на редактирование отправляются сразу все элементы, которые были изменены. Значения структурных свойств могут быть true или false (во время редактирования появляется галочка). Значения свойств в соответствии с ДСМ-методом: 1, -1, 0 либо не иметь значения. Отсутствие значения подразумевает, что его необходимо найти. Также можно вернуть предыдущие значения ячеек, нажав на кнопку «Отменить изменения» (рис. 11).

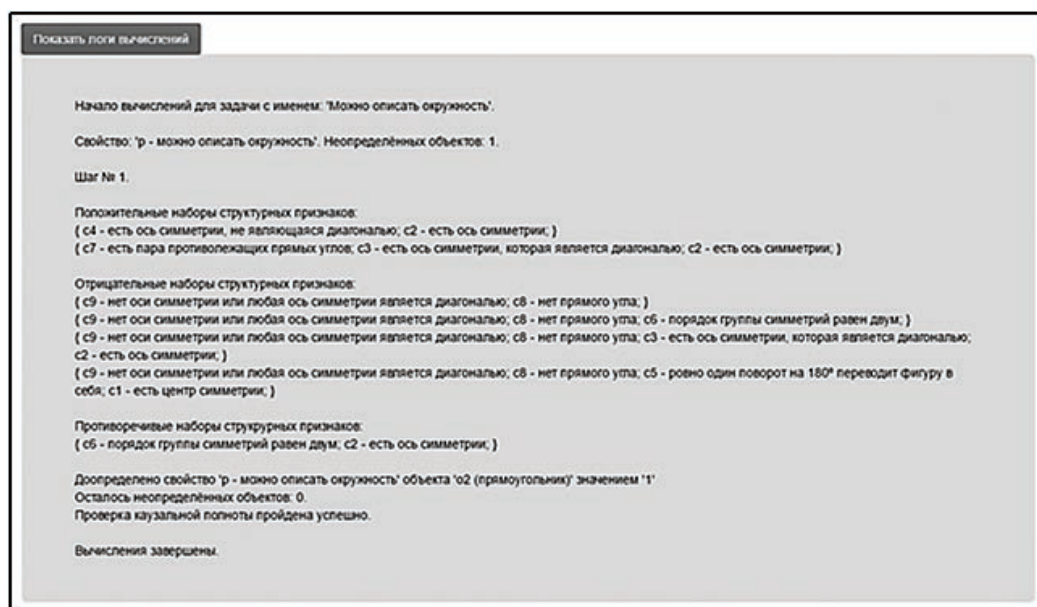


Рис. 13. Записи в лог

Теперь, когда данные добавлены в систему, можно переходить к вычислениям. Страница со списком задач для старта вычисления во многом похожа на страницу редактирования задач, поэтому приводиться не будет. Там при клике на название задачи осуществляется переход к результатам вычислений. На странице результатов вычислений есть таблица с конечным состоянием объектов, обратите внимание, что свойство у прямоугольника определено как значение один, что совпадает с рассматриваемым примером (рис. 12).

Тут же есть кнопка загрузки результатов в Excel. Внизу, под таблицей, мы видим кнопку «Показать логи вычислений». Выгружаемые в лог записи были подробно рассмотрены во втором параграфе. Посмотрим, какие записи были сделаны во время работы над этой задачей (рис. 13).

Записи в лог. При клике по кнопке происходит разворачивание логов. Как и в рассмотренном примере, эта задача решается за один шаг ДСМ-метода.

Сгенерированные гипотезы совпадают, и причина свойства прямоугольника тоже: можно описать окружность, так как есть ось симметрии, не являющаяся диагональю. Есть запись о том, что проверка каузальной полноты пройдена. Таким образом, было продемонстрировано поведение системы со стороны пользователя, сгенерированы гипотезы на основе базы фактов и найдены значения свойств для всех объектов.

4. Инструкция для администратора по ДМС-программе

Зависимости

1) Microsoft .NET Framework 4.6.2. Скачать можно тут: <https://www.microsoft.com/ru-ru/download/details.aspx?id=53344>

2) IIS. Необходимо активировать IIS, создать на нём web-приложение. Инструкции есть в интернете, например тут: https://professorweb.ru/my/ASP.NET/sites/level3/3_1.php.

Развертывание и настройка

1) В корень web-приложения (например, C:\inetpub\wwwroot) поместить запускаемые файлы web-приложения. Найти их можно по ссылке:

<https://drive.google.com/drive/folders/0B2T4JyuK3H-xYW5FaXVablNUejQ?usp=sharing>.

2) В файле конфигурации веб-приложения Web.config (например, C:\inetpub\wwwroot\Web.config) указать строку подключения к базе данных DefaultConnection. Базу данных можно создать отдельно или подключить файл; пример строки, если подключаем файл:

```
<add name="DefaultConnection" connectionString="Data
Source=(LocalDB)\MSSQLLocalDB;AttachDbFilename=
C:\inetpub\wwwroot\App_Data\JSMMethod.mdf;Integrated
Security=True;Connect Timeout=30"providerName="System.Data.SqlClient"
/>
```

3) Перезапустить web-приложение.

4) Теперь оно доступно по адресу: <http://127.0.0.1> с web-сервера. Чтобы оно было доступно с других компьютеров сети, необходимо обращаться по ip сервера и порту web-приложения либо создать соответствующее сопоставление на DNS-сервере.

Где взять (скачать) приложение?

Приложение доступно либо по адресу:

<http://fkn.omsu.ru/Programs/JSM/workspace.zip>,

либо

<http://fkn.univer.omsk.su/workspace.zip>.

Как получить доступ на сайте?

Права администратора есть у учётной записи. Имя пользователя: ad@m.in
Пароль: ARBGs5DjuTFv?5F7. Можно регистрировать сколько угодно новых пользователей и при помощи администраторской УЗ давать им доступ.

5. Другие компьютерные ДСМ-системы

1. ДСМ-система JSM-Socio Анны Волковой. Это интеллектуальная компьютерная система, предназначенная для решения задачи качественного анализа анкет социологического опроса с использованием стратегий ДСМ-метода: 1) извлечение причинно-следственных зависимостей, содержащихся в данных; 2) порождение гипотез с представлением описания субъекта, его мнения и ситуации; прогнозирование значения изучаемого эффекта; 3) оценка полученных гипотез посредством процедуры объяснения исходного множества фактов [32].

Система выдает результат, который представляет собой гипотезы, полученные различными стратегиями, и прогнозирование значения изучаемого эффекта у респондентов, для которых это значение изначально не определено.

2. ДСМ-система Ж.И. Бурковской. Это многоуровневая система с клиент-серверной архитектурой [32, с. 190].

В системе:

- программно реализованы различные инструменты формирования исходной базы фактов;
- разработан новый подход к проведению закрытых опросов общественного мнения (формирование мнений с помощью аргументационного оценивания);
- разработан модуль изучения рациональности мнений.

3. ДСМ-система Т.Л. Феофановой. Система создана на языке Prolog и позволяет ознакомить как эксперта-социолога, так и студента с работой самого метода [32, с. 191], [33].

Заключение

В статье представлено web-приложение, реализующее ДСМ-метод и позволяющее генерировать новые знания путём автоматического порождения гипотез из массивов уже имеющихся эмпирических знаний.

В какой мере данное приложение способно стать эффективным инструментом для исследователей? Хотелось бы надеяться, что найдутся социологи, которые в содружестве с компьютерщиками сумеют освоить предложенное web-приложение и применить его для анализа социологических данных и поиска зависимостей в опросах.

Важно, что в приложении редактировать данные могут только зарегистрированные пользователи (после выделения им специальных прав). За счёт разделения доступа при работе с web-приложением обеспечивается безопасность и защита от случайных ошибок пользователей и намеренной порчи данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Финн В.К. Индуктивные методы Д.С. Милля в системах искусственного интеллекта. Часть I // Искусственный интеллект и принятие решений. № 3, 2010. С. 3–21.
2. Финн В.К., Михеенкова М.А. О логических средствах концептуализации анализа мнений // Научно-техническая информация. Сер. 2. 2002. № 6. С. 4–22.
3. Гуц А.К. Математическая логика для социологов: учебное пособие. Омск : изд-во ОмГУ, 2017. 196 с.
4. Кученкова А.В. Логико-комбинаторные методы анализа социологических данных: эвристический потенциал и методическая специфика: автореф. ... канд. социол. наук. М. : РГГУ, 2012. 25 с.
5. Белозеров Д.М. Веб-приложение, реализующее ДСМ-метод: магистр. дисс. Омск : ОмГУ, 2017. 42 с.
6. ДСМ-метод // Википедия. URL: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=83891713> (дата обращения: 27.05.2017).
7. Финн В.К. Индуктивные методы Д.С. Милля в системах искусственного интеллекта. Часть II // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010. № 4. С. 14–40.
8. Финн В.К. Об определении эмпирических закономерностей посредством ДСМ-метода автоматического порождения гипотез // Искусственный интеллект и принятие решений. 2010. № 3. С. 41–48.
9. Новые возможности Visual Studio 2017 | Обновления продукта и новости / Официальный сайт Microsoft. URL: <https://www.visualstudio.com/ru/vs/whatsnew/> (дата обращения: 27.05.2017).
10. Agile, Git, CI with TFS | Team Foundation Server / Visual Studio IDE. URL: <https://www.visualstudio.com/ru/> (дата обращения: 27.05.2017).
11. Окончание поддержки Internet Explorer / Официальный сайт Microsoft. URL: <https://www.microsoft.com/ru-ru/windowsforbusiness/end-of-ie-support> (дата обращения: 27.05.2017).
12. ASP.NET MVC / The ASP.NET Site. URL: <https://www.asp.net/mvc> (дата обращения: 27.05.2017).
13. Razor Syntax Reference / Microsoft Docs. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/aspnet/core/mvc/views/razor> (дата обращения: 27.05.2017).
14. Bootstrap · The world's most popular mobile-first and responsive front-end framework. URL: <http://getbootstrap.com/> (дата обращения: 27.05.2017).
15. jQuery. URL: <https://jquery.com/> (дата обращения: 27.05.2017).
16. jQuery.ajax() / jQuery API Documentation. URL: <http://api.jquery.com/jquery.ajax/> (дата обращения: 27.05.2017).
17. Kendo UI / Telerik. URL: <http://www.telerik.com/kendo-ui> (дата обращения: 27.05.2017).
18. jQuery Grid control example / Kendo UI Grid Demos. URL: <http://demos.telerik.com/kendo-ui/grid/index> (дата обращения: 27.05.2017).
19. JSZip / GitHub. URL: <https://stuk.github.io/jszip/> (дата обращения: 27.05.2017).
20. Бандлы и минификация / METANIT.COM. URL: <https://metanit.com/sharp/mvc/15.1.php> (дата обращения: 27.05.2017).
21. Entity Framework Code-First / Entity Framework Tutorial. URL: <http://www.entityframeworktutorial.net/code-first/>

- entity-framework-code-first.aspx (дата обращения: 27.05.2017).
22. ASP.NET Identity / The ASP.NET Site. URL: <https://www.asp.net/identity> (дата обращения: 27.05.2017).
 23. Role based Authorization / Microsoft Docs. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authorization/roles> (дата обращения: 27.05.2017).
 24. Генерация исходящих адресов URL / METANIT.COM. URL: <https://metanit.com/sharp/mvc/6.4.php> (дата обращения: 27.05.2017).
 25. POST (HTTP) / Википедия. URL: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=83895724> (дата обращения: 27.05.2017).
 26. Асинхронные методы, async и await | C# / METANIT.COM — Сайт о программировании. URL: <https://metanit.com/sharp/tutorial/13.3.php> (дата обращения: 27.05.2017).
 27. Метод ObjectQuery(T).Include (String) (System.Data.Objects) / MSDN. URL: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb738708\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb738708(v=vs.110).aspx) (дата обращения: 27.05.2017).
 28. JSON. URL: <http://www.json.org/json-ru.html> (дата обращения: 27.05.2017).
 29. Адаптивная вёрстка: что это и как использовать / Типичный программист. URL: <https://tproger.ru/translations/responsive-web-design-tips/> (дата обращения: 27.05.2017).
 30. Реализация базовой CRUD-функциональности с Entity Framework в приложении ASP.NET MVC / MSDN. URL: <https://blogs.msdn.microsoft.com/vyunev/2011/10/05/crud-11/> (дата обращения: 27.05.2017).
 31. Структура Guid (System) / MSDN. URL: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/system.guid\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/system.guid(v=vs.110).aspx) (дата обращения: 27.05.2017).
 32. Волкова А.Ю. Разработка алгоритмических и программных средств для реализации стратегий ДСМ-метода автоматического порождения гипотез: дис. ... канд. техн. наук. М. : РГГУ, 2014. 304 с.
 33. Михеенкова М.А., Феофанова Т.Л. Обучающая ДСМ-система для анализа социологических данных // Вестник Российского государственного гуманитарного университета. 2009. Вып. 10. С. 152–169.

PROGRAM WEB-REALIZATION OF JSM-METHOD OF AUTOMATIC HYPOTHESIS GENERATION BASED ON INDUCTIVE LOGIC

D.M. Belozеров

Master, e-mail: evelend1@gmail.com

A.K. Guts

Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. In the article, web-application that implements Finn's JSM method is presented. The application based on the Mill's inductive logic extracts new knowledge from the existing knowledge base.

Keywords: JSM-method, Mill inductive logic, web application.

REFERENCES

1. Finn V.K. Induktivnye metody D.S. Millya v sistemakh iskusstvennogo intellekta. Chast' I. Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii, no.3, 2010, pp. 3-21. (in Russian)
2. Finn V.K. and Mikheenkova M.A. O logicheskikh sredstvakh kontseptualizatsii analiza mnenii. Nauchno-tekhnicheskaya informatsiya, Ser. 2, 2002, no. 6, pp. 4-22. (in Russian)
3. Guts A.K. Matematicheskaya logika dlya sotsiologov: uchebnoe posobie. Omsk, OmGU Publ., 2017, 196 p. (in Russian)
4. Kuchenkova A.V. Logiko-kombinatornye metody analiza sotsiologicheskikh dannykh: evristicheskii potentsial i metodicheskaya spetsifika: avtoref. ... kand. sotsiol. nauk. Moscow, RGGU, 2012, 25 p. (in Russian)
5. Belozarov D.M. Veb-prilozhenie, realizuyushchee DSM-metod: magistr. diss. Omsk, OmGU, 2017, 42 p. (in Russian)
6. DSM-metod, Vikipediya. URL: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=83891713>. (in Russian)
7. Finn V.K. Induktivnye metody D.S. Millya v sistemakh iskusstvennogo intellekta. Chast' II. Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii, 2010, no.4, pp. 14-40. (in Russian)
8. Finn V.K. Ob opredelenii empiricheskikh zakonomernostei posredstvom DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez. Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii, 2010, no.3, pp. 41-48. (in Russian)
9. Novye vozmozhnosti Visual Studio 2017 — Obnovleniya produkta i novosti. Ofitsial'nyi sait Microsoft. URL: <https://www.visualstudio.com/ru/vs/whatsnew/>. (in Russian)
10. Agile, Git, CI with TFS — Team Foundation Server. Visual Studio IDE. URL: <https://www.visualstudio.com/ru/>. (in Russian)
11. Okonchanie podderzhki Internet Explorer. Ofitsial'nyi sait Microsoft. URL: <https://www.microsoft.com/ru-ru/windowsforbusiness/end-of-ie-support>. (in Russian)
12. ASP.NET MVC. The ASP.NET Site. URL: <https://www.asp.net/mvc>.
13. Razor Syntax Reference. Microsoft Docs. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/aspnet/core/mvc/views/razor>.
14. Bootstrap · The world's most popular mobile-first and responsive front-end framework. URL: <http://getbootstrap.com/>.
15. jQuery. URL: <https://jquery.com/>.
16. jQuery.ajax(). jQuery API Documentation. URL: <http://api.jquery.com/jquery.ajax/>.
17. Kendo UI. Telerik. URL: <http://www.telerik.com/kendo-ui>.
18. jQuery Grid control example. Kendo UI Grid Demos. URL: <http://demos.telerik.com/kendo-ui/grid/index>.
19. JSZip. GitHub. URL: <https://stuk.github.io/jszip/>. (in Russian)

20. Bandy i minifikatsiya. METANIT.COM. URL: <https://metanit.com/sharp/mvc/15.1.php>. (in Russian)
21. Entity Framework Code-First. Entity Framework Tutorial. URL: <http://www.entityframeworktutorial.net/code-first/entity-framework-code-first.aspx>.
22. ASP.NET Identity. The ASP.NET Site. URL: <https://www.asp.net/identity>.
23. Role based Authorization. Microsoft Docs. URL: <https://docs.microsoft.com/en-us/aspnet/core/security/authorization/roles>.
24. Generatsiya iskhodyashchikh adresov URL. METANIT.COM. URL: <https://metanit.com/sharp/mvc/6.4.php>. (in Russian)
25. POST (HTTP). Vikipediya. URL: <http://ru.wikipedia.org/?oldid=83895724>. (in Russian)
26. Asinkhronnye metody, async i await — C#. METANIT.COM — Sait o programirovaniy. URL: <https://metanit.com/sharp/tutorial/13.3.php>. (in Russian)
27. Metod ObjectQuery(T).Include (String) (System.Data.Objects). MSDN. URL: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb738708\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/bb738708(v=vs.110).aspx).
28. JSON. URL: <http://www.json.org/json-ru.html>. (in Russian)
29. Adaptivnaya verstka: chto eto i kak ispol'zovat'. Tipichnyi programmist. URL: <https://tproger.ru/translations/responsive-web-design-tips/>. (in Russian)
30. Realizatsiya bazovoi CRUD-funktsional'nosti s Entity Framework v prilozhenii ASP.NET MVC. MSDN. URL: <https://blogs.msdn.microsoft.com/vyunev/2011/10/05/crud-11/>. (in Russian)
31. Struktura Guid (System). MSDN. URL: [https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/system.guid\(v=vs.110\).aspx](https://msdn.microsoft.com/ru-ru/library/system.guid(v=vs.110).aspx). (in Russian)
32. Volkova A.Yu. Razrabotka algoritmicheskikh i programmnykh sredstv dlya realizatsii strategii DSM-metoda avtomaticheskogo porozhdeniya gipotez: dis. ... kand. tekhn. nauk. Moscow, RGGU, 2014, 304 p. (in Russian)
33. Mikheenkova M.A. and Feofanova T.L. Obuchayushchaya DSM-sistema dlya analiza sotsiologicheskikh dannykh. Vestnik Rossiiskogo gosudarstvennogo gumanitarnogo universiteta, 2009, Vyp. 10, pp. 152–169. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 03.10.2020

АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ТЕКСТОВЫХ КОМАНД ПОСТРОЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ВВОДА ДАННЫХ

Е.А. Тюменцев

преподаватель, e-mail: etyumentcev@gmail.com

Т.В. Мелешенко

студентка, e-mail: tanyamelesh@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. В данной статье предлагается решение задачи обработки запросов, записанных на русском языке для построения форм ввода данных. Описаны этапы лексического и синтаксического анализов запросов с примерами. В конце приведена ссылка на работающий проект и репозиторий с исходным кодом на языке Kotlin.

Ключевые слова: обработка, русский, естественный, язык, анализатор, лексема, правило, NLP, извлечение фактов из текста.

Введение

Приложения используют формы ввода данных.

В некоторых случаях форм становится настолько много, что разработка новых форм и доработка существующих составляют значительную часть всех затрат на проект.

Задачи по редактированию форм заключаются в повторяющихся однотипных операциях. Добиться снижения затрат на разработку форм предлагается за счёт голосового ввода команд и их автоматической обработки без участия программиста. Чтобы исключить программиста из данного процесса, система будет построена на следующих идеях:

- 1) разработать систему команд на естественном языке;
- 2) использовать WYSIWYG-редактор, чтобы максимально сократить обратную связь между командами пользователя и результатом, который он получает.

В настоящей статье будет описан алгоритм распознавания речевых команд пользователя по редактированию форм ввода данных.

Первичные результаты проекта были изложены на конференции «Молодёжь третьего тысячелетия XLII» 2019 [1].

1. Описание идеи

Задачу по определению команды из голосового запроса можно разделить на три подзадачи:

- 1) преобразование человеческой речи в текст;
- 2) распознавание текстовой команды и преобразование её во внутренний формат;
- 3) интерпретация команды из внутреннего формата.

Для решения первой подзадачи используется Google API, т. к. оно бесплатно и с приемлемым качеством преобразовывает голос в текст.

Распознавание текстовой команды представляет собой задачу извлечения смысла из текста. Наиболее популярными для решения подобных задач сейчас являются механизмы машинного обучения с использованием нейронных сетей. В нашем случае применение нейронных сетей затруднено отсутствием обучающего набора данных. Ожидается, что набор команд ограничен несколькими сотнями, поэтому было решено выбрать метод обучения с учителем без применения нейронных сетей. Безусловно, в этом подходе есть недостаток: качество результата сильно зависит от знаний учителя в предметной области. Однако в нашем случае он компенсируется небольшим размером предметной области.

Наш проект строится на основе гипотезы: каждую осмысленную последовательность слов, которую вводит человек, можно разбить на группы. Каждой группе можно по смыслу сопоставить команду.

Выделение смысловых групп будет осуществляться с помощью дерева принятия решений.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

- 1) «добавить фамилию»;
- 2) «добавить поле фамилия»;
- 3) «добавить выпадающий список»;
- 4) «добавить бежевый фон»;
- 5) «добавить ограничение в 10 символов»;
- 6) «добавить фамилия»;
- 7) «добавить фамилию в форму»;
- 8) «добавить фамилию в форму ввода паспорт».

Предположим, что мы хотим обработать вышеописанные команды.

Обратим внимание на примеры 1 и 6. Они практически идентичны за исключением лишь окончания слова «фамилия». Чтобы избавиться от необходимости

проводить морфологический разбор слов, а также сократить набор команд, решено приводить нормализацию слов и использовать алгоритм Стемминга[4] для отсечения конца слова. Особенности реализованного стеммера является то, что отсекается только первое найденное совпадение с описанными внутри него правилами, а также и то, что он отсекает окончание только в том случае, если длина слова будет больше 4.

После нормализации команды будут выглядеть так:

- 1) «добав фамил»;
- 2) «добав поле фамил»;
- 3) «добав выпадающ список»;
- 4) «добав бежев фон»;
- 5) «добав ограничен в 10 символ»;
- 6) «добав фамилия»;
- 7) «добав фамилию в форм»;
- 8) «добав фамилию в форм ввод паспорт».

По алгоритму, представленному на рисунке 1, построим дерево принятия решений, которое может распознавать эти восемь команд. Рёбра будем помечать нормализованными словами из команды, а узлы, которые содержат правило, отмечать дополнительным кружком внутри. Таким образом, каждому конечному узлу будет соответствовать полностью распознанная фраза.

На рисунке 2 изображено дерево принятия решений, полученное с помощью алгоритма для вышеописанного примера.

Бывает так, что одна команда является частью другой, более длинной. Это можно наблюдать на примере запросов 1, 7 и 8. Чтобы избежать подобных ситуаций, было решено распознавать максимально длинную цепочку слов, т. е. выбирать правило, которое находится на максимально возможной глубине дерева.

Рассмотрим команды «создать поле фамилия» и «удалить поле фамилия». В вышеприведённом дереве им будут соответствовать два разных правила. Однако по смыслу обе команды представляют собой действия, совершаемые над полем «фамилия». Чтобы сократить количество правил в подобных случаях будем рассматривать не сами слова, а их смысловые значения, которое будем называть лексемами. А процесс получения лексемы из слова будем называть лексическим анализом.

Теперь так будут выглядеть приведённые ранее команды:

- 1) «действие» «частьИмени»;
- 2) «действие» «объект» «частьИмени»;

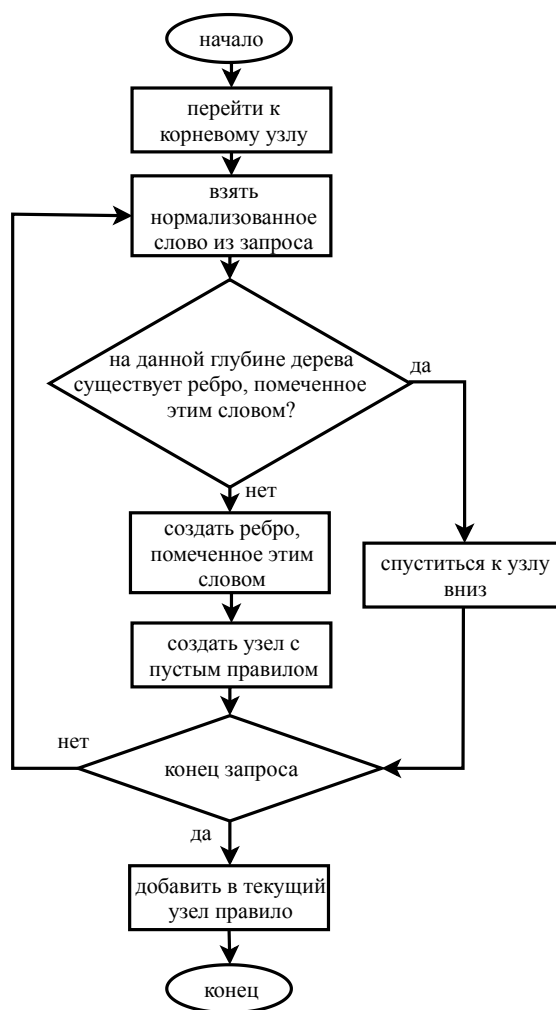


Рис. 1. Алгоритм построения дерева принятия решений

- 3) «действие» «видСписка» «видСписка»»;
- 4) «действие» «свойство» «имяСвойства»»;
- 5) «действие» «имяСвойства» «в» «свойство» «едСчисления»;
- 6) «действие» «частьИмени»»;
- 7) «действие» «частьИмени» «в» «объект»»;
- 8) «действие» «частьИмени» «в» «объект» «объект» «частьИмени»».

Из-за применения стеммера, а также и из-за неоднозначности естественного языка слову присваивается список лексем. В таком случае возникает вероятность выбрать неправильную лексему и не разобрать команду вовсе, но это было решено простым перебором списка, т. е. если первая лексема не подходит, мы спокойно заменим её на следующую. Например, два слова «другой» и «друг» после обработки стеммером будут сокращены до слова «друг», однако в

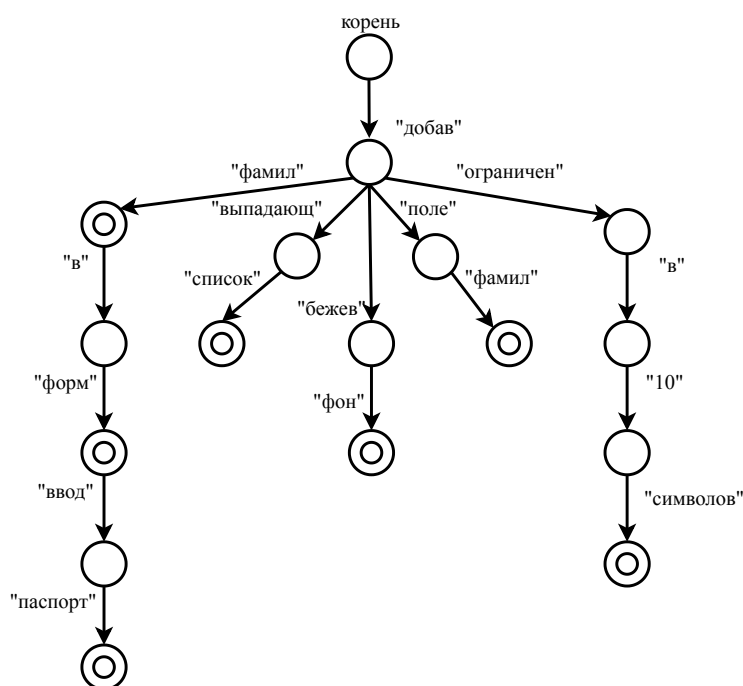


Рис. 2. Пример дерева принятия решений

первом случае скорее всего имеется ввиду ключевое слово, а во втором вероятнее — часть имени (о возможных значениях лексем будем говорить в главе 2). Сначала рассматривается вариант с ключевым словом, и если правила с таким набором лексем нет — она будет замена на «часть имени», поэтому на уровне лексического анализа эти неоднозначности не критичны.

Дерево принятия решений теперь будет строиться именно по лексемам. А когда дерево построено, по нему можно проверять все приходящие запросы. Перечислим все возможные шаги прохода по дереву в поисках правила:

1. Получаем из лексического анализатора объект, который хранит само слово из списка его лексем.
2. Берём его j -ю лексему и проверяем, содержится ли в дереве ребро, помеченное этой лексемой.
 - (a) Если ребро, помеченное лексемой существует, то идём к шагу 3.
 - (b) Если не содержит, в таком случае необходимо проверить существуют ли ещё лексемы у данного слова.
 - i. Если есть, то просто увеличиваем j -ый счётчик и возвращаемся к шагу 1.
 - ii. Если нет, нужно проверить, является ли текущее слово первым.
 - А. Если да, тогда необходимо перейти к шагу 5.
 - В. Если нет, тогда просто переходим к предыдущему слову, обнулив j -ый счётчик для i -го слова.

3. Посмотреть, существует ли правило на данном узле.
 - (а) Если да, тогда нужно запомнить выбор с параметрами, при которых алгоритм достиг узла с правилом. И перейти к шагу 4.
4. Проверить, является ли текущее слово последним в запросе?
 - (а) Если нет, то нужно увеличить i -ый счётчик на один, j -ый счётчик i -го слова задать равным нулю. И вернуться к шагу 1.
 - (б) Если же слово последнее, то переходим к шагу 5.
5. Взять последний выбор и вернуть правило во внутреннем формате. На этом работа алгоритма завершена.

Для наглядности на рисунке 3 приведена блок-схема описанного алгоритма.

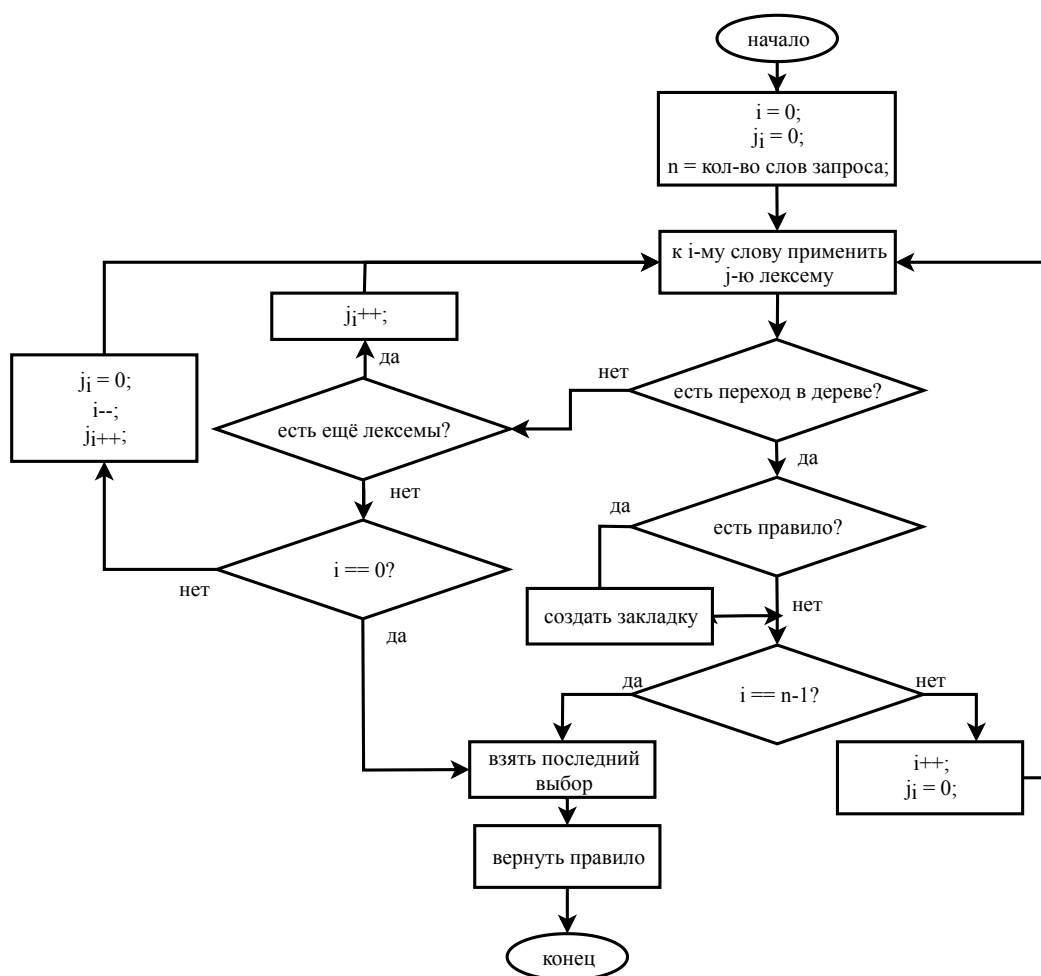


Рис. 3. Алгоритм разбора дерева принятия решений

2. Реализация

2.1. Лексический анализ

Описанный алгоритм реализован на языке Kotlin.

Перед тем, как непосредственно провести лексический анализ, необходимо полученную строку нормализовать. В рамках данного проекта «нормальной» является строка, содержащая только прописные буквы. Тогда приложение получится нечувствительным к регистру, однако этим недостатком было решено пренебречь. Теперь можно запустить анализатор, выделяющий условные «слова», которые представляют из себя последовательность букв русского и/или английского алфавитов и арабские цифры, в том числе не разделённые пробелом (например, «форма12»). Запуск анализатора производится с помощью вызова метода `parse()`, содержащегося в классе `LexemeAnalyzer`, диаграмма класса которого приведена на рисунке 4.

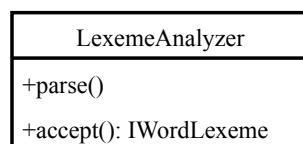


Рис. 4. Диаграмма класса `LexemeAnalyzer`

Анализатор построен на основе конечного автомата, представленного на рисунке 5.

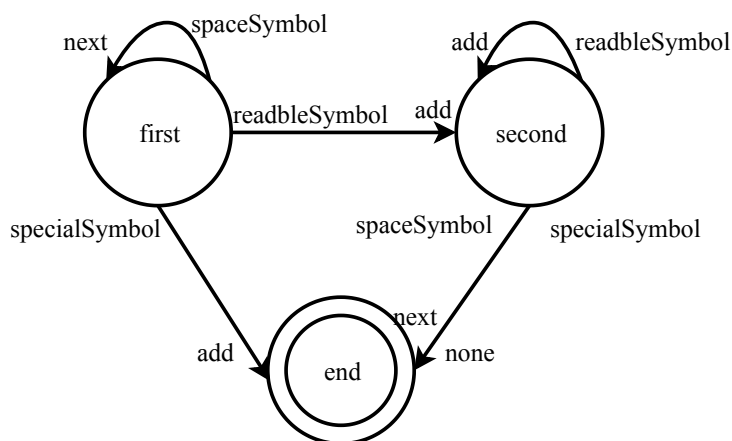


Рис. 5. Конечный автомат лексического анализатора

В таблице 1 опишем значения входящих сигналов автомата.

Для распределения всех входящих символов на описанные выше группы в программе имеется словарь.

В данном проекте выходные сигналы «next», «add», «none» представляют собой методы автомата лексического анализатора, которые будут выполнены при получении соответствующих входящих сигналов.

Таблица 1. Значения входящих сигналов

Входящий сигнал	Значение
«readableSymbol»	все буквы русского и латинского алфавитов; все римские цифры.
«specialSymbol»	символы-разделители
«spaceSymbol»	пробельные символы

Опишем более подробно значения выходных сигналов:

- «next» — перейти к следующему символу;
- «add» — прочли символ, который составляет очередное «слово» ;
- «none» — группа символов, которые составляют «слово», составлена.

После завершения работы автомата в его памяти будет лежать строка с последовательностью прочитанных символов. Её тоже нужно привести к «нормальному» формату. В этом случае «нормальным» считается обработанное стеммером слово без пробела на конце и/или в начале.

Результат в виде обработанного стеммером ключа — совсем не то, что мы ожидаем от лексического анализатора. Нам необходимо получить набор лексем. Для этого у нас есть специальный словарь этих лексем с таким форматом:

```
{
  "word":<слово>,
  "valuesList":<список лексем>
}
```

Теперь можно отметить, что все цифровые значения в словаре для простоты заменяются специальным обозначением «NUM», что происходит на этапе нормализации «слова». Например, по запросу «форма12» получим такой объект:

```
{
  "word":"формаNUM",
  "valuesList":["частьИмени", "свойство"]
}
```

Обычное же числовое значение в запросе «скругление в 12» будет представлено как

```
{
  "word":"NUM",
  "valuesList":["частьИмени", "свойство"]
}
```

Поговорим о возможных значениях "valuesList". Их можно условно поделить на три вида: символы, собственно-лексемы и неизменяемые слова. К первому относятся пробельные символы, знаки препинания и прочие символы. Ко второму относятся обобщающие слова, которые были выделены в процессе разработки анализатора. Вероятно, ещё будут вноситься изменения, однако на данный момент список включает в себя следующие обобщения: видЛиста, видПоля, видСписка, видТекстовогоПоля, едСчисления, действие, имяСвойства, объект, свойство, указатель, частьИмени. Названия обобщающих слов комментариев не требуют, а потому переходим к следующему виду.

Он представляет собой набор тех слов, которые можно выделить, как ключевые. В работе ключевыми считаются все простые предлоги, а также слова «режим», «новый» и некоторые другие. Список последних также может пополняться по мере дальнейшей разработки других анализаторов и рассмотрения новых команд. Конечно, все слова в словаре записаны в том представлении, в котором они получаются на выходе стеммера.

Возможно, данная группа при дальнейшей работе над проектом будет модифицирована или удалена вовсе. Сейчас же она необходима для упрощения разработки правил, по которым описываются действия.

Для наглядности проведём анализ команды «создать форму Опрос».

Посимвольно считываем строку до тех пор, пока не дойдём до конечного состояния.

Теперь память автомата содержит строку «создать», т. к. по переходам автомата (рисунок 5) пробелы не записываются в память. На выходе из стеммера получаем «созд».

Ищем набор лексем по ключу «созд», и итогом работы анализатора будет объект, созданный из этой строки формата JSON:

```
{
  "word": "созд",
  "valuesList": ["действие", "частьИмени"]
}
```

Лексема «действие» означает, что данное слово будет означать собственно действие, которое необходимо выполнить. Лексема «частьИмени» означает, что данное слово может быть частью имени объекта, например, в запросе «открыть форму какого цвета создать форму».

Запускаем автомат дальше и на выходе стеммера получим «форм», а объект:

```
{
  "word": "форм",
  "valuesList": ["объект", "имяСвойства"]
}
```

Здесь словоформа «форм» может принимать три значения в зависимости от контекста:

- «объект» — в том случае, если говорим об объекте, который имеет тип «форма»;

- «имяСвойства» — является названием свойства действия, например, в запросе «установить отступ формы», оба слова «отступ», «формы» являются «имяСвойства».

С помощью автомата получим «опрос» и подадим на вход стеммера, на выходе ничего не поменялось, поэтому остаётся «опрос». Получим такой объект:

```
{
  "word": "опрос",
  "valuesList": ["частьИмени"]
}
```

На этом разбор примера закончим. Далее перейдём к рассмотрению работы синтаксического анализа.

2.2. Синтаксический анализ

На уровне синтаксического анализа необходимо выделить наборы синтаксических групп, которые могут представлять собой команду следующего формата:

```
{
  "lexemesList": <список лексем>
}
```

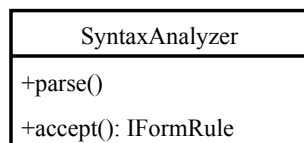


Рис. 6. Диаграмма класса SyntaxAnalyzer

В нашем проекте синтаксический анализ проводится с помощью класса SyntaxAnalyzer, диаграмму которого видно на рисунке 6. Класс содержит публичный метод accept(), который возвратит полученное правило в формате:

```
{
  "lexemesList": [
    {
      "first": <лексема>,
      "second": <словоформа>
    },
  ]
}
```

В методе parse() для разбора входящего запроса используется дерево принятия решений. Его структуру можно описать следующим образом: пустой корень, от которого по рёбрам, описываемым лексемами, можно спуститься на

уровень ниже — к узлу дерева, где может лежать правило, если оно существует в словаре правил, а может и не лежать.

Структуру дерева принятия решений изобразим графически. Для этого определим несколько правил, по которым построим дерево:

- {"lexemesList":["действие"]}
- {"lexemesList":["действие "объект"]}
- {"lexemesList":["действие "объект "частьИмени"]}
- {"lexemesList":["действие "объект "частьИмени "свойство "имяСвойства"]}
- {"lexemesList":["действие "свойство "в "объект "частьИмени"]}

Аналогично тому, как это было описано в главе 1, получаем дерево, которое представлено на рисунке 7.

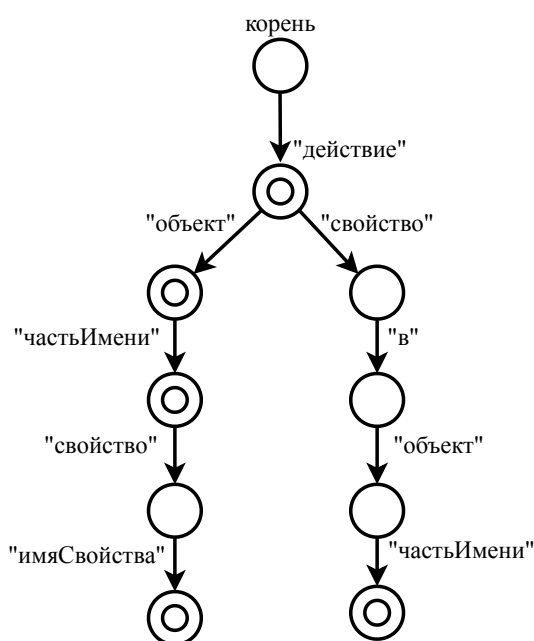


Рис. 7. Дерево принятия решений

Приведём простой пример разбора полученного выше дерева.

Пользователь дал запрос «создать форму Опрос».

Сначала мы обратимся к лексическому анализатору для получения первого «слова» и его лексем. Сразу возьмём результат этого запроса из прошлой главы: {"word":"созд "valuesList":["действие "свойство "частьИмени"]}

Берём первую возможную лексему («действие») и обращаемся к дереву принятия решений. Исходя из его структуры (рисунок 7), видим, что ребро, помеченное как «действие», у нас действительно есть. Значит, проверяем на наличие правила. Узел содержит правило, поэтому надо запомнить выбор, т. е.

сохранить параметры, при которых достигли этого результата. Данное «слово» последним не является, поэтому переходим к следующему.

Теперь смотрим на объект `{"word":"форм" "valuesList":["объект" "имяСвойства" "свойство"]}`, берём его первую лексему («объект»), ребро с такой пометкой имеется, переходим к узлу ниже, также существует правило, однако «слово» не последнее. И идём дальше.

Следующий объект `{"word":"опрос" "valuesList":["частьИмени"]}`. Здесь всего одна возможная лексема, которая есть у текущего узла при переходе на нижний уровень. Сменили узел и замечаем, что он содержит правило. Это последнее «слово». Берём последний сохранённый выбор, возвращаем правило `{"lexemesList":[{"first":"действие" "second":"созд"}, {"first":"объект" "second":"форм"}, {"first":"частьИмени" "second":"опрос"}]}`

Возможны ситуации, когда по одному и тому же набору «слов» можно распознать два правила. Такие ситуации в будущем планируется обрабатывать с помощью исключений.

На этом закончим разбор алгоритма работы синтаксического анализатора.

2.3. Неоднозначности

Предположительно, по набору слов не всегда можно получить одну определённую команду. Тогда результатом разбора будет являться не команда, а список команд. И в таком случае, вероятно, будет использоваться система диалога с пользователем для уточнения его команды.

Также на примере запроса «цвет фона красный» можно заметить, что не всегда в запросе содержится полная информация о том, где должно быть выполнено действие пользователя, это связано с тем, что человеку свойственна определённая компактность речи. Эту неоднозначность можно решить на уровне интерпретатора команды: запоминать последний текущий элемент и применять изменения к нему. Однако если в интерпретаторе не будет нужной информации, можно также использовать систему диалога.

Возможны и такие случаи, когда вообще не удастся распознать команду. Например, команда «Открыть» вызывает вопрос и у человека: «Что открыть?», поэтому и в таком случае можно использовать диалоговую систему.

Вероятнее всего, найдётся некоторое множество примеров команд, которые будет невозможно распознать данным алгоритмом. Однако мы ожидаем, что оно будет значительно меньше подлежащего обработке множества.

Далее подробно обсудим реализацию идеи, написанную на языке Kotlin.

Заключение

Получены алгоритмы и их реализации лексического и синтаксического анализов голосовых команд редактирования форм данных. На данный момент всего распознаётся 216 голосовых команд на уровне синтаксического анализа.

Исходный код можно посмотреть на [GitLab\[2\]](#). Также дорабатывается семантический анализатор, после чего понадобится создать большой набор за-

просов для дальнейшей работы над проектом и его совершенствованием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутерус Д.В., Мелешенко Т.В, Молодцов И.Н., Тюменцев Е.А. К вопросу построения речевого интерфейса генератора форм ввода данных на основе искусственного интеллекта // Молодёжь третьего тысячелетия [Электронный ресурс] : сборник научных статей. Электрон. текст. дан. Омск : Изд-во Ом. гос. ун-та, 2019. С. 256–259.
2. Репозиторий проекта с анализаторами. URL: <https://gitlab.com/tanyamelesh/forms> (дата обращения 14.01.2020).
3. Репозиторий проекта для тестирования. URL: <https://gitlab.com/tanyamelesh/formsweb> (дата обращения 15.01.2019).
4. Lovins J.B. Development of a Stemming Algorithm // Mechanical Translation and Computational Linguistics, 1968. URL: <http://mt-archive.info/MT-1968-Lovins.pdf> (дата обращения 28.01.2020).

ALGORITHM FOR RECOGNIZING TEXT COMMANDS FOR CONSTRUCTING AN ARBITRARY FORM OF DATA INPUT

E.A. Tumentcev

Instructor, e-mail: etyumentcev@gmail.com

T.V. Meleshenko

Student, e-mail: tanyamelesh@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The article proposes a solution to the problem of processing requests recorded in Russian to building data entry forms. Lexeme and syntactic analyzes stages request with examples are described. In the end of article, there is link to working project and repository with source code in Kotlin language.

Keywords: processing, russian, natural, language, analyzer, lexem, rule, NLP, extracting facts from text.

REFERENCES

1. Buterus D.V., Meleshenko T.V, Molodtsov I.N., and Tyumentsev E.A. K vo-prosu postroeniya rechevogo interfeisa generatora form vvoda dannyykh na osnove iskusstvennogo intellekta. Molodezh' tret'ego tysyacheletiya [Elektronnyi resurs] : sbornik nauchnykh statei, Elektron. tekst. dan., Omsk, Izd-vo Om. gos. un-ta, 2019, pp. 256–259. (in Russian)
2. Repozitorii proekta s analizatorami. URL: <https://gitlab.com/tanyamelesh/forms>. (in Russian)

3. Repozitorii proekta dlya testirovaniya. URL: <https://gitlab.com/tanyamelesh/formsweb>. (in Russian)
4. Lovins J.B. Development of a Stemming Algorithm, Mechanical Translation and Computational Linguistics, 1968. URL:<http://mt-archive.info/MT-1968-Lovins.pdf>.

Дата поступления в редакцию: 13.07.2020

ЧАТ-БОТ В КОНТАКТЕ «РАСПИСАНИЕ ЗАНЯТИЙ ОМГУ»

Т.А. Дейнеко

к.т.н., доцент, e-mail: DeinekoTA@omsu.ru

Д.А. Бобров

студент, e-mail: bobrov1437@gmail.com

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Речь в статье идёт о разработке чат-бота в социальной сети «ВКонтакте» для формирования расписания занятий ОмГУ. Чат-бот отображает пользователю расписание занятий по имени группы или имени преподавателя.

Ключевые слова: чат-бот, vk.com, расписание занятий.

Введение

Чат-бот – это виртуальный собеседник в мессенджере, который может имитировать коммуникацию с пользователями на естественном языке [3]. В Омском государственном университете идёт внедрение «1С: Автоматизированное составление расписания. Университет» [1, 2]. Стандартные функции продукта не позволяют автоматически публиковать расписание занятий на сайте вуза, поэтому был придуман механизм обмена данными через xml-файл. Данные из этого файла используются для работы чат-бота в сети «ВКонтакте».

Этапы работы

Разработка и запуск бота разделялись на несколько этапов:

1. Создание группы в социальной сети «ВКонтакте» и получение «Ключа доступа»
2. Проектирование архитектуры.
3. Разработка чат-бота.
4. Тестирование чат-бота.
5. Размещение бота на сервере.

Набор технологий и платформы для разработки:

- Язык программирования: Python;

- Парсинг данных: библиотека BeautifulSoup 4;
- Сервис контроля версий: Github;
- Хранение данных: СУБД PostgreSQL;
- Хостинг чат-бота: Heroku.

На первом этапе была создана «Группа» в социальной сети «ВКонтакте» и «Ключ доступа», который позволил взаимодействовать с функционалом социальной сети через код программы.

На втором этапе спроектирована архитектура чат-бота. Использовались возможности Python. Приложение обрабатывает события пользователей при помощи технологии LongPoll от API «ВКонтакте», анализирует полученные данные и отправляет ответ пользователю [4].

Далее был разработан чат-бот, проведено тестирование возможностей функционала, найдены и исправлены ошибки.

В итоге чат-бот размещён на хостинг-сервисе Heroku [5], создана база данных в СУБД PostgreSQL.

Хранение данных

Для реализации данного чат-бота потребовалось создать базу данных, чтобы хранить userID пользователя, имя группы и имя преподавателя, которые вводит пользователь. Также необходимо хранить результат извлечённых данных из XML-документа, то есть расписание занятий для студентов.

Для хранения данных используется реляционная система хранения базы данных PostgreSQL.

Для хранения данных пользователей (userID, имя группы и имя преподавателя) и данных о расписании занятий (название дисциплины, время, имя аудитории, имя группы, имя преподавателя) были созданы таблицы: users, schedule, timewindow, teachers, rooms.

Структурная схема базы данных показана на рисунке ниже (см. рис. 1).

Обработка запросов пользователя

Взаимодействие бота с пользователем происходит путём обмена сообщениями. Для корректной обработки данных необходимо убедиться, что нам пришли корректные данные от серверов «ВКонтакте».

Прослушивание сервера осуществляется при помощи технологии LongPoll.

Когда сервер принимает новое сообщения от пользователя, чат-боту необходимо провести обработку сообщения: найти пользователя в базе данных, проверить, является ли сообщение пользователя командой, номером группы или именем преподавателя. После обработки сообщения пользователя вызываются функции вывода пользователю расписания занятий на соответствующий день недели или регистрация нового пользователя в базе данных.

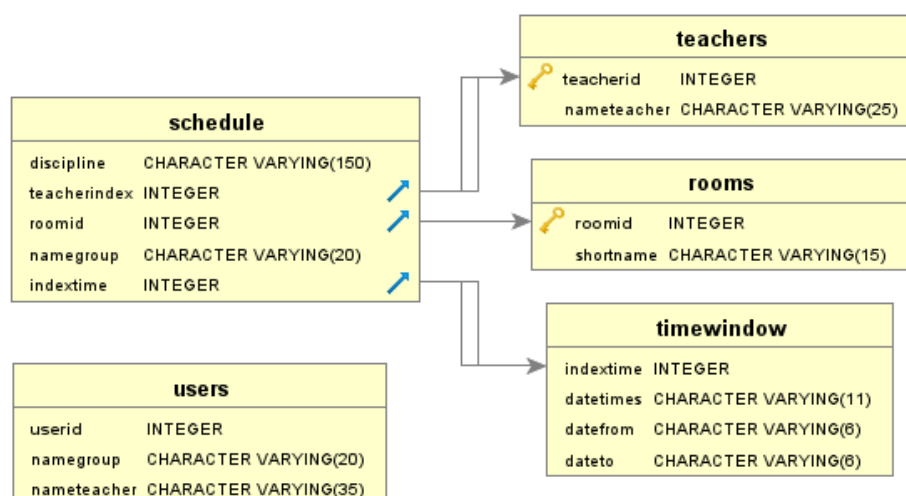


Рис. 1. Схема базы данных

Для обработки сообщения пользователя был создан класс VkBot.

Класс имеет следующие функции:

- `registrationUser(self, message)` — добавляет имя группы и имя преподавателя пользователя в базу данных;
- `checkUser(self)` — проверяет, зарегистрирован пользователь в базе данных или нет;
- `newMessage(self, message)` — обработка новых сообщений пользователей, последующая обработка их и отправка ответов пользователю;
- `getSchedule(self, name, mode)` — метод возвращает расписание занятий пользователю. Параметр `name` может содержать имя группы или имя преподавателя. Параметр `mode` может включать три варианта: «Today», «NextDay», «Week».

Чтобы начать взаимодействие с чат-ботом, пользователю необходимо пройти регистрацию в базе данных. Сделать это можно путем отправки сообщения чат-боту с именем группы или именем преподавателя. После этого чат-бот будет искать полученный запрос в базе данных, в таблице `schedule` в поле `group` (для поиска имени группы) или в таблице `teachers` в поле `shortname` (если запрос является именем преподавателя). После этого бот добавляет пользователя в таблицу `users` и пользователю становятся доступны команды для вывода расписания занятий: «на сегодня», «на завтра», «на неделю». На рисунке ниже (см. рис. 2) показан алгоритм регистрации пользователя.

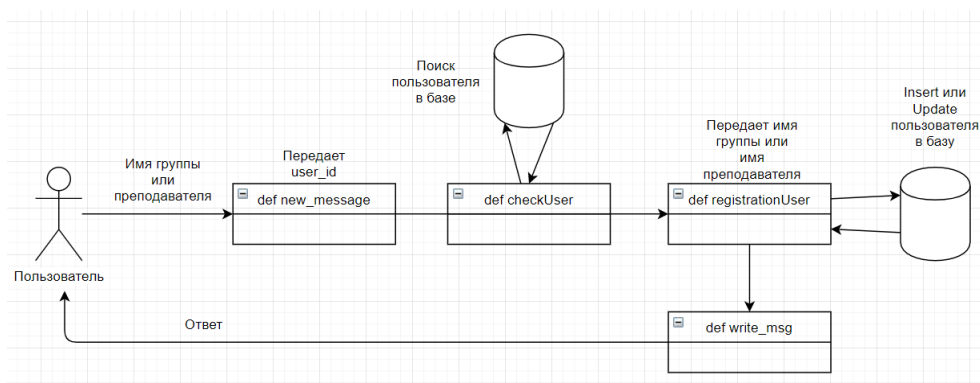


Рис. 2. Алгоритм регистрации пользователя

Демонстрация работы

Ответы чат-бота имеют свой шаблон, например, расписание на один день (сегодня/завтра) или неделю.

Примеры ответов чат-бота приведены ниже (см. рис. 3 и рис. 4).

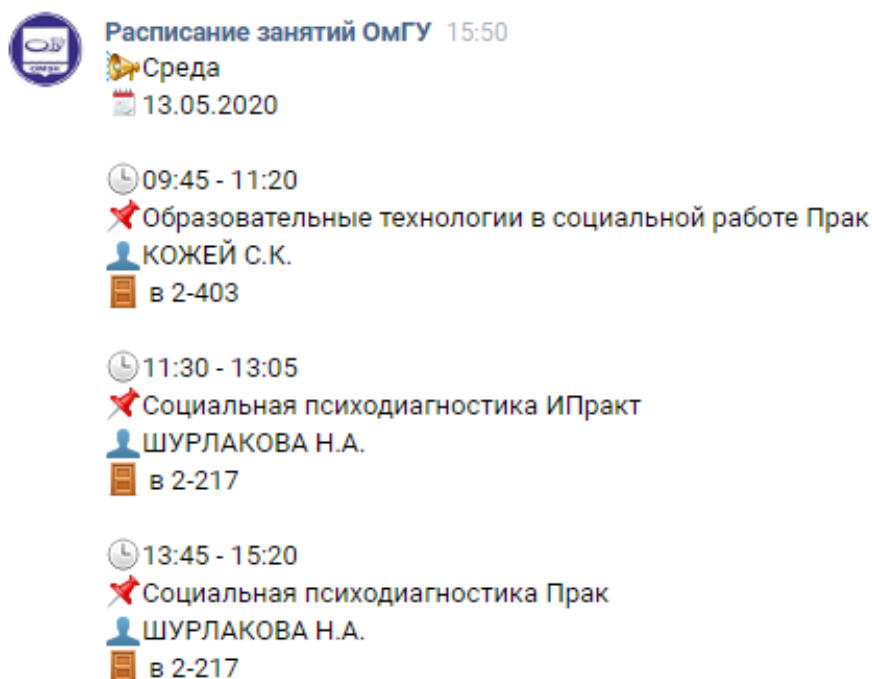


Рис. 3. Структура расписания занятий на день на десктопной версии «ВКонтакте»

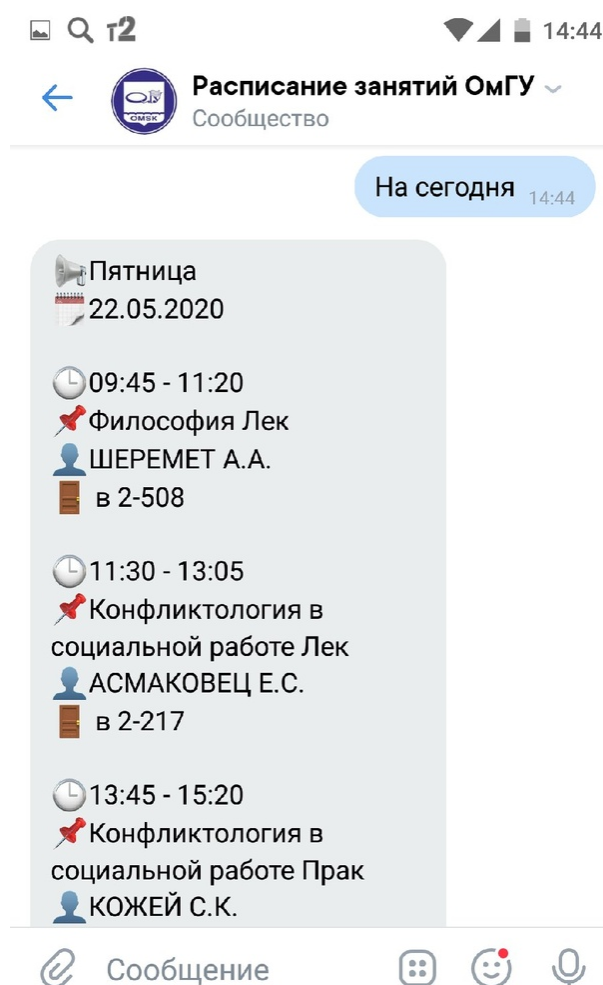


Рис. 4. Структура расписания занятий на день в мобильной версии «ВКонтакте»

Заключение

В предстоящем учебном семестре планируется запустить полученный чат-бот в опытную эксплуатацию в Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дейнеко Т.А. Переход к автоматизированному составлению расписания учебного процесса в ОмГУ // Математическое и компьютерное моделирование, сборник материалов VI Международной научной конференции, посвященной памяти Б.А. Rogozina. Омск, 2018. С. 170–171.
2. Дейнеко Т.А., Епанчинцева О.Л. Особенности перехода от ручного к автоматизированному составлению расписания в ОмГУ // Омские научные чтения. 2019. Материалы Третьей Всероссийской научной конференции. Омск, 2019. С. 932–934.

3. Что такое чат-бот // The StartUp. URL: <https://medium.com/swlh/what-is-a-chatbot-and-how-to-use-it-for-your-business-976ec2e0a99f> (дата обращения 02.05.2020).
4. User Long Poll API // ВКонтakte. URL: https://vk.com/dev/using_longpoll (дата обращения 03.05.2020).
5. Kaffeine. URL: <https://kaffeine.herokuapp.com/> (дата обращения 01.05.2020).

VKONTAKTE CHATBOT "OMSU CLASS SCHEDULE"

T.A. Deineko

Ph.D.(Eng.), Associate Professor, e-mail: DeinekoTA@omsu.ru

D.A. Bobrov

student, e-mail: bobrov1437@gmail.com

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. This article is about the development of a chatbot in the social network "VKontakte" for the schedule of classes at OmSU. The chatbot displays the class schedule to the user by the name of the group or the name of the teacher.

Keywords: chat-bot, VK.com, schedule of classes.

REFERENCES

1. Deineko T.A. Perekhod k avtomatizirovannomu sostavleniyu raspisaniya uchebnogo protsessa v OmGU. Matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie, sbornik materialov VI Mezhdunarodnoi nauchnoi konferentsii, posvyashchennoi pamyati B.A. Rogozina, Omsk, 2018, pp. 170–171. (in Russian)
2. Deineko T.A. and Epanchintseva O.L. Osobennosti perekhoda ot ruchnogo k avtomatizirovannomu sostavleniyu raspisaniya v OmGU. Omskie nauchnye chteniya, 2019, Materialy Tret'ei Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii, Omsk, 2019, pp. 932–934. (in Russian)
3. Chto takoe chat-bot. The StartUp. URL: <https://medium.com/swlh/what-is-a-chatbot-and-how-to-use-it-for-your-business-976ec2e0a99f>.
4. User Long Poll API. VKontakte. URL: https://vk.com/dev/using_longpoll (data obrashcheniya 03.05.2020). (in Russian)
5. Kaffeine. URL: <https://kaffeine.herokuapp.com/> (data obrashcheniya 01.05.2020).

Дата поступления в редакцию: 04.08.2020

ADVICE TO NEW INSTRUCTORS: SYSTEMS APPROACH

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. A recent paper provided useful system-based approach to new school teachers. In this paper, we somewhat modify this advice so that it can be applied to new instructors on all levels, including new instructors at the university level.

Keywords: new instructors, system approach, teaching.

1. Introduction

A paper [1] presented at a recent online international conference provided a system-based analysis of the difficulties that new school teachers have. Some of the resulting advice is specific for K-12 education, but, in our opinion, a significant portion of this paper's ideas can be useful for new university instructors as well.

Some of the resulting advice may be common sense, but our experience of working with new university instructors shows that a significant portion of this advice is helpful.

2. An Instructor: System Viewpoint

Analysis. With whom and with what does the new instructor interact?

- The main objective of the Instructor is to teach, i.e., to interact with Students.
- He/she also needs to stay update in his/her Discipline.
- As part of the job, the Instructor interacts with Colleagues and Administrators.
- Also, as a human being, he/she actively interacts with his Family and Friends.

Where difficulties come from. To adequately interact with someone:

- we need to understand the other person, and
- we need to use this understanding to select a proper way of communication.

Some of the difficulties of the new instructor come from the lack of his/her understanding of others, some come from the lack of others' understanding of the new Instructor.

However, understanding is not enough. Even when there is a full understanding, some difficulties may (and do) come from the inability to select a proper way of communication.

Let us describe these difficulties one by one.

3. Difficulties Related to Instructor's Imperfect Understanding of Students

Which aspects are important. In the process of study, Students, in addition to interacting with the Instructor and relating to the Discipline, also interact with other Students, and with their own Family and Friends. To better understand the Student, we need to understand all these interactions.

Understanding a Student him/herself. New instructors received their degrees, this means that they were successful hardworking students. Often, they base their understanding of students they teach on the experiences that they themselves had as students.

However, this approach does not take into account that they were among the best students. An average student is not as hardworking and not as knowledgeable as they were in the past. As a result, often, on average, the new instructors' explanations are not as detailed as needed, their assignments are more complex than they should be, and their grading is — especially in the beginning — often too harsh.

Understanding Students' relation to the discipline. New instructors have a lot of enthusiasm for their discipline — otherwise they would not have spent many years studying it. They often implicitly assume that others have the same level of enthusiasm, but this is often not true.

Everyone understands that we need to raise students' interest when teaching to students who are not our majors, but even students who are our majors may not be that interested — and even if they are, they may be interested in something very specific.

One way to raise this interest is to emphasize applications of what we study. To better understand individual students' attitude, a good idea is to interview students at the beginning of the class, find out what interests them, and relate it to the course; this is known as the *motivational interview*.

When teaching required classes, it may be a good idea to ask students to connect to faculty and higher-level students in areas in which they are interested, so that they will help the students to find relation to the course (and it may be a good idea to give students extra points for this activity). After all, if the class is required, this means that there is some reason for this requirement. For example, when a Computer Science course is required for engineering students or a discrete math course for Computer Science students, this means that in the students' future studies, there are activities in which this knowledge will be useful.

Interest should be raised not just in a topic in general, it should be ideally raised before every class. Just like papers get informative attractive titles and attractive

abstracts to be read more, it is a good idea to briefly explain, before every class, what will be the main topic and main result of this class — what new knowledge what new skills they will get. This way, if students are interested in the final result, they will pay more attention to (sometimes boring) technical details. This does not have to be class-by-class, sometimes, a new skill is learned in several classes.

Understanding Students' relation to other Students. Many classes involve and/or encourage groupwork. A new instructor has usually mastered this skill, but many students are still learning how to collaborate. Mistakenly, new instructors assume that students will somehow be able to effectively collaborate on a joint project. Often, this does not automatically happen, even when students form the groups themselves, with friends with whom they have some experience collaborating.

It is not enough to divide students into groups, we need to make sure that groups are productive. This is not easy, there are special techniques for this — techniques that even experienced instructors may not know.

4. Difficulties Related to Others' Imperfect Understanding of the New Instructor

Starting instructors often have difficulties with teaching, which is understandable. The problem is that experienced instructors may not fully understand what exactly are these difficulties for each instructor — especially when they themselves have gone through this stage long time ago and may have forgotten what difficulties they had to overcome.

This situation can be improved from both ends: the new instructor should not hesitate to ask for help and advice, and more experienced instructors should not hesitate to offer such help and to encourage the new instructor to open up — e.g., by conveying their own past difficulties and how they overcame these difficulties.

A good idea is to have this feedback institutionalized; e.g., require that in annual evaluations, instructors do not only brag about their successes, but also honestly emphasize their weaknesses — and either propose a plan to work on these weaknesses or ask for advice on this.

5. Difficulties Related to Communication Skills

In all the interaction, it is important:

- to take into account people's emotions, not just the substance matter; such "emotional intelligence" is not easy to learn, but it is vitally important in a teaching profession that is based on constant communication with other people;
- to be able to resolve conflicts; conflicts are inevitable, be it with students or with colleagues or with administrators, and learning conflict resolution skills is a must;

- to be able to manage time; time management is our common weak point, we all overwork — often unnecessarily, and new instructors overwork even more; it is important to concentrate on truly important things, to learn how to say No to unimportant requests, to learn how to do things efficiently; the usual first step in time management is to write down, hour by hour, what tasks were performed — after a week, this will give a clear picture of how time is spent and what are the most time-consuming “black holes”.

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

The authors are greatly thankful to all the participants of the VI International Forum on Teacher Education (Kazan, Russia, May 27–29, 2020), especially to the authors of the paper [1], to Mourat Tchoshanov (University of Texas at El Paso) and to Gulshat Shakirova (Kazan Federal University, Russia), for valuable discussions.

REFERENCES

1. Shakirova K., Fazleeva E., and Timerbayeva N. Challenges in training beginning math teachers. Presented at the VI International Forum on Teacher Education, Kazan, Russia, May 27–29, 2020.

СОВЕТ НОВЫМ ПРЕПОДАВАТЕЛЯМ: СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнвич

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. В недавней статье был представлен полезный системный подход для новых школьных учителей. В этой статье мы несколько изменяем этот совет, чтобы его можно было применять к новым преподавателям на всех уровнях, включая новых преподавателей на уровне университета.

Ключевые слова: новые инструкторы, системный подход, обучение.

Дата поступления в редакцию: 1.06.2020

ONLINE TEACHING — SYSTEMS APPROACH: QUESTIONS AND ANSWERS

Olga Kosheleva

Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: olgak@utep.edu

Vladik Kreinovich

Ph.D. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: vladik@utep.edu

University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

Abstract. At a recent International Forum on Teacher Education (Kazan, Russia, May 27–29, 2020), special sessions were devoted to questions related to online teaching – in view of the recent forced world-wide transition to online-only education. This article summarizes, in a systematic way, issues discussed at these sessions.

Keywords: online teaching, pedagogy, communication skills.

1. Introduction

Online-only teaching is a new territory for all of us, This is both bad news and good news:

- it is bad news because we cannot use ready answers, but
- it is good news because we cannot use ready answers – so we all need to improvise, we all have a chance to make a significant contribution.

The following text describes our experience and experience of our colleagues. Do not expect full and final answers, it is up to us all to experiment, analyze and make it all better – but while we are doing this, here are possible answers to the questions raised during the special sessions of the VI International Forum on Teacher Education (Kazan, Russia, May 27–29, 2020) [1].

2. Issues

With the recent world-wide transition to online learning, questions arise about all the stages of the teaching process:

- The teaching process starts with dividing students into groups. For online teaching, what is the optimal size of the group?
- Once the groups are fixed, we need to start delivering material to the students. What is the best way to deliver material? Should it be synchronous or asynchronous? How can we use the experience of video lectures and open universities?

- How important is feedback?
- How much homework to assign?
- How to test and how to grade the tests?

There are also general questions:

- How to motivate students to study?
- How to make it easier for students and for instructors?
- How to maintain student health?
- How to take special circumstances into account:
 - gifted and talented students,
 - special education students,
 - students from disadvantaged families?
- How to design an online class with limited resources in limited time?

Also, questions about the future:

- Does online teaching work at all? Are there disciplines where it does not work?
- In general, what is the future of online education?
- In view of this future, how to best prepare future instructors?

3. How to Organize the Teaching Process

How many students in a group. The main limitation is the ability of the instructor to provide regular feedback to all the students. The usual recommendation is to have no more than 25 students in an online class. This is, by the way, a general recommendation for a regular school class as well, the only difference is that:

- for normal learning, it is just a recommendation; smaller classes are better for students, but larger classes are manageable too;
- however, for online learning, larger classes become unmanageable: teachers overwork, students fail.

If there are teaching assistants, then larger classes are also maintainable.

Synchronous vs. asynchronous. For students, synchronous is clearly better, this way they get feedback right away. For teachers, it is also better: they do not need to record every detail, they can be flexible – slow down or speed up depending on student feedback. Both students and teachers can ask questions and get answers right away – as in a face-to-face class.

Unfortunately, bandwidth limitations do not allow all classes to be synchronous.

How can we use the experience of video lectures and open university? At first glance, online teaching is nothing new. For example, video lectures have been circulating for some time, MOOCs (massive online courses) were based on them, and open universities have been successfully producing specialists in many countries.

We can definitely use some technical ideas, but there is a big difference:

- MOOCs and open university were for enthusiastic students, and now we need to teach everybody,
- even for enthusiastic students, for many popular MOOCs, success rate was below 10%; clearly, this is inappropriate for general education.

So, we need to go beyond this experience.

How important is feedback? Feedback is crucial for education. If it was not so, there would be no need for teachers, only for graders: once students learn how to read, they would be able to study from the textbooks. In reality, a few students can do it, but most students cannot.

How much homework to assign? Homeworks help students learn. On the other hand, if we assign too much homework, students get overworked, and we instructors get overworked. So, a natural idea is to decide how much time students should be spending on homework, and assign accordingly.

At the university level, the usual recommendation is 2–2.5 hours at home for each lecture hour. At the K-12 school level, the proportion is much smaller, usually less than 1.

What if this requires too much grading? One idea is not to give detailed comments in each homework, post common mistakes instead. Another idea is not to grade everything, to grade only randomly selected tasks. For example, we assign problems 1–4 but grade only problems 1 and 3. For math problems, we can also use automatic grading systems like the one used in ALEKS [2]

How to test and how to grade the tests? A big concern is cheating, which is easier online. A straightforward solution is to install cameras watching students during the test.

We can also use the usual tricks: The best is to have individualized questions, so that students do not copy from each other. For example, in math problems, we can use a student-related number as one of the inputs. This, however, requires a lot of work when grading.

Less work is needed if we have a few different versions of the test. If even this is too difficult, we can have test questions scrambled differently for each student.

Emphasis should be on open-book open-notes questions, not on memorization questions. (This is, by the way, the usual pedagogical advice.)

How to decrease time spent on grading tests? We can use the same ideas as for homeworks.

4. General Questions

How to motivate students and keep their attention? This is a difficult question already in a regular class. For this, pedagogical students usually take a special course on class management. Online, this is even more complicated:

- there are many more distractions at home than in the classroom,
- and there is no contagion effect – when interest of others keeps students more interested.

So, we need to use more of usual class management techniques. In particular, we need to make our materials and our presentations even more entertaining.

How to make it easier for students and for instructors? The most important thing is to keep work-life balance. We can – and did – work overtime for two months, but it is not possible to overwork for a longer time. We need to allocate time for teaching, and stick to it. Students have it easier: when they have too many assignments, they stop doing them.

It is not being cruel to students, it is being realistic. Normally, no one will seriously answer all student's phone calls right away. Similarly, we cannot answer their emails right away – and maybe, while the student waits for an answer, the student will find his/her own solution.

How to maintain student health? This is a difficult question. Students need exercise, PE is a must. Something needs be done about vision: sitting in front of a computer is not good for the eyes.

How to take special circumstances into account? Gifted and talented students seem to excel in this new mode – at least this is anecdotal evidence.

The situation with special education students is much more complicated. There are international standards requiring all online materials to be accessible to people with disabilities. Most software tools have way to accommodate these standards; we need to learn this.

A special problem is students from disadvantaged families. These students need help: loaning equipment, donating equipment, computers in public places, etc.

How to design an online class with limited resources in limited time? There are specialists in online learning, there are instructions and textbooks on this topic. However, at present, following all these instructions is not realistic. For example, in the past, at our university, an instructor had to take a 2-month intensive course in online teaching, and then, he/she spent several months designing a class.

With a switch to online, we cannot afford this luxury. Let us just do it. The result will be imperfect, we will improve it as we start teaching.

5. Future of Online Teaching

Does online teaching work? Until Spring 2020, there were two main opinions:

- online learning is the revolutionary future, it will make learning much better,

- online learning is a disaster promoted by politicians and theoreticians who never taught in real schools.

So far, the experience is that it worked, even with improvised imperfect teaching:

- it was not as good and spectacular as enthusiasts promised, but
- it was not as disastrous as opponents predicted.

Even in disciplines like medicine and electrical engineering, a lot of teaching moved online. In medicine etc., some face-to-face is needed. Math, computer science, etc., if needed, can be all online.

What is the future of online education? This depends on us. The more experience we gain, the better will be our classes, the more effective will be online teaching.

Good news is that online teaching does not save money. It is good news because there are no incentives for politicians to force us into more online teaching.

Ultimately, we, instructors, are the specialists. We shall decide – and we will decide – how much learning will be online.

In view of this future, how to best prepare future instructors? Definitely we need more classes on online teaching. These classes should be required for all future instructors, they shall be a must for teacher's continuing education.

However, even without these classes, students will learn – from their own experience. Consciously or not, we all teach largely the way we were taught. So, if we teach our students fully or partly online – as we do now – they will learn how to do it.

And let us all hope that in the future, online learning will be used only because it is efficient!

Acknowledgments

This work was supported in part by the US National Science Foundation grants 1623190 (A Model of Change for Preparing a New Generation for Professional Practice in Computer Science) and HRD-1242122 (Cyber-ShARE Center of Excellence).

The authors are greatly thankful to all the participants of the VI International Forum on Teacher Education (Kazan, Russia, May 27–29, 2020), especially to Mourat Tchoshanov (University of Texas at El Paso) and to Gulshat Shakirova (Kazan Federal University, Russia), for valuable discussions.

REFERENCES

1. VI International Forum on Teacher Education, Kazan, Russia, May 27–29, 2020. URL: <http://ifte.kpfu.ru/en/home-page/>.
2. Assessment and LEarning in Knowledge Spaces (ALEKS), a web-based, artificially intelligent assessment and learning system. URL: <http://www.aleks.com>.
3. Littlewood J.E. A Mathematician's Miscellany. Methuen, London, 1953.

A Every Cloud Has A Silver Lining: Positive Side of Spring 2020 Online-Only Teaching

What happened: a brief reminder. For a significant part of Spring 2020, the whole world was forced to switch to *online-only (remote)* teaching. This was *not* just *synchronous* online teaching, when the only difference is spatial separation. Because of bandwidth limitations, a significant portion of teaching was *asynchronous*. Natural questions are:

- what can we learn from this experience?
- how can we use this experience in our future teaching?
- what are related open questions?

Online-only experience: challenges for students. Many students are accustomed to get most of the material either directly from the teacher, or at least in the environment which is actively controlled by a teacher. In the asynchronous online-only regime, students had to learn, to a larger extent, on their own.

Another problem of asynchronous learning is asking questions. Many students are still learning how to ask questions. In face-to-face teaching, it is not that critical: a teacher asks guiding (clarifying) question(s), and, after several iterations, the question is answered. In an asynchronous regime, a reply may follow after several hours, so this may not work. As a result, some questions remain unclear — thus unanswered — for a longer time.

But there were also positive aspects. When overcoming challenges, we — and students — gained some skills. We also gained some material advantages: new content material, new platforms. We gained a better understanding of students' limitations and possibilities. It is important to learn as much as possible from this unique experience.

Material aspects. The first visible positive outcome is that a large amount of *new content material* was posted. Some of this material was prepared in a rush, looks raw. Now we can polish it, make it more understandable (and more entertaining). This will be all good to use in the future, both for face-to-face and for online learning.

Many software *platforms* have been developed and adjusted for online teaching. This we can also use in the future.

What skills students gained: direct gain. With online-only teaching, students had to master the skill of understanding the material largely on their own.

Why is this important? In the modern world, acquired knowledge becomes outdated fast, everyone needs to learn new things. In real life, a significant part of this *lifelong learning* does not come from formal schooling. We learn from books, from papers, etc. This learning is not easy — especially immediately after a school or university, where all the materials are thoroughly prepared by professionals, so that learning can be easy. New ideas, new techniques are rarely that clear. As

cited in a popular book [3] by the 20th century mathematician John Littlewood, “A mathematician’s reputation rests on the number of bad proofs he has given” (here, “bad”, of course, means difficult to understand). Ability to learn on your own, from not perfectly clear texts, can help students become 21 century citizens.

It will also help students — who had to *miss classes* — catch up, because when catching up, a student is, to a larger extent, on his/her own.

It will also help on *standardized tests*, where a clear understanding of written questions is crucial.

What skills students gained: indirect gain. By realizing that an unclear question may not help, students learn to *ask clear questions*. This skill is very important for learning: it helps to pinpoint what was not clear, and where others (e.g., teacher) can help.

This can also help in real life — ability to explain oneself clearly is important in workplace. The experience of communicating online prepares students for remote collaboration, and remote collaboration is an important part of the modern workplace.

What else? Let us brainstorm together!

ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИЕ — СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД: ВОПРОСЫ И ОТВЕТЫ

О. Кошелева

к.ф.-м.н., доцент, e-mail: olgak@utep.edu

В. Крейнович

к.ф.-м.н., профессор, e-mail: vladik@utep.edu

Техасский университет в Эль Пасо, США

Аннотация. На недавнем Международном форуме по педагогическому образованию (Казань, Россия, 27-29 мая 2020 г.) специальные сессии были посвящены вопросам онлайн-обучения в связи с недавним вынужденным всемирным переходом к онлайн-образованию. В этой статье систематически обобщаются вопросы, обсужденные на этих сессиях.

Ключевые слова: онлайн-обучение, педагогика, коммуникативные навыки.

Дата поступления в редакцию: 1.06.2020

Авторам

Предоставляемые данные и документы

Автор предоставляет в редакцию:

- рукопись статьи в формате $\text{\LaTeX}$ (см. требования к оформлению);
- список из трёх экспертов по тематике статьи, давших согласие написать рецензию на представленную работу¹;
- экспертное заключение о возможности открытого опубликования.

Лицензирование

Согласно ГК РФ ст. 1286 лицензионный договор с автором для публикации в периодических изданиях может быть заключён в устной форме. Сам факт получения рукописи статьи редколлегией журнала «Математические структуры и моделирование» является акцептом (принятием) лицензионного договора.

Все статьи в журнале «Математические структуры и моделирование» публикуются под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY). Текст лицензии находится по адресу <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/legalcode>.

Требования к оформлению рукописи

К публикации принимаются рукописи объёмом не более 16 страниц.

Авторам необходимо предоставить следующую информацию на русском и английском языках:

- название статьи;
- список авторов с указанием
 - фамилии, имени и отчества,
 - учёного звания,
 - учёной степени,
 - должности,
 - места работы или учёбы,
 - действующего адреса электронной почты;
- аннотация (абстракт) объёмом от 100 до 250 слов;
- список ключевых слов.

Автор также указывает УДК (универсальный десятичный код) статьи. Его можно подобрать по тематике статьи в справочнике <http://msm.univer.omsk.su/udc/>.

Библиографические ссылки оформляются согласно ГОСТ 7.0.5–2008.

Рукопись статьи представляется в редакцию по электронной почте в двух форматах pdf и tex. Статья должна быть набрана с использованием макропакета $\text{\LaTeX}$ и стиля msmb.cls, предоставляемого редакцией <http://msm.univer.omsk.su/files/msmb.zip>. Рекомендуется установить компилятор $\text{\LaTeX}$, так как именно им пользуются в редакции.

Отклонения в оформлении рукописи от приведённых правил позволяют редколлегии принять решение о снятии статьи с публикации. Статья может быть отклонена по причинам несоответствия тематике журнала или в связи с низким уровнем качества научного исследования.

В статье запрещается переопределять стандартные команды и окружения.

Нумеруемые формулы необходимо выделять в отдельную строку.

Нумерация только арабскими цифрами в порядке возрастания с единицы. Нумеровать следует только те формулы, на которые в тексте имеются ссылки.

¹Необходимы полные данные экспертов (место работы, учёная степень, должность), с указанием способа связи с ними (e-mail, телефон). Редколлегия может обратиться к одному из экспертов из предложенного списка с просьбой написать рецензию или может назначить рецензента из собственного списка.

Запрещается использовать в формулах буквы русского алфавита. Если без них никак не обойтись, то следует использовать команду `\mbox{...}`.

Все рисунки и таблицы должны иметь подпись, оформленную с помощью команды `\caption{...}`.

Файлы с рисунками необходимо представить в формате PDF или EPS (использовать редакторы векторной графики типа InkScape, Adobe Illustrator или Corel Draw).

Используйте стандартные команды переключения на готический, каллиграфический и ажурный шрифты: `\mathfrak`, `\mathcal` и `\mathbb`.

Не допускается заканчивать статью рисунком или таблицей.

В списке литературы обязательно указание следующих данных: для книг — фамилии и инициалы авторов, название книги, место издания, издательство, год издания, количество страниц; для статей — фамилии и инициалы авторов, название статьи, название журнала, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи (для депонированных статей обязательно указать номер регистрации).

Кавычки в русском тексте («абвгд») должны быть угловыми, в английском — прямыми внешними кавычками ("abcdefg" или "abcdefg").

Обязательна расшифровка сокращений при первом вхождении термина. Например: ... искусственный интеллект (ИИ)...

Порядок рецензирования

Первичная экспертиза проводится главным редактором (заместителем главного редактора). При первичной экспертизе оценивается соответствие статьи тематике журнала, правилам оформления и требованиям, установленным редакцией журнала к научным публикациям.

Все статьи, поступившие в редакцию научного журнала «Математические структуры и моделирование», проходят через институт рецензирования.

Рецензент выбирается главным редактором журнала из числа членов редколлегии или ведущих специалистов по профилю данной работы.

Рецензенты уведомляются о том, что присланные им рукописи являются частной собственностью авторов и относятся к сведениям, не подлежащим разглашению. Рецензентам не разрешается делать копии статей для своих нужд.

Срок для написания рецензии устанавливается по согласованию с рецензентом.

Рецензия должна раскрывать актуальность представленного материала, степень научной новизны исследования, определять соответствие предлагаемого к публикации текста общему профилю издания и стиль изложения.

Рецензент выносит заключение о возможности опубликования статьи: «рекомендуется», «рекомендуется с учётом исправления замечаний, отмеченных рецензентом» или «не рекомендуется». В случае отрицательной рецензии редакция направляет автору мотивированный отказ, заверенный главным редактором или его заместителем.

В случае несогласия с мнением рецензента автор статьи имеет право предоставить аргументированный ответ в редакцию журнала. Статья может быть направлена на повторное рецензирование, либо на согласование в редакционную коллегию.

При наличии в рецензии рекомендаций по исправлению и доработке статьи автору направляется текст рецензии с предложением учесть их при подготовке нового варианта статьи или аргументированно (частично или полностью) их опровергнуть. Доработанная (переработанная) автором статья повторно направляется на рецензирование и рассматривается в общем порядке. В этом случае датой поступления в редакцию считается дата возвращения доработанной статьи.

После принятия редколлегией решения о допуске статьи к публикации автор информируется об этом и указываются сроки публикации.

Оригиналы рецензий хранятся в редакции в течение пяти лет.

Авторская этика

Авторы публикаций должны гарантировать, что в список авторов включены только лица, соответствующие критериям авторства (лица, внесшие значительный вклад в работу), и что заслуживающие авторства исследователи не исключены из списка авторов.

Должны работать вместе с редакторами или издателями для скорейшего исправления своих работ в случае обнаружения в них ошибок или упущений после публикации.

Обязаны незамедлительно уведомлять редакцию в случае обнаружения ошибки в любой поданной ими на публикацию, принятой для публикации или уже опубликованной работе.

Не вправе копировать из других публикаций ссылки на работы, с которыми они сами не ознакомились; цитаты и ссылки на другие работы должны быть точными и оформленными в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Должны ссылаться максимально правильно и точно на имеющие отношение к публикации предыдущие работы как других исследователей, так и самих авторов, обращаясь, прежде всего к первоисточнику; дословное воспроизведение собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы лишь в качестве основы для новых выводов.

Необходимо указывать авторство данных, текста, рисунков и идей, которые автор получил из других источников — они не должны представляться, как принадлежащие автору публикации; прямые цитаты из работ других исследователей должны выделяться кавычками и соответствующей ссылкой.

Должны соблюдать нормы законодательства о защите авторских прав; материалы, защищенные авторским правом (например, таблицы, цифры или крупные цитаты), могут воспроизводиться только с разрешения их владельцев.

Памятка для перевода должностей, учёных степеней и званий на английский язык

Профессор = Professor

Доцент = Associate Professor

Старший преподаватель = Assistant Professor

Преподаватель = Instructor

Ассистент = Instructor

Аспирант = Postgraduate Student или Ph.D. Student

Соискатель = Ph.D. Doctoral Candidate

Магистрант = Master's Degree Student

Студент = Student

д.ф.-м.н. = Dr.Sc. (Phys.-Math.)

к.ф.-м.н. = Ph.D. (Phys.-Math.)

д.т.н. = Dr.Sc. (Eng.)

к.т.н. = Ph.D. (Eng.)

Инженер-программист = Software Engineer

Старший/младший научный сотрудник = Senior/Junior Scientist Researcher

Электронная почта для отправки статей

lavrov@omsu.ru — зам. главного редактора (ответственный за выпуск) Д.Н. Лавров.

Научный журнал

Математические структуры и моделирование

№3(55)

Главный редактор

А.К. Гуц

Зам. глав. ред., выпускающий редактор

Д.Н. Лавров

Зам. глав. ред., технический редактор

Н.Ф. Богаченко

Корректор:

И.Н. Баловнева

Проверка корректности перевода:

А.Н. Кабанов

Адрес научной редакции

644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а,
Омский государственный университет

E-mail: guts@omsu.ru, lavrov@omsu.ru

Электронная версия журнала:

<http://msm.omsu.ru>

<http://msm.univer.omsk.su>



Подписано в печать 27.11.2020. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 15,92. Тираж 60 экз. Заказ № 166.

Отпечатано на полиграфической базе издательства ОмГУ им. Ф.М. Достоевского
644077, Омская обл., г. Омск, пр-т Мира, д. 55а

ISSN 2222-8772



9 772222 877005



20055 >